

Dr. ĐURO KUREPA

PROBLEM MJERE I MONOTONA PRESLIKAVANJA DJELIMIČNO UREĐENIH SKUPOVA¹

1. **Problem mjere prema Borelu** sastoji se u tome da odredimo porodicu skupova $P(B)$ koja će obuhvatati sve intervale brojevnog pravca, a k tome imati ova dva svojstva:

1. (σ -svojstvo). Ako članovi niza S_n leže u porodici $P(B)$, onda i njihova unija (suma) leži u $P(B)$, t. j. iz $S_n \in P(B)$ slijedi $\bigcup_n S_n \in P(B)$, $(n \in N)^2$;

2. (δ -svojstvo). Ako članovi S_n niza leže u $P(B)$, onda u $P(B)$ leži i zajednički dio $\bigcap_n S_n$ tih skupova, t. j.

iz $S_n \in P(B)$ slijedi $\bigcap_n S_n \in P(B)$, $(n \in N)$.

Postoji postupak (isporedi na pr. Kuratovski [8], p. 159) kako se postepeno može izgraditi porodica $P(B)^3$; skupovi koji sačinjavaju množinu $P(B)$ zovu se *izmjerivi skupovi u Borelovu smislu*.

Naravno, slično se postavlja problem za skupove u ravni, prostoru i t. d.

2. **Problem mjere prema Lebesgue-u** (v. [11] p. 110; [12] p. 74) sastoji se, za linearne skupove, u tome da svakom linearnom skupu E pridijelimo realan broj ≥ 0 tako zvanu *mjeru*, mE , skupa E i da pritom budu ispunjena ova tri uslova:

¹ Članak je na francuskom bio napisan, koncem 1937. godine, no do danas nije bio objelodanjen.

² Znak $\in$ čitaj »jest element od« i sl.; N je skup svih prirodnih brojeva; znak $(n \in N)$ čitaj »za svaki $n \in N$ « odnosno »kad n prolazi skupom N «.

³ Isp. Đ. Kurepa, Matematički kontinuum, Glasnik mat. fiz. I, 112—125, 1946., čl. 4—6.

- L_1 Kongruentni skupovi imaju istu mjeru;
- L_2 Mjera je potpuno (kompletno) aditivna funkcija: udruženju (sumi) od najviše prebrojivo mnogo skupova, koji dva po dva nemaju zajedničkih točaka, pripada mjera, koja je jednaka sumi mjera tih skupova.
- L_3 Mjera jediničnog odreska $[0, 1]$ svih brojeva $0 \leq x \leq 1$ jest 1⁴.

U vezi s uslovom L_2 možemo promatrati i uslov

- L_2^* Mjera unije dvaju skupova bez zajedničke točke jest suma mjera tih dvaju skupova.

Vitali je 1905. dokazao, da ima i neizmjerivih skupova u Lebesgue-ovu smislu. Specijalno; nazovemo li *razredom realnih brojeva* svaki najveći linearni skup sa svojstvom, da je razlika ma kojih njegovih dvaju članova racionalan broj, tada se čitavi kontinuum raspada u porodicu disjunktih razreda; ako linearan skup V^5 sadrži iz svakog razreda jedan jedini član, onda on nije izmjeriv u Lebesgue-ovu smislu.⁵

No problem, da li postoji mjera s uslovima L_1 , L_2^* (a ne L_2) i L_3 ostao je i dalje otvoren.

⁴ Naravno, ako se radi o skupovima u ravnini odn. prostoru, ulogu skupa $[0, 1]$ preuzet će jedinični kvadrat odn. jedinična kocka.

⁵ Ako za racionalni broj r označimo sa $V+r$ skup svih brojeva $x+r$, ($x \in V$), onda se vidi, da su za različite r ti skupovi dva po dva bez zajedničkih točaka i da je čitavi kontinuum $C = \bigcup_{r \in R} (V+r)$, ($r \in R$).

Tu je R skup svih racionalnih brojeva. Kad bi skup V imao određenu mjeru, recimo mV , bilo bi po uslovu L_1 :

$$mV = m(V+r).$$

jer skup $V+r$ nastaje iz V translacijom; kako je nadalje skup R racionalnih brojeva prebrojiv, bilo bi po uslovu L_2 :

$$m\left(\bigcup_{r \in R} (V+r)\right) = \sum_{r \in R} m(V+r),$$

dakle

$$(*) \quad mC = \sum_{r \in R} m(V+r).$$

Odmah ćemo doći na kontradikciju. Naime, bilo bi ili $mV = 0$ ili $mV > 0$; u prvom slučaju bilo bi $m(V+r) = 0$ za svaki $r \in R$, pa dakle, prema (*) i $mC = 0$, protivno uslovu L_3 , da je $m[0,1] = 1$. Ako je pak $mV > 0$, onda gornja relacija (*) daje $mC = \infty$, što znači, da sam kontinuum C ne bi bio izmjeriv, jer njegova mjera ne bi bio određen broj.

Dakle mV ne postoji.

Hausdorff (v. [7] pp. 469—472) je dokazao, da za skupove na kugli ili skupove u prostoru sa 3 i više dimenzija, taj ublaženi problem mjere ne dopušta pozitivan odgovor. Njemu je naime pošlo za rukom da kuglinu plohu rastvori na 4 disjunktne dijela od kojih je jedan prebrojiv⁶, dok preostala tri A , B , C imaju osebujno svojstvo, da su međusobno kongruentni, pa bi dakle morali imati za mjeru trećinu mjere mK čitave kugline plohe; međutim skup A je kongruentan ne samo sa B i C nego i s njihovim spojem $B \cup C$ tako da bi dakle bilo

$$mA = mB + mC,$$

t. j. trećina kugle bila bi jednaka dvije trećine kugle, a to je nemoguće, ako je mjera same kugle $\neq 0$.

Banach [1] je naprotiv pokazao, da postoji realna funkcija za linearne (ravninske) skupove, koja udovoljava L_1, L_2, L_3 . Time je dakle dokazana egzistencija mjere (uz uslove L_1, L_2, L_3) u linearnom kontinuumu C_1 i u ravnini C_2 .

Na taj način otkrivena je velika razlika u strukturi Kartezijevih prostora C_1 (pravac), C_2 (ravnina) s jedne strane i prostora C_n sa $n > 2$ dimenzija s druge strane. Ta je razlika bila upadljiva naročito kad su Banach i Tarski (v. [3]) dokazali, da ma koja dva skupa koja leže u Kartezijevu prostoru s n dimenzija ($n > 2$) i koji obuhvataju po jednu kuglu, možemo rastaviti na konačno mnogo dijelova, tako da svaki dio jednog skupa bude podudaran s odgovarajućim dijelom drugoga skupa⁷; naprotiv, takvo rastavljanje nije moguće u slučaju $n = 1$ i $n = 2$.⁸

⁶ A time i mjere 0; vidi se naime, da svaki skup, koji je najviše prebrojiv, ima mjeru 0.

⁷ Sierpinski je dokazao ovo: svaka kugla može se rastaviti u 8 disjunktne dijelova, tako da nakon zgodnih kretanja pet od njih odn. tri od njih ispune po jednu kuglu, koja ima radius isti kao i zadana kugla [v. Fundamenta mathematicae, 33 (1945) p. 229].

⁸ Neumann (v. [12]) je tu pojavu ispitivao s gledišta teorije grupa i našao da razlog toga naglog skoka sa slučaja $n = 1, 2$ na preostale slučajeve $n = 3, 4, \dots$ leži u građi grupe kretanja prostora C_n ; naime prostori C_n sa $n > 2$ dopuštaju slobodnu grupu kretanja (rotacija oko jedne te iste točke) s dvije izvodnice, dok za prostore C_1 i C_2 takve grupe ne postoje.

Čitava pojava zavisi od grupa transformacija. Jer, da se u prostoru C_n ($n > 2$) uzela samo grupa translacija, ne bi bilo paradoksalnog razlikovanja; s druge strane, promatra li se mjesto grupe kretanja grupa svih afinih transformacija u ravnini, ima ta grupa dvije slobodne izvodnice, pa zato u ravnini ne postoji mjera koja bi mjesto uslova L_1 zadovoljavala zahtjevu da bude invarijantna s obzirom na affine transformacije.

3. Banachov problem mjere sastoji se u ovome: Ako je Q zadan skup, može li se svakom skupu $S \subseteq Q$ pridružiti realan broj

$$mS \geq 0,$$

tako da budu ispunjena ova tri uslova:

B_1 Ako je $x \in Q$, onda je $m(x) = 0$ t. j. svaki jednočlani skup u Q ima mjeru 0 (taj uslov čini ublaženje Lebesgue-ova uslova L_1);

B_2 Funkcija m je potpuno aditivna (isp. uslov L_2);

B_3 Funkcija m nije identički jednaka 0 (isp. uslov L_3).

Tako postavljen problem mjere je problem koji se tiče ne individualno skupa Q , nego svih skupova koji imaju isti kardinalni broj kao i skup Q . Jer, ako je f ma kakvo obostrano jednoznačno preslikavanje skupa Q , pa ako označimo sa fQ skup svih $f(x)$, ($x \in Q$), tada postojanje mjerne funkcije m u Q dopušta obrazovanje mjerne funkcije m_1 u fQ , na pr. tako da za svaki skup $S \subseteq fQ$ stavimo

$$m_1 S = m(f^{-1}S).$$

No za skupove Q , koji su konačni ili prebrojivi, Banachov problem mjere je lako rješiv, jer prema uslovima B_1 i B_2 takva mjera identički bi iščezavala, što se protivi sa B_3 .

St. Banach i C. Kuratowski [2] dokazali su, da je Banachova mjera nemoguća i za slučaj kad skup Q ima $\aleph_1$ za svoj kardinalan broj.

4. Ulamov uslov. St. Ulam je dokazao [14], da je Banachova mjera nemoguća, ako osnovni skup Q zadovoljava ovom Ulamovom uslovu:

Neka je Φ ma kakova porodica iz Q sa svojstvom, da je svaki sistem skupova iz Φ , koji su dva po dva bez zajedničkih točaka, najviše prebrojiv; tada postoji porodica Ψ sa svojstvom⁹:

$$(4.1) \quad \Psi \subseteq P(Q) \setminus \Phi,$$

$$(4.2) \quad k\Psi \leq \aleph_0,$$

$$(4.3) \quad k(Q \setminus \bigcup_S S) \leq \aleph_0, (S \in \Psi).$$

⁹ $P(Q)$ označuje skup svih dijelova skupa Q .

Za dva skupa A i B , oznaka $A \setminus B$ predstavlja skup svih elemenata iz A koji nisu u B . kX označuje kardinalni broj (potenciju) skupa X ; prema tome, $kX \leq \aleph_0$ znači, da je X najviše prebrojiv.

Ulamov uvjet je vanredno općenit. Zasad se ne zna ni za jedan skup, koji ga ne bi ispunjavao; tako se na pr. zna, da svaki skup kojemu je kardinalan broj manji od prvog nedostiživog kardinalnog broja, zadovoljava Ulamov uvjet (v. Sierpinski, [13], p. 107)¹⁰.

5. Carathéodory-ev problem mjere. Često se spominje Carathéodory-ev problem mjere metričkog prostora E , a sastoji se (v. [6] p. 238) u tome, da svakom skupu $S \subseteq E$ pridijelimo t. zv. »vanjsku« mjeru $\mu^* S$, tako da budu zadovoljena ova 4 uslova:

C_1 $0 \leq \mu^* S \leq \infty$; za prazni skup $\emptyset$ mjera je 0; ima bar jedan $S \subseteq E$ sa svojstvom $\mu^* S > 0$;

C_2 Ako je $X \subseteq S \subseteq E$, onda je $\mu^* X \leq \mu^* S$;

C_3 Mjera spoja od konačno ili prebrojivo mnogo skupova jest manja ili jednaka sumi mjera tih skupova: ako je $n < \omega_0$ ili $n = \omega_0$, tada je

$$\mu^* \bigcup_{\nu} S_{\nu} \leq \sum_{\nu} \mu^* S_{\nu}, \quad (\nu = 1, 2, 3, \dots, n);$$

C_4 Ako su A, B dva skupa sa razmakom $\neq 0^{11}$, onda je

$$\mu^*(A \cup B) = \mu^* A + \mu^* B.$$

Lako se dokaže, da u Kartezijevom prostoru C_n ima Carathéodory-evih vanjskih mjera (v. [6], p. 239.).

6. Problem mjere kao poseban slučaj monotonih preslikavanja djelimično uređenih skupova. Označimo li sa

$$(6.1) \quad (P(Q); \leq)$$

množinu svih skupova sadržanih u Q i djelimično uređenih s obzirom na odnos $\leq$, onda bi postojanje Banachove i Carathéodory-eve mjere za osnovni skup Q značilo uzlazno preslikavanje djelimično uređena skupa (6.1) na skup C realnih brojeva (odnosno na skup $C \cup \{\infty\}$).

¹⁰ $\aleph_\alpha$ je nedostiživ (inakcesibilan), ako redni broj α nema neposrednog prethodnika, a broj $\aleph_\alpha$ nije suma od manje od $\aleph_\alpha$ brojeva koji su $< \aleph_\alpha$.

¹¹ Razmak dvaju skupova A i B jest infimum razmaka točaka a, b gdje je $a \in A, b \in B$. Prema tome, razmak skupova A i B jest $\neq 0$ onda i samo onda, ako postoji broj $\varepsilon > 0$, tako da bude razmak $|a - b| \geq \varepsilon$ za svaki $a \in A, b \in B$.

Općenito, neka je

$$(6.2) \quad \mu$$

ma kakvo jednoznačno preslikavanje djelimično uređena skupa (6.1) na izvjestan djelimično uređen skup

$$(6.3) \quad (S; \leq);$$

ovaj se sastoji od skupa S , koji je djelimično uređen s obzirom na relaciju $\leq$ ¹². Transformacija μ je uzlazna u (6.1) (isp. Kuřepa [10]) ako relacije

$$(6.4) \quad X, Y \in P(Q), X \subseteq Y$$

povlače

$$(6.5) \quad \mu X \leq \mu Y.$$

Konvencija o praznom skupu i praznom elementu. Prazni (vakantni ili pusti) skup v jest onaj skup, koji nema nijednog elementa; to isto možemo izreći riječima, da je v sastavljen od *pustog elementa*; smatrat ćemo da je v dio svakog skupa; također ćemo pusti element smatrati elementom svakog skupa i to naravno *nepravim elementom* svakog skupa. Kad se govori o preslikavanju f skupa S , pa ako se izričito ne kaže drukčije, onda se podrazumijeva, da pritom pusti element skupa S prelazi opet u pust element, t. j. da je

$$fv = v.$$

Skupovi mjere nula. Definicija mjere. Za svaki $x \in Q$ reći ćemo, da je mjere nula s obzirom na uzlazno preslikavanje μ ; isto tako, za svaki skup $M \subseteq Q$ za koji postoji točka $x \in Q$ sa svojstvom

$$\mu M = \mu(x),$$

reći ćemo da je mjere nula; prema tome relacija

$$(6.6) \quad \mu M \in \bigcup_x \mu(x), (x \in Q)$$

je nuždan i dovoljan uslov, da dio $M \subseteq Q$ bude mjere nula. Ako skup M nije mjere nula, reći ćemo, da je on *mjere* $\neq 0$ t. j. mjere različite od nula.

¹² To znači, da je

1. $x \leq x$ za svaki $x \in S$;

2. iz $x, y, z \in S$ te $x \leq y \leq z$ slijedi $x \leq z$;

3. ako su x, y takvi elementi u S , da je i $x \leq y$ i $y \leq x$, onda je $x = y$.

Po definiciji, mjera u osnovnom skupu Q bit će svako jednoznačno uzlazno preslikavanje μ djelimično uređena skupa $(P(Q), \leq)$, ako su ispunjena ova tri uslova:

K_1 svaki dio skupa mjere nula jest mjere nula;

K_2 unija od $\leq \aleph_0$ skupova mjere nula jest mjere nula;

K_3 ako su F_1, F_2 dvije porodice disjunktih skupova mjere $\neq 0$ sa svojstvom, da je

$$(6.7) \quad F_1 \subset F_2 \text{ i da}$$

$$(6.8) \quad F_2 \setminus F_1 \text{ ima } \geq \aleph_0 \text{ članova, tada je}$$

$$(6.9) \quad \mu \bigcup_{x_1 \in F_1} x_1 < \mu \bigcup_{x_2 \in F_2} x_2 \quad ^{13}$$

L e m a. U svakom skupu postoji bar jedna mjera.

Stvarno, neka je q ma kakav predmet, koji ne leži u Q ; promatrajmo skup

$$(6.10) \quad \{q\} \cup P(Q),$$

koji ćemo djelimično urediti tako, da q stavimo između prazna skupa i preostalog dijela djelimično uređena skupa $(P(Q); \leq)$; za svaki element x skupa. (6.10) stavimo:

$$\mu(x) = q \text{ ili } x$$

već prema tome, da li je $kx \leq \aleph_0$, ili $kx > \aleph_0$; tada se vidi da je μ određena mjera u skupu Q .

Za djelimično uređen skup $(S, \leq)$ stavlja se:

$$(6.11) \quad k_c(S; \leq) = \sup_{X \subset S} X, \quad (\text{sup} = \text{supremum} = \text{gornja ograda}),$$

pri čemu X prolazi svima dobro uređenim dijelovima skupa $(S; \leq)$; primijetimo, da je kX oznaka za kardinalni broj od X .

Teorem. Neka je Q proizvoljan skup s Ulamovim svojstvom; neka je nadalje μ ma koja mjera u skupu Q t. j. ma koje uzlazno preslikavanje parcijalno uređena skupa $(P(Q); \leq)$ uz uslove K_1, K_2 i K_3 . Tada se slijedeća dva uslova međusobno isključuju:

O) U Q ima bar jedan skup mjere $\neq 0$ ¹⁴

¹³ Unija (spoj) $\bigcup_{x_1 \in F_1} x_1$ je skup sastavljen od elemenata, koji se javljaju kao element u bar jednom skupu iz $X_1 \in F_1$ porodice F_1 . Primijetimo, da $x < y$ znači, da je $x \leq y$, ali da nije $y \leq x$. Znak $<$ u (6.9) je bitan.

¹⁴ Na pr. točka $\mu(Q)$ razlikuje se od svih točaka $\mu(x)$, ($x \in Q$).

A) (Arhimedov postulat):

(6.12) $k_e(\mu(P(Q); \leq)) \leq \aleph_0$; pritom je
 $(\mu(P(Q)); \leq)$ parcijalno uređeni skup svih $\mu(x)$, $(x \in P(Q))$.

Primjedba. Dobro je sadržaj gornjeg teorema dovesti u vezu s ovom Borelovom izrekom (v. [4] p. 108 u noti):
«... Etant donnée une suite indéfiniment croissante de nombres entiers, il n'existe pas de nombre réel supérieur à tous les nombres de cette suite. Cet »axiome d'Archimède« est au fond la base même de la mesure des grandeurs...».

Dokaz teorema (isp. Sierpinski [13] p. 108).

Neka Q i μ imaju isto značenje kao i u teoremu; pretpostavimo da teorem nije istinit, dakle da postoji bar jedan

(6.13) $M \in P(Q)$

mjere različite od nule, ma da Arhimedov uslov A vrijedi.

Promatrajmo porodicu

(6.14) Φ

svih $X \in P(Q)$ za koje presjek

(6.15) $X \cap M$

ima mjere $\neq 0$. Kako je

$$X \cap M \subseteq X,$$

to će zbog uslova K_1 svi elementi od Φ biti mjere $\neq 0$.

Dokažimo, da je svaki dio od Φ koji je sastavljen od disjunktih skupova najviše prebrojiv.

Stvarno, kad bi u Φ bilo neprebrojivo mnogo elemenata

(6.16) $X_0, X_1, \dots, X_\alpha, \dots, (\alpha < \omega_1)$

svojstva

(6.17) $X_\alpha \cap X_\beta = \emptyset$ (prazno), $(\alpha < \beta < \omega_1)$,

tada stavljajući za svaki $\alpha < \omega_1$:

(6.18) $F_\alpha = \bigcup_{\xi} X_\alpha, (\xi \leq \omega_\alpha),$

skup F_α bio bi mjere $\neq 0$.

Nadalje, ako je $\alpha < \beta < \omega_1$, skup F_β sadržavao bi kao svoje dijelove sve

$X_\xi, (\omega_\alpha \leq \xi < \omega_\beta)$ koji inače ne leže u F_α .

To znači, da bi bilo $F_\alpha \subset F_\beta$, i da bi u $F_\beta \setminus F_\alpha$ bilo neizmjereno mnogo skupova disjunktih i mjere $\neq 0$, pa bi bilo ne samo $\mu F_\alpha \leq \mu F_\beta$, nego po uslovu K_3 također

$$(6.19) \quad \mu F_\alpha < \mu F_\beta.$$

Na taj bi način imali nebrojiv dobro uređen dio

$$(6.20) \quad \mu F_\alpha, (\alpha < \omega_1)$$

djelimično uređena skupa $\mu(P(Q))$, protivno pretpostavci da vrijedi Arhimedov uslov A.

Tim je teorem potpuno dokazan.

BIBLIOGRAFIJA

1. St. Banach, Sur le problème de la mesure (Fund. Math. Warszawa, IV, 1923, pp. 7—33).
2. St. Banach — C. Kuratowski, Sur une définition du problème de mesure (Fund. Math., 14, 1929, 127—131).
3. St. Banach — A. Tarski, Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes (Fundamenta Mathematicae, Warszawa, 6, 1924, pp. 244—277).
4. E. Borel, Leçons sur les fonctions monogènes uniformes, Paris, 1919, 14 + 166.
5. E. Borel, Leçons sur la théorie des fonctions, Paris, 1928, note VI.
6. C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen, Leipzig-Berlin, 1918, 10 + 704.
7. F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig, 1914, 6 + 476.
8. F. Hausdorff, Mengenlehre, Berlin-Leipzig, 1927, 285.
9. C. Kuratowski, Topologie I, Warszawa-Lwów, 1933, 10 + 285.
10. D. Kurèpa, Transformations monotones des ensembles partiellement ordonnés (Comptes rendus, Paris, 1937, 205, 1033—1035; također Revista de Ciencias, Lima, año 42, 1940, pp. 827—849; año 43, 1941, pp. 483—500).
11. H. Lebesgue, Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, Paris, 1928, 16 + 342.
12. J. v. Neumann, Zur allgemeinen Theorie der Massen (Fundamenta Mathematicae, 13, 1929, pp. 73—116).
13. W. Sierpinski, Hypothèse du continu, Warszawa-Lwów, 1934, 6 + 192.
14. St. Ulam, Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre (Fund. Math. 16, 1930, 140—150).

(Primljeno na sjednici Odjela za matematičke, fizičke
i tehničke nauke dne 1. IV. 1950.)