

JEDNA VRST INTEGRALNIH TEOREMA BESSELOVIH FUNKCIJA

RAZNE RELACIJE IZMEĐU BESSELOVIH FUNKCIJA

U ovom se dijelu nastavlja izlaganje pomoćnih stavaka potrebnih za kasnija razmatranja. Najprije ćemo podsjetiti na neke poznate relacije između Besselovih funkcija i zatim razviti niz novih relacija za te funkcije. Smatramo, da većina tih rezultata zaslužuje i samostalan interes bez obzira na njihovu kasniju primjenu.

1. Nekoliko temeljnih relacija između Besselovih funkcija

Definiramo funkciju $A_n(z)$ uključujući slučaj, gdje n ne mora biti cio pozitivan broj, već može biti bilo kakav kompleksan broj s izuzetkom cijelih negativnih brojeva:

$$A_n(z) = \Gamma(n+1) \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} J_n(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{r! \Gamma(n+r+1)} \left(\frac{iz}{2}\right)^{2r}. \quad (1)$$

Zbog faktora $\Gamma(n+1)$ funkcija bi za cijelo negativno n postala neizmjerena, dok naprotiv definicija za $J_n(z)$

$$J_n(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(n+r+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2r} \quad (2)$$

vrijedi i za taj slučaj, ako se uzme u obzir, da otpadaju članovi, za koje je gama-funkcija u nazivniku neizmjerena. Lako se iz toga razabira, da je za cijelo n

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z), \quad (3)$$

kako je to dobro poznato.

Iz poznatih relacija¹

$$J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z) - J_{n-1}(z), \quad (4)$$

$$\frac{d}{dz} z^{-n} J_n(z) = -z^{-n} J_{n+1}(z) \quad (5)$$

lako je s pomoću (1) izvesti nekoliko relacija za funkcije $\Lambda_n(z)$:

$$\Lambda_{n+1}(cz) = \frac{4n(n+1)}{c^2 z^2} [\Lambda_n(cz) - \Lambda_{n-1}(cz)] \quad (6)$$

$$\Lambda_{n+1}(c\sqrt{f(z)}) = \frac{4n(n+1)}{c^2 f(z)} [\Lambda_n(c\sqrt{f(z)}) - \Lambda_{n-1}(c\sqrt{f(z)})] \quad (7)$$

$$\frac{d}{dz} \Lambda_n(cz) = -\frac{c^2 z}{2(n+1)} \Lambda_{n+1}(cz) \quad (8)$$

$$\frac{d}{dz} \Lambda_n(c\sqrt{f(z)}) = -\frac{c^2}{4(n+1)} \frac{df(z)}{dz} \Lambda_{n+1}(c\sqrt{f(z)}). \quad (9)$$

Iz (8) i (6), odnosno iz (9) i (7) proizlazi:

$$\frac{d}{dz} \Lambda_n(cz) = -\frac{2n}{z} [\Lambda_n(cz) - \Lambda_{n+1}(cz)] \quad (10)$$

$$\frac{d}{dz} \Lambda_n(c\sqrt{f(z)}) = -\frac{nf'(z)}{f(z)} [\Lambda_n(c\sqrt{f(z)}) - \Lambda_{n+1}(c\sqrt{f(z)})]. \quad (11)$$

Spominjemo još formule²

$$J'_n(z) = -\frac{n}{z} J_n(z) + J_{n-1}(z) \quad (12)$$

$$J'_n(z) = \frac{n}{z} J_n(z) - J_{n+1}(z) \quad (13)$$

i Besselovu diferencijalnu jednadžbu³, koju zadovoljavaju funkcije $J_n(z)$:

$$z^2 \frac{d^2 y}{dz^2} + z \frac{dy}{dz} + (z^2 - n^2) y = 0. \quad (14)$$

¹ G. N. Watson: A treatise on the theory of Bessel functions, Cambridge, University Press 1922, § 3'2 (str. 45). Ovo ćemo djelo kratko citirati sa »Watson«.

² Watson, 3'2 (3), (4).

³ Watson, 3'1 (1).

Sve ove formule nije teško provjeriti uvrštenjem izraza (2), a one vrijede za bilo kakvo kompleksno n , s izuzetkom negativnih cijelih vrijednosti od n u formulama za funkcije $A_n(z)$.

Dajemo još izvod jedne dalje relacije. Uvrstivši u (14) $J_n(z)$ odnosno $J_{-n}(z)$ dobijemo:

$$z^2 J''_n(z) + z J'_n(z) + (z^2 - n^2) J_n(z) = 0 \quad (15)$$

$$z^2 J''_{-n}(z) + z J'_{-n}(z) + (z^2 - n^2) J_{-n}(z) = 0. \quad (16)$$

Pomnoži li se (15) sa $J_{-n}(z)$, (16) sa $J_n(z)$ i odbiju li se dobivene jednačbe, može se rezultat pisati u obliku

$$\frac{d}{dz} \left\{ z \left[J_n(z) J'_{-n}(z) - J_{-n}(z) J'_n(z) \right] \right\} = 0, \quad (17)$$

dakle⁴

$$z \left[J_n(z) J'_{-n}(z) - J_{-n}(z) J'_n(z) \right] = C. \quad (18)$$

Uvrštenje izraza (12) i (13) daje

$$\begin{aligned} z \left\{ J_n(z) \left[\frac{n}{z} J_{-n}(z) + J_{-n-1}(z) \right] - J_{-n}(z) \left[\frac{n}{z} J_n(z) - J_{n+1}(z) \right] \right\} = \\ = z \left[J_{n+1}(z) J_{-n}(z) + J_{-n-1}(z) J_n(z) \right] = C. \end{aligned} \quad (19)$$

Prema (2) vrijedi:

$$J_n(z) = \left(\frac{z}{2} \right)^n \left[\frac{1}{\Gamma(n+1)} + O(z^2) \right] \quad (20)$$

$$J_{n+1}(z) = \left(\frac{z}{2} \right)^{n+1} \left[\frac{1}{\Gamma(n+2)} + O(z^2) \right] \quad (21)$$

$$J_{-n}(z) = \left(\frac{z}{2} \right)^{-n} \left[\frac{1}{\Gamma(-n+1)} + O(z^2) \right] \quad (22)$$

$$J_{-n-1}(z) = \left(\frac{z}{2} \right)^{-n-1} \left[\frac{1}{\Gamma(-n)} + O(z^2) \right]. \quad (23)$$

⁴ Watson, 312 (1).

Uvrste li se ti izrazu u (19), to izlazi:

$$z [J_{n+1}(z) J_{-n}(z) - J_{-n-1}(z) J_n(z)] = \frac{z^2}{2} \left[\frac{1}{\Gamma(n+2) \Gamma(-n+1)} + \right. \\ \left. + O(z^2) \right] + 2 \left[\frac{1}{\Gamma(n+1) \Gamma(-n)} + O(z^2) \right] = \frac{2}{\Gamma(n+1) \Gamma(-n)} + O(z^2). \quad (24)$$

Prema t. zv. drugom svojstvu gama-funkcije možemo pisati

$$\frac{2}{\Gamma(n+1) \Gamma(-n)} = \frac{2 \sin[(n+1)\pi]}{\pi}, \quad (25)$$

gdje ne treba izuzeti cijele vrijednosti od n , jer za te vrijednosti obje strane od (25) iščezavaju.

Stavimo li u (24) $z = 0$, to je time određena konstanta C u (19), pa izlazi⁵

$$z [J_{n+1}(z) J_{-n}(z) + J_{-n-1}(z) J_n(z)] = \frac{2 \sin[(n+1)\pi]}{\pi}. \quad (26)$$

Ta relacija vrijedi dakle i za cijele vrijednosti od n , što se u ostalom uviđa lako i graničnim prijelazom, kod kojega n teži cijeloj vrijednosti, ili primjenom formule (3).

2. Lommelovi polinomi i relacija između triju Besselovih funkcija

Za t. zv. Lommelove polinome daje Watson ovaj izraz⁶:

$$R_{m,v}(z) = \sum_{n=0}^{\left[\frac{m}{2} \right]} \frac{(-1)^n (m-n)! \Gamma(v+m-n) \left(\frac{z}{2} \right)^{-m+2n}}{n! (m-2n)! \Gamma(v+n)}, \quad (27)$$

gdje drugi indeks v može značiti bilo kakav kompleksan broj, dok je m cio pozitivan broj ili nula. Za slučaj negativnog cijelog v napominje se, da po potrebi treba u jednom dijelu polinoma zamijeniti kvocijent

$$\frac{\Gamma(v+m-n)}{\Gamma(v+n)} \text{ kvocijentom } (-1)^m \frac{\Gamma(-v-n+1)}{\Gamma(-v-m+n+1)}.$$

⁵ Watson, §2 (7).

⁶ Watson, §61 (3); Lommel, Math. Ann. IV. (1871) str. 108—111; Archiv der Math. und Physik XXXVII (1861) str. 354—355.

Za negativne cijele vrijednosti prvog indeksa definiraju se Lommelovi polinomi s pomoću relacije⁷

$$R_{-m, \nu}(z) = (-1)^{m-1} R_{m-2, 2-\nu}(z) \quad (28)$$

s dodatkom $R_{-1, \nu}(z) = 0$ (28a).

Mi ćemo izrazu (27) dati takav oblik, da će svi spomenuti slučajevi biti obuhvaćeni. Osim toga ćemo promijeniti oznaku tako, da ćemo staviti $R_{m, \nu} = M_{\nu+m, \nu-1}$ (29).

Neka su dakle a, b dva kompleksna broja, kojim je razlika realan cio broj, i neka je

$$r = |a-b| \quad (30), \quad \operatorname{sgn}(a-b) = \frac{a-b}{r}. \quad (31)$$

Dalje se služimo oznakom

$$(\alpha)_m = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+m-1); (\alpha)_0 = 1, \quad (32)$$

za koju očito vrijedi $(\alpha)_m = (-1)^m (-\alpha-m+1)_m$ (32a).

Onda zovemo Lommelovim polinomom izraz

$$M_{a, b}(z) = \operatorname{sgn}(a-b) \sum_{n=0}^{\left[\frac{r-1}{2}\right]} \frac{(-1)^n (r-n-1)! \left(\frac{a+b-r}{2} + n + 1\right)_{r-2n-1}}{\left(\frac{z}{2}\right)^{r-2n-1} n! (r-2n-1)!}. \quad (33)$$

S obzirom na to, da je

$$\frac{(r-n-1)!}{(r-2n-1)!} = (r-2n)_n, \quad (33a)$$

može se taj izraz pisati i ovako:

$$M_{a, b}(z) = \operatorname{sgn}(a-b) \sum_{n=0}^{\left[\frac{r-1}{2}\right]} \frac{(-1)^n (r-2n)_n \left(\frac{a+b-r}{2} + n + 1\right)_{r-2n-1}}{\left(\frac{z}{2}\right)^{r-2n-1} n!}. \quad (33b)$$

Za slučaj $r = 0$, t. j. $a = b$, možemo smatrati, da suma nema uopće članova, pa staviti $M_{a, a}(z) = 0$ (34).

⁷ Watson, 9'63 (9), (8).

U literaturi se susreću osim Lommelove oznake $R_{m,v}$ još dvije oznake za te polinome, i to Nielsenova⁸ $R^{v,m}$ i oznaka P_m^v , koju upotrebljavaju Graf i Crelier⁹.

Te razne oznake povezane su međusobno formulama

$$R_{m,v} = R^{v-1,m} = P_m^{v-1} = M_{m+v,v-1} \quad (35)$$

$$R^{v,m} = P_m^v = R_{m,v+1} = M_{m+v+1,v} \quad (36)$$

$$M_{a,b} = R_{a-b-1,b+1} = R^{b,a-b-1} = P_{a-b-1}^b, \quad (37)$$

pri čemu smo za kraće pisanje ispustili argumenat z , što ćemo učiniti i u mnogim daljim formulama. Vidi se, da se Nielsenova i Graf-Crelierova oznaka uopće bitno ne razlikuju, a u Lommelovoj je samo jedan indeks promijenjen za jednu jedinicu. Naša je oznaka naprotiv bitno drukčija.

Jedina je prednost starih oznaka po našem mišljenju ta, da je jedan indeks realan cio broj, dok drugi smije biti bilo kakav kompleksan broj, što se može u oznaci dovesti do izražaja time, da se za cijeli broj pišu slova n ili m , koja ponajviše služe za takvu svrhu, dok se za kompleksni indeks stavlja koje grčko slovo. U našoj novoj oznaci oba su indeksa općenito kompleksni brojevi, ali se mora jednom za uvijek istaknuti, da im razlika može biti samo realan cio broj (uključivo nule).

Prednosti nove oznake nastojat ćemo pokazati usporedbom niza najvažnijih relacija za Lommelove polinome pisanih starom Lommelovom i novom našom oznakom.

Treba najprije provjeriti, da je definicija (33), (34) identična s definicijom (27), (28), (28a), ako se uzme u obzir (35) odnosno (37).

Uvrstimo dakle prema (37) u našu definiciju (33) $a = m + v$ (38), $b = v - 1$ (39) i pretpostavimo $m + 1 = a - b > 0$ (40). Dobijemo

$$M_{m+v,v-1}(z) = \sum_{n=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{(-1)^n (m-n)! (v+n)_{m-2n}}{\left(\frac{z}{2}\right)^{m-2n} n! (m-2n)!}. \quad (41)$$

Prema (32) i (32a) je očito

$$(\alpha)_m = \frac{\Gamma(\alpha + m)}{(\alpha)} = (-1)^m \frac{\Gamma(-\alpha + 1)}{\Gamma(-\alpha - m + 1)}. \quad (42)$$

⁸ N. Nielsen: Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen, Teubner, Leipzig 1904. Ovo djelo ćemo kratko citirati sa »Nielsen«.

⁹ Watson, 9'62 na kraju paragrafa.

Ako je a realan cio broj, to će u slučaju $-m+1 \leq a \leq 0$ (43) gama-funkcije u nazivnicima od (42) biti neizmjerne, dok će brojnici biti konačni, tako da je lijeva strana jednaka nuli u skladu sa (32). Za $a \leq -m$ (44) imat će prvi razlomak u (42) neodređeni oblik $\frac{\infty}{\infty}$, dok će drugi dati konačnu vrijednost, a za $a \geq 1$ (45) drugi će razlomak u (42) imati neodređeni oblik $\frac{\infty}{\infty}$, a prvi će dati konačnu vrijednost. Dobijemo dakle

$$(\nu+n)_{m-2n} = \frac{\Gamma(\nu+m-n)}{\Gamma(\nu+n)} = (-1)^{m-2n} \frac{\Gamma(-\nu-n+1)}{\Gamma(-\nu-m+n+1)}, \quad (46)$$

gdje treba prema potrebi uzeti jedan ili drugi oblik, pa je time dokazano, da je pod uvjetom (40) zaista $M_{m+\nu, \nu-1} = R_{m, \nu}$ (47), kako to tvrdimo u (35).

Za $m=-1$ (48), dakle prema (40) za $a=b$ (49), dobijemo zbog (34), da je relacija (28a) zadovoljena.

Treba još provjeriti, da se naša definicija (33) slaže sa (28). U tu svrhu najprije primjećujemo, da je u smislu (32a)

$$\left(\frac{a+b-r}{2} + n + 1\right)_{r-2n-1} = (-1)^{r-2n-1} \left(\frac{-a-b-r}{2} + n + 1\right)_{r-2n-1}. \quad (50)$$

Uvrsti li se to u (33) i uoči, da je

$$\operatorname{sgn}(a-b) = -\operatorname{sgn}[(-a) - (-b)], \quad (51)$$

to se uviđa, da vrijedi

$$M_{a,b} = (-1)^r M_{-a,-b}. \quad (52)$$

Stavimo sad $a=-m+\nu$ (53), $b=\nu-1$ (54), dakle

$$M_{-m+\nu, \nu-1} = (-1)^{-m+1} M_{m-\nu, 1-\nu}. \quad (55)$$

To bi u smislu (37) dalo

$$R_{-m, \nu} = (-1)^{m-1} R_{m-2, 2-\nu}, \quad (56)$$

što je identično sa (28). Time je dakle dokazano, da je naša definicija (33), (34) Lommelovih polinoma identična s definicijama (27), (28), (28a), ako su oznake odabrane kao u relacijama (35), (37).

Vidi se, da naša definicija obuhvaća u jednom obliku sve slučajeve, a prednost nove oznake se već očitovala u prozirnoj relaciji (52), koja u staroj oznaci ima ponešto čudni oblik (28).

Jedan pogled na (33) dostaje, da se uvidi relacija

$$M_{a,b} = -M_{b,a}, \quad (57)$$

pa se u kombinaciji sa (52) može pisati

$$M_{a,b} = (-1)^{a-b} M_{-a,-b} = -M_{b,a} = (-1)^{a-b-1} M_{-b,-a}, \quad (58)$$

čemu u staroj oznaci odgovaraju manje pregledne poznate relacije¹⁰⁾

$$\begin{aligned} R_{m,v} &= (-1)^{m-1} R_{-m-2,2-v} = -R_{-m-2,v+m+1} = \\ &= (-1)^m R_{m,-v-m+1}. \end{aligned} \quad (59)$$

Poznato je, da se Lommelovi polinomi mogu shvatiti kao općene hipergeometrijske funkcije i to, ako upotrebimo Pochhammerovu oznaku

$$\begin{aligned} {}_pF_q(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p; \varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_q; z) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n (\alpha_2)_n \dots (\alpha_p)_n}{n! (\varrho_1)_n (\varrho_2)_n \dots (\varrho_q)_n} z^n, \end{aligned} \quad (60)$$

vrijedi¹¹⁾

$$R_{m,v} = (v)_m \left(\frac{z}{2}\right)^{-m} {}_2F_3\left(\frac{1-m}{2}, -\frac{m}{2}; -m, 1-v-m; -z^2\right), \quad (61)$$

pri čemu m ne smije biti negativno. Nije teško provjeriti, da se taj red prekida poslije konačnog broja članova i da je identičan sa (27). Za $m < -1$ mora se najprije upotrebiti (28). Za $m = -1$ formula nije upotrebiva, a Lommelov polinom je prema (28a) jednak nuli.

Dajemo analogon formule (61) s našim novim oznakama, i to u obliku, koji nije ograničen na $m \geq 0$, t. j. na $a-b \geq 1$. Taj oblik glasi:

$$\begin{aligned} M_{a,b} = \operatorname{sgn}(a-b) \left(\frac{2-r+a+b}{2}\right)_{r-1} \left(\frac{z}{2}\right)^{1-r} {}_2F_3\left(\frac{2-r}{2}, \frac{1-r}{2}; \right. \\ \left. \frac{2-r+a+b}{2}, 1-r, \frac{2-r-a-b}{2}; -z^2\right). \end{aligned} \quad (62)$$

¹⁰ Watson, 9'63 (10).

¹¹ Watson, 9'61 (5).

Nije teško izračunati, da je ova formula za $a - b \geq 1$ istovjetna sa (61), dok za $a - b \leq -1$ daje očito isto, što bi dao analogni izraz za $M_{b,a}$, samo s protivnim predznakom, jer je u tom slučaju $\operatorname{sgn}(a - b) = -1$. To se slaže sa (57). Formula (62) ne da se primijeniti jedino u slučaju $a = b$, koji odgovara slučaju $m = -1$. Lommelov polinom je tada prema (34) jednak nuli.

Prelazimo sada na opću relaciju između triju Besselovih funkcija, kojima se indeksi razlikuju za cijele brojeve. Watson prvi daje tu relaciju u općem obliku¹²⁾

$$J_{\nu+n}(z) R_{p-m-1, \nu+m+1}(z) + J_{\nu+p}(z) R_{m-n-1, \nu+n+1}(z) + J_{\nu+m}(z) R_{n-p-1, \nu+p+1}(z) = 0. \quad (63)$$

Watson dokazuje ovu formulu na temelju nekih relacija između Lommelovih polinoma. Mi ćemo ići obratnim putem i dokazati formulu (63) izravno potpunom indukcijom na temelju formule rekurzije (4) za Besselove funkcije, a zatim iz (63) izvesti vrlo jednostavno niz relacija za Lommelove polinome. Ovaj put je računski nešto dulji, ali daje bolji uvid u međusobnu ovisnost tih raznih relacija.

Formula (63) dobiva u našoj novoj oznaci pregledni oblik

$$J_a M_{b,c} + J_b M_{c,a} + J_c M_{a,b} = 0. \quad (64)$$

Upada u oči, da koeficijent svake Besselove funkcije ovisi samo o indeksima ostalih dviju Besselovih funkcija. To se naravno može vidjeti i iz oblika (63), ako ga se pažljivo pogleda. Drugi i treći član lijeve strane od (64) nastaju iz prvog člana cikličkom permutacijom indeksa.

Kompleksni brojevi a, b, c moraju biti takvi, da su im razlike realni cijeli brojevi ili nula. Ako je $a = b = c$, bit će zbog (34) sva tri koeficijenta jednaka nuli i relacija (64) postaje trivijalna. Ako je na pr. $a = b \neq c$, (64) prelazi u

$$J_a M_{a,c} + J_a M_{c,a} = 0, \quad (65)$$

što je zbog (57) ispravno. Možemo dakle pretpostaviti

$$a \neq b \neq c \neq a. \quad (66)$$

Osim toga ne će biti smanjenje općenitosti, ako pretpostavimo

$$a - b > 0, \quad b - c > 0, \quad \text{dakle} \quad a - c > 0. \quad (67)$$

¹²⁾ Watson, 9'64 (8).

U protivnom slučaju postoji naime još ovih pet mogućnosti:

$$b - c > 0, c - a > 0, \text{ dakle } b - a > 0 \quad (68)$$

$$c - a > 0, a - b > 0, \text{ dakle } c - b > 0 \quad (69)$$

$$b - a > 0, a - c > 0, \text{ dakle } b - c > 0 \quad (70)$$

$$c - b > 0, b - a > 0, \text{ dakle } c - a > 0 \quad (71)$$

$$a - c > 0, c - b > 0, \text{ dakle } a - b > 0. \quad (72)$$

Vidimo, da uvjete (68) i (69) dobijemo iz uvjeta (67) cikličkom permutacijom brojeva a, b, c , dok se uvjeti (70), (71), (72) dobiju iz (64) necikličkom permutacijom, a međusobno opet prelaze jedan u drugi cikličkom permutacijom.

Lijeva strana relacije (64) je invarijantna s obzirom na cikličke permutacije brojeva a, b, c , dok kod necikličke permutacije zbog (57) mijenja svoj predznak. Sama relacija (64) je dakle invarijantna spram bilo kakvih permutacija brojeva a, b, c . Ako dakle vrijedi koji od uvjeta (68) do (72), treba samo prikladno permutirati oznaku brojeva a, b, c , pa će u novoj oznaci uvjet primiti oblik (67), pri čemu je relacija (64) zadržala svoj oblik. Možemo se dakle ograničiti na slučaj (67).

Stavimo li

$$p = |b - c|; q = |c - a|; r = |a - b|, \quad (73)$$

to je prema (33)

$$M_{b,c} = \operatorname{sgn}(b - c) \sum_{n=0}^{\left[\frac{p-1}{2}\right]} \frac{(-1)^n (p - n - 1)! \left(\frac{b + c - p}{2} + n + 1\right)_{p-2n-1}}{\left(\frac{z}{2}\right)^{p-2n-1} n! (p - 2n - 1)!} \quad (74)$$

$$M_{c,a} = \operatorname{sgn}(c - a) \sum_{n=0}^{\left[\frac{q-1}{2}\right]} \frac{(-1)^n (q - n - 1)! \left(\frac{c + a - q}{2} + n + 1\right)_{q-2n-1}}{\left(\frac{z}{2}\right)^{q-2n-1} n! (q - 2n - 1)!} \quad (75)$$

S obzirom na (67) možemo sad uvrstiti u (74), (75), (33) za p, q, r vrijednosti $p = b - c, q = a - c, r = a - b$ (76), čime te formule prelaze u oblik

$$M_{b,c} = \sum_{n=0}^{\left[\frac{b-c-1}{2}\right]} \frac{(-1)^n (b - c - n - 1)! (c + n + 1)_{b-c-2n-1}}{\left(\frac{z}{2}\right)^{b-c-2n-1} n! (b - c - 2n - 1)!} \quad (77)$$

$$M_{c,a} = -M_{a,c} = - \sum_{n=0}^{\left[\frac{a-c-1}{2}\right]} \frac{(-1)^n (a-c-n-1)! (c+n+1)_{a-c-2n-1}}{\left(\frac{z}{2}\right)^{a-c-2n-1} n! (a-c-2n-1)!} \quad (78)$$

$$M_{a,b} = \sum_{n=0}^{\left[\frac{a-b-1}{2}\right]} \frac{(-1)^n (a-b-n-1)! (b+n+1)_{a-b-2n-1}}{\left(\frac{z}{2}\right)^{a-b-2n-1} n! (a-b-2n-1)!}, \quad (79)$$

a relaciju (64) pišemo u obliku

$$J_a M_{b,c} - J_b M_{a,c} + J_c M_{a,b} = 0, \quad (80)$$

tako da je razlika između prvog i drugog indeksa Lommelovog polinoma u sva tri člana lijeve strane pozitivna.

Uzmemo li za brojeve a, b, c vrijednosti $b+1, b, b-1$, glasi (80)

$$J_{b+1} M_{b,b-1} - J_b M_{b+1,b-1} + J_{b-1} M_{b+1,b} = 0. \quad (81)$$

Lako se vidi, da je

$$M_{b,b-1} = M_{b+1,b} = 1 \quad (82), \quad M_{b+1,b-1} = \frac{b}{\frac{z}{2}} = \frac{2b}{z}, \quad (83)$$

dakle

$$J_{b+1} - \frac{2b}{z} J_b + J_{b-1} = 0, \quad (84)$$

što je identično sa (4). Formula rekurzije (4) Besselovih funkcija prema tome je specijalan slučaj relacije (80).

Opetovanom primjenom formule (84) lako je dobiti jednakosti

$$J_{b+2} - J_b \left[\frac{b(b+1)}{\left(\frac{z}{2}\right)^2} - 1 \right] + J_{b-1} \frac{b+1}{\frac{z}{2}} = 0 \quad (85)$$

$$J_{b+1} \frac{b-1}{\frac{z}{2}} - J_b \left[\frac{(b-1)b}{\left(\frac{z}{2}\right)^2} - 1 \right] + J_{b-2} = 0 \quad (86)$$

$$J_{b+2} \frac{b-1}{\frac{z}{2}} - J_b \left[\frac{(b-1)b(b+1)}{\left(\frac{z}{2}\right)^3} - \frac{2b}{\frac{z}{2}} \right] + J_{b-2} \frac{b+1}{\frac{z}{2}} = 0 \quad (87)$$

Budući da je

$$M_{b+2,b} = \frac{b+1}{\frac{z}{2}}, \quad (88)$$

$$M_{b,b-2} = \frac{b-1}{\frac{z}{2}}, \quad (89)$$

$$M_{b+2,b-1} = \frac{b(b+1)}{\left(\frac{z}{2}\right)^2} - 1, \quad (90) \quad M_{b+1,b-2} = \frac{(b-1)b}{\left(\frac{z}{2}\right)^2} - 1, \quad (91)$$

$$M_{b+2,b-2} = \frac{(b-1)b(b+1)}{\left(\frac{z}{2}\right)^3} - \frac{2b}{\frac{z}{2}}, \quad (92)$$

to su i (85), (86), (87) specijalni slučajevi relacije (80), pa ih možemo pisati u obliku

$$J_{b+2} M_{b,b-1} - J_b M_{b+2,b-1} + J_{b-1} M_{b+2,b} = 0 \quad (93)$$

$$J_{b+1} M_{b,b-2} - J_b M_{b+1,b-2} + J_{b-2} M_{b+1,b} = 0 \quad (94)$$

$$J_{b+2} M_{b,b-2} - J_b M_{b+2,b-2} + J_{b-2} M_{b+2,b} = 0. \quad (95)$$

Na temelju (81), (93), (94), (95) provest ćemo dokaz relacije (80) potpunom indukcijom.

Pretpostavimo, da za neko cijelo $s \geq 1$ vrijede relacije

$$J_{b+s} M_{b,b-1} - J_b M_{b+s,b-1} + J_{b-1} M_{b+s,b} = 0, \quad (96)$$

$$J_{b+s+1} M_{b,b-1} - J_b M_{b+s+1,b-1} + J_{b-1} M_{b+s+1,b} = 0. \quad (97)$$

Za $s=1$ te su relacije identične sa (81), (93) i prema tome ispravne. Dokažemo li, da iz njih izlazi

$$J_{b+s+2} M_{b,b-1} - J_b M_{b+s+2,b-1} + J_{b-1} M_{b+s+2,b} = 0, \quad (98)$$

to smo time dokazali potpunom indukcijom, da (96) vrijedi za svako $s \geq 1$ ¹³).

¹³ Ovu relaciju daje i P. Schafheitlin: Die Theorie der Besselschen Funktionen, Teubner 1908, str. 17 (6). I on provodi potpunu indukciju, ali na nešto drukčiji način. Opću formulu (80) ne izvodi, već samo spominje na str. 19, da mora postojati linearna relacija između triju Besselovih funkcija, kojim se indeksi razlikuju za cijele brojeve, a koeficijenti relacije su cijele (racionalne) funkcije argumenta.

Iz (81) izlazi

$$J_{b+s+2} - J_{b+s+1} \frac{b+s+1}{\frac{z}{2}} + J_{b+s} = 0. \quad (99)$$

Eliminacija veličina J_{b+s} i J_{b+s+1} iz (96), (97), (99) daje

$$J_{b+s+2} M_{b,b-1} - J_b \left(\frac{b+s+1}{\frac{z}{2}} M_{b+s+1,b-1} - M_{b+s,b-1} \right) + \\ + J_{b-1} \left(\frac{b+s+1}{\frac{z}{2}} M_{b+s+1,b} - M_{b+s,b} \right) = 0. \quad (100)$$

Na temelju (77) daje jednostavan račun, da vrijedi

$$\frac{b+s+1}{\frac{z}{2}} M_{b+s+1,b-1} - M_{b+s,b-1} = M_{b+s+2,b-1}. \quad (101)$$

Kod provedbe verifikacije zgodno je u izrazu (79) kvocijent faktoriijela nadomjestiti prema

$$\frac{(a-b-n-1)!}{(a-b-2n-1)!} = (a-b-2n)_n, \quad (102)$$

kao što odgovara formulama (33a), (33b), i analogno učiniti u svim sumama. Ne treba onda paziti na to, kolika je gornja granica u pojedinim sumama, jer članovi s prevelikim n sadržavaju faktor nula, pa automatski otpadaju. To vrijedi i za ostale verifikacije u toku dokaza.

Ako se u (101) piše $b+1$ umjesto b i $s-1$ umjesto s , dobije se

$$\frac{b+s+1}{\frac{z}{2}} M_{b+s+1,b} - M_{b+s,b} = M_{b+s+2,b-1}. \quad (103)$$

Uvrsti li se (101) i (103) u (100), izlazi (98), pa je time dokazano, da (96) vrijedi za svako $s \geq 1$.

Pretpostavimo dalje, da za neko $s \geq 1$ vrijede relacije

$$J_{b+s} M_{b,b-2} - J_b M_{b+s,b-2} + J_{b-2} M_{b+s,b} = 0, \quad (104)$$

$$J_{b+s+1} M_{b,b-2} - J_b M_{b+s+1,b-2} + J_{b-2} M_{b+s+1,b} = 0. \quad (105)$$

Za $s=1$ ove su relacije identične sa (94), (95) i prema tome ispravne. Moramo opet pokazati, da se može provesti povišenje od s .

Eliminiramo li iz (104), (105), (99) veličine J_{b+s} i J_{b+s+1} , dobijemo

$$J_{b+s+2} M_{b,b-2} - J_b \left(\frac{b+s+1}{\frac{z}{2}} M_{b+s+1,b-2} - M_{b+s,b-2} \right) + \\ + J_{b-2} \left(\frac{b+s+1}{\frac{z}{2}} M_{b+s+1,b} - M_{b+s,b} \right) = 0. \quad (106)$$

Ako se u (101) piše $b-1$ umjesto b i $s+1$ umjesto s , izlazi

$$\frac{b+s+1}{\frac{z}{2}} M_{b+s+1,b-2} - M_{b+s,b-2} = M_{b+s+2,b-2}. \quad (107)$$

Uvrštenje izraza (107) i (103) u (105) daje

$$J_{b+s+2} M_{b,b-2} - J_b M_{b+s+2,b-2} + J_{b-2} M_{b+s+2,b} = 0. \quad (108)$$

Povišenje od s je time provedeno, pa je dokazano, da relacija (100) vrijedi za svako $s \geq 1$.

Pretpostavimo sad, da za neko $t \geq 1$ vrijede relacije

$$J_{b+s} M_{b,b-t} - J_b M_{b+s,b-t} + J_{b-t} M_{b+s,b} = 0, \quad (109)$$

$$J_{b+s} M_{b,b-t-1} - J_b M_{b+s,b-t-1} + J_{b-t} M_{b+s,b} = 0. \quad (110)$$

Za $t=1$ te su relacije identične sa (96) i (104), koje su već dokazane. Treba pokazati, da je moguće povišenje od t .

Iz (81) izlazi

$$J_{b-t} - J_{b-t-1} \frac{b-t-1}{\frac{z}{2}} + J_{b-t-2} = 0. \quad (111)$$

Eliminacija veličina J_{b-t} i J_{b-t-1} iz (109), (110), (111) daje

$$J_{b+s} \left(\frac{b-t-1}{\frac{z}{2}} M_{b,b-t-1} - M_{b,b-t} \right) - \\ - J_b \left(\frac{b-t-1}{\frac{z}{2}} M_{b+s,b-t-1} - M_{b+s,b-t} \right) + J_{b-t-2} M_{b+s,b} = 0. \quad (112)$$

Analogno kao kod (101) može se na temelju (77) računom provjeriti, da vrijedi

$$\frac{b-t-1}{\frac{z}{2}} M_{b, b-t-1} - M_{b, b-t} = M_{b, b-t-2}. \quad (113)$$

Dalje, ako se pišu $b+s$ umjesto b i $t+s$ umjesto t , izlazi

$$\frac{b-t-1}{\frac{z}{2}} M_{b+s, b-t-1} - M_{b+s, b-t} = M_{b+s, b-t-2}. \quad (114)$$

Uvrsti li se (113) i (114) u (112), dobije se

$$J_{b+s} M_{b, b-t-2} - J_b M_{b+s, b-t-2} + J_{b-t-2} M_{b+s, b} = 0. \quad (115)$$

Time je povišenje od t provedeno i dokazano, da relacija (109) vrijedi za svako $t \geq 1$. Budući da je (109) samo drukčije napisana relacija (80), to je time cijeli dokaz proveden.

Zabilježimo za nas najvažniji specijalni slučaj relacije (64), a to je $a=n$, $b=1$, $c=0$:

$$\begin{aligned} J_n(z) &= J_1(z) M_{n,0}(z) - J_0(z) M_{n,1}(z) = \\ &= J_1(z) \sum_{s=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{(-1)^s (n-s-1)! (s+1)_{n-2s-1}}{\left(\frac{z}{2}\right)^{n-2s-1} s! (n-2s-1)!} - \\ &- J_0(z) \sum_{s=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} \frac{(-1)^s (n-s-2)! (s+2)_{n-2s-2}}{\left(\frac{z}{2}\right)^{n-2s-2} s! (n-2s-2)!}. \end{aligned} \quad (116)$$

Uvrstimo li

$$(s+1)_{n-2s-1} = (s+1)(s+2)\dots(n-s-1) = \frac{(n-s-1)!}{s!} \quad (117)$$

$$(s+2)_{n-2s-2} = (s+2)(s+3)\dots(n-s-1) = \frac{(n-s-1)!}{(s+1)!}, \quad (118)$$

dobijemo formulu (116) u obliku

$$\begin{aligned} J_n(z) &= J_1(z) \sum_{s=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{(-1)^s [(n-s-1)!]^2}{\left(\frac{z}{2}\right)^{n-2s-1} (s!)^2 (n-2s-1)!} - \\ &- J_0(z) \sum_{s=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} \frac{(-1)^s (n-s-2)! (n-s-1)!}{\left(\frac{z}{2}\right)^{n-2s-1} s! (s+1)! (n-2s-2)!}. \end{aligned} \quad (119)$$

Potpunosti radi navest ćemo važni specijalni slučaj polucijelih indeksa, koji se u literaturi izvodi neovisno od opće relacije (64). Stavimo li jedan put

$$a = k + \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = -\frac{1}{2}, \quad (120)$$

a drugi put

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{1}{2}, \quad c = -\left(k + \frac{1}{2}\right), \quad (121)$$

to izlaze relacije

$$J_{k+\frac{1}{2}} M_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} + J_{\frac{1}{2}} M_{-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} + J_{-\frac{1}{2}} M_{k+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = 0, \quad (122)$$

$$J_{\frac{1}{2}} M_{-\frac{1}{2}, -(k+\frac{1}{2})} + J_{-\frac{1}{2}} M_{-(k+\frac{1}{2}), \frac{1}{2}} + J_{-\frac{1}{2}} M_{k+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = 0, \quad (123)$$

koje se s pomoću poznatih jednakosti¹⁴

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z \quad (124), \quad J_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z \quad (125)$$

moгу dovesti u oblik

$$J_{k+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \sin z \sum_{s=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{(-1)^s (2k-2s)!}{(2z)^{k-2s} (k-2s)! (2s)!} - \right. \\ \left. - \cos z \sum_{s=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \frac{(-1)^s (2k-2s-1)!}{(2z)^{k-2s-1} (k-2s-1)! (2s+1)!} \right\} \quad (126)$$

$$J_{-(k+\frac{1}{2})}(z) = (-1)^k \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \cos z \sum_{s=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{(-1)^s (2k-2s)!}{(2z)^{k-2s} (k-2s)! (2s)!} + \right. \\ \left. + \sin z \sum_{s=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \frac{(-1)^s (2k-2s-1)!}{(2z)^{k-2s-1} (k-2s-1)! (2s+1)!} \right\}, \quad (127)$$

gdje k znači cio pozitivan broj.

¹⁴ Vidi na pr. Watson, 3'4 (3), (6).

Stavimo li

$$n = \pm \left(k + \frac{1}{2}\right), \quad (128)$$

to se ove dvije formule mogu sažeti u jednu:

$$J_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \sin \left[z - \frac{\pi}{4} (2n - 2k - 1) \right] \sum_{s=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{(-1)^s (2k - 2s)!}{(2z)^{k-2s} (k - 2s)! (2s)!} - \right. \\ \left. - \cos \left[z - \frac{\pi}{4} (2n - 2k - 1) \right] \sum_{s=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \frac{(-1)^s (2k - 2s - 1)!}{(2s)^{k-2s-1} (k - 2s - 1)! (2s + 1)!} \right\}. \quad (129)$$

U literaturi se te formule susreću u nešto drugim oblicima^{15, 16}, koji se mogu lako svesti na (129).

Prelazimo sada na to, da iz opće formule (64) izvedemo na kratak način poznatu opću tročlanu relaciju između Lommelovih polinoma. U tu svrhu pišemo formulu (64) u četiri razna oblika:

$$J_b M_{c,d} + J_c M_{d,b} + J_d M_{b,c} = 0 \quad (130)$$

$$J_a M_{c,d} - J_c M_{d,a} + J_d M_{a,c} = 0 \quad (131)$$

$$J_a M_{b,d} + J_b M_{d,a} + J_d M_{a,b} = 0 \quad (132)$$

$$J_a M_{b,c} + J_b M_{c,a} + J_c M_{a,b} = 0. \quad (133)$$

Uvjet snošljivosti za te četiri homogene jednadžbe s nepoznanicama J_a, J_b, J_c, J_d ima oblik četveroředne determinante stavljene jednako nuli. Pomnoži li se drugi i četvrti redak te determinante sa -1 i upotrebi (57), to ona postaje koso simetrična, a takva se determinanta može predložiti kao kvadrat cijelog racionalnog izraza njezinih elemenata¹⁷:

$$\begin{vmatrix} 0 & M_{c,d} & M_{d,b} & M_{b,c} \\ M_{c,d} & 0 & M_{d,a} & M_{a,c} \\ M_{b,d} & M_{d,a} & 0 & M_{a,b} \\ M_{b,c} & M_{c,a} & M_{a,b} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & M_{c,d} - M_{b,d} M_{b,c} \\ -M_{c,d} & 0 & M_{a,d} M_{c,a} \\ M_{b,d} - M_{a,d} & 0 & M_{a,b} \\ -M_{b,c} - M_{c,a} - M_{a,b} & 0 \end{vmatrix} = \\ = (M_{a,b} M_{c,d} + M_{c,a} M_{b,d} + M_{b,c} M_{a,d})^2 = 0. \quad (134)$$

¹⁵ Watson, 3.4 (2), (5). R. O. Kuzmin: Besseli funkcii, Glavna redakcija obščetehničeskii literaturii, Leningrad—Moskva, 1935, str. 59.

¹⁶ Gray, Mathews and MacRobert: A treatise on Bessel functions, Macmillan and Co., London, 1931, str. 18.

¹⁷ G. Kowalewski: Einführung in die Determinantentheorie, Veit u. Co., Leipzig 1909, str. 134, stavak 40.

Dobili smo dakle opću tročlanu relaciju

$$M_{a,b} M_{c,d} + M_{c,a} M_{b,d} + M_{b,c} M_{a,d} = 0 \quad (135)$$

između Lommelovih polinoma, gdje se drugi i treći član lijeve strane dobije iz prvog člana cikličkom permutacijom prvih triju indeksa.

U staroj oznaci ta relacija glasi¹⁸

$$R_{a,r} R_{n-m-1, r+m+1} + R_{p,r} R_{m-n-1, r+n+1} + R_{m,r} R_{n-p-1, r+p+1} = 0. \quad (136)$$

Treba ovdje primijetiti, da je relacija (135) izvedena na temelju (64), a ova je dokazana potpunom indukcijom iz formule rekurzije (4) odnosno (84). Nikakvo drugo svojstvo Besselovih funkcija nije kod dokaza upotrebjeno. Stoga se kod toga dokaza može operirati i nizom veličina $\dots, Z_{b-2}, Z_{b-1}, Z_b, Z_{b+1}, Z_{b+2}, \dots$, koje zadovoljavaju (84), pa su na temelju te formule rekurzije određene kao funkcije od z , ako su, recimo, zadane dvije susjedne tih veličina kao bilo kako odabrane funkcije od z . Mogli bismo primjerice upotrebiti i same Lommelove polinome $\dots, M_{b-2,d}, M_{b-1,d}, M_{b,d}, M_{b+1,d}, M_{b+2,d}, \dots$ koji također zadovoljavaju (84), kako izlazi odmah iz (135), a dalo bi se to i izravno pokazati uvrštenjem definicije Lommelovih polinoma. Ovako proveden dokaz doveo bi izravno do (135), jer relacija (64) već ima taj oblik, kad se u njoj Besselove funkcije nadomjesto Lommelovim polinomima. Relacija (135) je dakle dokazana bez primjene kakvih specijalnih svojstava Besselovih funkcija. Isto to će vrijediti za sve relacije između Lommelovih polinoma, koje izvodimo, a u njima se ne pojavljuju Besselove funkcije. U literaturi su naprotiv kod izvoda svojstava Lommelovih polinoma često upotrebljene relacije, koje uključuju specijalna svojstva Besselovih funkcija.

Neki poznati specijalni slučajevi od (135)^{19, 20} lako se dobiju spomoću (82), (83) i (57) i znatno su pregledniji u novoj oznaci.

Izvest ćemo sad neke poznate relacije, u kojima se pojavljuju prve derivacije Lommelovih polinoma.

Za $a \neq b$ lako je spomoću definicije (33b) verificirati relaciju

$$M'_{a,b} + M'_{a+1,b+1} = \frac{a+b+1}{z} (M_{a,b} - M_{a+1,b+1}), \quad (137)$$

gdje akcenti znače derivacije po z . Za $a = b$ relacija (147) vrijedi zbog (34).

¹⁸ Watson, 9'64 (6). Relacija je tako dokazana na drugi način.

¹⁹ Watson, 9'64 (1), (2), (3); 9'63 (1), (2), (3).

²⁰ Nielsen, str. 34 (11). Tamo su provedene oznake s gornjim indeksima prema našim formulama (35), (36).

Smanjenjem indeksa a, b za jednu jedinicu dobijemo

$$M'_{a,b} - M'_{a-1,b-1} = \frac{-a-b+1}{z} (M_{a,b} - M_{a-1,b-1}). \quad (138)$$

Dalje dokazujemo relaciju

$$M'_{a,b} - M'_{a+1,b-1} = \frac{a-b+1}{z} (M_{a,b} + M_{a+1,b-1}). \quad (139)$$

Ovdje se verifikacija na temelju (33b), (102) najprije provodi uz pretpostavku

$$a - b > 0. \quad (140)$$

Zatim se vidi, da je zbog (34), (82), (83) relacija (139) ispravna i za $a - b = 0$, $a - b = -1$ i $a - b = -2$. Relacija time vrijedi za $a - b \geq -2$ (141). Pišemo li $a - 1$ mjesto a i $b + 1$ mjesto b , to dobijemo

$$M'_{a,b} - M'_{a-1,b+1} = \frac{-a+b+1}{z} (M_{a,b} + M_{a-1,b+1}), \quad (142)$$

a (141) prelazi u $(a - 1) - (b + 1) \geq -2$ ili $a - b \geq 0$ (143). Izmjena oznaka a i b daje spomoću (57) opet (139) sa $a - b \leq 0$ (144), dakle (139) vrijedi bez ograničenja. Vraćanjem prijašnjih oznaka dolazimo natrag na relaciju (138), koja dakle također vrijedi bez ograničenja.

Ako ε_1 i ε_2 svako za sebe može značiti $+1$ ili -1 , možemo relacije (137), (138), (139), (142) sažeti u oblik

$$\varepsilon_1 M'_{a,b} + \varepsilon_2 M'_{a+\varepsilon_1,b+\varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_1 a + \varepsilon_2 b + 1}{z} (\varepsilon_1 M_{a,b} - \varepsilon_2 M_{a+\varepsilon_1,b+\varepsilon_2}). \quad (145)$$

Formule bi u starim oznakama glasila²¹

$$R'_{m,v} + R'_{m,v+1} = \frac{m+2v}{z} (R_{m,v} - R_{m,v+1}) \quad (146)$$

$$R'_{m,v} + R'_{m,v-1} = \frac{-m-2v+2}{z} (R_{m,v} - R_{m,v-1}) \quad (147)$$

$$R'_{m,v} - R'_{m+2,v-1} = \frac{m+2}{z} (R'_{m,v} + R_{m+2,v-1}) \quad (148)$$

$$R'_{m,v} - R'_{m-2,v+1} = \frac{-m}{z} (R_{m,v} + R_{m-2,v+1}) \quad (149)$$

²¹ Formule (148), (149) spominje Nielsen, str. 37 (8), (9). Oznaka je tamo provedena s gornjim indeksima, prema našim formulama (35), (36).

odnosno u sažetom obliku

$$\varepsilon_1 R'_{m, \nu} + \varepsilon_2 R'_{m+\nu_1-\nu_2, \nu+\nu_2} = \frac{\varepsilon_1(m+\nu) + \varepsilon_2(\nu-1) + 1}{z} (\varepsilon_1 R_{m, \nu} - \varepsilon_2 R_{m+\nu_1-\nu_2, \nu+\nu_2}). \quad (150)$$

Vidi se na prvi pogled, da se simetrija i međusobna srodnost tih relacija mnogo bolje ističu u novoj oznaci.

Želimo li Lommelov polinom izraziti spomoću derivacija takvih polinoma, možemo u (139) sniziti a za jedan, odnosno povisiti b za jedan i dobivene jednakosti zbrojiti. Izlazi

$$M'_{a-1, b} - M'_{a, b-1} + M'_{a, b+1} - M'_{a+1, b} = \frac{a-b}{z} (M_{a-1, b} + M_{a+1, b} + M_{a, b+1} + M_{a, b-1}), \quad (151)$$

a ako desnu stranu pretvorimo spomoću relacija

$$\frac{2b}{z} M_{a, b} = M_{a, b+1} + M_{a, b-1} \quad (135a)$$

$$\frac{2a}{z} M_{a, b} = M_{a-1, b} + M_{a+1, b}, \quad (135b)$$

koje izlaze iz (135) na temelju (82), (83) i (57), dobijemo

$$\frac{2(a^2-b^2)}{z^2} M_{a, b} = M'_{a-1, b} - M'_{a, b-1} + M'_{a, b+1} - M'_{a+1, b}. \quad (152)$$

Treba li izraziti derivaciju Lommelova polinoma spomoću takvih polinoma, može se postupati ovako: diferenciranjem se dobiva iz (135a), (135b):

$$-\frac{2b}{z^2} M_{a, b} + \frac{2b}{z} M'_{a, b} = M'_{a, b+1} + M'_{a, b-1} \quad (153)$$

$$-\frac{2a}{z^2} M_{a, b} + \frac{2a}{z} M'_{a, b} = M'_{a-1, b} + M'_{a+1, b}. \quad (154)$$

Odbijemo li drugu jednakost od prve, dobijemo

$$\frac{2(a-b)}{z^2} M_{a, b} - \frac{2(a-b)}{z} M'_{a, b} = M'_{a, b+1} + M'_{a, b-1} - M'_{a-1, b} - M'_{a+1, b}. \quad (155)$$

Nadomjestimo li prvi i četvrti član desne strane u smislu (139), a drugi i treći član u smislu (142) te dijelimo sa $\frac{a-b}{z}$, to izlazi

$$M'_{a,b} = \frac{1}{z} M_{a,b} + \frac{1}{2} (M_{a,b-1} + M_{a-1,b} - M_{a,b+1} - M_{a+1,b}). \quad (156)$$

Do istog rezultata se dolazi, ako se (153) i (154) zbroje i upotrebe formule (137), (138). Iz (156), (135a) i (135b) možemo eliminirati $M_{a,b-1}$ i $M_{a-1,b}$ ili $M_{a,b-1}$ i $M_{a+1,b}$ ili $M_{a,b+1}$ i $M_{a-1,b}$ ili $M_{a,b+1}$ i $M_{a+1,b}$, pa dobijemo četiri relacije:

$$M'_{a,b} = \frac{a+b+1}{z} M_{a,b} - M_{a,b+1} - M_{a+1,b} \quad (157)$$

$$M'_{a,b} = \frac{-a+b+1}{z} M_{a,b} + M_{a-1,b} - M_{a,b+1} \quad (158)$$

$$M'_{a,b} = \frac{a-b+1}{z} M_{a,b} + M_{a,b-1} - M_{a+1,b} \quad (159)$$

$$M'_{a,b} = \frac{-a-b+1}{z} M_{a,b} + M_{a,b-1} + M_{a-1,b}. \quad (160)$$

Te se relacije daju sažeti u

$$M'_{a,b} = \frac{\varepsilon_1 a + \varepsilon_2 b + 1}{z} M_{a,b} - \varepsilon_1 M_{a+\varepsilon_1, b} - \varepsilon_2 M_{a, b+\varepsilon_2}. \quad (161)$$

U starim oznakama te su formule²² manje pregledne.

Lommelovi polinomi zadovoljavaju diferencijalnu jednačbu, koja za polinom $y = R_{m,r}(z)$ glasi u starim oznakama²³

$$(\vartheta + m)(\vartheta + 2\nu + m - 2)(\vartheta - 2\nu - m)(\vartheta - m - 2)y + \\ + 4z^2 \vartheta(\vartheta + 1)y = 0, \quad (162)$$

pri čemu je upotrebljen simbol

$$\vartheta = z \frac{d}{dz}. \quad (163)$$

²² Watson, 9'63 (6), (5), (4), (7). Formule su tamo drukčije dokazane.

²³ Watson, 9'61 (6). Dokaz je tamo drukčije proveden.

U novim oznakama ta diferencijalna jednačba glasi za polinom $y = M_{a,b}(z)$:

$$(\vartheta + a - b - 1)(\vartheta + a + b - 1)(\vartheta - a - b - 1)(\vartheta - a + b - 1)y + 4z^2\vartheta(\vartheta + 1)y = 0. \quad (164)$$

Da je dokažemo, pišemo relacije (157), (158), (159), (160) u obliku

$$M'_{a,b} = \frac{a+b+1}{z} M_{a,b} - M_{a,b+1} - M_{a+1,b} \quad (165)$$

$$M'_{a+1,b} = \frac{-a+b}{z} M_{a+1,b} + M_{a,b} - M_{a+1,b+1} \quad (166)$$

$$M'_{a,b+1} = \frac{a-b}{z} M_{a,b+1} + M_{a,b} - M_{a+1,b+1} \quad (167)$$

$$M'_{a+1,b+1} = \frac{-a-b-1}{z} M_{a+1,b+1} + M_{a+1,b} + M_{a,b+1}. \quad (168)$$

Derivacije polinoma, koje se pojavljuju kod postepene primjene operacija propisanih u diferencijalnoj jednačbi, nadomještavamo uvijek prema posljednjim formulama, pa tako redom dobivamo:

$$(\vartheta - a - b - 1) M_{a,b} = -z M_{a,b+1} - z M_{a+1,b} \quad (169)$$

$$(\vartheta + a + b - 1)(\vartheta - a - b - 1) M_{a,b} = -2z^2 M_{a,b} + 2z^2 M_{a+1,b+1} - 2az M_{a,b+1} - 2bz M_{a+1,b} \quad (170)$$

$$(\vartheta + a - b - 1)(\vartheta + a + b - 1)(\vartheta - a - b - 1) M_{a,b} = -2(3a+b+2)z^2 M_{a,b} + 2(a-b)z^2 M_{a+1,b+1} + [4z^3 - 4a(a-b)z] M_{a,b+1} + 4z^3 M_{a+1,b} \quad (171)$$

$$(\vartheta - a + b - 1)(\vartheta + a - b - 1)(\vartheta + a + b - 1)(\vartheta - a - b - 1) M_{a,b} = [8z^4 - 4(a+b+2)(a+b+1)z^2] M_{a,b} - 8z^4 M_{a+1,b+1} + 4(2a+3)z^3 M_{a,b+1} + 4(2b+3)z^3 M_{a+1,b} \quad (172)$$

$$(\vartheta + 1) M_{a,b} = (a+b+2) M_{a,b} - z M_{a,b+1} - z M_{a+1,b} \quad (173)$$

$$4z^2\vartheta(\vartheta + 1) M_{a,b} = [-8z^4 + 4(a+b+2)(a+b+1)z^2] M_{a,b} + 8z^4 M_{a+1,b+1} - 4(2a+3)z^3 M_{a,b+1} - 4(2b+3)z^3 M_{a+1,b}. \quad (174)$$

Jasno je, da je svejedno, kojim redom primjenjujemo simboličke faktore prvog člana lijeve strane jednadžbe (164), pa je stoga ta diferencijalna jednadžba na temelju (172) i (174) dokazana.

Zabilježimo još jedan specijalni slučaj opće tročlane relacije (135). Stavimo li u njoj

$$a = m + \frac{1}{2}, \quad b = -m - \frac{1}{2}, \quad c = \frac{1}{2}, \quad d = -\frac{1}{2}, \quad (175)$$

to izlazi zbog (82)

$$M_{-m-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} M_{m+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} + M_{\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}} M_{-m-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} = -M_{m+\frac{1}{2}, -m-\frac{1}{2}} \quad (176)$$

ili upotrebom od (58)

$$M_{m+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^2 + M_{m+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^2 = (-1)^m M_{m+\frac{1}{2}, -m-\frac{1}{2}}, \quad (177)$$

što u staroj oznaci glasi²⁴

$$R_{m-1, \frac{3}{2}}^2 + R_{m, \frac{1}{2}}^2 = (-1)^m R_{2m, \frac{1}{2}-m}. \quad (178)$$

Konačno još neke relacije, koje uključuju Besselove funkcije:

Iz (64) dobiju se kao specijalni slučajevi spomoću (82) jednakosti:

$$J_a = J_{b+1} M_{a,b} + J_b M_{b+1,a}, \quad (179)$$

$$J_{-a} = J_{-b-1} M_{-a,-b} + J_{-b} M_{-b-1,-a}, \quad (180)$$

ili s obzirom na (58)

$$(-1)^{a-b-1} J_{-a} = J_{-b-1} M_{a,b} - J_{-b} M_{b+1,a}. \quad (181)$$

Pomnoži li se (179) sa J_{-b} a (180) sa J_b i zbroje li se dobivene jednakosti, to izlazi

$$J_a J_{-b} + (-1)^{a-b-1} J_{-a} J_b = M_{a,b} (J_{b+1} J_{-b} - J_{-b-1} J_b) \quad (182)$$

ili zbog (26)

$$J_a J_{-b} + (-1)^{a-b-1} J_{-a} J_b = M_{a,b} \frac{\sin [(b+1)\pi]}{\pi z}. \quad (183)$$

²⁴ Watson, 9⁶² (8). Tamo je dokaz proveden kvadriranjem i zbrajanjem naših relacija (188), (189), dakle upotrebom specijalnih svojstava (124), (125) Besselovih funkcija.

U staroj oznaci ovo glasi²⁵

$$J_{\nu+m} J_{-\nu+1} + (-1)^m J_{-\nu-m} J_{\nu-1} = R_{m,\nu} \frac{\sin \nu \pi}{\pi z}. \quad (184)$$

Za $a = -b$, dakle $a - b = 2a$ mora a biti polucio realan broj. Stavimo li

$$a = m + \frac{1}{2}, b = -m - \frac{1}{2}, 2a = 2m + 1, \quad (185)$$

to (183) glasi

$$J_{m+\frac{1}{2}}^2 + J_{-m-\frac{1}{2}}^2 = M_{m+\frac{1}{2}, -m-\frac{1}{2}} \frac{2(-1)^m}{\pi z} \quad (186)$$

ili²⁶

$$J_{m+\frac{1}{2}}^2 + J_{-m-\frac{1}{2}}^2 = R_{2m, \frac{1}{2}-m} \frac{2(-1)^m}{\pi z}. \quad (187)$$

Spominjemo dva specijalna slučaja formule (64), koja na temelju (124), (125), (58) glase²⁷

$$J_{m+\frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \sin z M_{m+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} - \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \cos z M_{m+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \quad (188)$$

$$(-1)^m J_{-m-\frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \cos z M_{m+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} + \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \sin z M_{m+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}. \quad (189)$$

Kvadriranjem i zbrajanjem te upotrebom od (187) opet se dolazi na relaciju (177), kako je spomenuto u bilješci²⁴.

Da zaokružimo ovaj prikaz svojstava Lommelovih polinoma, dat ćemo još ukratko svezu s teorijom verižnih razlomaka, koja je u načelu poznata²⁸. Služit ćemo se pri tom našom novom oznakom, dok će oznake za verižne razlomke biti iste kao u Perronovu djelu²⁹.

²⁵ Watson, 9'61 (2).

²⁶ Watson, 9'62 (4).

²⁷ Watson, 9'62 (7).

²⁸ Watson, 9'6; 9'64. Tamo se citira Crelier: *Annali di mat.* (2) XXIV (1896) od str. 136 dalje. Autor nije imao uvida u taj rad.

²⁹ O. Perron: *Die Lehre von den Kettenbrüchen*. Teubner, Leipzig u. Berlin 1929. Ovo ćemo djelo citirati sa »Perron«.

Definiramo³⁰

$$A_{r,\lambda} = K \begin{pmatrix} a_{\lambda+1}, a_{\lambda+2}, \dots, a_{\lambda+r} \\ b_{\lambda}, b_{\lambda+1}, \dots, b_{\lambda+r} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} b_{\lambda} & -1 & 0 & 0 & 0 \dots \\ a_{\lambda+1} & b_{\lambda+1} & -1 & 0 & 0 \dots \\ 0 & a_{\lambda+2} & b_{\lambda+2} & -1 & 0 \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (190)$$

$$A_{r,0} = A_r \quad (191), \quad B_{r,\lambda} = A_{r-1,\lambda+1} \quad (192)$$

$$A_{-1,\lambda} = 1, B_{-1,\lambda} = 0, A_{0,\lambda} = b_{\lambda}, B_{0,\lambda} = 1, B_{1,\lambda} = b_{\lambda+1}. \quad (193)$$

Ako među varijablama $x_0, x_1, x_2, \dots$ postoje jednačbe³¹

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= b_0 x_1 + a_1 x_2 \\ x_1 &= b_1 x_2 + a_2 x_3 \\ &\dots \dots \dots \\ x_r &= b_r x_{r+1} + a_{r+1} x_{r+2} \end{aligned} \right\}, \quad (194)$$

vrijedi³²

$$x_{\lambda} = A_{r-1,\lambda} x_{r+\lambda} + a_{r+\lambda} A_{r-2,\lambda} x_{r+\lambda+1} \quad (195)$$

$$x_{\lambda+1} = B_{r-1,\lambda} x_{r+\lambda} + a_{r+\lambda} B_{r-2,\lambda} x_{r+\lambda+1}, \quad (196)$$

a $\frac{x_0}{x_1}$ se može predočiti kao verižni razlomak³³

$$\frac{x_0}{x_1} = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \dots + \frac{a_{r-1}}{b_{r-1}} + \frac{a_r}{x_r : x_{r+1}}. \quad (197)$$

Dalje vrijedi relacija³⁴

$$\begin{aligned} B_{r-1,\lambda} A_{r+\lambda+1} &= B_{r+\lambda-1,\lambda} A_{r+\lambda-1} + \\ &+ (-1)^{r-1} a_{r+1} a_{r+2} \dots a_{r+\lambda} B_{\lambda-1,\lambda+r} A_{r-1}. \end{aligned} \quad (198)$$

Povisi li se indeks svih a_{λ}, b_{λ} za q , to se prema (190), (191) povisuju drugi indeksi izraza $A_{r,\lambda}, B_{r,\lambda}$ za q , t. j. iz njih postaje $A_{r,\lambda+q}, B_{r,\lambda+q}$, a prema (191) postaje $A_{r,q}$ iz $A_r = A_{r,0}$. Relacija (198) dobiva oblik

³⁰ Perron, str. 14 (23), (23a), str. 6 (9), str. 11 (15), str. 15 (25).

³¹ Perron, str. 12 (21).

³² Perron, str. 14.

³³ Perron, str. 13.

³⁴ Perron, str. 18 (36).

$$\begin{aligned}
B_{r-1, \mu+q} A_{\mu+r+\lambda-1, q} &= \\
&= B_{r+\lambda-1, \mu+q} A_{\mu+r-1, q} + (-1)^{r-1} a_{\mu+q+1} a_{\mu+q+2} \dots \\
&\dots a_{\mu+q+r} B_{\lambda-1, \mu+r+q} A_{\mu-1, q}.
\end{aligned} \quad (199)$$

Stavimo li

$$a_{\lambda} = -1 \quad (\lambda = 0, 1, 2, \dots) \quad (200)$$

$$b_{\lambda} = \frac{2(\lambda+1)}{z} \quad (\lambda = 0, 1, 2, \dots) \quad (201)$$

$$x_{\lambda} = J_{\lambda}(z) \quad (\lambda = 0, 1, 2, \dots), \quad (202)$$

to formula rekurzije Besselovih funkcija

$$J_{\lambda-1} = \frac{2\lambda}{z} J_{\lambda} - J_{\lambda+1} \quad (\lambda = 0, 1, 2, \dots) \quad (203)$$

postaje identična s jednadžbama (194), tako da prema (195) mora vrijediti

$$J_{\lambda} = A_{r-1, \lambda} J_{r+\lambda} - A_{r-2, \lambda} J_{r+\lambda+1} \quad (204)$$

ili

$$J_{r+\lambda+1} A_{r-2, \lambda} - J_{r+\lambda} A_{r-1, \lambda} + J_{\lambda} = 0. \quad (205)$$

Usporedba sa (64) pokazuje, da mora biti

$$A_{r-2, \lambda} = M_{r+\lambda, \lambda}, \quad A_{r-1, \lambda} = M_{r+\lambda+1, \lambda} \quad (206)$$

ili s obzirom na (190), (200), (201)

$$M_{r, \lambda} = A_{r-\lambda-2, \lambda} = K \begin{pmatrix} -1, & -1, \dots, -1 \\ \frac{2(\lambda+1)}{z}, & \frac{2(\lambda+2)}{z}, \dots, \frac{2(r-1)}{z} \end{pmatrix}. \quad (207)$$

pa su time Lommelovi polinomi izraženi kao kontinuantе.

S obzirom na (200), (192) dobije se iz (199)

$$\begin{aligned}
A_{r-2, \mu+q+1} A_{\mu+r+\lambda-1, q} &= \\
&= A_{r+\lambda-2, \mu+q+1} A_{\mu+r-1, q} - A_{\lambda-2, \mu+r+q+1} A_{\mu-1, q}
\end{aligned} \quad (208)$$

ili prema (207)

$$\begin{aligned}
M_{\mu+q+r+1, \mu+q+1} M_{\mu+r+\lambda+q+1, q} &= \\
&= M_{\mu+r+\lambda+q+1, \mu+q+1} M_{\mu+r+q+1, q} - \\
&- M_{\mu+r+\lambda+q+1, \mu+r+q+1} M_{\mu+q+1, q}.
\end{aligned} \quad (209)$$

Stavimo li u ovoj formuli

$$\begin{aligned}\mu + \varrho + \nu + 1 &= m, & \mu + \varrho + 1 &= n, \\ \mu + \nu + \lambda + \varrho + 1 &= p, & \varrho &= q,\end{aligned}\quad (210)$$

to izlazi

$$M_{m,n} M_{p,q} = M_{p,n} M_{m,q} - M_{p,m} M_{n,q}, \quad (211)$$

što se zbog (58) slaže sa (64). Indeksi su ovdje cijeli brojevi.

Dalje ne ulazimo u svezu Lommelovih polinoma s verižnim razlomcima.

3. Izrazi za m -te derivacije funkcija $A_n(c\sqrt{t^2-z^2})$ i $A_n[c(t-z)]$.

Prema (8) i (9) vrijedi

$$\frac{\partial}{\partial z} A_n[c(t-z)] = \frac{c^2(t-z)}{2(n+1)} A_{n+1}[c(t-z)] \quad (212)$$

i

$$\frac{\partial}{\partial z} A_n(c\sqrt{t^2-z^2}) = \frac{c^2 z}{2(n+1)} A_{n+1}(c\sqrt{t^2-z^2}). \quad (213)$$

Diferenciramo li (212) m puta, dobijemo očito članove oblika $a(t-z)^n A_{n+q}[c(t-z)]$, ako kod diferenciranja A -funkcije derivaciju uvijek izrazimo prema (212). Ako smo do jednog od tih članova došli time, da smo u bilo kojem poretку diferencirali po potenciji od $t-z$ svega w puta, a po A -funkciji svega $m-w$ puta, i ako uočimo, da diferenciranje po potenciji od $t-z$ snižava njezin eksponent za jednu jedinicu, a diferenciranje A -funkcije povišuje za jednu jedinicu eksponent potencije i red A -funkcije, to je jasno, da dotični član ima oblik $(-1)^w a_w (t-z)^{m-2w} A_{n+m-w}[c(t-z)]$. Dobivamo dakle

$$\frac{\partial^m}{\partial z^m} A_n[c(t-z)] = \sum_{w=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} (-1)^w a_w (t-z)^{m-2w} A_{n+m-w}[c(t-z)]. \quad (214)$$

Gornja granica sume je određena time, da eksponent potencije od $t-z$ ne može postati negativan. Sasvim analogno razmatranje može se provesti na temelju (213), pa se dolazi do relacije

$$\frac{\partial^m}{\partial z^m} A_n(c\sqrt{t^2-z^2}) = \sum_{w=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} a_w z^{m-2w} A_{n+m-w}(c\sqrt{t^2-z^2}), \quad (215)$$

gdje su a_w isti koeficijenti kao u (214). Da te koeficijente odredimo, provest ćemo ovo razmatranje. Razvijemo $A_n(c\sqrt{t^2 - z^2})$ prema (1) po $c\sqrt{t^2 - z^2}$ u red potencija i nadomjestimo potencije od $t^2 - z^2$ njihovim binomnim razvojem:

$$A_n(c\sqrt{t^2 - z^2}) = n! \sum_{w=0}^{\infty} \frac{(-1)^w \left(\frac{c}{2}\right)^{2w} \sum_{v=0}^w (-1)^v \binom{w}{v} t^{2w-2v} z^{2v}}{w! (n+w)!} \quad (216)$$

ili

$$A_n(c\sqrt{t^2 - z^2}) = n! \sum_{w=0}^{\infty} \sum_{v=0}^w \frac{(-1)^{w+v} \left(\frac{c}{2}\right)^{2w} t^{2w-2v} z^{2v}}{v! (w-v)! (n+w)!} \quad (217)$$

Razlikujući slučajeve takog i lihog m stavljamo u prvom slučaju $m = 2r$ (218), a u drugom slučaju $m = 2r + 1$ (219). Diferenciramo li (217) m puta, dobijemo prema (218) odnosno (219)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{2r}}{\partial z^{2r}} A_n(c\sqrt{t^2 - z^2}) = \\ & = n! \sum_{w=r}^{\infty} \sum_{v=r}^w \frac{(-1)^{w+v} \left(\frac{c}{2}\right)^{2w} (2v)! t^{2w-2v} z^{2v-2r}}{(2v-2r)! v! (w-v)! (n+w)!}, \quad (220) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{2r+1}}{\partial z^{2r+1}} A_n(c\sqrt{t^2 - z^2}) = \\ & = n! \sum_{w=r+1}^{\infty} \sum_{v=r+1}^w \frac{(-1)^{w+v} \left(\frac{c}{2}\right)^{2w} (2v)! t^{2w-2v} z^{2v-2r-1}}{(2v-2r-1)! v! (w-v)! (n+w)!}. \quad (221) \end{aligned}$$

Uvedemo li sad nove indekse sumacije

$$\bar{v} = v - r - 1 \quad (222), \quad \bar{w} = w - r - 1, \quad (223)$$

to izlazi:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{2r}}{\partial z^{2r}} A_n(c\sqrt{t^2 - z^2}) = \\ & = n! \left(\frac{c}{2}\right)^{2r} \sum_{w=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\bar{w}} \frac{(-1)^{w+\bar{v}} \left(\frac{c}{2}\right)^{2\bar{w}} (2v+2r)! t^{2\bar{w}-2\bar{v}} z^{2\bar{v}}}{(2v)! (v+r)! (w-v)! (n+r+w)!}, \quad (224) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{2r+1}}{\partial z^{2r+1}} A_n(c \sqrt{t^2 - z^2}) = \\ & = n! \left(\frac{c}{2}\right)^{2r+1} \sum_{\bar{w}=0}^{\infty} \sum_{\bar{v}=0}^{\bar{w}} \frac{(-1)^{\bar{w}+\bar{v}} \left(\frac{c}{2}\right)^{2\bar{w}+1} (2\bar{v} + 2r + 2)! t^{2\bar{w}-2\bar{v}} z^{\bar{v}+1}}{(2\bar{v} + 1)! (\bar{v} + r + 1)! (\bar{w} - \bar{v})! (n + r + \bar{w} + 1)!}. \end{aligned} \quad (225)$$

Stavimo $z = t$:

$$\left\{ \frac{\partial^{2r}}{\partial z^{2r}} A_n(c \sqrt{t^2 - z^2}) \right\}_{z=t} = n! \left(\frac{c}{2}\right)^{2r} \sum_{w=0}^{\infty} \frac{(-1)^w \left(\frac{c}{2}\right)^{2w} A_w t^{2w}}{(n + r + w)!}, \quad (226)$$

gdje je

$$A_w = \sum_{v=0}^w \frac{(-1)^v (2v + 2r)!}{(2v)! (v + r)! (w - v)!} \quad (227)$$

i

$$\left\{ \frac{\partial^{2r+1}}{\partial z^{2r+1}} A_n(c \sqrt{t^2 - z^2}) \right\}_{z=t} = n! \left(\frac{c}{2}\right)^{2r+1} \sum_{w=0}^{\infty} \frac{(-1)^w \left(\frac{c}{2}\right)^{2w+1} B_w t^{2w+1}}{(n + r + w + 1)!}, \quad (228)$$

gdje je

$$B_w = \sum_{v=0}^w \frac{(-1)^v (2v + 2r + 2)!}{(2v + 1)! (v + r + 1)! (w - v)!}. \quad (229)$$

U predašnjem dijelu ove radnje je dokazano:

$$\begin{aligned} A_w &= 0 & \text{za } w > r \\ A_w &= \frac{(-1)^w 2^{2w} (2r)!}{(2w)! (r - w)!} & \text{za } w \leq r \end{aligned} \quad (230)$$

$$\begin{aligned} B_w &= 0 & \text{za } w > r \\ B_w &= \frac{(-1)^w 2^{2w+1} (2r + 1)!}{(2w + 1)! (r - w)!} & \text{za } w \leq r. \end{aligned} \quad (231)$$

Uvrštenje u (226) i (228) daje

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial^{2r}}{\partial z^{2r}} A_n(c \sqrt{t^2 - z^2}) \right\}_{z=t} = \\ & = n! \left(\frac{c}{2}\right)^{2r} (2r)! \sum_{w=0}^r \frac{c^{2w} t^{2w}}{(2w)! (r - w)! (n + r + w)!}, \end{aligned} \quad (232)$$

$$\left\{ \frac{\partial^{2r+1}}{\partial z^{2r+1}} A_n(c \sqrt{t^2 - z^2}) \right\}_{z=t} =$$

$$= n! \left(\frac{c}{2} \right)^{2r+1} (2r+1)! \sum_{w=0}^r \frac{c^{2w+1} t^{2w+1}}{(2w+1)! (r-w)! (n+r+w+1)!} \quad (233)$$

Uvedemo li nov indeks sumacije i to $\bar{w} = r - w$ (234), to možemo obje formule sažeti u jednu upotreblivši (218), (219):

$$\left\{ \frac{\partial^n}{\partial z^n} A_n(c \sqrt{t^2 - z^2}) \right\}_{z=t} = n! \left(\frac{c}{2} \right)^m m! \sum_{w=0}^{\left[\frac{m}{2} \right]} \frac{c^{m-2w} t^{m-2w}}{(m-2w)! w! (n+m-w)!} \quad (235)$$

Stavimo li u (215) $z = t$ i uočimo, da je prema (1) $A_n(0) = 1$ (236), to izlazi

$$\left\{ \frac{\partial^m}{\partial z^m} A_n(c \sqrt{t^2 - z^2}) \right\}_{z=t} = \sum_{w=0}^{\left[\frac{m}{2} \right]} a_w t^{m-2w} \quad (237)$$

Poredba od (235) i (237) daje tražene koeficijente a_w :

$$a_w = \frac{n! m! c^{2m-2w}}{2^m w! (m-2w)! (m+n-w)!} \quad (238)$$

Uvrstimo li to u (214) i (215), dobijemo konačno:

$$\frac{\partial^m}{\partial z^m} A_n[c(t-z)] =$$

$$= \sum_{w=0}^{\left[\frac{m}{2} \right]} \frac{(-1)^w n! m! c^{2m-2w} (t-z)^{m-2w} A_{n+m-w}[c(t-z)]}{2^m w! (m-2w)! (n+m-w)!}, \quad (239)$$

$$\frac{\partial^m}{\partial z^m} A_n(c \sqrt{t^2 - z^2}) = \sum_{w=0}^{\left[\frac{m}{2} \right]} \frac{n! m! c^{2m-2w} z^{m-2w} A_{n+m-w}(c \sqrt{t^2 - z^2})}{2^m w! (m-2w)! (n+m-w)!} \quad (240)$$

Stavimo li u (240) $z = i\bar{t}$, $t = i\bar{z}$, (241), pa naknadno opet ispuštimo poteze nad z i t , to dobijemo:

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m} A_n(c\sqrt{t^2-z^2}) =$$

$$= \sum_{w=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{(-1)^{m-w} n! m! c^{2m-2w} t^{m-2w} A_{n+m-w}(c\sqrt{t^2-z^2})}{2^m w! (m-2w)! (n+m-w)!}. \quad (242)$$

Zanimljive su još dvije relacije, koje istina kasnije ne ćemo trebati. Budući da se u (224) i (225) radi o apsolutno konvergentnim redovima, to možemo članove poredati kako hoćemo. Uvedemo li dakle mjesto w novi indeks sumacije $\bar{w} = w + v$ (243), to izlazi

$$\frac{\partial^{2r}}{\partial z^{2r}} A_n(c\sqrt{t^2-z^2}) =$$

$$= n! \left(\frac{c}{2}\right)^{2r} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{\left(\frac{c}{2}\right)^{2v} (2v+2r)! z^{2v}}{(2v)! (v+r)!} \sum_{w=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\bar{w}} \left(\frac{c}{2}\right)^{2\bar{w}} t^{2\bar{w}}}{w! (n+r+v+w)!} \right), \quad (244)$$

$$\frac{\partial^{2r+1}}{\partial z^{2r+1}} A_n(c\sqrt{t^2-z^2}) =$$

$$= n! \left(\frac{c}{2}\right)^{2r+1} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{\left(\frac{c}{2}\right)^{2v+1} (2v+2r+2)! z^{2v+1}}{(2v+1)! (v+r+1)!} \sum_{w=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\bar{w}} \left(\frac{c}{2}\right)^{2\bar{w}} t^{2\bar{w}}}{w! (n+r+v+w+1)!} \right) \quad (245)$$

ili s obzirom na (1):

$$\frac{\partial^{2r}}{\partial z^{2r}} A_n(c\sqrt{t^2-z^2}) =$$

$$= n! \left(\frac{c}{2}\right)^{2r} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{c}{2}\right)^{2v} (2v+2r)! z^{2v}}{(2v)! (v+r)! (n+r+v)!} A_{n+r+v}(ct), \quad (246)$$

$$\frac{\partial^{2r+1}}{\partial z^{2r+1}} A_n(c\sqrt{t^2-z^2}) =$$

$$= n! \left(\frac{c}{2}\right)^{2r+1} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{c}{2}\right)^{2v+1} (2v+2r+2)! z^{2v+1}}{(2v+1)! (v+r+1)! (n+r+v+1)!} A_{n+r+v+1}(ct). \quad (247)$$

Ove su formule razvoji po potencijama od z , a mogu se shvatiti i kao Neumannovi razvoji³⁵ po varijabli t .

³⁵ Watson, 1611.

4. Redukcija integrala $\int_X^t x^n A_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx$.

Ako u (6) stavimo $n=1$, $z=\sqrt{t^2-x^2}$ i jednakost pomnožimo sa x^n , dobijemo

$$x^n A_0(c\sqrt{t^2-x^2}) = x^n A_1(c\sqrt{t^2-x^2}) + \\ + \frac{c^2 x^{n+2}}{8} A_2(c\sqrt{t^2-x^2}) - \frac{c^2 t^2 x^n}{8} A_2(c\sqrt{t^2-x^2}). \quad (248)$$

Dalje izlazi iz (9)

$$x A_{n+1}(c\sqrt{t^2-x^2}) = \frac{2(n+1)}{c^2} \frac{\partial}{\partial x} A_n(c\sqrt{t^2-x^2}) \quad (249)$$

i prema tome parcijalnom integracijom

$$\int_X^t x^n A_1(c\sqrt{t^2-x^2}) dx = \\ = \frac{2t^{n-1}}{c^2} - \frac{2X^{n-1}}{c^2} A_0(c\sqrt{t^2-X^2}) - \frac{2(n-1)}{c^2} \int_X^t x^{n-2} A_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx, \quad (250) \\ \int_X^t x^{n+2} A_2(c\sqrt{t^2-X^2}) dx = \\ = \frac{4t^{n+1}}{c^2} - \frac{4X^{n+1}}{c^2} A_1(c\sqrt{t^2-X^2}) - \frac{4(n+1)}{c^2} \int_X^t x^n A_1(c\sqrt{t^2-x^2}) dx = \\ = \frac{4t^{n+1}}{c^2} - \frac{4X^{n+1}}{c^2} A_1(c\sqrt{t^2-X^2}) - \frac{8(n+1)t^{n-1}}{c^4} + \\ + \frac{8(n+1)X^{n-1}}{c^4} A_0(c\sqrt{t^2-X^2}) + \frac{8(n+1)(n-1)}{c^4} \int_X^t x^{n-2} A_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx, \quad (251)$$

$$\int_X^t x^n A_2(c\sqrt{t^2-x^2}) dx = \frac{4t^{n-1}}{c^2} - \frac{4X^{n-1}}{c^2} A_1(c\sqrt{t^2-X^2}) - \frac{8(n-1)t^{n-3}}{c^4} + \\ + \frac{8(n-1)X^{n-3}}{c^4} A_0(c\sqrt{t^2-X^2}) + \frac{8(n-1)(n-3)}{c^4} \int_X^t x^{n-4} A_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx. \quad (252)$$

Pri tome za $n \geq 4$ vrijede sve tri relacije (250), (251), (252). Za $n = 3$ otpada u (252) zadnji član, dok ostale dvije jednakosti vrijede nepromijenjeno, za $n = 2$ relacija (250) vrijedi nepromijenjeno, isto tako (251), dok umjesto (252) dolazi

$$\int_X^t x^2 A_2(c \sqrt{t^2 - x^2}) dx = \\ = \frac{4t}{c^2} - \frac{4X}{c^2} A_1(c \sqrt{t^2 - X^2}) - \frac{4}{c^2} \int_X^t A_1(c \sqrt{t^2 - x^2}) dx. \quad (253)$$

Za $n = 1$ u (250) otpada zadnji član, isto tako u (251), dok u (252) otpadaju zadnja tri člana.

Integriramo li (248) po x od X do t i nadomjestimo integrale na desnoj strani s pomoću (250), (251), (252), odnosno (253), dobijemo za $n = 1$:

$$\int_X^t x A_0(c \sqrt{t^2 - x^2}) dx = \frac{t^2 - X^2}{2} A_1(c \sqrt{t^2 - X^2}), \quad (254)$$

za $n = 2$:

$$\int_X^t x^2 A_0(c \sqrt{t^2 - x^2}) dx = \frac{1}{c^2} \int_X^t A_0(c \sqrt{t^2 - x^2}) dx + \frac{t^2}{2} \int_X^t A_1(c \sqrt{t^2 - x^2}) dx + \\ + \frac{X(t^2 - X^2)}{2} A_1(c \sqrt{t^2 - X^2}) + \frac{X}{c^2} A_0(c \sqrt{t^2 - X^2}) - \frac{t}{c^2}, \quad (255)$$

za $n = 3$, uzevši još u obzir (254),

$$\int_X^t x^3 A_0(c \sqrt{t^2 - x^2}) dx = \frac{4}{c^2} \int_X^t x A_0(c \sqrt{t^2 - x^2}) dx - \frac{2(t^2 - X^2)}{c^2} A_0(c \sqrt{t^2 - X^2}) + \\ + \frac{X^2(t^2 - X^2)}{2} A_1(c \sqrt{t^2 - X^2}) = \\ = \left(\frac{2}{c^2} + \frac{X^2}{2} \right) (t^2 - X^2) A_1(c \sqrt{t^2 - X^2}) - \frac{2(t^2 - X^2)}{c^2} A_0(c \sqrt{t^2 - X^2}), \quad (256)$$

za $n \geq 4$:

$$\begin{aligned} \int_X^t x^n \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx &= \frac{(n-1)^2}{c^2} \int_X^t x^{n-2} \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx - \\ &- \frac{(n-1)(n-3)t^2}{c^2} \int_X^t x^{n-1} \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx - \frac{(n-1)X^{n-3}(t^2-X^2)}{c^2} \Lambda_0(c\sqrt{t^2-X^2}) + \\ &+ \frac{X^{n-1}(t^2-X^2)}{2} \Lambda_1(c\sqrt{t^2-X^2}). \end{aligned} \quad (257)$$

Razmotrimo sad nešto općenitije slijed veličina $Q_0, Q_1, Q_2, \dots$, od kojih su prve četiri, t. j. Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 , zadane, dok su ostale određene jednačbom rekurzije

$$Q_n = \frac{(n-1)^2}{c^2} Q_{n-2} - \frac{(n-1)(n-3)t^2}{c^2} Q_{n-1} + (n-1)X^{n-3}R + X^{n-3}T, \quad (258)$$

gdje su R i T zadane veličine. Jasno je, da Q_1 i Q_3 određuju sve Q_n s lihim n , dok Q_0 i Q_2 određuju sve Q_n s takim n . Stavimo li za liho n

$$n = 2m + 1, \quad (259)$$

to (258) dobiva oblik

$$Q_{2m+1} = \frac{4m^2}{c^2} Q_{2m-1} - \frac{4m(m-1)t^2}{c^2} Q_{2m-3} + 2mX^{2m-2}R + X^{2m-2}T. \quad (260)$$

Za tako n stavimo $n = 2m$ (261) i dobijemo umjesto (258)

$$Q_{2m} = \frac{(2m-1)^2}{c^2} Q_{2m-2} - \frac{(2m-1)(2m-3)t^2}{c^2} Q_{2m-4} + (2m-1)X^{2m-3}R + X^{2m-3}T. \quad (262)$$

Prema rečenom (258) vrijedi za $n \geq 4$, tako da (260) i (262) vrijede za $m \geq 2$.

Tvrdimo, da za $m \geq 2$ vrijede ove direktne formule:

$$\begin{aligned} Q_{2m+1} &= Q_1 \sum_{s=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s} m! (m-s-1)! (m-s+1)! t^{2s}}{(m-2s)! (s-1)! (s+1)! c^{2m-2s}} + \\ &+ Q_3 \sum_{s=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s-2} m! (m-s-1)! (m-s)! t^{2s}}{(m-2s-1)! s! (s+1)! c^{2m-2s-2}} + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{\substack{r+s \leq m \\ r, s \\ r \geq 2 \\ s \geq 0}} \left(R + \frac{T}{2r} \right) \frac{(-1)^s 2^{2m-2r-2s+1} m! (m-r-s)! (m-s)! X^{2r-2} t^{2s}}{(m-r-2s)! (r-1)! s! (r+s)! c^{2m-2r-2s}}, \quad (263)$$

$$Q_{2m} = Q_0 \sum_{s=1}^{\left[\frac{m}{2} \right]} \frac{s (-1)^s (2m)! (2m-2s+1)! t^{2s}}{(m-s) 2^{2m-2s} m! (m-2s)! (2s+1)! c^{2m-2s}} +$$

$$+ Q_2 \sum_{s=0}^{\left[\frac{m-1}{2} \right]} \frac{(-1)^s (2m)! (2m-2s-1)! t^{2s}}{2^{2m-2s-1} m! (m-2s-1)! (2s+1)! c^{2m-2s-2}} +$$

$$+ \sum_{\substack{r+s \leq m \\ r, s \\ r \geq 2 \\ s \geq 0}} \left(R + \frac{T}{2r-1} \right) \frac{(-1)^s (m-r-s)! (2m)! (r-1)! (2m-2s)! (r+s)! X^{2r-3} t^{2s}}{2^{2m-2r-2s+1} (m-r-2s)! m! (2r-2)! (m-s)! (2r+2s)! s! c^{2m-2r-2s}}. \quad (264)$$

Stavimo li u tim formulama $m=2$, to je lako vidjeti, da se za taj slučaj podudaraju s formulama (260), (262), t. j. glase:

$$Q_5 = \frac{16}{c^2} Q_3 - \frac{8t^2}{c^2} Q_1 + 4X^2R + X^2T, \quad (265)$$

$$Q_4 = \frac{9}{c^2} Q_2 - \frac{3t^2}{c^2} Q_0 + 3XR + XT. \quad (266)$$

Dalje za $m=3$ formule (260) i (262) uz primjenu od (265) i (266) daju:

$$Q_7 = Q_5 \left(\frac{576}{c^4} - \frac{24t^2}{c^2} \right) - \frac{288t^2}{c^4} Q_3 + R \left(\frac{144X^4}{c^2} + 6X^4 \right) + T \left(\frac{36X^2}{c^2} + X^4 \right), \quad (267)$$

$$Q_8 = Q_2 \left(\frac{225}{c^4} - \frac{15t^2}{c^2} \right) - \frac{75t^2}{c^4} Q_0 + R \left(\frac{75X}{c^2} + 5X^3 \right) + T \left(\frac{25X}{c^2} + X^3 \right). \quad (268)$$

Lako je vidjeti, da i (263) i (264) za $m=3$ daju te iste izraze. Formule (263), (264) ispravne su dakle za $m=2$ i $m=3$. Treba još dokazati, da za $m \geq 4$ zadovoljavaju jednadžbe rekurzije (260), (262). Provest ćemo taj dokaz najprije za (263).

Uvrstimo izraz (263) u (260) i uzmimo najprije u obzir članove sa Q_1 . Dobijemo

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s} m! (m-s-1)! (m-s+1)! t^{2s}}{(m-2s)! (s-1)! (s+1)! c^{2m-2s}} = \\ &= \frac{4m^2}{c^2} \sum_{s=1}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s-2} (m-1)! (m-s-2)! (m-s)! t^{2s}}{(m-2s-1)! (s-1)! (s+1)! c^{2m-2s-2}} + \\ &+ \frac{2m(2m-2)}{c^2} \sum_{s=\frac{m}{2}}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s-2} (m-2)! (m-s-2)! (m-s)! t^{2s}}{(m-2s)! (s+2)! s! c^{2m-2s-2}}, \quad (269) \end{aligned}$$

pri čemu smo u zadnjoj sumi stavili $s = s - 1$ i naknadno ispuštali potez nad s . Time je postignuto, da eksponent od t u općem članu svih triju suma bude isti. Pretpostavimo sad

$$2 \leq s \leq \frac{m-1}{2} \quad (270)$$

i svedimo opće članove suma na zajednički nazivnik

$$(m-2s)! (s-1)! (s+1)! c^{2m-2s}.$$

Brojnici onda daju

$$\begin{aligned} & (-1)^s 2^{2m-2s} m! (m-s-1)! (m-s+1)! t^{2s} = \\ &= 4m^2 (m-2s) (-1)^s 2^{2m-2s-2} (m-1)! (m-s-2)! (m-s)! t^{2s} + \\ &+ 2m(2m-2) (-1)^s (s-1)(s+1) 2^{2m-2s-2} (m-2)! (m-s-2)! (m-s)! t^{2s}. \quad (271) \end{aligned}$$

Podijelimo li sa $(-1)^s 2^{2m-2s} m! (m-s-2)! (m-s)! t^{2s}$, dobijemo

$$(m-s-1)(m-s+1) = m(m-2s) + (s-1)(s+1), \quad (272)$$

što je ispravno. Za $s=1$ posljednja suma ne prinosi ništa, a ostale dvije daju

$$- \frac{2^{2m-2} m! (m-2)! m! t^2}{(m-2)! 0! 2! c^{2m-2}} = - \frac{4m^2 2^{2m-4} (m-1)! (m-3)! (m-1)! t^2}{(m-3)! 0! 2! c^{2m-2}}, \quad (273)$$

što je ispravno. Za slučaj takog m može biti $s = \frac{m}{2} = p$; pa u tom slučaju prva suma desno u (269) ne prinosi ništa, a druge dvije daju

$$\frac{(-1)^p 2^{2p} (2p)! (p-1)! (p+1)! t^{2p}}{0! (p-1)! (p+1)! c^{2p}} =$$

$$= \frac{4p(4p-2)(-1)^p 2^{2p-2} (2p-2)! (p-2)! p! t^{2p}}{0! (p-2)! p! c^{2p}}, \quad (274)$$

što je ispravno. Jednakost (269) dakle vrijedi.

Uzmimo sad u obzir članove sa Q_3 :

$$\sum_{s=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s-2} m! (m-s-1)! (m-s)! t^{2s}}{(m-2s-1)! s! (s+1)! c^{2m-2s-2}} +$$

$$+ \frac{4m^2}{c^2} \sum_{s=0}^{\left[\frac{m-2}{2}\right]} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s-4} (m-1)! (m-s-2)! (m-s-1)! t^{2s}}{(m-2s-2)! s! (s+1)! c^{2m-2s-4}} +$$

$$+ \frac{2m(2m-2)}{c^2} \sum_{s=1}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s-4} (m-2)! (m-s-2)! (m-s-1)! t^{2s}}{(m-2s-1)! (s-1)! s! c^{2m-2s-4}}. \quad (275)$$

I ovdje smo u zadnjoj sumi stavili $s = s-1$ i umjesto s opet pisali s . Neka je

$$1 \leq s \leq \frac{m-2}{2}. \quad (276)$$

Svedemo li opće članove na nazivnik

$$(m-2s-1)! s! (s+1)! c^{2m-2s-2},$$

to brojnici daju

$$(-1)^s 2^{2m-2s-2} m! (m-s-1)! (m-s)! t^{2s} =$$

$$= (m-2s-1) 4m^2 (-1)^s 2^{2m-2s-4} (m-1)! (m-s-2)! (m-s-1)! t^{2s} +$$

$$+ 2m(2m-2)s(s+1)(-1)^s 2^{2m-2s-4} (m-2)! (m-s-2)! (m-s-1)! t^{2s}. \quad (277)$$

Razdijelimo sa $(-1)^s 2^{2m-2s-2} m! (m-s-2)! (m-s-1)! t^{2s}$, pa dobijemo

$$(m-s-1)(m-s) = (m-2s-1)m + s(s+1), \quad (278)$$

što je ispravno.

Za $s=0$ dobijemo

$$\frac{2^{2m-2} m! (m-1)! m!}{(m-1)! 0! 1! c^{2m-2}} = \frac{4m^2 2^{2m-4} (m-1)! (m-2)! (m-1)!}{(m-2)! 0! 1! c^{2m-2}}, \quad (279)$$

što je ispravno.

Za slučaj lihog m može biti $s = \frac{m-1}{2} = p$, pa dobijemo

$$\frac{(-1)^p 2^{2p} (2p+1)! p! (p+1)! t^{2p}}{0! p! (p+1)! c^{2p}} =$$

$$= \frac{2(2p+1) 4p (-1)^p 2^{2p-2} (2p-1)! (p-1)! p! t^{2p}}{0! (p-1)! p! c^{2p}}, \quad (280)$$

što je ispravno. Jednakost (275) dakle vrijedi.

Uzmimo dalje u obzir članove sa R :

$$\sum_{\substack{r+s \leq m \\ r, s \\ r \geq 2 \\ s \geq 0}} \frac{(-1)^s 2^{2m-2r-2s+1} m! (m-r-s)! (m-s)! X^{2r-2} t^{2s}}{(m-r-2s)! (r-1)! s! (r+s)! c^{2m-2s}} =$$

$$= \frac{4m^2}{c^2} \sum_{\substack{r+s \leq m-1 \\ r, s \\ r \geq 2 \\ s \geq 0}} \frac{(-1)^s 2^{2m-2r-2s-1} (m-1)! (m-r-s-1)! (m-s-1)! X^{2r-2} t^{2s}}{(m-r-2s-1)! (r-1)! s! (r+s)! c^{2m-2s-2}} +$$

$$+ \frac{4m(m-1)}{c^2} \sum_{\substack{r+s \leq m \\ r, s \\ r \geq 2 \\ s \geq 1}} \frac{(-1)^s 2^{2m-2r-2s-1} (m-2)! (m-r-s-1)! (m-s-1)! X^{2r-2} t^{2s}}{(m-r-2s)! (r-1)! (s-1)! (r+s-1)! c^{2m-2s-2}} +$$

$$+ 2m X^{2m-2}, \quad (281)$$

gdje u zadnjoj sumi opet stavljamo $s = s-1$ i zatim mjesto s pišemo s .

Neka je

$$2 \leq r \leq m-3 \quad (282) \qquad 1 \leq s \leq \frac{m-r-1}{2}, \quad (283)$$

$$\text{dakle} \qquad r+2s \leq m-1. \quad (284)$$

Svedimo opće članove suma u (281) na zajednički nazivnik $(m-r-2s)! (r-1)! s! (r+s)! c^{2m-2s}$. Brojnici daju

$$(-1)^s 2^{2m-2r-2s+1} m! (m-r-s)! (m-s)! X^{2r-2} t^{2s} =$$

$$= 4m^2 (m-r-2s) (-1)^s 2^{2m-2r-2s-1} (m-1)! (m-r-s-1)! (m-s-1)! X^{2r-2} t^{2s} +$$

$$+ 4m(m-1)s(r+s) (-1)^s 2^{2m-2r-2s-1} (m-2)! (m-r-s-1)! (m-s-1)! X^{2r-2} t^{2s}. \quad (285)$$

Dioba sa $(-1)^s 2^{2m-2r-2s+1} m! (m-r-s-1)! (m-s-1)! X^{2r-2} t^{2s}$ daje

$$(m-r-s)(m-s) = m(m-r-2s) + s(r+s), \quad (286)$$

što je ispravno. Neka je dalje

$$2 \leq r \leq m-1 \quad (287), \quad s = 0. \quad (288)$$

Dobijemo

$$\frac{2^{2m-2r+1} m! (m-r)! m!}{(m-r)! (r-1)! 0! r!} = \frac{4m^2 2^{2m-2r-1} (m-1)! (m-r-1)! (m-1)!}{(m-r-1)! (r-1)! 0! r!}, \quad (289)$$

što je ispravno. Ako je

$$r+2s=m, \quad r=m-2s \quad (290), \quad r \geq 2, \quad s \geq 1, \quad (291)$$

izlazi

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^s 2^{2s+1} m! s! (m-s)!}{0! (m-2s-1)! s! (m-s)!} = \\ & = \frac{4m(m-1)(-1)^s 2^{2s-1} (m-2)! (s-1)! (m-s-1)!}{0! (m-2s-1)! (s-1)! (m-s-1)!}, \quad (292) \end{aligned}$$

što je ispravno. Ako je konačno

$$r=m, \quad s=0, \quad (293)$$

to imamo

$$\frac{2m! 0! m! X^{2m-2}}{0! (m-1)! 0! m!} = 2m X^{2m-2}, \quad (294)$$

što je ispravno. Formula (281) dakle vrijedi.

Članovi sa T daju istu jednakost (281), samo što su opći članovi suma podijeljeni sa $2r$, a zadnji član desne strane jednakosti podijeljen je sa $2m$. Očito i tu račun potvrđuje ispravnost. Time je konačno dokazana formula (281).

Postupak za dokaz formule (264) sasvim je analogan.

Uvrstimo (264) u (262) i uzmimo u obzir članove sa Q_0 :

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{(-1)^s s (2m)! (2m-2s+1)! t^{2s}}{(m-s) 2^{2m-2s} m! (m-2s)! (2s+1)! c^{2m-2s}} = \\ & = \frac{(2m-1)^2}{c^3} \sum_{s=1}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \frac{(-1)^s s (2m-2)! (2m-2s-1)! t^{2s}}{(m-s-1) 2^{2m-2s-2} (m-1)! (m-2s-1)! (2s+1)! c^{2m-2s-2}} + \\ & + \frac{(2m-1)(2m-3)}{c^2} \sum_{s=2}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{(-1)^s (s-1) (2m-4)! (2m-2s-1)! t^{2s}}{(m-s-1) 2^{2m-2s-2} (m-2)! (m-2s)! (2s-1)! c^{2m-2s-2}}. \quad (295) \end{aligned}$$

Pretpostavimo (270) i svedimo opće članove na nazivnik

$$(m-s)(m-s-1)2^{2m-2s}m!(m-2s)!(2s+1)!c^{2m-2s}.$$

Brojnici daju

$$\begin{aligned} & (m-s-1)(-1)^s s(2m)!(2m-2s+1)!t^{2s} = \\ & = (2m-1)^2(m-s)s^2 m(m-2s)(-1)^s s(2m-2)!(2m-2s-1)!t^{2s} + \\ & + (2m-1)(2m-3)(m-s)2^2 m(m-1)2s(2s+1)(-1)^s \cdot \\ & \cdot (s-1)(2m-4)!(2m-2s-1)!t^{2s}. \end{aligned} \quad (296)$$

Dioba sa $(-1)^s s(2m)!(2m-2s)!$ daje

$$(m-s-1)(2m-2s+1) = (m-2s)(2m-1) + (s-1)(2s+1), \quad (297)$$

što je ispravno.

Za $s=1$ izlazi iz (295)

$$\begin{aligned} & - \frac{1 \cdot (2m)!(2m-1)!t^2}{(m-1)2^{m-2}m!(m-2)!3!c^{2m-2}} = \\ & = - \frac{(2m-1)^2 1(2m-2)!(2m-3)!t^2}{(m-2)2^{2m-4}(m-1)!(m-3)!3!c^{2m-2}}, \end{aligned} \quad (298)$$

što je ispravno. Za slučaj takog m može biti $s = \frac{m}{2} = p$, i dobijemo

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^p p(4p)!(2p+1)!t^{2p}}{p \cdot 2^{2p}(2p)!0!(2p+1)!c^{2p}} = \\ & = \frac{(4p-1)(4p-3)(-1)^p(p-1)(4p-4)!(2p-1)!t^{2p}}{(p-1)2^{2p-2}(2p-2)!0!(2p-1)!c^{2p}}, \end{aligned} \quad (299)$$

što je ispravno. Jednakost (295) dakle vrijedi.

Članovi sa Q_2 daju:

$$\begin{aligned} & \sum_{s=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \frac{(-1)^s(2m)!(2m-2s-1)!t^{2s}}{2^{2m-2s-1}m!(m-2s-1)!(2s+1)!c^{2m-2s-2}} = \\ & = \frac{(2m-1)^2}{c^2} \sum_{s=0}^{\left[\frac{m-2}{2}\right]} \frac{(-1)^s(2m-2)!(2m-2s-3)!t^{2s}}{2^{2m-2s-3}(m-1)!(m-2s-2)!(2s+1)!c^{2m-2s-4}} + \\ & + \frac{(2m-1)(2m-3)}{c^2} \sum_{s=1}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \frac{(-1)^s(2m-4)!(2m-2s-3)!t^{2s}}{2^{2m-2s-3}(m-2)!(m-2s-1)!(2s-1)!c^{2m-2s-4}}. \end{aligned} \quad (300)$$

Pretpostavimo (276) i svedimo opće članove na nazivnik $2^{2m-2s-1} m! (m-2s-1)! (2s+1)! c^{2m-2s-2}$. Brojnici daju

$$\begin{aligned} & (-1)^s (2m)! (2m-2s-1)! t^{2s} = \\ & = (2m-1)^2 2^2 m(m-2s-1) (-1)^s (2m-2)! (2m-2s-3)! t^{2s} + \\ & + (2m-1) (2m-3) 2^2 m(m-1) 2s(2s+1) (-1)^s (2m-4)! (2m-2s-3)! t^{2s}. \end{aligned} \quad (301)$$

Dioba sa $(-1)^s (2m)! (2m-2s-3)!$ daje

$$(2m-2s-2) (2m-2s-3) = 2(m-2s-1) (2m-1) + 2s(2s+1), \quad (302)$$

što je ispravno. Za $s=0$ proizlazi iz (300)

$$\frac{(2m)! (2m-1)!}{2^{2m-1} m! (m-1)! 1! c^{2m-2}} = \frac{(2m-1)^2 (2m-2)! (2m-3)!}{2^{2m-3} (m-1)! (m-2)! 1! c^{2m-2}}, \quad (303)$$

što je ispravno. Za slučaj lihog m može biti $s = \frac{m-1}{2} = p$, pa dobijemo

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^p (4p+2)! (2p+1)! t^{2p}}{2^{2p+1} (2p+1)! 0! (2p+1)! c^{2p}} = \\ & = \frac{(4p+1) (4p-1) (-1)^p (4p-2)! (2p-1)! t^{2p}}{2^{2p-1} (2p-1)! 0! (2p-1)! c^{2p}}. \end{aligned} \quad (304)$$

što je ispravno. Jednakost (300) dakle vrijedi.

Članovi sa R daju:

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{r+s \leq m \\ r, s \\ r \geq 2 \\ s \geq 0}} \frac{(-1)^s (m-r-s)! (2m)! (r-1)! (2m-2s)! (r+s)! X^{2r-3} t^{2s}}{2^{2m-2r-2s+1} (m-r-2s)! m! (2r-2)! (m-s)! (2r+2s)! s! c^{2m-2r-2s}} = \\ & = \frac{(2m-1)^2}{c^3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{r+2s \leq m-1 \\ r, s \\ r \geq 2 \\ s \geq 0}} \frac{(-1)^s (m-r-s-1)! (2m-2)! (r-1)! (2m-2s-2)! (r+s)! X^{2r-3} t^{2s}}{2^{2m-2r-2s-1} (m-r-2s-1)! (m-1)! (2r-2)! (m-s-1)! (2r+2s)! s! c^{2m-2r-2s-2}} + \\ & + \frac{(2m-1) (2m-3)}{c^3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{r+2s \leq m \\ r, s \\ r \geq 2 \\ s \geq 1}} \frac{(-1)^s (m-r-s-1)! (2m-4)! (r-1)! (2m-2s-2)! (r+s-1)! X^{2r-3} t^{2s}}{2^{2m-2r-2s-1} (m-r-2s)! (m-2)! (2r-2)! (m-s-1)! (2r+2s-2)! (s-1)! c^{2m-2r-2s-2}} + \\ & + (2m-1) X^{2m-3}. \end{aligned} \quad (305)$$

Neka vrijedi (282), (283), (284), pa svedimo opće članove na nazivnik

$$(-1)^s 2^{2m-2r-2s+1} (m-r-2s)! m! (2r-2)! (m-s)! (2r+2s)! s! c^{2m-2r-2s}.$$

Brojnici daju

$$\begin{aligned} & (-1)^s (m-r-s)! (2m)! (r-1)! (2m-2s)! (r+s)! X^{2r-3} t^{2s} = \\ & = (2m-1)^2 2^2 (m-r-2s) m(m-s) (-1)^s (m-r-s-1)! (2m-2)! \cdot \\ & \quad \cdot (r-1)! (2m-2s-2)! (r+s)! X^{2r-3} t + \\ & + (2m-1)(2m-3) 2^2 m(m-1)(m-s)(2r+2s)(2r+2s-1)s(-1)^s \cdot \\ & \cdot (m-r-s-1)! (2m-4)! (r-1)! (2m-2s-2)! (r+s-1)! X^{2r-3} t^{2s}. \quad (306) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dioba sa } & (-1)^s (m-r-s-1)! (2m)! (r-1)! (2m-2s-2)! (r+s)! \cdot \\ & \cdot X^{2r-3} t^{2s} \text{ daje } (m-r-s)(2m-2s)(2m-2s-1) = \\ & = (2m-1)2(m-r-2s)(m-s) + 2(m-s)(2r+2s-1)s, \quad (307) \end{aligned}$$

što je ispravno. Pretpostavimo li dalje (287), (288), to dobijemo

$$\begin{aligned} & \frac{(m-r)! (2m)! (r-1)! (2m)! r! X^{2r-3}}{2^{2m-2r+1} (m-r)! m! (2r-2)! m! (2r)! 0! c^{2m-2r}} = \\ & = \frac{(2m-1)^2 (m-r-1)! (2m-2)! (r-1)! (2m-2)! r! X^{2r-3}}{2^{2m-2r-1} (m-r-1)! (m-1)! (2r-2)! (m-1)! (2r)! 0! c^{2m-2r}}, \quad (308) \end{aligned}$$

što je ispravno. Ako vrijedi (290), (291), izlazi

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^s s! (2m)! (m-2s-1)! (2m-2s)! (m-s)! X^{2m-4s-3} t^{2s}}{2^{2s+1} 0! m! (2m-4s-2)! (m-s)! (2m-2s)! s! c^{2s}} = \\ & = \frac{(2m-1)(2m-3)(-1)^s (s-1)! (2m-4)! (m-2s-1)! (2m-2s-2)! (m-s-1)! X^{2r-3} t^{2s}}{2^{2s-1} 0! (m-2)! (2m-4s-2)! (m-s-1)! (2m-2s-2)! (s-1)! c^{2s}}, \quad (3) \end{aligned}$$

što je ispravno. Pretpostavimo li konačno (293), to imamo

$$\frac{0! (2m)! (m-1)! (2m)! m! X^{2m-3}}{2 \cdot 0! m! (2m-2)! m! (2m)! 0!} = (2m-1) X^{2m-3}, \quad (310)$$

što je ispravno. Formula (305) dakle vrijedi.

Članovi sa T daju istu jednakost (305), samo što su opći članovi suma podijeljeni sa $2r-1$, a zadnji član desne strane jednakosti podijeljen je sa $2m-1$. Očito i ovdje račun potvrđuje ispravnost.

Time je konačno i formula (264) dokazana.

Stavimo sad

$$Q_n = \int_X^t x^n \Lambda_0 (c \sqrt{t^2 - x^2}) dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (311)$$

$$R = -\frac{t^2 - X^2}{c^2} \Lambda_0 (c \sqrt{t^2 - X^2}) \quad (312)$$

$$T = X^2 \frac{t^2 - X^2}{2} \Lambda_1 (c \sqrt{t^2 - X^2}) \quad (313)$$

i prema (311), (254), (255), (256)

$$Q_0 = \int_X^t \Lambda_0 (c \sqrt{t^2 - x^2}) dx \quad (314)$$

$$Q_1 = \frac{t^2 - X^2}{2} \Lambda_1 (c \sqrt{t^2 - X^2}) \quad (315)$$

$$Q_2 = \frac{1}{c^2} \int_X^t \Lambda_0 (c \sqrt{t^2 - x^2}) dx + \frac{t^2}{2} \int_X^t \Lambda_1 (c \sqrt{t^2 - x^2}) dx + \\ + \frac{X(t^2 - X^2)}{2} \Lambda_1 (c \sqrt{t^2 - X^2}) + \frac{X}{c^2} \Lambda_0 (c \sqrt{t^2 - X^2}) - \frac{t}{c^2} \quad (316)$$

$$Q_3 = \left(\frac{2}{c^2} + \frac{X^2}{2} \right) (t^2 - X^2) \Lambda_1 (c \sqrt{t^2 - X^2}) - \frac{2(t^2 - X^2)}{c^2} \Lambda_0 (c \sqrt{t^2 - X^2}) \quad (317)$$

Uvrstimo li (311), (312), (313) u (258), dobijemo prvotnu jednadžbu rekurzije (257), pa prema tome uvrštenje izraza (311) do (317) u formule (263), (264) mora dati direktne formule za redukciju integrala

$$\int_X^t x^n \Lambda_0 (c \sqrt{t^2 - x^2}) dx.$$

Uvrstimo spomenute izraze najprije u (263). Tvrdimo, da se dobivena formula može dovesti u oblik

$$\int_X^t x^{2m+1} \Lambda_0 (c \sqrt{t^2 - x^2}) dx = \\ = \frac{t^2 - X^2}{2} \left\{ \Lambda_1 (c \sqrt{t^2 - X^2}) \right\}.$$

$$\sum_{\substack{r+s \leq m \\ r, s \\ r \geq 0 \\ s \geq 0}} \frac{(-1)^s 2^{2m-2r-2s} m! (m-r-s)! (m-s)! X^{2r} t^{2s}}{(m-r-2s)! r! s! (r+s)! c^{2m-2r-2s}}$$

$$\begin{aligned}
& - \Lambda_0 (c \sqrt{t^2 - X^2}) \cdot \\
& \cdot \sum_{\substack{r+s \leq m-1 \\ r, s \\ r \geq 0 \\ s \geq 0}} \frac{(-1)^s 2^{2m-2r-2s} m! (m-r-s-1)! (m-s)! X^{2r} t^{2s}}{(m-r-2s-1)! r! s! (r+s+1)! c^{2m-2r-2s}} \Bigg\} \\
& \text{za } m \geq 1. \quad (318)
\end{aligned}$$

Uvrštenje naime daje ponajprije oblik

$$\begin{aligned}
& \int_X^t x^{2m+1} \Lambda_0 (c \sqrt{t^2 - x^2}) dx = \\
& = \frac{t^2 - X^2}{2} \left\{ \Lambda_1 (c \sqrt{t^2 - X^2}) \sum_{s=1}^{\left[\frac{m}{2} \right]} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s} m! (m-s-1)! (m-s+1)! t^{2s}}{(m-2s)! (s-1)! (s+1)! c^{2m-2s}} + \right. \\
& + \Lambda_1 (c \sqrt{t^2 - X^2}) \sum_{s=0}^{\left[\frac{m-1}{2} \right]} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s} m! (m-s-1)! (m-s)! t^{2s}}{(m-2s-1)! s! (s+1)! c^{2m-2s}} + \\
& + \Lambda_1 (c \sqrt{t^2 - X^2}) \sum_{s=0}^{\left[\frac{m-1}{2} \right]} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s-2} m! (m-s-1)! (m-s)! X^2 t^{2s}}{(m-2s-1)! s! (s+1)! c^{2m-2s-2}} \\
& - \Lambda_0 (c \sqrt{t^2 - X^2}) \sum_{s=0}^{\left[\frac{m-1}{2} \right]} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s} m! (m-s-1)! (m-s)! t^{2s}}{(m-2s-1)! s! (s+1)! c^{2m-2s}} \\
& \quad \left. - \Lambda_0 (c \sqrt{t^2 - X^2}) \cdot \right. \\
& \cdot \sum_{\substack{r+s \leq m-1 \\ r, s \\ r \geq 1 \\ s \geq 0}} \frac{(-1)^s 2^{2m-2r-2s} m! (m-r-s-1)! (m-s)! X^{2r} t^{2s}}{(m-r-2s-1)! r! s! (r+s+1)! c^{2m-2r-2s}} + \\
& \quad \left. + \Lambda_1 (c \sqrt{t^2 - X^2}) \cdot \right. \\
& \cdot \sum_{\substack{r+s \leq m \\ r, s \\ r \geq 2 \\ s \geq 0}} \frac{(-1)^s 2^{2m-2r-2s} m! (m-r-s)! (m-s)! X^{2r} t^{2s}}{(m-r-2s)! r! s! (r+s)! c^{2m-2r-2s}} \Bigg\}, \quad (319)
\end{aligned}$$

pri čemu smo u predzadnjoj sumi stavili $r = \bar{r} + 1$ i naknadno pisali opet r mjesto $\bar{r}$ te zasad pretpostavili $m \geq 2$.

Zbrojimo li prvu i drugu sumu izraza (319), to nije teško dokazati, da vrijedi:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{s=1}^{\left[\frac{m}{2} \right]} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s} m! (m-s-1)! (m-s+1)! t^{2s}}{(m-2s)! (s-1)! (s+1)! c^{2m-2s}} + \\
 & + \sum_{s=0}^{\left[\frac{m-1}{2} \right]} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s} m! (m-s-1)! (m-s)! t^{2s}}{(m-2s-1)! s! (s+1)! c^{2m-2s}} = \\
 & = \sum_{s=0}^{\left[\frac{m}{2} \right]} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s} m! [(m-s)!]^2 t^{2s}}{(m-2s)! (s!)^2 c^{2m-2s}}. \quad (320)
 \end{aligned}$$

Ako je naime

$$1 \leq s \leq \frac{m-1}{2} \quad (321)$$

i ako svedemo opće članove suma u (320) na zajednički nazivnik $(m-2s)! s! (s+1)! c^{2m-2s}$, to brojnici daju

$$\begin{aligned}
 & s(-1)^s 2^{2m-2s} m! (m-s-1)! (m-s+1)! t^{2s} + \\
 & + (m-2s)(-1)^s 2^{2m-2s} m! (m-s-1)! (m-s)! t^{2s} = \\
 & = (s+1)(-1)^s 2^{2m-2s} m! [(m-s)!]^2 t^{2s}. \quad (322)
 \end{aligned}$$

Dioba sa $(-1)^s 2^{2m-2s} m! (m-s-1)! (m-s)! t^{2s}$ daje

$$(m-s+1)s + m - 2s = (m-s)(s+1), \quad (323)$$

što je ispravno. Ako je $s=0$, dobijemo

$$\frac{2^{2m} m! (m-1)! m!}{(m-1)! 0! 1! c^{2m}} = \frac{2^{2m} m! (m!)^2}{m! (0!)^2 c^{2m}}, \quad (324)$$

što je ispravno. Za slučaj, da je m tak broj, možemo još staviti $s = \frac{m}{2} = p$, pa dobijemo

$$\frac{(-1)^p 2^{2p} (2p)! (p-1)! (p+1)! t^{2p}}{0! (p-1)! (p+1)! c^{2p}} = \frac{(-1)^p 2^{2p} (2p)! (p!)^2 t^{2p}}{0! (p!)^2 c^{2p}}, \quad (325)$$

što je ispravno. Jednakost (320) dakle vrijedi.

Sad možemo usporediti (318) sa (319). Članovi prve sume u (318), za koje je $r \geq 2$, daju zadnju sumu u (319). Članovi prve sume u (318), za koje je $r = 1$, daju treću sumu u (319). Članovi prve sume u (318), za koje je $r = 0$, daju zbroj prve i druge sume u (319) u obliku (320). Članovi druge sume u (318), za koje je $r \geq 1$, daju predzadnju sumu u (319). Članovi druge sume u (318), za koje je $r = 0$, daju četvrtu sumu u (319). Time je formula (318) dokazana. Ona vrijedi za $m \geq 2$, kao formula (263), iz koje je proizašla, a i za $m = 1$, kako pokazuje poredba sa (256).

Uvrstimo li (312), (313), (314), (316) u (264), to se dobiveni izraz može dovesti u oblik

$$\begin{aligned}
 & \int_X^t x^{2m} \Lambda_0(c\sqrt{t^2 - x^2}) dx = \\
 & = \int_X^t \Lambda_0(c\sqrt{t^2 - x^2}) dx \sum_{s=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{(-1)^s (2m)! (2m-2s)! t^{2s}}{2^{2m-2s} m! (m-2s)! (2s)! c^{2m-2s}} + \\
 & + \int_X^t \Lambda_1(c\sqrt{t^2 - x^2}) dx \sum_{s=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \frac{(-1)^s (2m)! (2m-2s-1)! t^{2s+2}}{2^{2m-2s} m! (m-2s-1)! (2s+1)! c^{2m-2s-2}} + \\
 & + X \Lambda_0(c\sqrt{t^2 - X^2}) \sum_{s=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \frac{(-1)^s (2m)! (2m-2s-1)! t^{2s}}{2^{2m-2s-1} m! (m-2s-1)! (2s+1)! c^{2m-2s}} + \\
 & + (t^2 - X^2) \Lambda_0(c\sqrt{t^2 - X^2}). \\
 & \sum_{\substack{r+s \leq m \\ r, s \\ r \geq 2 \\ s \geq 0}} \frac{(-1)^{s+1} (m-r-s)! (2m)! (r-1)! (2m-2s)! (r+s)! X^{2r-3} t^{2s}}{2^{2m-2r-2s+1} (m-r-2s)! m! (2r-2)! (m-s)! (2r+2s)! s! c^{2m-2r-2s+2}} + \\
 & + (t^2 - X^2) \Lambda_1(c\sqrt{t^2 - X^2}). \\
 & \sum_{\substack{r+s \leq m \\ r, s \\ r \geq 1 \\ s \geq 0}} \frac{(-1)^s (m-r-s)! (2m)! r! (2m-2s)! (r+s)! X^{2r-1} t^{2s}}{2^{2m-2r-2s+1} (m-r-2s)! m! (2r)! (m-s)! (2r+2s)! s! c^{2m-2r-2s}} + \\
 & + \sum_{s=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \frac{(-1)^{s+1} (2m)! (2m-2s-1)! t^{2s+1}}{2^{2m-2s-1} m! (m-2s-1)! (2s+1)! c^{2m-2s}} \quad \text{za } m \geq 2. \quad (326)
 \end{aligned}$$

Da se to uvidi, zbrojimo najprije izraze, koje daju Q_0 i prvi član izraza (316) za Q_2 :

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{s(-1)^s (2m)! (2m-2s+1)! t^{2s}}{(m-s) 2^{2m-2s} m! (m-2s)! (2s+1)! c^{2m-2s}} + \\ & + \frac{1}{c^2} \sum_{s=1}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \frac{(-1)^s (2m)! (2m-2s-1)! t^{2s}}{2^{2m-2s} m! (m-2s)! (2s)! c^{2m-2s}} = \\ & = \sum_{s=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{(-1)^s (2m)! (2m-2s)! t^{2s}}{2^{2m-2s} m! (m-2s)! (2s)! c^{2m-2s}}. \end{aligned} \quad (327)$$

U svrhu dokaza ove relacije pretpostavimo (321) i sredimo opće članove suma u (327) na nazivnik

$$(m-s) 2^{2m-2s} m! (m-2s)! (2s+1)! c^{2m-2s}.$$

Brojnici daju:

$$\begin{aligned} & s(-1)^s (2m)! (2m-2s+1)! t^{2s} + \\ & + (m-s) 2(m-2s) (-1)^s (2m)! (2m-2s-1)! t^{2s} = \\ & = (m-s) (2s+1) (-1)^s (2m)! (2m-2s)! t^{2s}. \end{aligned} \quad (328)$$

Dioba sa $(-1)^s (2m)! (2m-2s)! t^{2s}$ daje

$$s(2m-2s+1) + (m-2s) = (m-s)(2s+1), \quad (329)$$

što je ispravno. Ako je $s=0$, dobijemo

$$\frac{(2m)! (2m-1)!}{2^{2m-1} m! (m-1)! 1! c^{2m}} = \frac{(2m)! (2m)!}{2^{2m} m! m! 0! c^{2m}}, \quad (330)$$

što je ispravno. U slučaju, da je m tak broj, može biti

$$s = \frac{m}{2} = p, \text{ što daje}$$

$$\frac{p(-1)^p (4p)! (2p+1)! t^{2p}}{p 2^{2p} (2p)! 0! (2p+1)! c^{2p}} = \frac{(-1)^p (4p)! (2p)! t^{2p}}{2^{2p} (2p)! 0! (2p)! c^{2p}}, \quad (331)$$

što je ispravno. Relacija (327) dakle vrijedi.

Izrazi, koji potječu od Q_0 i od prvog člana izraza za Q_2 , daju prema tome prvu sumu u (326). Drugi član izraza za Q_2 daje drugu sumu u (326). Treći član izraza za Q_2 daje članove pete sume u (326), za koje je $r=1$. Četvrti član izraza za Q_2 daje treću sumu u (326). Peti član izraza za Q_2 daje šestu (zadnju) sumu u (326). Suma, koja je pomnožena sa R , odgovara četvrtoj sumi u (326), a suma pomnožena sa T odgovara članovima pete sume u (326), za koje je $r \geq 2$. Formula (326) je time dokazana i vrijedi za $m \geq 2$, kao formula (264), iz koje je proizašla.

$$5. \text{ Redukcija integrala } \int_X^t \Lambda_n(c \sqrt{t^2 - x^2}) dx.$$

Za kraću oznaku stavljamo

$$P_n = \int_X^t \Lambda_n(c \sqrt{t^2 - x^2}) dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (332)$$

Uvrstimo li u (7) $t^2 - x^2$ mjesto $f(z)$, snizimo n za jednu jedinicu, pomnožimo jednakost sa $t^2 - x^2$ i integriramo od X do t , to proizlazi

$$\begin{aligned} t^2 P_n - \int_X^t x^2 \Lambda_n(c \sqrt{t^2 - x^2}) dx &= \\ &= \frac{4n(n-1)}{c^2} P_{n-1} - \frac{4n(n-1)}{c^2} P_{n-2}. \end{aligned} \quad (333)$$

Parcijalna integracija na temelju (9) daje:

$$\begin{aligned} \int_X^t x^2 \Lambda_n(c \sqrt{t^2 - x^2}) dx &= \left\{ \frac{2n}{c^2} x \Lambda_{n-1}(c \sqrt{t^2 - x^2}) \right\}_{x=X}^{x=t} - \frac{2n}{c^2} P_{n-1} = \\ &= \frac{2nt}{c^2} - \frac{2nX}{c^2} \Lambda_{n-1}(c \sqrt{t^2 - X^2}) - \frac{2n}{c^2} P_{n-1}. \end{aligned} \quad (334)$$

Uvrstimo li to u (333), izlazi jednadžba rekurzije

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{2n(2n-3)}{c^2 t^2} P_{n-1} - \frac{4n(n-1)}{c^2 t^2} P_{n-2} - \\ &- X \frac{2n}{c^2 t^2} \Lambda_{n-1}(c \sqrt{t^2 - X^2}) + 2t \frac{n}{c^2 t^2}. \end{aligned} \quad (335)$$

S pomoću nje dobije se lako

$$P_2 = \frac{4}{c^2 t^2} P_1 - \frac{8}{c^2 t^2} P_0 - X \frac{4}{c^2 t^2} \Lambda_1 (c \sqrt{t^2 - X^2}) + 2t \frac{2}{c^2 t^2}, \quad (336)$$

$$P_3 = \left(\frac{72}{c^4 t^4} - \frac{24}{c^2 t^2} \right) P_1 - \frac{144}{c^4 t^4} P_0 - X \frac{6}{c^2 t^2} \Lambda_2 (c \sqrt{t^2 - X^2}) - \\ - X \frac{72}{c^4 t^4} \Lambda_1 (c \sqrt{t^2 - X^2}) + 2t \left(\frac{36}{c^4 t^4} + \frac{3}{c^2 t^2} \right). \quad (337)$$

Tvrdimo, da je za $n \geq 2$ općenito

$$P_n = A_n P_1 + B_n P_0 + X \sum_{r=1}^{n-1} C_{n,r} \Lambda_r (c \sqrt{t^2 - X^2}) + 2t D_n \quad (338)$$

ili

$$\int_X^t \Lambda_n (c \sqrt{t^2 - x^2}) dx = A_n \int_X^t \Lambda_1 (c \sqrt{t^2 - x^2}) dx + B_n \int_X^t \Lambda_0 (c \sqrt{t^2 - x^2}) dx + \\ + X \sum_{r=1}^{n-1} C_{n,r} \Lambda_r (c \sqrt{t^2 - X^2}) + 2t D_n, \quad (339)$$

gdje znači:

$$A_n = \sum_{s=1}^{\left[\frac{n+1}{2} \right]} \frac{(-1)^{s+1} 2^{2s-2} n! (2n-2s)!}{(n-2s+1)! (2s-2)! (ct)^{2n-2s}} \quad (340)$$

$$B_n = \sum_{s=1}^{\left[\frac{n}{2} \right]} \frac{(-1)^s 2^{2s} n! (2n-2s-1)!}{(n-2s)! (2s-1)! (ct)^{2n-2s}} \quad (341)$$

$$C_{n,r} = \sum_{s=0}^{\left[\frac{n-r-1}{2} \right]} \frac{(-1)^{s+1} 2^{2s+1} n! (n-r-s-1)! (2n-2s-2)! (r+s)!}{r! s! (n-r-2s-1)! (n-s-1)! (2r+2s)! (ct)^{2n-2r-2s}} \quad (342)$$

$$D_n = \sum_{s=1}^{n-1} \frac{n! (2n-2s-2)!}{s! (n-s-1)! (ct)^{2n-2s}} + \sum_{s=1}^{\left[\frac{n-1}{2} \right]} \frac{(-1)^{s+1} 2^{2s} n! (2n-2s-2)!}{(2s)! (n-2s-1)! (ct)^{2n-2s}}. \quad (343)$$

U zadnjem izrazu otpada za $n=2$ druga suma.

U svrhu dokaza treba se najprije uvjeriti, da te formule za $n=2$ i $n=3$ daju izraze (336), (337). Dalje ih treba uvrstiti u jednadžbu rekurzije (335). Uzmimo najprije u obzir članove sa P_1 , t. j. članove, koji potječu od izraza (340):

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \frac{(-1)^{s+1} 2^{2s-2} n! (2n-2s)!}{(n-2s+1)! (2s-2)! (ct)^{2n-2s}} = \\ &= \frac{2n(2n-3)}{c^2 t^2} \sum_{s=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^{s+1} 2^{2s-2} (n-1)! (2n-2s-2)!}{(n-2s)! (2s-2)! (ct)^{2n-2s-2}} - \\ &- \frac{4n(n-1)}{c^2 t^2} \sum_{s=2}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \frac{(-1)^s 2^{2s-4} (n-2)! (2n-2s-2)!}{(n-2s+1)! (2s-4)! (ct)^{2n-2s-2}}, \quad (344) \end{aligned}$$

pri čemu smo u zadnjoj sumi stavili $s = s-1$ i naknadno pisali opet s mjesto s . Pretpostavimo

$$2 \leq s \leq \frac{n}{2} \quad (345)$$

i svedimo opće članove na zajednički nazivnik

$$(n-2s+1)! (2s-2)! (ct)^{2n-2s}.$$

Brojnici onda daju

$$\begin{aligned} & (-1)^{s+1} 2^{2s-2} n! (2n-2s)! = \\ &= 2n(2n-3)(n-2s+1)(-1)^{s+1} 2^{2s-2} (n-1)! (2n-2s-2)! - \\ &- 4n(n-1)(2s-2)(2s-3)(-1)^s 2^{2s-4} (n-2)! (2n-2s-2)!. \quad (346) \end{aligned}$$

Dioba sa $(-1)^{s+1} 2^{2s-2} n! (2n-2s-2)!$ daje

$$(2n-2s)(2n-2s-1) = 2(2n-3)(n-2s+1) + (2s-2)(2s-3), \quad (347)$$

što je ispravno. Ako je $s=1$, dobijemo

$$\frac{n! (2n-2)!}{(n-1)! 0! (ct)^{2n-2}} = \frac{2n(2n-3)(n-1)! (2n-4)!}{(n-2)! 0! (ct)^{2n-2}}, \quad (348)$$

što je ispravno. Ako je n lih broj, može biti $s = \frac{n+1}{2} = p$,

pa dobijemo

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^{p+1} 2^{2p-2} (2p-1)! (2p-2)!}{0! (2p-2)! (ct)^{2p-2}} = \\ & = \frac{4 (2p-1) (2p-2) (-1)^{p+1} 2^{2p-4} (2p-3)! (2p-4)!}{0! (2p-4)! (ct)^{2p-2}}, \quad (349) \end{aligned}$$

što je ispravno.

Analogno uzmimo sad u obzir članove sa P_0 , t. j. one, koji potječu od izraza (341):

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^s 2^{2s} n! (2n-2s-1)!}{(n-2s)! (2s-1)! (ct)^{2n-2s}} = \\ & = \frac{2n(2n-3)}{c^2 t^2} \sum_{s=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{(-1)^s 2^{2s} (n-1)! (2n-2s-3)!}{(n-2s-1)! (2s-1)! (ct)^{2n-2s-2}} - \\ & - \frac{4n(n-1)}{c^2 t^2} \sum_{s=2}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^{s-1} 2^{2s-2} (n-2)! (2n-2s-3)!}{(n-2s)! (2s-3)! (ct)^{2n-2s-2}}. \quad (350) \end{aligned}$$

Pretpostavimo

$$2 \leq s \leq \frac{n-1}{2} \quad (351)$$

i svedimo na zajednički nazivnik $(n-2s)! (2s-1)! (ct)^{2n-2s}$. Brojnici daju

$$\begin{aligned} & (-1)^s 2^{2s} n! (2n-2s-1)! = \\ & = 2n(2n-3) (n-2s) (-1)^s 2^{2s} (n-1)! (2n-2s-3)! - \\ & - 4n(n-1) (2s-1) (2s-2) (-1)^{s-1} 2^{2s-2} (n-2)! (2n-2s-3)!. \quad (352) \end{aligned}$$

Dioba sa $(-1)^s 2^{2s} n! (2n-2s-3)!$ daje

$$\begin{aligned} & (2n-2s-1) (2n-2s-2) = 2(2n-3) (n-2s) + \\ & + (2s-1) (2s-2), \quad (353) \end{aligned}$$

što je ispravno. Za $s=1$ izlazi

$$-\frac{2^2 n! (2n-3)!}{(n-2)! 1! (ct)^{2n-2}} = -\frac{2n(2n-3) 2^2 (n-1)! (2n-5)!}{(n-3)! 1! (ct)^{2n-2}}, \quad (354)$$

što je ispravno. Ako je n tak broj, može biti $s = \frac{n}{2} = p$, pa izlazi

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^p 2^{2p} (2p)! (2p-1)!}{0! (2p-1)! (ct)^{2p}} = \\ & = -\frac{8p(2p-1) (-1)^{p-1} 2^{2p-2} (2p-2)! (2p-3)!}{0! (2p-3)! (ct)^{2p}}, \quad (355) \end{aligned}$$

što je ispravno.

Uzmimo dalje u obzir članove, koji potječu od (342) za jedno stanovito r . Pretpostavimo ponajprije

$$1 \leq r \leq n-3. \quad (356)$$

Dobijemo

$$\begin{aligned} & \sum_{s=0}^{\left[\frac{n-r-1}{2}\right]} \frac{(-1)^{s+1} 2^{2s+1} n! (n-r-s-1)! (2n-2s-2)! (r+s)!}{r! s! (n-r-2s-1)! (n-s-1)! (2r+2s)! (ct)^{2n-2r-2s}} = \\ & = \frac{2n(2n-3)}{c^2 t^2} \cdot \\ & \cdot \sum_{s=0}^{\left[\frac{n-r-2}{2}\right]} \frac{(-1)^{s+1} 2^{2s+1} (n-1)! (n-r-s-2)! (2n-2s-4)! (r+s)!}{r! s! (n-r-2s-2)! (n-s-2)! (2r+2s)! (ct)^{2n-2r-2s-2}} = \\ & = \frac{4n(n-1)}{c^2 t^2} \cdot \\ & \cdot \sum_{s=1}^{\left[\frac{n-r-1}{2}\right]} \frac{(-1)^s 2^{2s-1} (n-2)! (n-r-s-2)! (2n-2s-4)! (r+s-1)!}{r! (s-1)! (n-r-2s-1)! (n-s-2)! (2r+2s-2)! (ct)^{2n-2r-2s-2}}. \quad (357) \end{aligned}$$

Neka je

$$1 \leq s \leq \frac{n-r-2}{2}, \quad (358)$$

i svedimo opće članove na nazivnik

$r! s! (n-r-2s-1)! (n-s-1)! (2r+2s)! (ct)^{2n-2r-2s}$. Broj-
nici daju

$$\begin{aligned} & (-1)^{s+1} 2^{2s+1} n! (n-r-s-1)! (2n-2s-2)! (r+s)! = \\ & = 2n(2n-3)(n-r-2s-1)(n-s-1)(-1)^{s+1} \cdot \\ & \cdot 2^{2s+1} (n-1)! (n-r-s-2)! (2n-2s-4)! (r+s)! - \\ & - 4n(n-1)s(n-s-1)(2r+2s)(2r+2s-1)(-1)^s \cdot \\ & \cdot 2^{2s-1} (n-2)! (n-r-s-2)! (2n-2s-4)! (r+s-1)!. \quad (359) \end{aligned}$$

Dioba sa

$$\begin{aligned} & (-1)^{s+1} 2^{2s+2} (n-s-1)n! (n-r-s-2)! (2n-2s-4)! (r+s)! \\ & \text{daje} \\ & (n-r-s-1)(2n-2s-3) = (2n-3)(n-r-2s-1) + \\ & + s(2r+2s-1), \quad (360) \end{aligned}$$

što je ispravno. Za $s=0$ dobijemo

$$\begin{aligned} & - \frac{2n!(n-r-1)!(2n-2)!r!}{r!0!(n-r-1)!(n-1)!(2r)!(ct)^{2n-2r}} = \\ & = - \frac{2n(2n-3)2(n-1)!(n-r-2)!(2n-4)!r!}{r!0!(n-r-2)!(n-2)!(2r)!(ct)^{2n-2r}}, \quad (361) \end{aligned}$$

što je ispravno. Ako je $n-r-1$ tak broj, može biti

$$s = \frac{n-r-1}{2} = p, \text{ pa dobijemo}$$

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^{p+1} 2^{2p+1} (2p+r+1)!p!(2p+2r)!(r+p)!}{r!p!0!(p+r)!(2r+2p)!(ct)^{2p+2}} = \\ & = \frac{4(2p+r+1)(2p+r)(-1)^{2p+1} 2^{2p-1} (2p+r-1)!(p-1)!(2p+2r-2)!(r+p-1)!}{r!(p-1)!0!(p+r-1)!(2r+2p-2)!(ct)^{2p+2}}, \quad (362) \end{aligned}$$

što je ispravno. Ako je $r=n-2$ (363), otpada zadnja suma,
a u ostalim je moguća samo vrijednost $s=0$, pa dobijemo

$$\begin{aligned} & - \frac{2n!1!(2n-2)!(n-2)!}{(n-2)!0!1!(n-1)!(2n-4)!(ct)^4} = \\ & = - \frac{2n(2n-3)2(n-1)!0!(2n-4)!(n-2)!}{(n-2)!0!0!(n-2)!(2n-4)!(ct)^4}, \quad (364) \end{aligned}$$

što je ispravno. Ako je $r = n - 1$ (365), dobijemo samo sumu na lijevoj strani sa $s = 0$, ali prema jednadžbi rekurzije (335) pridolazi još na desnoj strani sumand $-\frac{2n}{c^2 t^2}$, dakle

$$-\frac{2n! 0! (2n-2)! (n-1)!}{(n-1)! 0! 0! (n-1)! (2n-2)! (ct)^2} = -\frac{2n}{c^2 t^2}, \quad (366)$$

što je ispravno. Time su članovi, koji potječu od (342), uzeti u obzir. Svi ostali članovi, koji dakle potječu od (343), daju:

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^{n-1} \frac{n! (2n-2s-2)!}{s! (n-s-1)! (ct)^{2n-2s}} + \sum_{s=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{(-1)^{s+1} 2^{2s} n! (2n-2s-2)!}{(2s)! (n-2s-1)! (ct)^{2n-2s}} = \\ & = \frac{2n(2n-3)}{c^2 t^2} \sum_{s=1}^{n-2} \frac{(n-1)! (2n-2s-4)!}{s! (n-s-2)! (ct)^{2n-2s-2}} + \\ & + \frac{2n(2n-3)}{c^2 t^2} \sum_{s=1}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} \frac{(-1)^{s+1} 2^{2s} (n-1)! (2n-2s-4)!}{(2s)! (n-2s-2)! (ct)^{2n-2s-2}} - \\ & - \frac{4n(n-1)}{c^2 t^2} \sum_{s=2}^{n-2} \frac{(n-2)! (2n-2s-4)!}{(s-1)! (n-s-2)! (ct)^{2n-2s-2}} - \\ & - \frac{4n(n-1)}{c^2 t^2} \sum_{s=2}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{(-1)^s 2^{2s-2} (n-2)! (2n-2s-4)!}{(2s-2)! (n-2s-1)! (ct)^{2n-2s-2}} + \frac{n}{c^2 t^2} \\ & (n=4, 5, 6, \dots). \quad (367) \end{aligned}$$

Zadnja suma otpada za $n=4$.

Za $s=1$ (368) dobijemo

$$\begin{aligned} & \frac{n! (2n-4)!}{1! (n-2)! (ct)^{2n-2}} + \frac{2^2 n! (2n-4)!}{2! (n-3)! (ct)^{2n-2}} = \\ & = \frac{2n(2n-3)(n-1)! (2n-6)!}{1! (n-3)! (ct)^{2n-2}} + \frac{2n(2n-3) 2^2 (n-1)! (2n-6)!}{2^2 (n-4)! (ct)^{n-2}}. \quad (369) \end{aligned}$$

Svedimo na nazivnik $2(n-2)! (ct)^{2n-2}$. Brojnice daju

$$\begin{aligned} & 2n! (2n-4)! + (n-2) 2^2 n! (2n-4)! = \\ & = 2(n-2) 2n (2n-3) (n-1)! (2n-6)! + \\ & + (n-2) (n-3) 2n (2n-3) 2^2 (n-1)! (2n-6)! \quad (370) \end{aligned}$$

Dioba sa $2n! (2n-4) (2n-6)!$ daje

$$(2n-5) + 2(n-2)(2n-5) = (2n-3) + 2(n-3)(2n-3), \quad (371)$$

što je ispravno.

Za $s \geq 2$ (372) uzmimo najprije u obzir samo prvu sumu lijevo i prvu i treću sumu desno u jednakosti (367). Zajednički nazivnik će biti $s! (n-s-1)! (ct)^{2n-2s}$, a pretpostavlja se

$$2 \leq s \leq n-2. \quad (373)$$

Brojnici daju

$$n! (2n-2s-2)! = 2n(2n-3)(n-s-1)(n-1)! (2n-2s-4)! - \\ - 4n(n-1)s(n-s-1)(n-2)! (2n-2s-4)! \quad (374)$$

Dioba sa $n! (2n-2s-2) (2n-2s-4)!$ daje

$$n-2s-3 = (2n-3)-2s, \quad (375)$$

što je ispravno. Za $s=n-1$ treba uzeti u obzir i zadnji član u (367):

$$\frac{n! 0!}{(n-1)! 0! (ct)^2} = \frac{n}{c^2 t^2}. \quad (376)$$

I ovo je ispravno.

Uzmimo sad u obzir drugu sumu lijevo i drugu i četvrtu sumu desno u (367) i pretpostavimo

$$2 \leq s \leq \frac{n-2}{2}. \quad (377)$$

Zajednički nazivnik je $(2s)! (n-2s-1)! (ct)^{2n-2s}$, a brojnici daju

$$(-1)^{s+1} 2^{2s} n! (2n-2s-2)! = \\ = 2n(2n-3)(n-2s-1)(-1)^{s+1} 2^{2s} (n-1)! (2n-2s-4)! - \\ - 4n(n-1)2s(2s-1)(-1)^s 2^{2s-2} (n-2)! (2n-2s-4)!. \quad (378)$$

Dioba sa $(-1)^{s+1} 2^{2s+1} n! (2n-2s-4)!$ daje

$$(n-s-1)(2n-2s-3) = (2n-3)(n-2s-1) + s(2s-1), \quad (379)$$

što je ispravno. Za slučaj, da je $n-1$ tak broj, može biti $s = \frac{n-1}{2} = p$, pa druga suma lijevo i četvrta suma desno u (367) daju

$$\begin{aligned}
& \frac{(-1)^{p+1} 2^{2p} (2p+1)! (2p)!}{(2p)! 0! (ct)^{2p+2}} = \\
& = - \frac{4(2p+1) 2p (-1)^p 2^{2p-2} (2p-1)! (2p-2)!}{(2p-2)! 0! (ct)^{2p+2}}, \quad (380)
\end{aligned}$$

što je ispravno. Time je cijeli dokaz proveden.

6. Redukcija integrala $\int_X x^m \Lambda_n (c \sqrt{t^2 - x^2}) dx$.

Izvršimo li na temelju (9) parcijalnu integraciju

$$\begin{aligned}
\int_X^t x^m \Lambda_n (c \sqrt{t^2 - x^2}) dx &= \frac{2n}{c^2} \left\{ t^{m-1} - X^{m-1} \Lambda_{n-1} (c \sqrt{t^2 - X^2}) \right\} - \\
&- \frac{2n(m-1)}{c^2} \int_X^t x^{m-2} \Lambda_{n-1} (c \sqrt{t^2 - x^2}) dx \quad (381)
\end{aligned}$$

dovoljan broj puta, dolazimo bez poteškoća do ovih formula:

a) za $m = 2r$ i $r \leq n$:

$$\begin{aligned}
& \int_X^t x^{2r} \Lambda_n (c \sqrt{t^2 - x^2}) dx = \\
&= \sum_{s=1}^r \frac{(-1)^{s+1} n! (2r)! (r-s)!}{c^{2s} (n-s)! r! (2r-2s+1)!} \left\{ t^{2r-2s+1} - X^{2r-2s+1} \Lambda_{n-s} (c \sqrt{t^2 - X^2}) \right\} + \\
&+ (-1)^r \frac{n! (2r)!}{c^{2r} (n-r)! r!} \int_X^t \Lambda_{n-r} (c \sqrt{t^2 - x^2}) dx. \quad (382)
\end{aligned}$$

Integral na desnoj strani može se dalje izraziti s pomoću (339).

b) za $m = 2r$ i $r > n$:

$$\begin{aligned}
& \int_X^t x^{2r} \Lambda_n (c \sqrt{t^2 - x^2}) dx = \\
&= \sum_{s=1}^n \frac{(-1)^{s+1} n! (2r)! (r-s)!}{c^{2s} (n-s)! r! (2r-2s+1)!} \left\{ t^{2r-2s+1} - X^{2r-2s+1} \Lambda_{n-s} (c \sqrt{t^2 - X^2}) \right\} + \\
&+ (-1)^n \frac{n! (2r)! (r-n)!}{c^{2n} r! (2r-2n)!} \int_X^t x^{2r-2n} \Lambda_0 (c \sqrt{t^2 - x^2}) dx. \quad (383)
\end{aligned}$$

Integral na desnoj strani može se dalje izraziti s pomoću (326).

c) za $m = 2r + 1$ i $r < n$:

$$\int_x^t x^{2r+1} A_n (c \sqrt{t^2 - x^2}) dx =$$

$$= \sum_{s=1}^{r+1} \frac{(-1)^{s+1} 2^{2s-1} n! r!}{c^{2s} (n-s)! (r-s+1)!} \{t^{2r-2s+3} - X^{2r-2s+3} A_{n-s} (c \sqrt{t^2 - X^2})\}. \quad (384)$$

d) za $m = 2r + 1$ i $r \geq n$:

$$\int_x^t x^{2r+1} A_n (c \sqrt{t^2 - x^2}) dx =$$

$$= \sum_{s=1}^n \frac{(-1)^{s+1} 2^{2s-1} n! r!}{c^{2s} (n-s)! (r-s+1)!} \{t^{2r-2s+2} - X^{2r-2s+2} A_{n-s} (c \sqrt{t^2 - X^2})\} +$$

$$+ (-1)^n \frac{2^{2n} n! r!}{c^{2n} (r-n)!} \int_x^t x^{2r-2n+1} A_0 (c \sqrt{t^2 - x^2}) dx. \quad (385)$$

Integral na desnoj strani može se dalje izraziti s pomoću (318).

$$7. \text{ Derivacije po } t \text{ integrala } \int_x^t x^n A_n (c \sqrt{t^2 - x^2}) dx.$$

Služeći se kraticom (332) tvrdimo, da vrijedi

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} P_0 = f_n(t) P_0 + g_n(t) P_1 + \dots \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (386)$$

gdje je za $r = 0, 1, 2, \dots$

$$f_{2r}(t) = (-1)^r c^{2r} \quad (387)$$

$$g_{2r}(t) = 0 \quad (388)$$

$$f_{2r+1}(t) = 0 \quad (389)$$

$$g_{2r+1}(t) = \frac{(-1)^{r+1} c^{2r+2} t}{2}, \quad (390)$$

a točkice na desnoj strani od (386) znače članove, koji ne sadržavaju integrala. Jednakost (386) je očito ispravna za $n = 0$, što

odgovara $r=0$ u (387), (388). Pretpostavimo, da je ispravna za neko n i diferencirajmo jednakost po t . S pomoću (9) dobijemo

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \{f_n(t) P_0 + g_n(t) P_1 + \dots\} = \\ & = f'_n(t) P_0 + f_n(t) - \frac{c^2 t}{2} f_n(t) P_1 + g'_n(t) P_1 + g_n(t) - \frac{c^2 t}{4} g_n(t) P_2 + \dots \quad (391) \end{aligned}$$

Uvrstimo li (336), izlazi

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \{f_n(t) P_0 + g_n(t) P_1 + \dots\} = \\ & = \left[f'_n(t) + \frac{2}{t} g_n(t) \right] P_0 + \left[g'_n(t) - \frac{c^2 t}{2} f_n(t) - \frac{1}{t} g_n(t) \right] P_1 + \dots \quad (392) \end{aligned}$$

Prema tome funkcije $f_n(t)$, $g_n(t)$ zadovoljavaju jednadžbe rekurzije

$$f_{n+1}(t) = f'_n(t) + \frac{2}{t} g_n(t), \quad (393)$$

$$g_{n+1}(t) = g'_n(t) - \frac{c^2 t}{2} f_n(t) - \frac{1}{t} g_n(t). \quad (394)$$

Lako je uvjeriti se, da izrazi (387), (388), (389), (390) zadovoljavaju ove jednadžbe rekurzije, čime je dokaz proveden.

Tvrdimo dalje, da vrijedi

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} (tP_1) = \varphi_n(t) P_0 + \psi_n(t) P_1 + \dots \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (395)$$

gdje je za $r = 0, 1, 2, \dots$

$$\varphi_{2r}(t) = 0 \quad (396)$$

$$\psi_{2r}(t) = (-1)^r c^{2r} t \quad (397)$$

$$\varphi_{2r+1}(t) = (-1)^r 2c^{2r} \quad (398)$$

$$\psi_{2r+1}(t) = 0. \quad (399)$$

Iz (389), (390) izlazi za $r=0$

$$\frac{\partial}{\partial t} P_0 = -\frac{c^2}{2} t P_1 + \dots, \quad (400)$$

dakle

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} (tP_1) = -\frac{2}{c^2} \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} P_0 + \dots = -\frac{2}{c^2} [f_{n+1}(t) P_0 + g_{n+1}(t) P_1] + \dots \quad (401)$$

ili

$$\varphi_n(t) = -\frac{2}{c^2} f_{n+1}(t) \quad (402)$$

$$\psi_n(t) = -\frac{2}{c^2} g_{n+1}(t), \quad (403)$$

čime je dokaz proveden.

Ograničimo li se na članove najviših potencija od t , koji su pomnoženi sa P_0 ili P_1 , to dobijemo na temelju (326), (386) i (395):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{2r}}{\partial t^{2r}} \int_x^t x^{1n} \Lambda_j(c \sqrt{t^2 - x^2}) dx &= \frac{(-1)^n (4n)!}{2^{2n} c^{2n} (2n)!} \left\{ t^{2n} \frac{\partial^{2r}}{\partial t^{2r}} P_0 + \right. \\ &+ 4nr t^{2n-1} \frac{\partial^{2r-1}}{\partial t^{2r-1}} P_0 - \frac{n(2n+1)}{2} t^{2n-1} \frac{\partial^{2r}}{\partial t^{2r}} (tP_1) - \\ &- nr(2n+1)(2n-1) t^{2n-2} \frac{\partial^{2r-1}}{\partial t^{2r-1}} (tP_1) \Big\} + \dots = \frac{(-1)^n (4n)!}{2^{2n} c^{2n} (2n)!} \left\{ (-1)^r c^{2r} t^{2n} P_0 + \right. \\ &+ (-1)^r 2nrc^{2r} t^{2n} P_1 - (-1)^r \frac{n(2n+1)}{2} c^{2r} t^{2n} P_1 - \\ &- (-1)^{r-1} 2nr(2n+1)(2n-1) c^{2r-2} t^{2n-2} P_0 \Big\} + \dots = \\ &= \frac{(-1)^{n+r} (4n)!}{2^{2n} c^{2n-2r} (2n)!} \left\{ t^{2n} P_0 + \frac{n(4r-2n-1)}{2} t^{2n} P_1 \right\} + \dots \quad (404) \\ \frac{\partial^{2r+1}}{\partial t^{2r+1}} \int_x^t x^{1n} \Lambda_j(c \sqrt{t^2 - x^2}) dx &= \frac{(-1)^n (4n)!}{2^{2n} c^{2n} (2n)!} \left\{ t^{2n} \frac{\partial^{2r+1}}{\partial t^{2r+1}} P_0 + \right. \\ &+ 2n(2r+1) t^{2n+1} \frac{\partial^{2r}}{\partial t^{2r}} P_0 - \frac{n(2n+1)}{2} t^{2n-1} \frac{\partial^{2r+1}}{\partial t^{2r+1}} (tP_1) - \\ &- \frac{n(2r+1)(2n+1)(2n-1)}{2} t^{2n-2} \frac{\partial^{2r}}{\partial t^{2r}} (tP_1) \Big\} = \\ &= \frac{(-1)^n (4n)!}{2^{2n} c^{2n} (2n)!} \left\{ (-1)^{r+1} \frac{1}{2} c^{2r+2} t^{2n+1} P_1 + \right. \\ &+ (-1)^r 2n(2r+1) c^{2r} t^{2n-1} P_0 + (-1)^{r+1} n(2n+1) c^{2r} t^{2n-1} P_0 + \end{aligned}$$

$$+ (-1)^{r+1} \frac{n(2r+1)(2n+1)(2n-1)}{2} c^{2r} t^{2n-1} P_1 \Big\} + \dots =$$

$$= \frac{(-1)^{n+r} (4n)!}{2^{2n} c^{2n-2r} (2n)!} \left\{ n(4r-2n+1) t^{2n-1} P_0 - \frac{c^2}{2} t^{2n+1} P_1 \right\} + \dots \quad (405)$$

$$\frac{\partial^{2r}}{\partial t^{2r}} \int_X^t x^{2n+2} \Lambda_j(c \sqrt{t^2 - x^2}) dx =$$

$$= \frac{(-1)^n (4n+2)!}{2^{2n+2} c^{2n+2} (2n+1)!} \left\{ 2(n+1)(2n+1) t^{2n} \frac{\partial^{2r}}{\partial t^{2r}} P_0 + \right.$$

$$+ 8nr(n+1)(2n+1) t^{2n-1} \frac{\partial^{2r-1}}{\partial t^{2r-1}} P_0 + c^2 t^{2n+1} \frac{\partial^{2r}}{\partial t^{2r}} (tP_1) +$$

$$\left. + 2r(2n+1) c^2 t^{2n} \frac{\partial^{2r-1}}{\partial t^{2r-1}} (tP_1) \right\} + \dots =$$

$$= \frac{(-1)^n (4n+2)!}{2^{2n+2} c^{2n+2} (2n+1)!} \left\{ (-1)^r 2(n+1)(2n+1) c^{2r} t^{2n} P_0 + \right.$$

$$+ (-1)^r 4nr(n+1)(2n+1) c^{2r} t^{2n} P_1 + (-1)^r c^{2r+2} t^{2n+2} P_1 +$$

$$\left. + (-1)^{r-1} 4r(2n+1) c^{2r} t^{2n} P_0 \right\} + \dots =$$

$$= \frac{(-1)^{n+r} (4n+2)!}{2^{2n+2} c^{2n-2r+2} (2n+1)!} \left\{ 2(2n+1)(n-2r+1) t^{2n} P_0 + \right.$$

$$\left. + c^2 t^{2n+2} P_1 \right\} + \dots \quad (406)$$

$$\frac{\partial^{2r+1}}{\partial t^{2r+1}} \int_X^t x^{2n+2} \Lambda_j(c \sqrt{t^2 - x^2}) dx =$$

$$= \frac{(-1)^n (4n+2)!}{2^{2n+2} c^{2n+2} (2n+1)!} \left\{ 2(n+1)(2n+1) t^{2n} \frac{\partial^{2r+1}}{\partial t^{2r+1}} P_0 + \right.$$

$$+ 4n(n+1)(2n+1)(2r+1) t^{2n-1} \frac{\partial^{2r}}{\partial t^{2r}} P_0 +$$

$$\left. + c^2 t^{2n+1} \frac{\partial^{2r+1}}{\partial t^{2r+1}} (tP_1) + (2n+1)(2r+1) c^2 t^{2n} \frac{\partial^{2r}}{\partial t^{2r}} (tP_1) \right\} + \dots =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(-1)^n (4n+2)!}{2^{2n+2} c^{2n+2} (2n+1)!} \left\{ (-1)^{r+1} (n+1) (2n+1) c^{2r+2} t^{2n+1} P_1 + \right. \\
&+ (-1)^r 4n (n+1) (2n+1) (2r+1) c^{2r} t^{2n-1} P_0 + (-1)^r 2 c^{2r+2} t^{2n+1} P_0 + \\
&\left. + (-1)^r (2n+1) (2r+1) c^{2r+2} t^{2n+1} P_1 \right\} + \dots = \\
&= \frac{(-1)^{n+r} (4n+2)!}{2^{2n+2} c^{2n-2r} (2n+1)!} \left\{ 2 t^{2n+1} P_0 + (2n+1) (2r-n) t^{2n+1} P_1 \right\} + \dots \quad (407)
\end{aligned}$$

Radi boljeg pregleda ponavljamo rezultate zadnjih četiriju pre-tvorbi:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^{2r}}{\partial t^{2r}} \int_x^t x^{1n} \Lambda_0 (c \sqrt{t^2 - x^2}) dx = \\
&= \frac{(-1)^{n+r} (4n)!}{2^{2n} c^{2n-2r} (2n)!} \left\{ t^{2n} P_0 + \frac{n(4r-2n-1)}{2} t^{2n} P_1 \right\} + \dots \quad (408)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^{2r+1}}{\partial t^{2r+1}} \int_x^t x^{1n} \Lambda_0 (c \sqrt{t^2 - x^2}) dx = \\
&= \frac{(-1)^{n+r} (4n)!}{2^{2n} c^{2n-2r} (2n)!} \left\{ n(4r-2n+1) t^{2n-1} P_0 - \frac{c^2}{2} t^{2n+1} P_1 \right\} + \dots \quad (409)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^{2r}}{\partial t^{2r}} \int_x^t x^{1n+2} \Lambda_0 (c \sqrt{t^2 - x^2}) dx = \\
&= \frac{(-1)^{n+r} (4n+2)!}{2^{2n+2} c^{2n-2r+2} (2n+1)!} \left\{ 2(2n+1) (n-2r+1) t^{2n} P_0 + c^2 t^{2n+2} P_1 \right\} + \dots \quad (410)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^{2r+1}}{\partial t^{2r+1}} \int_x^t x^{1n+2} \Lambda_0 (c \sqrt{t^2 - x^2}) dx = \\
&= \frac{(-1)^{n+r} (4n+2)!}{2^{2n+2} c^{2n-2r} (2n+1)!} \left\{ 2 t^{2n+1} P_0 + (2n+1) (2r-n) t^{2n+1} P_1 \right\} + \dots \quad (411)
\end{aligned}$$

