

RAD JUGOSLAVENSKE AKADEMIJE ZNANOSTI I UMJETNOSTI
KNJIGA 343

ODJEL ZA MATEMATIČKE, FIZIČKE I TEHNIČKE NAUKE
KNJIGA XI

UREDNIK

Akademik JOSIP LONČAR

JUGOSLAVENSKA AKADEMIJA ZNANOSTI I UMJETNOSTI

R A D

JUGOSLAVENSKE AKADEMIJE
ZNANOSTI I UMJETNOSTI

A

Z A G R E B

1968

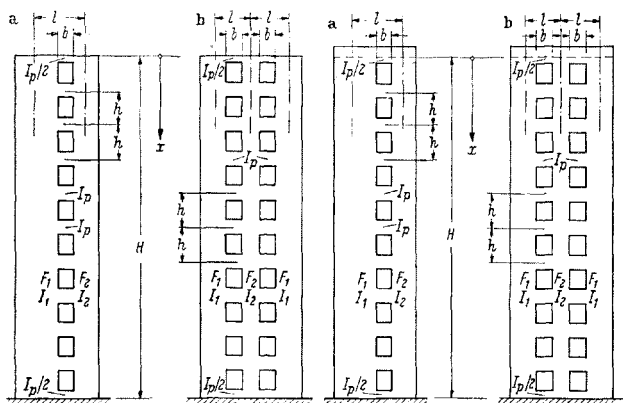
Tehnička redakcija, tisak, uvez i oprema:

IZDAVAČKI ZAVOD JUGOSLAVENSKE AKADEMIJE
ZAGREB

ZIDOWI OSŁABLJENI NIZOVIMA OTVORA IZLOŽENI UTJECAJIMA POTRESA I VJETRA

1. UVOD. PRETPOSTAVKE

Kod visokih objekata zidovi pored zadaće da preuzmu vertikalni teret od stropova imaju i zadaću da ukrute objekt protiv potresa i vjetra. Često po nekoliko zidova kombiniramo u torzijsko krute jezgre. Zidovi su u pravilu oslabljeni vertikalnim nizovima otvora (sl. 1, 2, 31, 38, 39).



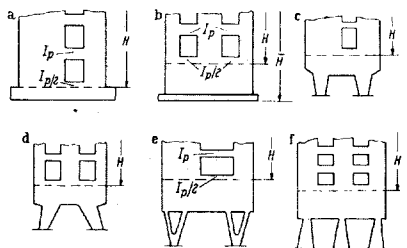
Sl. 1. Zidovi slobodni na gornjem kraju oslabljeni jednim (a) i sa dva (b) niza otvora.

Sl. 2. Zidovi s krutom prečkom na gornjem kraju oslabljeni jednim (a) i sa dva (b) niza otvora.

Ranije objavljeni postupci, [1] do [10], autora o ispitivanju zidova za jednostavnije tipove opterećenja i ležišnih konstrukcija specijalni su slučajevi općeg postupka koji je opisan u ovom radu.

Pretpostavlja se da su visine katova, modul elastičnosti i površine poprečnih presjeka stupaca zida i prečki koje međusobno povezuju stupce zida konstantne duž visine zida. U većini slučajeva zid je na svom gornjem kraju slobodan. Gornja prečka mora onda biti manjeg presjeka od ostalih, tako da njen reducirani moment inercije iznosi polovinu odgovarajuće vrijednosti ostalih, tj. unutarnjih prečki. Postupci koji se budu pokazali vrijede međutim – uz dovoljnu tačnost – i u slučajevima kada se debljina zida i modul elastičnosti više manje kontinuirano smanjuju odozdo naviše, kao i u slučaju kada zid na svom gornjem kraju nije slobodan, tj. kada je vrijednost reduciranog momenta inercije gornje prečke veća od polovine reduciranog momenta inercije unutarnjih prečki. To će se pokazati na ekstremnom slučaju zida koji na svom gornjem kraju ima beskonačno krutu prečku.

Na donjem kraju zidovi su oslonjeni na ležišne konstrukcije.

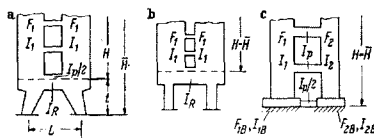


Sl. 3. Primjeri ležišnih konstrukcija prvog tipa.

Razlikujemo ove tipove ležišnih konstrukcija:

- 1) tip 1 (sl. 3): ležišne konstrukcije koje zbog svoje znatne krutosti praktično ne dopuštaju relativne vertikalne i kutne pomake donjih rubova stupaca zida;
- 2) tip 2 (sl. 4): hiperstatičke ležišne konstrukcije u kojima zbog njihove deformacije dolazi do relativnih vertikalnih i kutnih pomaka donjih rubova stupaca zida;

- 3) tip 3 (sl. 5): isostatičke ležišne konstrukcije u kojima zbog njihove deformacije dolazi do relativnih vertikalnih i kutnih pomaka donjih rubova stupaca zida.



Sl. 4. Primjeri ležišnih konstrukcija drugog tipa.

Sl. 3, 4 i 5 pokazuju po nekoliko primjera svakog tipa ležišnih konstrukcija.

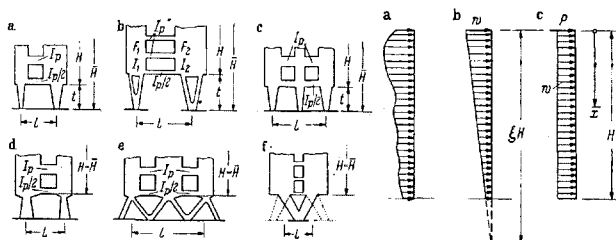
Na sl. 3a ležišna konstrukcija je masivan temelj, na sl. 3b krut podrumski zid, na sl. 3c, d, e, f okvir sa vrlo krutom prečkom. Bitni element ležišnih konstrukcija prvog tipa jest prečka koju, u usporedbi sa stupcima zida, možemo smatrati apsolutno krutom.

Ležišna konstrukcija prema sl. 4a može se približno tretirati kao masivan dvozglobni okvir koji može preuzeti i horizontalnu silu. Konstrukcija prema sl. 4b mora biti – jer su stupovi relativno vitki – bočno pridržana, npr. prostornim djelovanjem stropa nad prizemljem i zidova u drugim ravninama. Prečke ležišne konstrukcije ne možemo, u usporedbi sa stupcima zida, smatrati apsolutno krutima, pa njihovu krutost na savijanje i smicanje treba uvesti u račun. Ležišna je konstrukcija na sl. 4c podloga temelja. Zbog njene deformacije dolazi do pomicanja stopa temelja i time donjih rubova stupaca zida.

Ležišne konstrukcije trećeg tipa sastoje se samo od stupaca. Stupci ležišnih konstrukcija prema sl. 5a, b, c stanjuju se naprama dolje pa ih možemo tretirati kao zglobno oslonjene na temelje. Stupce ležišne konstrukcije prema sl. 5d možemo približno uzeti kao upete u temelje i zglobno vezane sa stupcima zida, a stupce ležišne konstrukcije na sl. 5e kao zglobno vezane s temeljima i sa stupcima zidova. Zid sa ležišnom konstrukcijom prema sl. 5f oslanja se na podlogu pomoću jednog raščlanjenog V-stupa. Sistem je sam po sebi labilan, ali postaje stabilan, jer je stropnom pločom nad prizemljem vezan sa susjednim ležišnim konstrukcijama u kojima se stupci šire prema vani. Stupci svih

ležišnih konstrukcija zajedno čine krute trokutne vezove; možemo ih smatrati zgloбно vezanima s temeljima i sa stupcima zidova. Reakcije ležišnih konstrukcija trećeg tipa te unutarnje sile na gornjem rubu ležišnih konstrukcija mogu se odrediti iz uvjeta ravnoteže i, u sistemima sa dva niza otvora, uvjeta simetrije konstrukcije i antimetrije opterećenja, ne ulazeći u promatranje deformacija.

Pretpostavlja se da za materijal konstrukcije važi Hookeov zakon i da napon nigdje ne prelazi granicu proporcionalnosti. Navierova hipoteza ravnih presjeka vrijedi za poprečne presjeke stupaca zida i prečki, ali ne za poprečni presjek zida u cijelosti. Kako je krutost prečki vrlo mala u usporedbi sa krutošću stupaca zida, može se – uz dovoljnu tačnost – uzeti da tačke infleksije prečki nastaju na simetrali prečki. U njihovu uzdužnom smjeru prečke možemo smatrati apsolutno krutima.



Sl. 5. Primjeri ležišnih konstrukcija trećeg tipa.

Sl. 6. Horizontalno opterećenje zida: proizvoljno (a), trapezno (b) i kombinacija jednoliko podijeljenog opterećenja i koncentrirane sile pri vrhu (c).

Ispituje se utjecaj horizontalnog opterećenja. Ono se može duž visine zida mijenjati po bilo kakvom analitički ili numerički zadanom zakonu (sl. 6a). U općem slučaju rješenje se задаće svodi na jedan sistem tročlanih linearnih algebarskih jednadžbi. Za slučaj trapeznog opterećenja (sl. 6b) i za slučaj kombinacije jednoliko podijeljenog opterećenja duž čitave visine zida i koncentrirane sile pri vrhu (sl. 6c) izvest će se zatvoreno rješenje i dati gotove formule za unutarnje sile sistema. Time su ujedno date formule i za tri specijalna slučaja trokutnog i jednoliko podijeljenog opterećenja te koncentrirane sile pri vrhu.

Pri numeričkom proračunavanju konkretnih zadataka opterećenje se uzima prema propisima na osnovu mjerenja, ili se iznalazi dinamičkim proračunom. U svrhu pojednostavljenja proračuna ono se obično, ako je duž visine zida nepravilno podijeljeno, zamjenjuje najprikladnijim od navedenih opterećenja za koja postoje gotova rješenja.

Opterećenje vjetrom može se u općem slučaju dobro aproksimirati trapeznim, a u srazmjerno niskim objektima jednoliko podijeljenim opterećenjem. Inercijske sile pri potresu očituju se uglavnom kao koncentrirane sile u visini stropnih konstrukcija; duž visine zida one su često podijeljene po trokutu ili jednoliko. Moguće nadogradnje iznad krova, masa strojeva liftova i sl., daju pri potresu koncentriranu silu pri vrhu zida.

Zamjenjujuća opterećenja određena su dvama parametrima. Za parametre biramo:

- u slučaju trapeznog opterećenja (sl. 6b) intenzitet w opterećenja pri vrhu zida i koeficijent ξ koji određuje udaljenost fiktivne nultacke intenziteta opterećenja od gornjeg ruba zida ($\xi > 1$);
- u slučaju kombinacije jednoliko podijeljenog opterećenja i koncentrirane sile pri vrhu (sl. 6c) intenzitet w jednoliko podijeljenog opterećenja i veličinu P koncentrirane sile.

Radi iznalaženja obaju parametara postave se dva uvjeta:

1) da je veličina proračunskog opterećenja jednaka veličini zadanog opterećenja i 2) da je moment s obzirom na donji rub zida proračunskog opterećenja jednak momentu s obzirom na donji rub zida zadanog opterećenja. Ako veličinu zadanog opterećenja označimo sa $\mathcal{U}$, a moment tog opterećenja s obzirom na donji rub zida sa $\mathfrak{M}_H$, dobiva se

za slučaj trapeznog opterećenja:

$$w = \frac{6 \mathcal{U}}{H^2} \left(\frac{\mathfrak{M}_H}{\mathcal{U}} - \frac{H}{3} \right), \quad \xi = \frac{\frac{\mathfrak{M}_H}{\mathcal{U}} - \frac{H}{3}}{2 \frac{\mathfrak{M}_H}{\mathcal{U}} - H}, \quad (1)$$

za slučaj kombinacije jednoliko podijeljenog opterećenja i koncentrirane sile pri vrhu zida:

$$w = \frac{2}{H} \left(\mathcal{U} - \frac{\mathfrak{M}_H}{H} \right), \quad P = 2 \frac{\mathfrak{M}_H}{H} - \mathcal{U}. \quad (2)$$

Inercijske sile od potresa prenose se na zid podijeljeno duž njegove širine. Vjetar djeluje na zid pritiskujuće sa luv-strane* i sisajuće sa lee-strane*. Raspodjela opterećenja po širini zida međutim nije od značenja; ona kod visokih objekata utječe praktički samo na veličinu horizontalnih uzdužnih sila, a te su neznatne pa se o njima ne vodi računa. Prema tome se opterećenje može tretirati tako kao da na zid djeluje bilo jednostrano, bilo antimetrično s obje strane zida.

Deformacija podloge temelja prouzrokuje samo zaokretanje sistema koji se sastoji od zida i ležišne konstrukcije kao cjeline, a nema nikakva utjecaja na stanje unutarnjih sila u konstrukciji, izuzevši sistem s ležišnom konstrukcijom prema sl. 4c, pri kojem su stupci zida temeljeni odvojeno. U tom slučaju potrebne su relacije, koje izražavaju pomake stopa temelja kao funkcije sila koje djeluju na podloge temelja. Te relacije imaju najjednostavniji oblik ako se primijeni Winklerov postupak koeficijenta podloge. Vertikalni pomak stope temelja onda iznosi

$$\frac{\text{vertikalna sila}}{\text{koeficijent podloge} \times \text{površina stope temelja}},$$

a kut zaokreta

$$\frac{\text{moment}}{2 \times \text{koeficijent podloge} \times \text{vlastiti moment inercije stope temelja}}.$$

Pri tome je za koeficijent podloge za savijanje uzeta dvostruka vrijednost koeficijenta podloge za centrični pritisak. »Tačnije« uzimanje u obzir deformacije podloga temelja pomoću kompliciranih matematičkih modela ne bi imalo smisla jer se karakteristike tla u praksi i tako ne mogu ni približno tačno odrediti a i zbog toga što je statička shema objekta sama po sebi vrlo složena.

Umjesto Winklerovim koeficijentom, elastična svojstva podloge temelja mogu se opisati modulom elastičnosti i Poissonovim koeficijentom.

* Po engleskom:

luv-strana ... strana objekta izložena vjetru,

lee-strana ... strana objekta zaklonjena od vjetra.

2. ZIDOVI U KOJIMA SU SVI STUPCI KRUTI NA SAVIJANJE

2.1. Zidovi s jednim i sa dva niza otvora

Zidovi s jednim nizom otvora (sl. 1a i 2a) ne moraju, a zidovi sa dva niza otvora (sl. 1b i 2b) moraju biti simetrični.

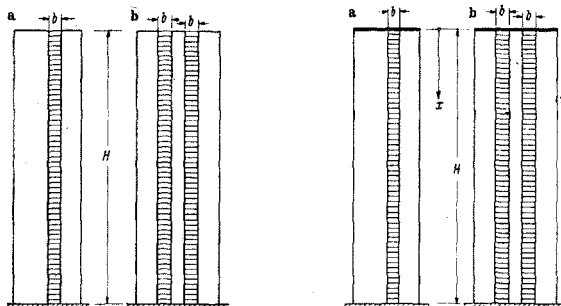
2.1.1. Formuliranje problema

2.1.1.1. Formuliranje problema primjenom metode sila

Pri iznalaženju komponentata deformacije sistema uzet će se u obzir ne samo utjecaj momenata savijanja nego i doprinosi uzdužnih sila u stupcima i poprečnih sila u prečkama. Zancmarivanje doprinosa uzdužnih sila u stupcima dovelo bi do bitno pogrešnih rezultata. Doprinos poprečnih sila u prečkama pravokutnog poprečnog presjeka može se uvesti u račun time da se umjesto s momentom inercije prečki $\delta h_p^3/12$ računa s njihovim reduciranim momentom inercije

$$I_p = \frac{\delta h_p^3/12}{1 + 2,8 (h_p/b)^2} \quad (3)$$

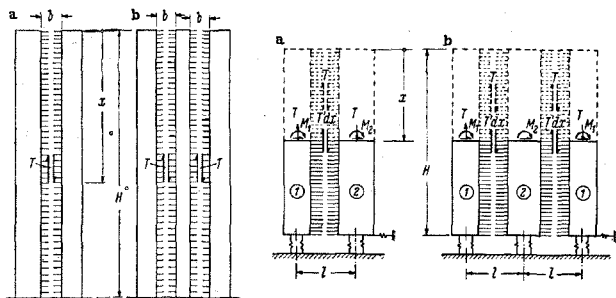
Pri tome je uzeto da je modul smicanja jednak 3/7 modula elastičnosti, a koeficijent raspodjele tangencijalnih napona za pravokutni poprečni presjek 6/5.



Sl. 7. Zamjenjujući sistemi zida slobodnog na gornjem kraju oslabljenog jednim (a) i dvama (b) nizovima otvora.

Sl. 8. Zamjenjujući sistemi zida sa beskonačno krutom prečkom na gornjem kraju oslabljenog jednim (a) i dvama (b) nizovima otvora.

U svrhu pojednostavljivanja proračuna promatra se zamjenjujući kontinualni sistem, koji se iz stvarnog diskretnog sistema dobiva tako da se prečke zamijene kontinualnom vezom (sl. 7 i 8). Tu kontinualnu vezu možemo zamisliti u obliku beskonačno tankih lamela debljine dx , uklještenih u oba stupca i nanizanih jedna do druge duž čitave visine H zida; reducirani moment inercije svake od tih lamela iznosi $I_p dx/H$. Reducirani moment inercije zamjenjujuće kontinualne veze na visinu kata h jednak je reduciranom momentu inercije jedne prečke.



Sl. 9. Osnovni sistemi zida slobodnog na gornjem kraju oslabljenog jednim (a) i dvama (b) nizovima otvora i hiperstatičke veličine.

Sl. 10. Unutarnje sile nekog proizvoljnog poprečnog presjeka x zida oslabljenog jednim (a) i dvama (b) nizovima otvora.

Sistem je jedanput hiperstatičan. Osnovni sistem (sl. 9) dobiva se iz zamjenjujućeg sistema time da u simetrali svih lamela, duž čitave visine zida, uvedemo nulpolja poprečne sile. Detalj tog nulpolja prikazan je na sl. 11.

U zamjenjujućem sistemu u simetrali svake lamele djeluje poprečna sila $T'dx$. Veličina data integralom ovih poprečnih sila

$$T = \int_0^H T'dx \quad (4)$$

od vrha $x = 0$ zida do promatrane apscise x jest, promatrajući sada sistem kao cjelinu umjesto jedne lamele, sila smicanja; ona je funkcija apscise x . Usvajamo je za hiperstatičku veličinu (sl. 9). Derivaciju T' sile smicanja T po apscisi nazovimo reducirana sila smicanja; ona se od-

nosi na jedinicu dužine simetrane zamjenjujuće kontinualne veze i ima dimenziju sila/dužina. U sistemima sa dva niza otvora obje su sile smicanja jednake zbog simetrije konstrukcije i pretpostavljene antimetrije opterećenja.

Na sl. 10. naznačene su unutarnje sile bilo kojeg poprečnog presjeka $0 \leq x \leq H$ zida. Sumarni moment savijanja u tom presjeku iznosi

$$M = \mathfrak{M} - Tl. \quad (5 a)$$

$$M = \mathfrak{M} - 2 Tl. \quad (5 b)$$

Prva od tih jednačbi vrijedi za zid s jednim nizom, a druga za zid sa dva niza otvora. Sa $\mathfrak{M}$ označen je doprinos vanjskog opterećenja, a Tl odnosno $2 Tl$ doprinosi su sile smicanja. Kako ugibne linije svih stupaca zida moraju biti jednake, sumarni moment savijanja dijeli se na pojedine stupce srazmjerno njihovim momentima inercije. Momenti savijanja stupaca 1 i 2 jesu:

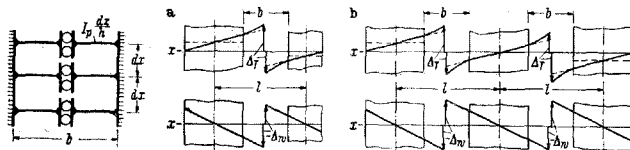
$$M_1 = \frac{I_1}{\Sigma I} M, \quad M_2 = \frac{I_2}{\Sigma I} M; \quad (6)$$

sa ΣI označena je suma momenata inercije svih stupaca promatranoga zida. Momente savijanja smatramo pozitivnima, ako izazivaju vlačno natezanje lijevih rubova stupaca.

Uzdužne sile u vanjskim stupcima jednake su $-T$ na lee-strani i $+T$ na luv-strani. Kod zida sa dva niza otvora uzdužna je sila u srednjem stupcu zbog simetrije sistema i pretpostavljene antimetrije opterećenja identično jednaka nuli. Uzdužna sila uzeta je pozitivna ako je vlačna.

Pera na sl. 11 simbolički predložuju ležišnu konstrukciju.

Na sl. 12 prikazan je debelom linijom položaj poprečnog presjeka x osnovnog sistema nakon deformacije zbog djelovanja sile smicanja



Sl. 11. Detalj nulpolja sile smicanja.

Sl. 12. Vertikalni pomaci poprečnog presjeka x osnovnog sistema zida oslabljenog jednim (a) i dvama (b) nizovima otvora zbog djelovanja sile smicanja odnosno vanjskog opterećenja.

odnosno vanjskog opterećenja. Generalizirani pomak koji odgovara generaliziranoj sili $T = T(x)$ jeste relativno smicanje presječenih krajeva lamele na mjestu x u smjeru i smislu sile T . Sa Δ_T odnosno Δ_w označena su relativna smicanja presječenih krajeva lamele na mjestu x zbog djelovanja sila smicanja odnosno vanjskog opterećenja.

Primjenom elementarnih obrazaca nauke o otpornosti materijala dobivaju se uz oznake

$$\alpha^2 = \left(\frac{l^2}{\Sigma I} + \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} \right) \frac{12 I_p}{hb^3} \quad (7 a)$$

za zid s jednim nizom otvora i

$$\alpha^2 = \left(\frac{2 l^2}{\Sigma I} + \frac{1}{F_1} \right) \frac{12 I_p}{hb^3} \quad (7 b)$$

za zid sa dva niza otvora te

$$\psi = \frac{l}{\Sigma I} \cdot \frac{12 I_p}{hb^3} \quad (8)$$

za oba zida, za tražene pomake izrazi

$$\Delta_T = \frac{hb^3}{12 EI_p} (T' + \alpha^2 \int_x^H T dx) + \Delta_{HT} \quad (9)$$

$$\Delta_w = - \frac{hb^3}{12 EI_p} \psi \int_x^H \mathfrak{M} dx + \Delta_{Hw}. \quad (10)$$

U izrazu za Δ_T prvi član daje doprinos deformacije lamele na mjestu x , drugi doprinos izduženja i iskrivljenja stupaca zida na području između poprečnog presjeka x i donjeg ruba $x = H$ i treći doprinos deformacije ležišne konstrukcije. U izrazu za Δ_w prvi član daje doprinos iskrivljenja stupaca zida u navedenom području, a drugi doprinos ležišne konstrukcije. Zidovima tipa 1 (sl. 3) doprinosi su Δ_{HT} i Δ_{Hw} ležišne konstrukcije jednaki nuli.

U zadanom sistemu (sl. 1 i 2) prečke su u svojoj simetrali monolitne i krute. Ni u zamjenjujućem sistemu nema relativnih smicanja krajeva lamela. Uvjet kompatibilnosti je

$$\Delta_T + \Delta_w = 0. \quad (11)$$

Uvrste li se u uvjet kompatibilnosti (11) izrazi (9) i (10) za pomake, on dobiva oblik integralno-diferencijalne jednadžbe

$$T' + \alpha^2 \int_x^H T dx = \psi \int_x^H \mathfrak{M} dx - (\Delta_{HT} + \Delta_{Hw}) \frac{12 EI_p}{hb^3}. \quad (12)$$

Nakon deriviranja i primjene poznatih relacija analize

$$\left(\int_x^H T dx\right)' = -T, \quad \left(\int_x^H \mathfrak{M} dx\right)' = -\mathfrak{M} \quad (13)$$

i uređenja, jednačba (12) dobiva konačni oblik

$$-T'' + \alpha^2 T = \psi \mathfrak{M}. \quad (14)$$

To je linearna diferencijalna jednačba II reda s konstantnim koeficijentima. Koeficijenti α^2 na lijevoj strani jednačbe i ψ ovise samo o geometrijskim karakteristikama samoga zida. Na desnoj strani jednačbe figurira član $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(x)$ ovisan o opterećenju. Nijedan od navedenih koeficijenata ne ovisi o rubnim uvjetima zida.

U slučaju kad su debljina zida, modul elastičnosti, ili oboje, duž visine zida promjenljivi, diferencijalna jednačba sile smicanja

$$-T'' + \varphi T' + \alpha^2 T = \psi \mathfrak{M} \quad (14a)$$

ima još jedan član koji sadržava prvu derivaciju sile smicanja, dakle reduciranu silu smicanja T' . Pri tome je $\varphi = I_p' / I_p + E' / E$. Za I_p i E te njihove derivacije treba pri tome uvrstiti odgovarajuće funkcije od x . Pokazat će se međutim da je u praksi – uz dovoljnu tačnost – moguće u diferencijalnoj jednačbi (14a) zanemariti član $\varphi T'$, tj. i zidove promjenljive debljine i promjenljivog modula elastičnosti proračunavati primjenom jednostavnije diferencijalne jednačbe (14), ako skokovi nisu preveliki.

U većini slučajeva zid je na svom gornjem rubu $x=0$ slobodan (sl. 1). Na gornjem rubu zida dakle nema prepreka relativnom smicanju presječenih krajeva lamele i sila smicanja mora biti jednaka nuli:

$$T_0 = 0. \quad (15)$$

Ako zid na svom gornjem kraju nije slobodan, nego ima prečku, koja je toliko kruta da se u usporedbi s krutostima stupaca zida može smatrati apsolutno krutom, gornja lamela $x=0$ ne može se deformirati, pa je prema tome poprečna sila $T' dx$ te lamele jednaka nuli. Gornji rubni uvjet prema tome ima oblik

$$T'_0 = 0. \quad (16)$$

Donji rubni uvjet ovisi o tipu ležišne konstrukcije.

Ležišne konstrukcije tip 1 (sl. 3)

Očito je

$$T'_H = 0. \quad (17)$$

Ležišne konstrukcije tip 2 (sl. 4)

Uvjet kompatibilnosti

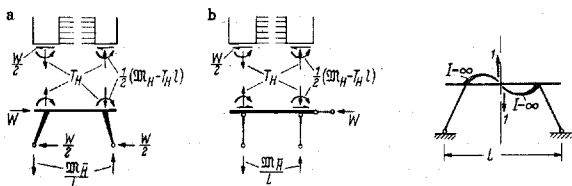
$$\Delta_{HT} + \Delta_{Hw} = 0 \quad (18)$$

najdonje lamele $x = H$, svodi se, kao što će se dalje pokazati, na oblik

$$T'_H + \alpha_L^2 T_H = \psi_L \mathfrak{M}_{\bar{H}}. \quad (19)$$

Ležišne konstrukcije prema sl. 4a, b.

Na sl. 13 prikazane su statičke sheme ležišnih konstrukcija, reakcije i unutarnje sile na sastavu stupaca zida i ležišne konstrukcije.



Sl. 13. Statičke sheme ležišnih konstrukcija prema sl. 4a i 4b, reakcije i unutarnje sile na sastavu stupaca zida i ležišne konstrukcije.

Sl. 14. Jedinična generalizirana sila za iznalaženje doprinosa deformacije ležišne konstrukcije prema sl. 4a relativnom smicanju presječnih krajeva lamele $x = H$.

Zbog deformacije okvira dolazi do podizanja na luv-strani, odn. spuštanja na lee-strani donjih rubova stupaca zida. Doprinos deformacije okvira relativnom smicanju presječenih krajeva lamele $x = H$ može se proračunati npr. primjenom Mohrova stavka, usvojivši za jediničnu silu generaliziranu silu prema sl. 14. Deformacija stupaca okvira ne utječe na tražene pomake; ona prouzrokuje samo pomak zida kao cje-line, tj. kao krutog tijela. Superponirajući doprinosu deformacije okvira još doprinos deformacije same lamele, dobivamo, uz oznake

$$\alpha_L^2 = \frac{I_p}{h I_R}, \quad \psi_L = \frac{I_p}{h L I_R}, \quad (20)$$

za relativno smicanje presječenih krajeva lamele, u osnovnom sistemu, zbog djelovanja sila smicanja, odnosno vanjskog opterećenja, izraze

$$\begin{aligned} \Delta_{HT} &= \frac{hb^3}{12 EI_p} (T'_H + \alpha_L^2 T_H), \\ \Delta_{Hw} &= - \frac{hb^3}{12 EI_p} \psi_L \mathfrak{M}_{\bar{H}}. \end{aligned} \quad (21)$$

Uvrste li se ovi izrazi za pomake u uvjet kompatibilnosti (18), on dobiva konačni oblik (19).

Ako je prečka okvira tako kruta da se može staviti $I_R = \infty$, koeficijenti α_L^2 i ψ_L postaju jednaki nuli i rubni uvjet (19) degenerira u (17). U tom slučaju ležišne konstrukcije odgovaraju prvom tipu (sl. 3c).

Ležišne konstrukcije prema sl. 4c

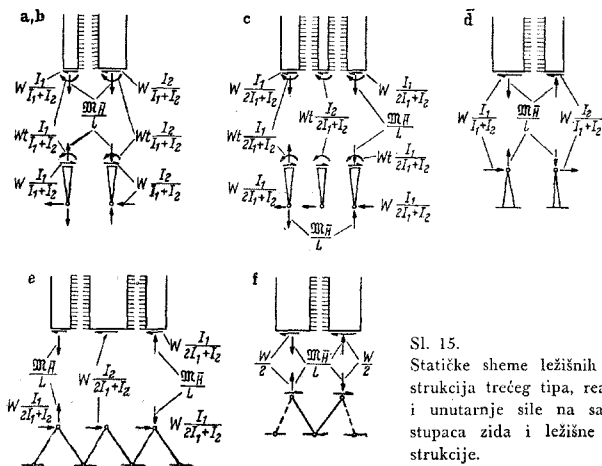
Gornje plohe temelja se zbog deformacije podloge temelja podižu na luv-strani, odnosno spuštaju na lee-strani i zaokreću. Ti pomaci će se proračunati primjenom postupka koeficijenta podloge.

Uz oznake

$$\alpha_L^2 = \left(\frac{l^2}{2 \Sigma I_B} + \frac{1}{F_{1B}} + \frac{1}{F_{2B}} \right) \frac{12 I_p}{h b^3} \cdot \frac{E}{c}, \quad (22)$$

$$\psi_L = \frac{l}{2 \Sigma I_B} \cdot \frac{12 I_p}{h b^3} \cdot \frac{E}{c},$$

izrazi za relativno smicanje presječnih krajeva lamele $x = H$, u osnovnom sistemu zbog djelovanja sile smicanja, odnosno vanjskog opterećenja (sl. 16), opet dobivaju oblik (21), a uvjet kompatibilnosti konačni oblik (19).

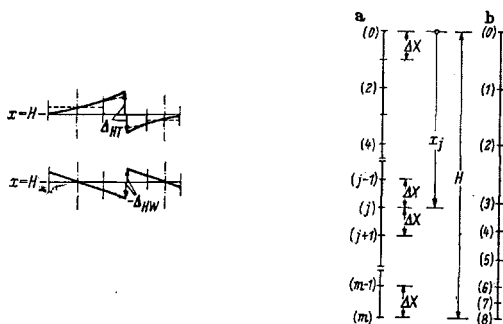


Sl. 15.
Statičke sheme ležišnih konstrukcija trećeg tipa, reakcije i unutarnje sile na sastavu stupaca zida i ležišne konstrukcije.

Ako je tlo tako kruto da se može staviti $c = \infty$, koeficijenti α_L^2 i ψ_L postaju jednaki nuli i rubni uvjet (19) degenerira u (17). U tom slučaju ležišna konstrukcija odgovara prvom tipu (sl. 3a).

Ležišne konstrukcije tip 3 (sl. 5)

Na sl. 15 prikazane su statičke sheme ležišnih konstrukcija, reakcije i unutarnje sile na gornjem rubu $x = H$ ležišnih konstrukcija. One su proračunate primjenom uvjeta ravnoteže i – u sistemima sa dva niza otvora – uvjeta simetričnosti konstrukcije i antimetričnosti opterećenja.



Sl. 16. Vertikalni pomaci donjih rubova stupaca zida i lamele $x=H$ osnovnog sistema u slučaju ležišne konstrukcije prema sl. 4c zbog djelovanja sile smicanja odnosno vanjskog opterećenja.

Sl. 17. Raspodjela čvorova diferencijskih jednadžbi duž visine zida: jednolika (a) i nejednolika (b).

Rubne vrijednosti T_H sile smicanja T mogu se odrediti primjenom uvjeta ravnoteže vertikalnih sila na osnovnim sistemima. Dobiva se:

$$T_H = \mathfrak{M}_H / L. \quad (23)$$

U slučaju ležišne konstrukcije tipa 3 stupci zida nisu uz donji rub jače povezani nego na bilo kojoj drugoj visini. Pomnožimo li rubni uvjet (19) za zidove sa ležišnim konstrukcijama tipa 2 sa hI_R / I_p on za $I_R \rightarrow 0$ degenerira u oblik (23) za zidove sa ležišnim konstrukcijama tipa 3.

2.1.1.2. Formuliranje problema energetsom metodom

Promotrit ćemo – jednostavnosti radi – zid simetrično oslabljen jednim nizom otvora i ležišnom konstrukcijom prema sl. 4a.

Komplementarna energija sistema sastoji se od doprinosa zida, ležišne konstrukcije, temelja i podloge temelja.

Komplementarna energija zida je

$$U_W = \int_0^H \left[\frac{hb^3}{12 I_p} T'^2 + \frac{(\mathfrak{M} - Tl)^2}{2 I} + \frac{2}{F} T^2 \right] dx; \quad (24)$$

prvi član daje doprinos zamjenjujuće kontinualne veze, a drugi i treći doprinos stupaca zida.

Prečka ležišne konstrukcije savija se praktički samo u području između obaju stupaca zida, tj. unutar svog svijetlog raspona b . Komplementarna energija ležišne konstrukcije je dakle

$$U_L = \frac{b^3}{24 EI_R} \left(T_H - \frac{\mathfrak{M}_H}{L} \right)^2 + U_s, \quad (25)$$

gdje U_s označuje doprinos stupova ležišne konstrukcije.

Totalna komplementarna energija sistema prema tome iznosi

$$U = \frac{1}{2E} \int_0^H \left[\frac{hb^3}{12 I_p} T'^2 + \frac{(\mathfrak{M} - Tl)^2}{2 I} + \frac{2}{F} T^2 \right] dx + \frac{b^3}{24 EI_R} \left(T_H - \frac{\mathfrak{M}_H}{L} \right)^2 + U_s + U_B, \quad (26)$$

gdje je sa U_B označen doprinos temelja i podloge temelja. Doprinosi U_s i U_B stupova ležišne konstrukcije te temelja i podloge temelja očito ne ovise o hiperstatičkoj veličini.

Diferencijalna jednadžba hiperstatičke veličine i prirodni rubni uvjet problema odredit će se prema teoremu o minimumu totalne komplementarne energije sistema iz uvjeta da funkcional (26) bude stacionaran u odnosu na male dopuštene varijacije te veličine. Prema pravilima računa varijacija dobiva se uvjetna jednadžba

$$\delta U = \int_0^H \frac{1}{E} \left[\left(\frac{l^2}{2 I} + \frac{2}{F} \right) T - \frac{\mathfrak{M}}{2 I} - \frac{hb^3}{12 I_p} T'' \right] \delta T dx + \frac{1}{E} \left[\frac{hb^3}{12 I_p} T_H + \frac{b^3}{12 I_R} \left(T_H - \frac{\mathfrak{M}_H}{L} \right) \right] \delta T_H = 0. \quad (27)$$

Kako varijacija δT i rubna vrijednost te varijacije δT_H mogu poprimiti proizvoljne vrijednosti, jedn. (27) može biti identično zadovoljena samo ako su koeficijenti uz δT i δT_H , tj. oba izraza u uglatim zagradama, jednaki nuli.

Izjednačujući s nulom izraz uz δT dobiva se uz oznake (7a) i (8) diferencijalna jednažba (14) hiperstatičke veličine, a izjednačujući s nulom izraz uz δT_H uz oznake (20) donji ili prirodni rubni uvjet (19).

2.1.2. Rješenje problema

Treba riješiti problem zadan diferencijalnom jednažbom (14), odgovarajućim gornjim rubnim uvjetom (15) ili (16) i odgovarajućim donjim rubnim uvjetom (17), (19) ili (23).

2.1.2.1. Rješenje za slučaj općeg opterećenja (sl. 6a)

U slučaju općeg opterećenja ne tražimo analitički izraz funkcije T , nego samo numeričke vrijednosti te funkcije u nizu tačaka. Područje definiranosti ($0 \leq x \leq H$) funkcije T podijelimo na m dijelova jednakih ili nejednakih dužina Δx (sl. 17a, b). Diferencijalnu jednažbu i rubne uvjete zamijenimo sistemom diferencijalnih jednažbi u tačkama $j = 0 \dots m$.

Primjenom aproksimativnih izraza

$$\left. \begin{aligned} T'_0 &= \frac{1}{2 \Delta x} (T_1 - T_{-1}), \\ T''_j &= \frac{1}{\Delta x^2} (T_{j+1} - 2 T_j + T_{j-1}), \quad (j = 0 \dots m) \\ T'_m &= \frac{1}{2 \Delta x} (T_{m+1} - T_{m-1}) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

za prvu i drugu derivaciju funkcije T u tačkama j dobivaju se za izražavanje vrijednosti funkcije u tačkama $j = 0 \dots m$, ako sa $\mathfrak{M}_j$ označimo moment savijanja vanjskog, tj. horizontalnog opterećenja u presjeku $x = x_j$, niže navedeni sistemi tročlanih linearnih algebarskih jednažbi. Vrijednosti T_{-1} i T_{m+1} funkcije T u tačkama -1 i $m+1$ izvan područja $(0 \dots m)$ zida eliminirane su iz sistema jednažbi primjenom rubnih uvjeta.

2.1.2.1.1. Zidovi slobodni na gornjem kraju

Zidovi s ležišnim konstrukcijama prvog tipa (sl. 3)

$$\left. \begin{aligned} T_0 &= 0, & (0) \\ (2 + \alpha^2 \Delta x^2) T_1 - T_2 &= \psi \Delta x^2 \mathfrak{M}_1, & (1) \\ -T_{j-1} + (2 + \alpha^2 \Delta x^2) T_j - T_{j+1} &= \psi \Delta x^2 \mathfrak{M}_j, \quad (j=2 \dots m-1) \\ -2 T_{m-1} + (2 + \alpha^2 \Delta x^2) T_m &= \psi \Delta x^2 \mathfrak{M}_m, & (m) \end{aligned} \right\} \quad (29 \text{ a})$$

Zidovi s ležišnim konstrukcijama drugog tipa (sl. 4)

$$\left. \begin{aligned} T_0 &= 0, & (0) \\ (2 + \alpha^2 \Delta x^2) T_1 - T_2 &= \psi \Delta x^2 \mathfrak{M}_1, & (1) \\ -T_{j-1} + (2 + \alpha^2 \Delta x^2) T_j - T_{j+1} &= \psi \Delta x^2 \mathfrak{M}_j, \quad (j=2 \dots m-1) \\ -2 T_{m-1} + (2 + \alpha^2 \Delta x^2 + 2 \alpha_L^2 \Delta x) T_m &= \\ &= \psi \Delta x^2 \mathfrak{M}_m + 2 \psi_L \Delta x \mathfrak{M}_{\bar{H}}, & (m) \end{aligned} \right\} \quad (29 \text{ b})$$

Zidovi s ležišnim konstrukcijama trećeg tipa (sl. 5)

$$\left. \begin{aligned} T_0 &= 0, & (0) \\ (2 + \alpha^2 \Delta x^2) T_1 - T_2 &= \psi \Delta x^2 \mathfrak{M}_1, & (1) \\ -T_{j-1} + (2 + \alpha^2 \Delta x^2) T_j - T_{j+1} &= \psi \Delta x^2 \mathfrak{M}_j, \quad (j=2 \dots m-2) \\ -T_{m-2} + (2 + \alpha^2 \Delta x^2) T_{m-1} &= \psi \Delta x^2 \mathfrak{M}_{m-1} + \mathfrak{M}_{\bar{H}}/L, \quad (m-1) \\ T_m &= \mathfrak{M}_{\bar{H}}/L. & (m) \end{aligned} \right\} \quad (29 \text{ c})$$

2.1.2.1.2. Zidovi sa apsolutno krutom prečkom na gornjem kraju

Zidovi s ležišnim konstrukcijama prvog tipa (sl. 3)

$$\left. \begin{aligned} (2 + \alpha^2 \Delta x^2) T_0 - 2 T_1 &= 0, & (0) \\ -T_{j-1} + (2 + \alpha^2 \Delta x^2) T_j - T_{j+1} &= \psi \Delta x^2 \mathfrak{M}_j, \quad (j=1 \dots m-1) \\ -2 T_{m-1} + (2 + \alpha^2 \Delta x^2) T_m &= \psi \Delta x^2 \mathfrak{M}_m. & (m) \end{aligned} \right\} \quad (30 \text{ a})$$

Zidovi s ležišnim konstrukcijama drugog tipa (sl. 4)

$$\left. \begin{aligned} (2 + \alpha^2 \Delta x^2) T_0 - 2 T_1 &= 0, & (0) \\ -T_{j-1} + (2 + \alpha^2 \Delta x^2) T_j - T_{j+1} &= \psi \Delta x^2 \mathfrak{M}_j, \quad (j=1 \dots m-1) \\ -2 T_{m-1} + (2 + \alpha^2 \Delta x^2 + 2 \alpha_L^2 \Delta x) T_m &= \\ &= \psi \Delta x^2 \mathfrak{M}_m + 2 \psi_L \Delta x \mathfrak{M}_{\bar{H}}, & (m) \end{aligned} \right\} \quad (30 \text{ b})$$

Zidovi s ležišnim konstrukcijama trećeg tipa (sl. 5)

$$\left. \begin{aligned} (2 + \alpha^2 \Delta x^2) T_0 - 2 T_1 &= 0, & (0) \\ -T_{j-1} + (2 + \alpha^2 \Delta x^2) T_j - T_{j+1} &= \psi \Delta x^2 \mathfrak{M}_j, & (j=1 \dots n-2) \\ -T_{m-2} + (2 + \alpha^2 \Delta x^2) T_{m-1} &= \psi \Delta x^2 \mathfrak{M}_{m-1} + \mathfrak{M}_{\bar{H}}/L, & (m-1) \\ T_m &= \mathfrak{M}_{\bar{H}}/L. & (m) \end{aligned} \right\} \quad (30 \text{ c})$$

Članovi $\mathfrak{M}_j$ zavisni od opterećenja, dakle momenti savijanja od koncentriranih sila P_j u visini stropnih konstrukcija (npr. inercijske sile kod potresa) proračunaju se najjednostavnije primjenom rekursivnih formula

$$Q_{j,j+1} = Q_{j-1,j} + P_j$$

za poprečnu silu i

$$\mathfrak{M}_j = \mathfrak{M}_{j-1} + Q_{j-1,j} \cdot \Delta x_{j-1,j}$$

za moment savijanja statike štapova.

Sistemi jednadžbi sadržavaju – već prema rubnim uvjetima – $m-1$, m ili $m+1$ jednadžbi i isto toliko nepoznanica. Moglo se je, doduše, odustati od postavljanja jednadžbi za tačke 0 i m , tako da bi vrijednosti funkcije u tim tačkama, primjenom prednjih i stražnjih diferencijalnih kvocijenata funkcije u tim tačkama, izrazili pomoću vrijednosti funkcije u susjednim tačkama 1 i $m-1$. Time bi se broj jednadžbi smanjio za dva. Primjenom navedenih sistema jednadžbi međutim postižu se tačniji rezultati.

Potrební broj $m+1$ tačaka i prema tome veličina dužina Δx ovise o željenoj tačnosti računa. Ukoliko raspodjela opterećenja duž visine zida nije suviše nejednolika, obično zadovoljava $m=5$ do 8. Kako su za dimenzioniranje zida u pravilu mjerodavne vrijednosti unutarnjih sila u donjem području zida, često dužine Δx smanjujemo odozgo naniže.

Rješenje sistema jednadžbi može se provesti na bilo koji način. U slučaju konstantnih dužina Δx najbrže vodi do cilja primjena Fákinove sheme. U slučaju promjenljivih dužina Δx preporučuje se iteracija, napose ako se polazi od prethodno procijenjenih vrijednosti funkcije. Grube aproksimativne vrijednosti funkcije mogu se polučiti npr. primjenom obrasca (52) glave 2.1.2.3.

Rješenje odgovarajućeg diskretnog sistema daje – uz $\Delta x = h$ – opet sistem jednadžbi (29) odnosno (30).

2.1.2.2. Rješenja za specijalne slučajeve opterećenja

Opće rješenje diferencijalne jednačbe (14) sastoji se od općeg rješenja odgovarajuće homogene jednačbe i od jednog partikularnog integrala kompletne jednačbe:

$$T = T_{\text{hom}} + T_{\text{part}}. \quad (31)$$

Opće rješenje homogene jednačbe je

$$T_{\text{hom}} = C \operatorname{sh} \alpha x + D \operatorname{ch} \alpha x. \quad (32)$$

Vrijednosti integracijskih konstanta C i D odredit će se kasnije iz rubnih uvjeta.

U slučaju srazmjerno malih otvora i vrlo visokih zidova može biti $\alpha H > 10$. Onda se može, napose za zidove sa ležišnim konstrukcijama prvog tipa, dogoditi da integracijska konstanta D bude gotovo jednaka $-C$. Kako su za $\alpha x > 6$ i vrijednosti hiperbolnih funkcija $\operatorname{sh} \alpha x$ i $\operatorname{ch} \alpha x$ praktički međusobno jednake, vrijednosti se T_{hom} za $\alpha x > 6$ dobivaju kao razlika dvaju vrlo velikih gotovo jednakih brojeva. Zato u tom slučaju prelazimo od hiperbolnih na eksponencijalne funkcije. Uz oznaku

$$C_1 = (C + D) \operatorname{ch} \alpha H \quad (33)$$

transformacijom se dobiva

$$T_{\text{hom}} = C_1 e^{-(\alpha H - \alpha x)} + D e^{-\alpha x},$$

odnosno ako zanemarimo vrlo male veličine,

$$\left. \begin{array}{ll} \text{za } \alpha x \leq 6 & T_{\text{hom}} = D e^{-\alpha x}, \\ \text{za } \alpha x > 6 & T_{\text{hom}} = C_1 e^{-(\alpha H - \alpha x)}. \end{array} \right\} \quad (34)$$

Prva jednačba (34) daje doprinos homogene jednačbe za gornji dio zida; numeričke vrijednosti tog doprinosa naglo opadaju od gornjeg ruba zida naniže te se obično već nedaleko od gornjeg ruba zida mogu – u usporedbi sa doprinosom partikularnog integrala – zanemariti.

Druga jednačba (34) daje doprinos homogene jednačbe za donji dio zida; numeričke vrijednosti tog doprinosa naglo opadaju od donjeg ruba zida naprama gore te se obično već nedaleko od donjeg ruba zida mogu – u usporedbi sa doprinosom partikularnog integrala – zanemariti.

U slučaju $D \doteq -C$ preporučuje se dakle primjena jednačbi (34) umjesto jednačbe (32).

Partikularni integral T_{part} traži se u obliku polinoma istoga stupnja kao što je moment savijanja $\mathfrak{M}$ zbog vanjskog opterećenja. Vrijednosti koeficijentata polinoma određuju se metodom neodređenih koeficije-

nata. Partikularni integral daje numerički glavni doprinos općem rješenju diferencijalne jednadžbe sile smicanja, dakle vrijednostima sile smicanja; on međutim ne zadovoljava rubne uvjete.

2.1.2.2.1. Trapezno opterećenje (sl. 6b)

Moment savijanja zbog vanjskog opterećenja je

$$\mathfrak{M} = \frac{w}{2} x^2 - \frac{w}{6 \xi H} x^3. \quad (35)$$

Uz oznake

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{w}{2} \psi = \frac{w}{2} \cdot \frac{l}{\Sigma I} \cdot \frac{12 I_p}{h b^3} \\ \gamma &= \frac{w}{6 \xi H} \psi = \frac{w}{6 \xi H} \cdot \frac{l}{\Sigma I} \cdot \frac{12 I_p}{h b^3} \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

može se partikularni integral napisati u obliku

$$T_{\text{part}} = -\frac{\gamma}{a^2} x^3 + \frac{\beta}{a^2} x^2 - \frac{6\gamma}{a^4} x + \frac{2\beta}{a^4}. \quad (37)$$

U slučaju jednoliko podijeljenog opterećenja je $\xi = \infty$ i prema tome $\gamma = 0$. Partikularni integral i niže navedeni izrazi za konstante C odnosno C_1 se pojednostavnjuju. U slučaju trokutnog opterećenja je $\xi = 1$.

Nadalje se navode rješenja za zidove slobodne na gornjem kraju.

Uvrsti li se opće rješenje (32) + (37) diferencijalne jednadžbe (14) u gornji rubni uvjet (15), dobiva se za integracijsku konstantu D izraz

$$D = -\frac{2\beta}{a^4}. \quad (38)$$

Vrijednosti integracijske konstante C i konstante C_1 iznalaze se primjenom odgovarajućeg donjeg rubnog uvjeta.

Ležišne konstrukcije tip 1 (sl. 3)

$$C = \frac{1}{a^3 \operatorname{ch} aH} \left(\frac{2\beta}{a} \operatorname{sh} aH + 3\gamma H^2 - 2\beta H + \frac{6\gamma}{a^2} \right). \quad (39)$$

Ako se može staviti $\operatorname{sh} aH = \operatorname{ch} aH$, dobiva se kombiniranjem izraza (38) i (39) te primjenom relacije (33) obrazac za konstantu C_1

$$C_1 = \frac{1}{a^3} \left(3\gamma H^2 - 2\beta H + \frac{6\gamma}{a^2} \right). \quad (40)$$

Ležišne konstrukcije tip 2 (sl. 4)

$$C = \frac{1}{a \operatorname{ch} aH + a_L^2 \operatorname{sh} aH} \left[\psi_L \mathfrak{M}_{\bar{H}} + \frac{2\beta}{a^3} \operatorname{sh} aH + \right. \\ \left. + \frac{3\gamma}{a^2} H^2 - \frac{2\beta}{a^2} H + \frac{6\gamma}{a^4} + a_L^2 \left(\frac{2\beta}{a^4} \operatorname{ch} aH + \frac{\gamma}{a^2} H^3 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\beta}{a^2} H^2 + \frac{6\gamma}{a^4} H - \frac{2\beta}{a^4} \right) \right]. \quad (41)$$

Ležišne konstrukcije tip 3 (sl. 5)

$$C = \frac{1}{\operatorname{sh} aH} \left(\frac{\mathfrak{M}_{\bar{H}}}{L} + \frac{2\beta}{a^4} \operatorname{ch} aH + \frac{\gamma}{a^2} H^3 - \right. \\ \left. - \frac{\beta}{a^2} H^2 + \frac{6\gamma}{a^4} H - \frac{2\beta}{a^4} \right). \quad (42)$$

2.1.2.2.2. Kombinacija jednoliko podijeljenog opterećenja i koncentrirane sile pri vrhu (sl. 6c)

Moment savijanja zbog vanjskog opterećenja u proizvoljnom poprečnom presjeku x zida iznosi

$$\mathfrak{M} = \frac{w}{2} x^2 + Px. \quad (43)$$

Uz oznake

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{w}{2} \psi = \frac{w}{2} \cdot \frac{l}{\Sigma I} \cdot \frac{12 I_p}{hb^3}, \\ \gamma &= P\psi' = P \cdot \frac{l}{\Sigma I} \cdot \frac{12 I_p}{hb^3}, \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

može se partikularni integral napisati u obliku

$$T_{\text{part}} = \frac{\beta}{a^2} x^2 + \frac{\gamma}{a^2} x + \frac{2\beta}{a^4}. \quad (45)$$

U slučaju jednoliko podijeljenog opterećenja je $P = 0$ i prema tome $\gamma = 0$, a u slučaju da je zid opterećen samo koncentriranom silom pri vrhu je $w = 0$ i prema tome $\beta = 0$; partikularni integral i niže navedeni izrazi za integracijske konstante se pojednostavnjuju.

2.1.2.2.2.1. Zidovi slobodni na gornjem kraju

Uvrštenjem općeg rješenja (32) + (45) diferencijalne jednadžbe (14) u gornji rubni uvjet (15) pokazuje se da je integracijska konstanta D opet data izrazom (38).

Vrijednosti integracijske konstante C i konstante C_1 iznalaze se primjenom odgovarajućeg donjeg rubnog uvjeta.

Ležišne konstrukcije tip 1 (sl. 3)

$$C = \frac{1}{a^3 \operatorname{ch} aH} \left(\frac{2\beta}{a} \operatorname{sh} aH - 2\beta H - \gamma \right). \quad (46)$$

Ako se može staviti $\operatorname{sh} aH = \operatorname{ch} aH$, dobiva se kombiniranjem izraza (38) i (46) kao i primjenom relacije (33) obrazac za konstantu C_1 :

$$C_1 = -\frac{1}{a^3} (2\beta H + \gamma). \quad (47)$$

Ležišne konstrukcije tip 2 (sl. 4)

$$C = \frac{1}{a \operatorname{ch} aH + a_L^2 \operatorname{sh} aH} \left[\psi_L \mathfrak{M}_{\bar{H}} + \frac{2\beta}{a^3} \operatorname{sh} aH - \frac{2\beta}{a^2} H - \frac{\gamma}{a^2} + a_L^2 \left(\frac{2\beta}{a^4} \operatorname{ch} aH - \frac{\beta}{a^2} H^2 - \frac{\gamma}{a^2} H - \frac{2\beta}{a^4} \right) \right]. \quad (48)$$

Ležišne konstrukcije tip 3 (sl. 5)

$$C = \frac{1}{\operatorname{sh} aH} \left[\frac{\mathfrak{M}_{\bar{H}}}{L} + \frac{2\beta}{a^4} \operatorname{ch} aH - \frac{\beta}{a^2} H^2 - \frac{\gamma}{a^2} H - \frac{2\beta}{a^4} \right]. \quad (49)$$

2.1.2.2.2. Zidovi s apsolutno krutom prečkom na gornjem kraju

Ispitivanje će se provesti na primjeru zidova sa ležišnim konstrukcijama prvog tipa.

Uvrštavanjem općeg rješenja (32) + (45) u odgovarajuće rubne uvjete (16) i (17) dobivamo za integracijske konstante izraze

$$C = -\frac{\gamma}{a^3}, \quad (50)$$

$$D = \frac{1}{a^3 \operatorname{sh} aH} [\gamma (\operatorname{ch} aH - 1) - 2\beta H].$$

Ako se može staviti $\operatorname{sh} aH = \operatorname{ch} aH$, dobiva se kombiniranjem izraza (50) i primjenom relacije (33) opet obrazac (47) za konstantu C_1 . Iz toga slijedi da način završavanja zida na gornjem kraju nema praktički nikakvog utjecaja na stanje unutarnjih sila u donjem dijelu zida.

2.1.2.3. Iznađženje grubih aproksimativnih vrijednosti sila smicanja

U prethodnoj procjeni sila smicanja npr. radi izbora dimenzija pri likom projektiranja, možemo se – u slučaju srazmjerno uskih otvora – poslužiti obrascem (52).

Diferencijalna jednadžba (14) sile smicanja nakon dijeljenja s α^2 dobiva oblik

$$-\frac{T''}{\alpha^2} + T = \frac{\psi}{\alpha^2} \mathfrak{M}. \quad (51)$$

Kad širina otvora b teži prema nuli, koeficijent α^2 [jedn. (7a) odnosno (7b)] teži u beskonačnost. Diferencijalna jednadžba sile smicanja onda degenerira u algebarsku jednadžbu

$$T = \frac{\psi}{\alpha^2} \mathfrak{M}. \quad (52)$$

Vrijednost koeficijenta ψ/α^2 data je za zid s jednim nizom otvora jednadžbom

$$\frac{\psi}{\alpha^2} = \frac{l}{\Sigma I} / \left(\frac{l^2}{\Sigma I} + \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} \right), \quad (53 \text{ a})$$

a za zid sa dva niza otvora jednadžbom

$$\frac{\psi}{\alpha^2} = \frac{l}{\Sigma I} / \left(\frac{2l^2}{\Sigma I} + \frac{1}{F_1} \right). \quad (53 \text{ b})$$

Pojednostavnjena jednadžba (52) sile smicanja u općem slučaju ne zadovoljava rubne uvjete.

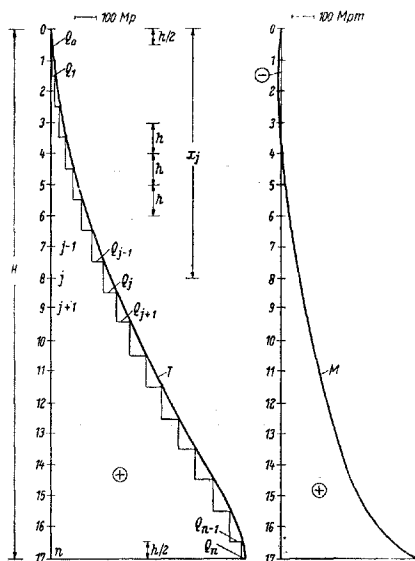
2.1.3. Unutarnje sile

Poprečne sile Q_j ($j = 0 \dots n$) pojedinih nadvoja mogu se očitati iz T -dijagrama, kao što je prikazano na sl. 18. Sa n i h označeni su broj i visina etaža, a indeks j ukazuje na kotu $x = x_j$ promatranog nadvoja; u konkretnom primjeru je $n = 17$. Vrijednosti Q_j mogu se dobiti naravno i računski kao razlika sila smicanja T za $x_j + h/2$ i $x_j - h/2$, ili, približno, za x_{j+1} i x_j .

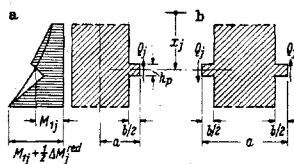
Vrijednosti hiperbolnih, odnosno eksponencijalnih funkcija, očitavaju se iz matematskih tablica [16].

Momenti uklještenja nadvoja su (sl. 19)

$$\bar{M}_j = 1/2 Q_j b. \quad (54)$$



Sl. 18. Dijagram sile smicanja sa grafičkim iznalaženjem poprečnih sila nadvoja te dijagram sumarnih momenata savijanja.



Sl. 19. Unutarnje sile nadvoja na koti $x = x_j$ i dodatni momenti savijanja stupaca zida s jednim (a) i sa dva (b) niza otvora.

Uzdužne sile u stupcima zida su za zid s jednim nizom otvora jednake $\pm T$, a za zid sa dva niza otvora u vanjskim stupcima jednake $\pm T$ i u srednjem stupcu identično jednake nuli.

Sumarni momenti savijanja M poprečnih presjeka zida proračunavaju se prema jedn. (5a), odnosno (5b), i raspodjeljuju na stupce zida prema jedn. (6).

Vrijednostima kontinuiranih momentnih linija M_1 i M_2 [jedn. (6)] treba, prema autorovim fotoelastisimetrijskim ispitivanjima [5], još superponirati reducirane dodatne momente savijanja

$$1/2 \Delta M_j^{\text{red}} = 1/2 Q_j a \frac{h - h_p}{h}, \quad (55)$$

jer veza stupaca zida u stvari nije kontinuirana, nego diskretna.

Unutarnje sile u presjecima ležišne konstrukcije mogu se lako odrediti na osnovu sl. 13 i 16.

2.1.4. Iznažanje ugiba

Za zakrivljenost zida vrijedi poznata relacija $y''_w = -M/EI$ na-uke o otpornosti materijala; za M treba pri tome uvrstiti odgovarajući izraz jednadžbi (5).

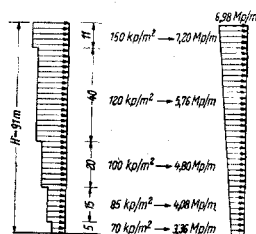
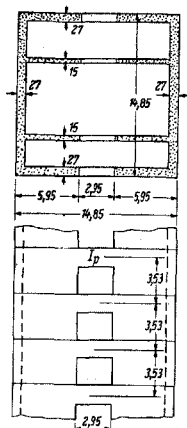
Jednadžba $y_w = y_w(x)$ ugibne linije zida može se, ako je to potrebno, dobiti dvokratnom integracijom gore navedene relacije za zakrivljenost uzevši u obzir odgovarajuće rubne uvjete. Na primjer za zidove uklještene na donjem rubu u krut podrumski zid ili temelj zajednički za sve stupce ti su rubni uvjeti $y_{wH} = 0$ i $y'_{wH} = 0$.

Još jednostavnije ugibi se mogu proračunati primjenom redukcij-skog stava.

Doprinosu y_w deformacije zida treba još superponirati doprinos $y_B = \Theta \cdot (H - x)$ deformacije podloge temelja. Deformacija podloge temelja se naime manifestira u obliku zaokretanja stope temelja za iznos $\Theta = \mathfrak{M}_H / 2cI_B$. Sa I_B označen je vlastiti moment inercije stope zajedničkog temelja stupaca promatranoga zida.

2.1.5. Numerički primjeri

Praktična primjena opisane metode pokazat će se na pet numeričkih primjera uzetih iz prakse.



Sl. 20. Poprečni presjek tornja te poprečni presjek i isječak pogleda na jezgru uz numerički primjer 1.

Sl. 21. Dijagram intenziteta vjetra prema propisima i zamjenjujuće trapezno opterećenje uz numerički primjer 1.

2.1.5.1. Primjer za trapezno opterećenje

Proračun na vjetar jezgre najviše zgrade u Švicarskoj, 24-katnog uredskog tornja firme Sulzer, Winterthur. Sl. 20 pokazuje poprečni presjek tornja, poprečni presjek i isječak pogleda na jezgru u njenom manje otpornom smjeru, a sl. 21 dijagram intenziteta vjetra prema švicarskim propisima i zamjenjujuće trapezno opterećenje. Na gornjem kraju jezgra je slobodna, a na donjem uklještena u roštilj krutih podrumskih zidova.

Proračun se provodi prema postupku opisanom u glavi 2.1.2.2.1. Sve veličine navode se u sistemu metar-megapond.

$$W = 483, \quad M_H = 24291, \quad H = 91,0, \quad h = 3,53,$$

$$w = 6,98, \quad \xi = 2,090,$$

$$F_1 = F_2 = 8,76, \quad I_1 = I_2 = 32,0, \quad I_p = 0,163,$$

$$l = 11,35, \quad b = 2,95,$$

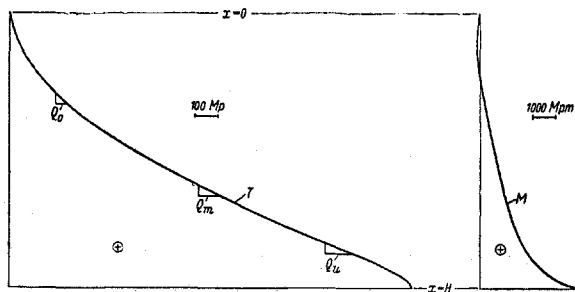
$$\alpha^2 = 4,80 \cdot 10^{-2}, \quad \beta = 1,324 \cdot 10^{-2}, \quad \gamma = 2,339 \cdot 10^{-5},$$

$$\alpha H = 19,938$$

$$D = -11,493, \quad C_1 = -173,9.$$

Proračun vrijednosti sile smicanja i sumarnog momenta savijanja proveden je tabelarno; izvadak iz toga računa dat je u tablici 1.

Na sl. 22 prikazani su dijagram sile smicanja s grafičkim iznalaženjem poprečnih sila nadvoja u gornjem, srednjem i donjem području zida te dijagram sumarnih momenata savijanja.

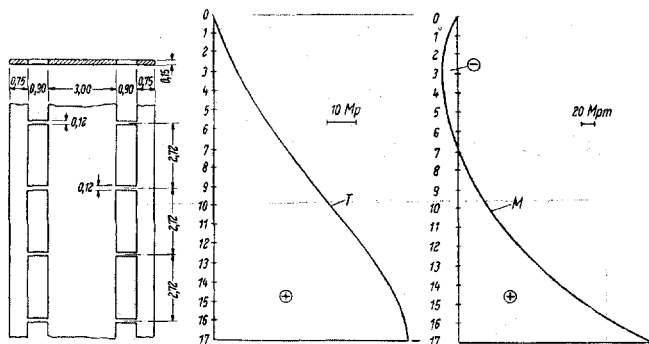


Sl. 22. Dijagram sile smicanja sa grafičkim iznalaženjem poprečnih sila nadvoja u gornjem, srednjem i donjem području zida i dijagram sumarnih momenata savijanja uz numerički primjer 1.

Tablica 1.

Proračun vrijednosti sile smicanja T i sumarnog momenta savijanja M zida prema numeričkom primjeru 1

x	ax	T_{hom}	T_{part}	T	$Q\bar{M}$	M
0,0	0,000	-11	11	0	0	0
9,1	1,994	-2	33	31	284	-58
18,2	3,988	0	99	99	1119	-5
27,3	5,981	0	206	206	2477	139
36,4	7,975	0	351	351	4329	345
45,5	9,969	0	534	534	6649	588
54,6	11,963	0	751	751	9409	885
63,7	13,957	0	1001	1001	12580	1219
72,8	15,950	-3	1281	1278	16136	1631
81,9	17,944	-24	1589	1565	20050	2287
91,0	19,938	-174	1923	1749	24291	4440



Sl. 23. Poprečni presjek i isječak pogleda na zid uz numerički primjer 2.

Sl. 24. Dijagram sile smicanja i sumarnih momenata savijanja uz numerički primjer 2.

2.1.5.2. Primjer za trokutno opterećenje

Proračun na potres jednog zida tipskog 17-katnog montažnog stambenog tornja P + 16 u Zagrebu. Sl. 23 pokazuje poprečni presjek i isječak pogleda na zid. Zid je na gornjem kraju slobodan, a na donjem upet u temelj.

Proračun se provodi prema postupku opisanom u glavi 3.2.1 tako da je $\xi = 1$. Sve veličine navode se u sistemu metar-megapond.

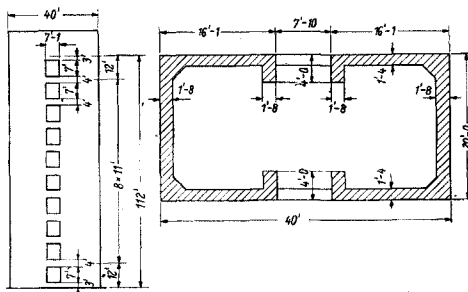
$$\begin{aligned} w &= 0,46, \quad h = 2,72, \quad H = 46,24, \\ F_1 &= 0,113, \quad F_2 = 0,450, \\ I_1 &= 0,00527, \quad I_2 = 0,3375, \quad I_p = 0,3038 \cdot 10^{-4}, \\ l &= 2,775, \quad b = 0,900, \\ \alpha &= 0,09885, \quad \beta = 3,372 \cdot 10^{-4}, \quad \gamma = 2,431 \cdot 10^{-6}, \\ \alpha H &= 4,571, \\ C &= 6,7592, \quad D = -7,0640. \end{aligned}$$

Na sl. 24 prikazani su dijagrami sile smicanja i sumarnog momenta savijanja.

2.1.5.3. Primjer za kombinaciju jednoliko podijeljenog opterećenja i koncentrirane sile pri vrhu

Proračun jezgre tipskog objekta »Termohlen Type Building« na potres u poprečnom smjeru zgrade. Sl. 25 prikazuje poprečni i uzdužni presjek te tlocrt objekta. Stropne konstrukcije izvedene su u obliku

spregnutih konstrukcija i obješene na jaku prečku koja se nalazi iznad krovne konstrukcije. Ta prečka čini u uzdužnom smjeru zgrade, zajedno s obje jezgre, sedlasti okvir. Jezgra ima u gornjem kraju krutu prečku, koju možemo smatrati apsolutno krutom. Ispod $x = 112'$ nema otvora, pa oslabljeni zid u tom presjeku možemo smatrati upetim.



Sl. 25. Poprečni presjek, uzdužni presjek i tlocrt vjetrovnog veza zgrade uz numerički primjer 3.

Proračun se provodi prema postupku opisanom u glavi 2.1.2.2.2.2. Sve veličine navode se u sistemu stopa-kilofunta.

$$P = 189,7, \quad w = 8,94, \quad H = 112, \quad h = 11,$$

$$F_1 = F_2 = 80,67, \quad I_1 = I_2 = 2641, \quad 12 I_p = 104,9,$$

$$l = 27,5, \quad b = 7,833$$

$$\alpha^2 = 3,334 \cdot 10^{-3}, \quad \beta = 4,619 \cdot 10^{-4}, \quad \gamma = 1,961 \cdot 10^{-2},$$

$$\alpha H = 6,409,$$

$$C = -101,87, \quad D = 99,78,$$

$$T = -101,87 \operatorname{sh} 0,05774 x + 99,78 \operatorname{ch} 0,05774 x + 0,1385 x^2 + 5,882 x + 83,1,$$

$$M = 4,47 x^2 + 189,7 x - 27,5 T.$$

Na sl. 26 prikazane su punim linijama krivulje sile smicanja i sumarnog momenta savijanja.

Radi usporedbe rezultata taj primjer proračunat je uz to – zanemarujući utjecaj krute prečke pri vrhu zida – i prema postupku opisanom u glavi 2.1.2.2.2.1. Razlika je jedino u integracijskim konstantama:

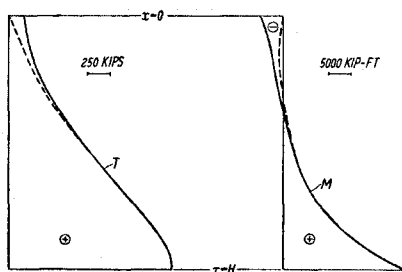
$$C = 81,01, \quad D = -83,11.$$

Jednadžbe unutarnjih sila prema tome imaju oblik:

$$T = 81,01 \operatorname{sh} 0,05774 x - 83,11 \operatorname{ch} 0,05774 x + 0,1385 x^2 + 5,882 x + 83,1,$$

$$M = 4,47 x^2 + 189,7 x - 27,5 T.$$

Odgovarajuće krivulje sile smicanja i sumarnog momenta savijanja prikazane su na sl. 26 isprekidanim linijama.



Sl. 26. Dijagram sile smicanja i sumarnog momenta savijanja uz numerički primjer 3.

— sa uzimanjem u obzir krute prečke pri vrhu zida,
 bez uzimanja u obzir krute prečke pri vrhu zida.

2.1.5.4. Primjer za jednoliko podijeljeno opterećenje

Treba proračunati zid simetrično oslabljen jednim nizom otvora, izložen jednoliko podijeljenom opterećenju. Na gornjem kraju zid je slobodan, a na donjem se oslanja na ležišnu konstrukciju prema sl. 4c.

Zid će se proračunati primjenom postupka opisanog u glavi 2.1.2.2.1, uz $\gamma = 0$; sve veličine navode se u sistemu metar-megapond.

$$w = 1,0, \quad H = 30,40, \quad \bar{H} = 34,30, \quad h = 3,00,$$

$$b = 2,00, \quad l = 5,00, \quad \delta = 0,25,$$

$$F_1 = F_2 = 0,75, \quad I_1 = I_2 = 0,563,$$

$$h_p = 0,60, \quad I_p = 0,00370, \quad I_R = 0,00585,$$

$$L = 7,00, \quad t = 3,90,$$

$$a^2 = 0,04601, \quad aH = 6,521, \quad \beta = 0,004107,$$

$$aL^2 = 0,2108, \quad \psi_L = 0,03011, \quad \mathfrak{M}_H = 580,6,$$

$$C = 3,839, \quad D = -3,880,$$

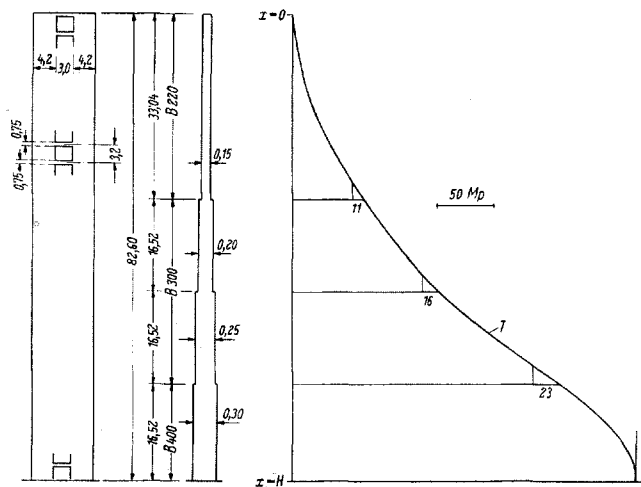
$$T = 3,839 \operatorname{sh} ax - 3,880 \operatorname{ch} ax + 0,08926 x^2 + 3,880,$$

$$M = 0,5 x^2 - 5,0 T.$$

Fotoelastisimetrijsko ispitivanje jednog modela ovoga zida provedeno je u Institutu za mjernu tehniku firme Dr. Ing. Walter Ingenieurberatung, Essen-Köln, i dalo je rezultate koji se vrlo dobro poklapaju sa gore navedenim rezultatima dobivenima proračunom [15]. Nadalje se je pokazalo da je stupanj upetosti stupova ležišne konstrukcije u zajednički temelj malen i da praktički nema nikakvog utjecaja na stanje unutarnjih sila u zidu.

2.1.5.5. Primjer za jednoliko podijeljeno opterećenje (zid promjenljive krutosti)

Zid prikazan na sl. 27 prema projektu tornja zagrebačke vijećnice treba proračunati za jednoliko podijeljeno opterećenje intenziteta $w = 0,432 \text{ Mp/m}$ i ispitati utjecaj promjenljivosti debljine zida i modula elastičnosti na hiperstatičku veličinu. Na donjem rubu zid je uklješten u masivan temelj.



Sl. 27. Zid uz numerički primjer 5.

Sl. 28. Dijagram sile smicanja i grafičko iznalaženje najvećih vrijednosti poprečnih sila prečaka za sva tri područja zida konstantne duljine.

Hiperstatička veličina T određena je diferencijalnom jednačbom (14a) i rubnim uvjetima (15) i (17). Za hiperstatičku veličinu postavi se 4-parametarski izraz

$$T = \sum_j a_j \sin \frac{2j-1}{2H} \pi x \quad (j = 1, 2, 3, 4) \quad (a)$$

u obliku trigonometrijskog reda. Parametri a_j odredit će se primjenom kolokacijske metode iz uvjeta da izraz (a) zadovolji diferencijalnu jednačbu (14a) u $r = 4$ kolokacijskih tačaka x_k ($k = 1 \dots r$). Uvrste li se u diferencijalnu jednačbu (14a) izraz (a) za T i odgovarajući izraz za derivaciju T' veličine T , dobiva se nehomogeni nesimetrični sistem linearnih jednačbi

$$\sum_{j=1}^4 a_j U_{kj} = P_k \quad (k = 1, 2, 3, 4) \quad (b)$$

Vrijednosti koeficijenata sistema jednačbi date su obrascima

$$U_{kj} = \left\{ \left[\frac{(2j-1)\pi}{2H} \right]^2 + \alpha^2 \right\} \sin \frac{(2j-1)\pi}{2H} x_k + \quad (k = 1, 2, 3, 4) \quad (c)$$

$$+ \varphi_k \frac{(2j-1)\pi}{2H} \cos \frac{(2j-1)\pi}{2H} x_k, \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

a članovi zavisni od opterećenja su, za $\mathfrak{M} = 1/2 \omega x^2$

$$P_k = \frac{0,5 \omega l}{I} \cdot \frac{12 I_p}{h h^3} x_k^2 = 1,231 \cdot 10^{-3} x_k^2. \quad (k = 1, 2, 3, 4) \quad (d)$$

Indeksi k u obrascima (c) i (d) upozoravaju na presjek $x = x_k$. Vrijednosti φ_k pozitivne su ako debljina zida i modul elastičnosti rastu u smjeru osi $+x$. Članovi sa φ_k u obrascima za U_{kj} daju doprinos promjenljivosti debljine zida i modula elastičnosti.

Uzme li se jednostavnosti radi da se debljina zida i modul elastičnosti mijenjaju lincarno od najmanje vrijednosti na gornjem do najveće vrijednosti na donjem rubu zida, dobiva se

$$\varphi_k = \frac{\text{debljina zida za } x = H - \text{debljina zida za } x = 0}{\text{visina zida} \cdot \text{debljina zida za } x = x_k} +$$

$$+ \frac{\text{modul elastičnosti za } x = H - \text{modul elastičnosti za } x = 0}{\text{visina zida} \cdot \text{modul elastičnosti za } x = x_k}. \quad (e)$$

Rješenjem sistema jednačbi (b) dobivaju se vrijednosti parametara a_j , a prema jedn. (a), onda vrijednosti sile smicanja.

Najprije će se ispitati utjecaj promjenljivosti debljine zida. Sa $a^2 = 2,282 \cdot 10^{-2}$ dobiva se

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= 1,21 \cdot 10^{-2}, & \varphi_3 &= 0,727 \cdot 10^{-2}, \\ \varphi_2 &= 0,909 \cdot 10^{-2}, & \varphi_4 &= 0,606 \cdot 10^{-2}.\end{aligned}$$

Sve veličine izražene su u sistemu metar-megapond.

Vrijednosti koeficijenata sistema jednačbi i članova ovisnih o opterećenju proračunate su prema obrascima (c) i (d) i navedene u tablici 2. Vrijednosti označene zvjezdicom dobivene su zanemarujući članove koji sadrže φ_k , dakle zanemarujući utjecaj promjenljivosti debljine zida na hiperstatičku veličinu. Uspoređujući tačnije vrijednosti s približnima, može se zaključiti da je hiperstatička veličina praktički neovisna o promjenljivosti debljine zida. Do analognog zaključka dolazi se ispitivanjem utjecaja promjenljivosti modula elastičnosti.

Tablica 2.

Koeficijenti sistema jednačbi i članovi ovisni o opterećenju
uz numerički primjer 5

$\rightarrow j$		$10 U_{kj}$					P_k
$\downarrow k$	16,52	0,0738	0,2151	0,3186	0,3185		0,336
	41,30	0,1651	0,1807	-0,2314	-0,2780		2,100
	57,82	0,2210	-0,1575	0,0049	0,2399		4,115
	82,60	0,2318	-0,2608	0,3186	-0,4054		8,399

$\rightarrow j$		$10 U_{kj}^*$				
$\downarrow k$	16,52	0,0716	0,2110	0,3186	0,3280	
	41,30	0,1639	0,1844	-0,2253	-0,2866	
	57,82	0,2204	-0,1534	—	0,2384	
	82,60	0,2318	-0,2608	0,3186	-0,4054	

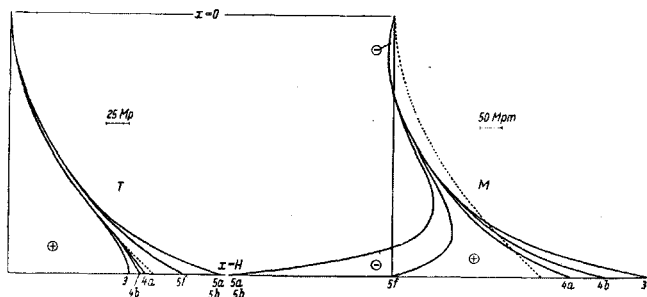
Na osnovu navedenih spoznaja svrsishodno je da se zid ispita po ranije opisanom postupku za zidove konstantne krutosti. Sl. 28 prikazuje dijagram sile smicanja i grafičko iznalaženje najvećih vrijednosti poprečnih sila prečki za sva tri područja zida konstantne debljine.

Može se pokazati da su unutarnje sile egzaktno neovisne o promjenljivosti krutosti, ako se ova mijenja po eksponencijalnom zakonu. To slijedi iz uvjeta $I_p'/I_p + E'/E = 0$. Ukoliko se krutost mijenja diskontinualno, jači konstruktivni dijelovi na mjestu skoka primaju veće unutarnje sile i to na račun slabijih koji bivaju rasterećeni. Skok u unutarnjim silama tim je veći što je veći skok u krutosti; gornji slabiji dio sistema onda djeluje kao djelimično upet u donji jači. Srednje vrijednosti unutarnjih sila su međutim praktično iste kao kod sistema konstantne krutosti.

2.1.6. Diskusija rezultata

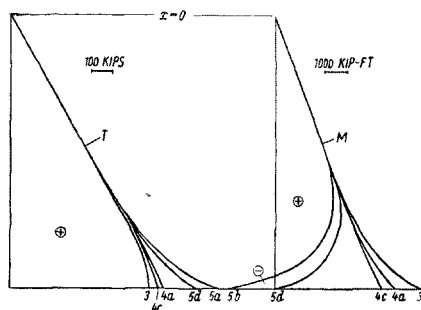
Uspoređenje T - i M -krivulja zida slobodnog na gornjem kraju i zida sa beskonačno krutom prečkom na gornjem kraju pokazuje (sl. 26), da se i zidovi kojima je reducirani moment inercije gornje prečke veći od polovine reduciranog momenta inercije unutarnjih prečki mogu se uz dovoljnu tačnost proračunati po obrascima izvedenima uz pretpostavku da je reducirani moment inercije gornje prečke jednak polovini reduciranog momenta inercije unutarnjih prečaka. Razlika u veličini unutarnjih sila javlja se praktično samo u gornjem području zida, koji je i tako najmanje napregnut.

Analogno je stanje unutarnjih sila u gornjem dijelu zida praktično neovisno o vrsti ležišne konstrukcije (sl. 29 i 30).



Sl. 29. Krivulje sile smicanja i sumarnog momenta savijanja zida slobodnog na gornjem kraju i opterećenog jednoliko podijeljenim opterećenjem duž čitave visine zida za razne ležišne konstrukcije (vrijednosti isprekidane linije proračunate su primjenom aproksimativnog postupka opisanog u glavi 2.1.2.3.).

Karakter T - i M -krivulja za slučaj trokutnog opterećenja vidi se iz sl. 18 i 24. Krivulje na sl. 18 odnose se na zid oslabljen nesimetrično jednim nizom otvora, uz ove podatke: $H = 46,24$ m, $h = 2,72$ m, $l = 3,30$ m, $b = 1,50$ m, $F_1 = 0,675$ m², $F_2 = 1,125$ m², $I_1 = 0,102$ m⁴, $I_2 = 0,475$ m⁴, $I_p = 0,0065$ m⁴, $w = 4,8$ Mp/m. U ovom primjeru je $aH = 19,647 > 10$. Krivulje na sl. 24 odnose se na numerički primjer 6.2. Tu je $aH < 10$. U slučaju velikih aH -vrijednosti, T -krivulja se prilagođuje donjem rubnom uvjetu u vrlo malom području iznad donjeg ruba zida; M -vrijednosti u tom području za $x \rightarrow H$ naglo rastu i dostižu maksimalnu vrijednost na donjem rubu zida.



Sl. 30. Krivulje sile smicanja i sumarnog momenta savijanja zida slobodnog na gornjem kraju i opterećenog koncentriranom silom pri vrhu za razne ležišne konstrukcije.

Karakter T - i M -krivulja pri trapeznom opterećenju vidi se na sl. 22; one odgovaraju numeričkom primjeru 2.1.5.1. I ovdje je aH -vrijednost velika, pa sumarni momenti savijanja negdaleko od donjeg ruba zida počinju naglo rasti i dostižu maksimalnu vrijednost na donjem rubu zida.

Na sl. 29 prikazani su T - i M -dijagrami za zid oslabljen jednim nizom otvora, slobodan na gornjem kraju i opterećen jednoliko podijeljenim opterećenjem duž čitave visine, uz ove podatke: $H = 60,0$ m, $h = 3,0$ m, $l = 8,80$ m, $F_1 = F_2 = 2,16$ m², $I_1 = I_2 = 9,33$ m⁴, $I_p = 0,0054$ m⁴, $w = 1,0$ Mp/m. Oznake 3, 4a, 4b, 5a, 5b, 5f odnose se na redni broj slike

odgovarajuće ležišne konstrukcije. U ležišnim konstrukcijama sl. 4a i 4b je $I_R = 0,0432 \text{ m}^4$, u ležišnoj konstrukciji sl. 4a osim toga je $t = 6,0 \text{ m}$.

Najveće vrijednosti sile smicanja, pa prema tome i najveće vrijednosti poprečnih sila nadvoja nastaju u zidovima sa ležišnim konstrukcijama trećeg tipa. U zidovima s ležišnom konstrukcijom sl. 5f one su nešto manje nego u zidu s ležišnim konstrukcijama sl. 5a i 5b. Poprečne sile nadvoja najmanje su u ležišnim konstrukcijama prvog tipa (sl. 3), dakle u zidova koje na donjem kraju možemo smatrati potpuno upe-tima. Vrijednosti proračunate po grubom aproksimativnom postupku glave 2.1.2.3 jesu u slučaju ležišnih konstrukcija trećeg tipa (sl. 5) pre-male, a u slučaju ležišnih konstrukcija prvog (sl. 3) i drugog (sl. 4) tipa nešto prevelike. Ako bismo zanemarili krutost na savijanje i smicanje prečaka, bilo bi $T \equiv 0$.

Vrijednosti momenata savijanja stupaca zida maksimalne su u slučaju ležišnih konstrukcija prvog tipa, dakle u onom slučaju koji daje najmanje vrijednosti uzdužnih sila stupaca zida i poprečnih sila nadvoja. Najmanji momenti savijanja stupaca zida nastaju u zidu sa ležišnom konstrukcijom sl. 5f. Momenti su savijanja u svim zidovima u gornjem području zida negativni, tako da je u tom području ugična linija zida konkavna gledano s luv-strane zida. Momenti savijanja kod zidova s ležišnim konstrukcijama sl. 5a i 5b negativni su i u donjem području zida. U srednjem području zida je ugična linija zida uvijek konveksna prema luv-strani. Vrijednosti dobivene grubim aproksimativnim postupkom glave 3.3 u pogledu momenata savijanja u većini su slučajeva nedovoljno tačne.

Na sl. 30 prikazani su T - i M -dijagrami za isti zid opterećen pri vrhu koncentriranom silom $P = 60 \text{ Mp}$. U slučaju ležišne konstrukcije prema sl. 4c jest $F_{1B} = F_{2B} = 11,0 \text{ m}^2$, $I_{1B} = I_{2B} = 50,0 \text{ m}^4$, $E = 2,16 \cdot 10^6 \text{ Mp/m}^2$, $c = 10^4 \text{ Mp/m}^3$.

Sile smicanja i prema tome poprečne sile nadvoja najmanje su u zidovima sa ležišnim konstrukcijama prvog tipa a najveće u zidovima sa ležišnim konstrukcijama sl. 5a i 5b.

Vrijednosti momenata savijanja stupaca zida maksimalne su u ležišnim konstrukcijama prvog tipa, manje u ležišnim konstrukcijama drugog tipa i najmanje u ležišnim konstrukcijama trećeg tipa. Momenti savijanja stupaca zida pozitivni su duž čitave visine zida izuzevši u ležišnim konstrukcijama prema sl. 5a i 5b, kada su oni negativni u jednom malom području uz donji rub zida.

U tablici 3 navedene su vrijednosti sumarnog momenta savijanja zida simetrično oslabljenog jednim nizom otvora i izloženog jednoliko podijeljenom opterećenju duž čitave visine zida. Zid je na svom gornjem kraju slobodan, a na donjem se kraju oslanja na ležišnu konstrukciju prema sl. 4c. Numerički podaci: $H = 60,0$ m, $h = 3,0$ m, $l = 8,80$ m, $\omega = 1,0$ t/m, $F_1 = F_2 = 2,16$ m², $I_1 = I_2 = 9,33$ m⁴, $I_p = 0,0054$ m⁴, $F_{1B} = F_{2B} = 11,0$ m², $I_{1B} = I_{2B} = 50,0$ m⁴, $E = 2,16$ Mp/m², $c = 10^4$ Mp/m³.

Tablica 3.

Vrijednosti sumarnog momenta savijanja s uzimanjem u obzir i sa zanemarenjem utjecaja uzdužnih sila stupaca zida i deformacije podloge temelja na pomake jednog 60 m visokog zida izloženog jednoliko podijeljenom opterećenju

x	m	12,0	24,0	36,0	42,0	48,0	54,0	57,0	60,0
M		-12	23	89	135	190	265	314	374
M ^{a)}	tm	-36	-40	-29	-9	32	126	211	345
M ^{b)}		-12	24	94	145	222	347	446	591
M ^{c)}		-36	-40	-29	-9	33	129	217	357

U tablici 3 navedene su i vrijednosti sumarnog momenta savijanja koje su dobivene zanemarujući:

- doprinos uzdužnih sila stupaca zida pomacima,
- doprinos deformacije podloga temelja pomacima ($c = \infty$) i
- doprinos uzdužnih sila stupaca zida i deformacije podloga temelja pomacima.

Uspoređivanje rezultata pokazuje da pri proračunavanju visokih zidova nikako nije uputno zanemariti utjecaj uzdužnih sila stupaca zida na pomake. Pomaci su koeficijenti u jednadžbi kompatibilnosti i oni prema tome utječu na hiperstatičku veličinu i uopće na stanje unutarnjih sila u sistemu. Sumarni momenti savijanja izračunavaju se prema jedn. (5) kao razlika dvaju brojeva istog reda veličine, pa mala razlika u veličini sile smicanja T može prouzrokovati veliku razliku u veličini sumarnog momenta savijanja.

Umjesto pomoću kontinualnih zamjenjujućih sistema zidovi oslabljeni nizovima otvora nekada se proračunavaju primjenom diskretnih zamjenjujućih sistema. Diskretni zamjenjujući sistem za zid oslabljen vertikalnim nizovima otvora je odgovarajući skeletni okvir. Autor je još

1959 g. dao – primjenom diferencijskog računa – jedno opće rješenje za proračunavanje skeletnih okvira sa proizvoljnim brojem polja i katova [11]; kasnije je on to rješenje proširio za jedan dalji slučaj opterećenja i na sisteme u kojima je visina najnižeg kata različita od visine ostalih katova [12]. Proračunavanje zidova oslabljenih nizovima otvora primjenom zamjenjujućih skeletnih okvira međutim nije preporučljivo, jer omjer visina poprečnih presjeka stupaca zida i visine kata ne zadovoljava uvjete statike štapova. Nedavno je Hsien-San Tsang u diskusiji [13] jednog autorovog članka [9] primjenom zamjenjujućeg skeletnog okvira riješio zid oslabljen jednim nizom otvora. Usporedba rezultata pokazuje da se primjenom zamjenjujućeg skeletnog okvira dobivaju ponešto prevelike vrijednosti sile smicanja.

Rezultate autorove teoretske metode eksperimentalno su ispitali, među ostalima, Naumann, Walter, Walch i autor. Naumann i Walter [14] ispitali su fotoelastisimetrijski veličinu i raspodjelu sile smicanja, a autor [5] veličinu i raspodjelu rubnih napona duž visine zida za zidove slobodne na gornjem i upete na donjem rubu. Walch [15] je ispitao veličinu i raspodjelu sile smicanja duž visine zida za zid s ležišnom konstrukcijom prema sl. 4a. Sva ispitivanja dala su rezultate koji se dobro slažu sa rezultatima dobivenima autorovim teoretskim postupkom.

2.1.7. Iznalaženje unutarnjih sila primjenom tabela

U slučaju zidova upetih pri dnu (ležišne konstrukcije tip 1) naprijed navedeni obrasci za silu smicanja i reduciranu silu smicanja mogu se svesti na oblik

$$T = \frac{\psi}{\alpha^2} \mathfrak{M}_H \eta, \quad T' = \frac{\psi}{\alpha^2} \mathfrak{T}_H \eta'$$

podesan za tabeliranje. Sa $\mathfrak{M}_H$ i $\mathfrak{T}_H$ označeni su moment savijanja i poprečna sila od zadanog opterećenja pri dnu $x = H$ zida, a veličina ψ/α^2 data je odgovarajućim obrascem (53). Numeričke vrijednosti koeficijenata $\eta = \eta(\alpha H, x/H)$ i $\eta' = \eta'(\alpha H, x/H)$ proračunate su iz odgovarajućih obrazaca na elektronskom računar u razne vrijednosti argumenata αH i x/H i date tabelarno u aneksu pri kraju rada.

Primjena tabela naravno znatno ubrzava numerički rad. Uzdužne sile stupaca zida jednake su $\pm T$, momenti savijanja iznalaze se prema obrascima (5) i (6) a poprečne sile nadvoja dobivaju se tako da se reducirane sile smicanja T' pomnože sa visinom kata h .

Jednadžba momenta savijanja zbog vanjskog opterećenja može se svesti na oblik

$$\mathfrak{M} = M_H \lambda.$$

Horizontalni ugib gornjeg ruba zida može se proračunati po elementarnim obrascima za običnu konzolu, ako se za moment inercije te konzole uvrsti vrijednost

$$I = \frac{\Sigma I}{1 - \frac{\psi}{a^2} l \eta''}$$

u slučaju zida s jednim nizom otvora odnosno

$$I = \frac{\Sigma I}{1 - 2 \frac{\psi}{a^2} l \eta''}$$

u slučaju zida sa dva niza otvora.

Vrijednosti koeficijenata

$$\lambda = \lambda \left(\frac{x}{H} \right) \text{ i } \eta'' = \eta''(aH)$$

za kurentne slučajeve opterećenja također su date tabelarno u aneksu.

Ekstremna vrijednost T_H sile smicanja T može se – za razna opterećenja – očitati iz dijagrama.

2.1.8. Rekapitulacija oznaka poglavlja 2.1.

- b svjetli raspon prečki odnosno nadvoja zida,
- l razmak od osi do osi stupaca zida,
- h teoretska visina kata, tj. razmak od osi do osi prečki,
- δ, h_p debljina i visina poprečnog presjeka unutarnjih prečki,
- H visina zida,
- $\bar{H}$ visina zida ili ukupna visina zida i ležišne konstrukcije,
- t visina ležišne konstrukcije,
- n broj katova,
- L razmak vanjskih stupova ležišnih konstrukcija,
- F_1, F_2 površine poprečnih presjeka stupaca 1 i 2 zida,
- I_1, I_2 vlastiti momenti inercije poprečnih presjeka stupaca 1 i 2 zida,
- ΣI suma vlastitih momenata inercije poprečnih presjeka stupaca zida,
- I_p reducirani moment inercije unutarnjih prečki,
- I_R reducirani moment inercije prečke ležišne konstrukcije,

- F_{1B}, F_{2B} . . . površine stopa odvojenih temelja stupaca zida,
 I_{1B}, I_{2B} . . . vlastiti momenti inercije stopa odvojenih temelja stupaca zida,
 E modul elastičnosti materijala zida,
 c Winklerov koeficijent podloge temelja, tj. tla,
 w intenzitet horizontalnog podijeljenog opterećenja zida pri njegovu vrhu $x = 0$,
 P veličina koncentrirane sile pri vrhu zida,
 W veličina (rezultanta) horizontalnog opterećenja zida,
 ξ parametar koji određuje udaljenost fiktivne nultačke intenziteta trapeznog opterećenja od gornjeg ruba zida,
 M moment savijanja od vanjskog opterećenja,
 $\mathfrak{T}$ poprečna sila od vanjskog opterećenja,
 M_H vrijednost momenta savijanja M za $x = H$,
 M_j vrijednost momenta savijanja M za $x = x_j$,
 T sila smicanja,
 T_0, T_H vrijednosti sile smicanja T za $x = 0$, odnosno $x = H$,
 T_j vrijednost sile smicanja T za $x = x_j$,
 T' reducirana sila smicanja, tj. sila smicanja na jedinicu dužine zamišljene kontinualne veze stupaca zida,
 T'_0, T'_H vrijednosti reducirane sile smicanja T' za $x = 0$ odnosno $x = H$,
 M sumarni moment savijanja proizvoljnog poprečnog presjeka zida,
 M_1, M_2 momenti savijanja stupaca 1 i 2 zida,
 AM_j^{red} reducirani dodatni moment savijanja za $x = x_j$,
 M_j moment savijanja prečke na koti $x = x_j$,
 Q_j poprečna sila nadvoja na koti $x = x_j$,
 a krak poprečnih sila u simetrali prečaka obzirom na os stupaca zida,
 Δx međusobna udaljenost susjednih čvorova diferencijskih jednadžbi,
 $m + 1$ broj čvorova diferencijskih jednadžbi,
 P_j koncentrirana sila u čvoru j ,
 Δ_T, Δ_w relativno smicanje presječenih krajeva lamele u smjeru i smislu hiperstatičke veličine, u osnovnom sistemu, uslijed djelovanja sile smicanja odn. vanjskog opterećenja,
 Δ_{HT}, Δ_{Hw} vrijednosti pomaka Δ_T odn. Δ_w za $x = H$,

- α, ψ koeficijenti zavisni od geometrijskih karakteristika zida,
 β, γ koeficijenti zavisni od geometrijskih karakteristika zida
 i opterećenja,
 $\alpha L^2, \psi_L$ koeficijenti zavisni od geometrijskih i mehaničkih karak-
 teristika zida i ležišne konstrukcije,
 φ koeficijent zavisan od promjenljivosti debljine zida i mo-
 dula elastičnosti duž visine zida,
 y_w ugib zida – doprinos deformacije zida,
 y_{wH}, y'_{wH} . . . ugib i kut zaokreta tangente ugibne linije na donjem rubu
 $x = H$ zida – doprinosi deformacije zida,
 y''_w zakrivljenost zida,
 y_B ugib zida – doprinos deformacije podloge temelja,
 Θ kut zaokreta zajedničkog temelja stupaca zida,
 I_B vlastiti moment inercije stope zajedničkog temelja stu-
 paca zida,
 ΣI_B suma vlastitih momenata inercije stopa odvojenih teme-
 lja stupaca zida.

Derivacije po apscisi x označene su crticama.

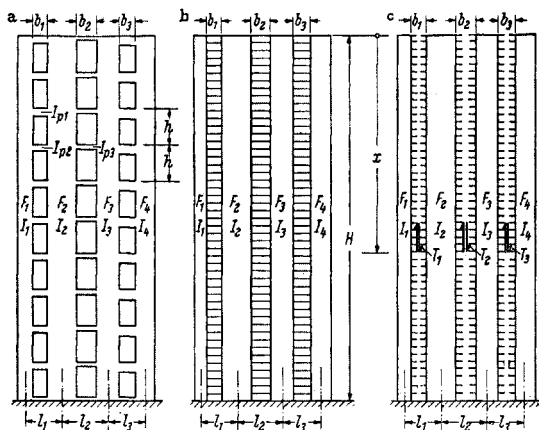
2.2. Zidovi s više nizova otvora

I zidovi oslabljeni sa više nizova otvora načelno se mogu proračunavati po naprijed izloženom postupku. U općem slučaju imamo za zid oslabljen s r nizova otvora za svaki vertikalni niz $k = 1 \dots r$ otvora jednu hiperstatičku veličinu $T_k = T_k(x)$. Formulacija problema svodi se na sistem r simultanih diferencijalnih jednadžbi sila smicanja. Rješavanje tako formuliranog problema traje međutim za potrebe prakse suviše dugo, pa se preporučuje primjena neke aproksimativne metode.

Primijenit će se Ritzov postupak; on na jednostavan način dovodi do dobrih aproksimativnih rješenja.

Kao primjer promotrit ćemo zid oslabljen u općem slučaju nesimetrično sa tri niza otvora (sl. 31a) izložen duž čitave visine jednoliko podijeljenom opterećenju intenziteta w . Neka je zid na gornjem kraju slobodan, a na donjem upet, tj. neka se oslanja na neku od ležišnih konstrukcija prvog tipa.

Zamjenjujući sistem (sl. 31b), osnovni sistem (sl. 31c) i hiperstatičke veličine biramo analogno kao za zidove oslabljene jednim ili dvama nizovima otvora.



Sl. 31. Zid oslabljen s tri niza otvora (a), zamjenjujući sistem (b) i osnovni sistem sa hiperstatičkim veličinama (c).

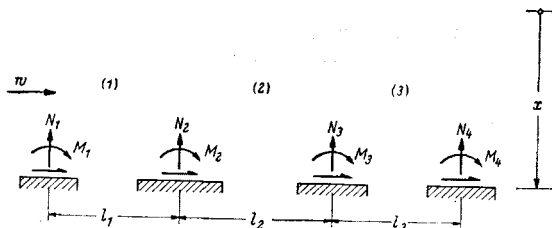
Moment zbog vanjskog opterećenja u nekom proizvoljnom poprečnom presjeku x zida iznosi

$$\mathfrak{M} = 1/2 w x^2, \quad (56)$$

a sumarni moment savijanja

$$M = 1/2 w x^2 - \sum_{k=1}^3 T_k l_k. \quad (57)$$

Sumarni moment savijanja dijeli se na pojedine stupce zida srazmjerno njihovim momentima inercije.



Sl. 32. Unutarnje sile nekog proizvoljnog poprečnog presjeka x zida.

Na sl. 32 naznačene su unutarnje sile nekog proizvoljnog poprečnog presjeka x zida u smislu u kojem one djeluju sa gornjeg odsječnog dijela zida na donji. One iznose

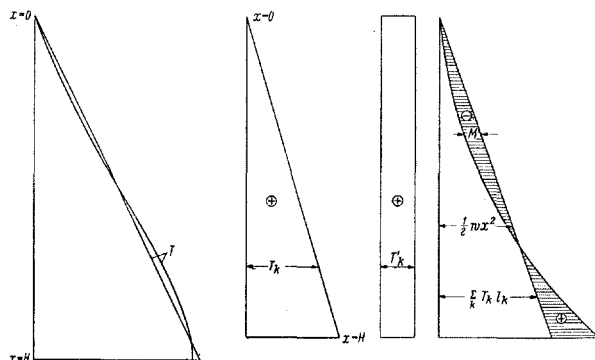
$$\left. \begin{aligned} N_1 &= T_1 & M_1 &= \frac{I_1}{\Sigma I} M \\ N_2 &= T_2 - T_1 & M_2 &= \frac{I_2}{\Sigma I} M \\ N_3 &= T_3 - T_2 & M_3 &= \frac{I_3}{\Sigma I} M \\ N_4 &= -T_3 & M_4 &= \frac{I_4}{\Sigma I} M. \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Za komplementarnu energiju sistema može se primjenom elementarnih obrazaca nauke o otpornosti materijala napisati izraz

$$2EU = \int_0^H \left\{ \frac{hb_1^3}{12 I_{p1}} T_1'^2 + \frac{hb_2^3}{12 I_{p2}} T_2'^2 + \frac{hb_3^3}{12 I_{p3}} T_3'^2 + \right. \\ \left. + \frac{T_1'^2}{F_1} + \frac{(T_2 - T_1)^2}{F_2} + \frac{(T_3 - T_2)^2}{F_3} + \frac{(-T_3)^2}{F_4} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\Sigma I} (0,5 \omega x^2 - T_1 l_1 - T_2 l_2 - T_3 l_3)^2 \right\} dx. \quad (59)$$

Prva tri člana u tom izrazu daju doprinos prečki, odnosno zamjenjujuće kontinualne veze, četiri slijedeća doprinos uzdužnih sila stupaca, a posljednji doprinos momenata savijanja stupaca zida. Doprinos ležišne konstrukcije energiji sistema može se zbog njene znatne krutosti zanemariti, a doprinos podloge temelja ne treba uvesti u račun jer deformacija podloge temelja nema utjecaja na stanje unutarnjih sila u zidu.

Pratranjem dijagrama sile smicanja (sl. 18, 22, 24, 26) može se zaključiti da se T -krivulje mogu aproksimirati pravcima (sl. 33). Reducirane sile smicanja T' onda su duž visine zida konstantne, jer su jednake derivaciji sila smicanja po apscisi, pa je naponsko stanje svih prečaka istoga vertikalnoga niza jednako. Dispozicija armature je u tom slučaju naročito jednostavna. Sa gledišta teorije plastičnosti zamjena T -krivulje pravcem nije samo opravdana nego je i teoretski pravilna, ukoliko su prečke slabe u uspoređenju sa stupcima.



Sl. 33. Zamjena T -krivulje pravcem.

Sl. 34. Dijagrami sile smicanja T_k , reducirane sile smicanja T_k' i sumarnog momenta savijanja M .

Jednadžbe sile smicanja određene su prema tome jednoparametarskim izrazima

$$T_k = \frac{x}{H} T_{kH}, \quad (k = 1, 2, 3) \quad (60)$$

a vrijednosti reduciranih sile smicanja su

$$T_k' = \frac{T_{kH}}{H}. \quad (k = 1, 2, 3) \quad (61)$$

Sa T_{kH} označena je vrijednost sile smicanja T_k vertikalnog niza otvora k za $x = H$.

Izrazi (60) za sile smicanja odabrani su tako da zadovoljavaju rubne uvjete

$$T_{k0} = 0, \quad (k = 1, 2, 3) \quad (62)$$

na gornjem rubu zida $x = 0$; oni međutim ne zadovoljavaju rubne uvjete

$$T_{kH}' = 0 \quad (k = 1, 2, 3) \quad (63)$$

na donjem rubu zida $x = H$. U smislu računa varijacija jedn. (62) mogu se tretirati kao bitni, a jedn. (63) kao dodatni ili prirodni rubni uvjeti. Nužni uvjeti za primjenu Ritzova postupka, da izrazi za hiperstatičke veličine zadovoljavaju bitne rubne uvjete, dakle su zadovoljeni.

Uvrstimo li izraze (60) za hiperstatičke veličine i (61) za njene derivacije u izraz (59) za komplementarnu energiju sistema, on nakon provedbe integracije i uređenja dobiva konačan oblik

$$\left. \begin{aligned} 2 EU = & \left(\frac{b_1^3}{I_{p1}} T_{1H}^2 + \frac{b_2^3}{I_{p2}} T_{2H}^2 + \frac{b_3^3}{I_{p3}} T_{3H}^2 \right) \frac{h}{12 H} + \\ & + \left[\frac{T_{1H}^2}{F_1} + \frac{(T_{2H} - T_{1H})^2}{F_2} + \frac{(T_{3H} - T_{2H})^2}{F_3} + \frac{(-T_{3H})^2}{F_4} \right] \frac{H}{3} + \\ & + \frac{1}{\Sigma I} \left[\frac{w H^5}{20} + (T_{1H} l_1 + T_{2H} l_2 + T_{3H} l_3)^2 \frac{H}{3} - \right. \\ & \left. - (T_{1H} l_1 + T_{2H} l_2 + T_{3H} l_3) \frac{w H^3}{4} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

Komplementarna energija sistema je time izražena kao funkcija nepoznatih parametara T_{kH} .

Primjenom uvjetnih jednadžbi

$$\frac{\partial (2 EU)}{\partial T_{kH}} = 0 \quad (k = 1, 2, 3) \quad (65)$$

Ritzovog postupka na izraz (64) dobiva se – za iznalaženje parametara T_{kH} – simetrični sistem triju simultanih linearnih algebarskih jednadžbi naveden u tablici 4. Dvostruko izvučena linija predoduje znak jednakosti jednadžbi.

Pošto su rješenjem u tablici 4 navedenog sistema jednadžbi proračunate vrijednosti parametara T_{kH} , vrijednosti sila smicanja iznalaze se prema jedn. (60) i vrijednosti reduciranih sila smicanja prema jedn. (61). Na sl. 34 prikazani su dijagrami sila smicanja T_k , reducirane sile smicanja T_k' i sumarnog momenta savijanja M . Jednadžba (57) sumarnog momenta savijanja predoduje parabolu II stupnja. Unutarnje sile stupaca zida proračunavaju se primjenom jednadžbi (58). Poprečne sile unutarnjih prečaka iznose

$$Q_{kj} = T'_{kH} h; \quad (k = 1, 2, 3; \quad j = 0 \dots n - 1) \quad (66)$$

momenti uklještenja prečki proračunavaju se prema već ranije navedenoj jedn. (54).

Ugibi zida, npr. ugib gornjeg ruba zida, mogu se, ako je to potrebno, proračunati na osnovu sl. 35, dakle na osnovnom sistemu izloženom djelovanju vanjskog, tj. horizontalnog opterećenja i hiperstatičkih veli-

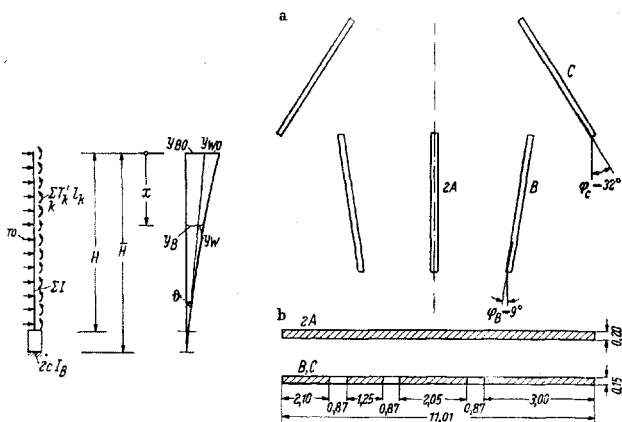
Tablica 4.

Sistem jednađbi za iznalaženje T_{kH} -vrijednosti

	T_{1H}	T_{2H}	T_{3H}	
(1)	$\frac{l_1^2}{\Sigma I} + \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} + \frac{b_1^3 h}{4 I_{p1} H^2}$	$\frac{l_1 l_2}{\Sigma I} - \frac{1}{F_2}$	$\frac{l_1 l_3}{\Sigma I}$	$\frac{3 w l_1 H^2}{8 \Sigma I}$
(2)	$\frac{l_1 l_2}{\Sigma I} - \frac{1}{F_2}$	$\frac{l_2^2}{\Sigma I} + \frac{1}{F_2} + \frac{1}{F_3} + \frac{b_2^3 h}{4 I_{p2} H^2}$	$\frac{l_2 l_3}{\Sigma I} - \frac{1}{F_3}$	$\frac{3 w l_2 H^2}{8 \Sigma I}$
(3)	$\frac{l_1 l_3}{\Sigma I}$	$\frac{l_2 l_3}{\Sigma I} - \frac{1}{F_3}$	$\frac{l_3^2}{\Sigma I} + \frac{1}{F_3} + \frac{1}{F_4} + \frac{b_3^3 h}{4 I_{p3} H^2}$	$\frac{3 w l_3 H^2}{8 \Sigma I}$

čina, tj. sila smicanja. Momentna linija $1/2 wx^2$ od vanjskog opterećenja je parabola II stupnja sa tjemnom pri vrhu zida, a momentna linija $\sum T_k l_k$ od hiperstatičkih veličina pravac sa nultačkom pri vrhu zida. Doprinos deformacije zida horizontalnom ugibu gornjeg ruba zida iznalazi se najjednostavnije Greenovim teoremom uz primjenu konjugirane grede, u promatranom slučaju konzole upete na gornjem i slobodne na donjem kraju. Dobiva se:

$$y_{w0} = \frac{H^2}{E \sum I} \left(\frac{w H^2}{8} - \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 T_{kH} l_k \right) \quad (67)$$



Sl. 35. Osnovni sistem sa silama koje na njega djeluju i ugibna linija.

Sl. 36. Dispozicija zidova (a) i dimenzije zidova u poprečnom presjeku (b) uz numerički primjer.

Doprinosu y_{w0} deformacije zida treba još superponirati doprinos $y_{B0} = \Theta (\bar{H} - x)$ deformacije podloge temelja. Deformacija podloge temelja se naime manifestira u načinu zaokretanja stope temelja za iznos $\Theta = M_{\bar{H}} / 2 c I_B$. Sa I_B je pri tome označen vlastiti moment inercije stope zajedničkog temelja stupaca promatranoga zida. Ugibna linija zida je parabola IV stupnja (sl. 35).

Numerički primjer

Treba ispitati sistem zidova prikazan u tlocrtu na sl. 36a za vjetar u smjeru osi OS simetrije sistema. Zid 2 A je neoslabljen, a zidovi B i C međusobno su jednaki i oslabljeni sa po tri vertikalna niza otvora (sl. 36b). Zidovi su visoki 51,8 m; na gornjem kraju su slobodni, a na donjem kraju $x = H = 51,8$ m upeti u masivan roštilj podrumskih zidova. Ispod cijelog objekta proteže se temeljna ploča. Visina kata je $h = 2,80$ m, visina unutarnjih prečaka $h_p = 0,65$ m i ukupni intenzitet vjetra $w = 2,39$ Mp/m visine objekta.

Raspodjela ukupnog horizontalnog opterećenja objekta na pojedine zidove hiperstatička je, pa treba promotriti i deformaciju sistema. Kako stropove možemo smatrati kao u njihovim ravninama apsolutno krute diskove, projekcije ugiba svih zidova na smjer osi OS simetrije moraju biti međusobno jednake (sl. 37).

U svrhu raspodjele ukupnog opterećenja na pojedine zidove postave se: 1) uvjet ravnoteže

$$w_A + w_B \cos \varphi_B + w_C \cos \varphi_C = w \quad (68)$$

raspodijeljenih opterećenja i ukupnog opterećenja po jedinici visine objekta u smjeru osi OS simetrije i 2) uvjeti kompatibilnosti

$$\left. \begin{aligned} y_{wOA} &= y_{wOB} \cos \varphi_B, \\ y_{wOA} &= y_{wOC} \cos \varphi_C; \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

za $x = 0$; oni izražavaju uvjet jednakosti projekcija ugiba gornjih rubova zidova na smjer osi simetrije. Pri tome su sa w_A , w_B i w_C označeni intenziteti opterećenja zidova A, B i C u smjeru zidova, a sa y_{wOA} , y_{wOB} i y_{wOC} ugibi gornjih rubova zidova, također u smjeru zidova.

Najprije treba zidove ispitati za jedinično opterećenje, tj. na jednoliko podijeljeno opterećenje intenziteta 1.

Ugib gornjeg ruba zida A može se, jer zid nije oslabljen, proračunati primjenom poznatog obrasca nauke o otpornosti materijala

$$E y_{wOA} = \frac{H^4}{8 I_A} = 81060;$$

pri čemu je za vlastiti moment inercije poprečnog presjeka zida uvrštena vrijednost $I_A = 11,1 \text{ m}^4$.

Geometrijske karakteristike zidova B i C jesu:

$$\begin{aligned} F_1 &= 0,315 \text{ m}^2, & I_1 &= 0,116 \text{ m}^4, \\ F_2 &= 0,187 \text{ m}^2, & I_2 &= 0,0243 \text{ m}^4, \\ F_3 &= 0,308 \text{ m}^2, & I_3 &= 0,108 \text{ m}^4, \\ F_4 &= 0,450 \text{ m}^2, & I_4 &= 0,337 \text{ m}^4, \\ b_1 &= b_2 = b_3 = 0,87 \text{ m}, & \Sigma I &= 0,585 \text{ m}^4, \\ l_1 &= 2,54 \text{ m}, & l_2 &= 2,51 \text{ m}, & l_3 &= 3,40 \text{ m}, \\ 4 I_p &= 0,00588 \text{ m}^4. \end{aligned}$$

Koeficijenti i članovi ovisni o opterećenju sistema jednadžbi prema tablici 4 i rješenje sistema jednadžbi navedeni su u ovoj shemi:

	T_{1H}	T_{2H}	T_{3H}	
(1)	1,967	0,556	1,477	436,9
(2)		1,949	1,133	431,7
(3)			2,535	584,8
	98,7	125,2	117,2	

Vrijednost sumarnog momenta savijanja za $x = H$ iznosi

$$M_H = 378 \text{ Mpm},$$

reducirane sile smicanja su

$$T'_{1H} = 1,91 \text{ Mp/m}, \quad T'_{2H} = 2,42 \text{ Mp/m}, \quad T'_{3H} = 2,26 \text{ Mp/m},$$

a ugibi gornjih rubova zidova

$$E y_{WOB} = E y_{WOC} = 65130.$$

Primjenom jedn. (69) mogu se sada intenziteti opterećenja zidova B i C izraziti pomoću intenziteta opterećenja zida A:

$$w_B = \frac{1,245}{\cos \varphi_B} w_A, \quad w_C = \frac{1,245}{\cos \varphi_C} w_A.$$

Uvrste li se ove relacije u uvjet ravnoteže (68), dobivaju se za intenzitete opterećenja zidova A, B i C vrijednosti

$$w_A = 0,685 \text{ Mp/m}, \quad w_B = 0,863 \text{ Mp/m}, \quad w_C = 1,006 \text{ Mp/m}.$$

Konačne vrijednosti unutarnjih sila u zidovima dobivaju se multiplikacijom ranije proračunatih vrijednosti za jedinična opterećenja sa gore navedenim intenzitetima w_A , w_B i w_C .

Projekcije ugiba gornjih rubova zidova na smjer osi simetrije

$$E y_{WOA} = E y_{WOB} \cos \varphi_B = E y_{WOC} \cos \varphi_C = 55500$$

međusobno su jednake, što služi kao kontrola. Doprinos deformacije podloge temelja ugibima zidova pri tomu, tj. pri raspodjeli opterećenja, nije uzet u obzir jer on prouzrokuje samo naginjanje objekta kao cjeline, ali ne utječe na stanje unutarnjih sila u sistemu.

2.3. Dinamičke karakteristike zidova s nizovima otvora

U svrhu iznalaženja dinamičkog opterećenja, npr. inercijskih sila kod potresa, potrebno je poznavanje perioda te u gibne linije pri slobo-dnim titrajima.

Masu pa prema tome i težinu q sistema zamišljamo si jednoliko po-dijeljenom po visini sistema.

Težinu jedne stropne konstrukcije uključivši dio pokretnog tereta treba dakle podijeliti s visinom kata i tome pribrojiti težinu vertikalnih dijelova po jedinici visine.

Titranje elementa dužine dx i mase m . dx odnosno težine q . dx siste-ma može se opisati jednađžbom

$$y_j^* = Y_j \cos pt: \quad (70)$$

pri tome označuju y_j^* horizontalni pomak promatranoga elementa u proizvoljnom času t , Y_j amplitudu i p kružnu frekvencu titranja. Brzina elementa prilikom prolaza kroz nulti položaj slijeva udesno

$$\left(pt = \frac{3}{2} \pi \right)$$

onda iznosi $Y_j p$. Pomake udesno iz nultog položaja smatramo pozi-tivnima.

Tretirani zidovi toliko su kruti da se pri iznalaženju dinamičkog opterećenja u većini slučajeva možemo zadovoljiti ispitivanjem titranja po osnovnom tonu, dakle iznalaženjem osnovnog perioda. U tu svrhu možemo se poslužiti energetskom metodom.

Pretpostavlja se da su u gibna linija kod titranja te u gibna linija zbog statičkog djelovanja jednoliko podijeljenog horizontalnog opte-rećenja intenziteta q slične. Označimo li horizontalne ugibe zbog sta-tičkog djelovanja horizontalnog opterećenja q sa y , amplitude titranja bit će φy , gdje je sa φ označena neka konstanta.

Ugibna linija zida bez otvora, tj. konzole nepromjenljive krutosti konveksna je naprama strani izloženoj opterećenju, dok je ugibna linija skeleta konkavna naprama toj strani. Zid oslabljen nizovima otvora po svom statičkom djelovanju nalazi se između statičkog djelovanja neoslabljenog zida i skeleta; ugibna linija je u gornjem području konkavna naprama opterećenju, a ispod toga konveksna. Tačka infleksije nalazi se negdje oko $x = \frac{1}{3}H$. Jednostavnosti radi ugibnu liniju oslabljenog zida pretpostavit ćemo u obliku pravca koji stvarnu ugibnu liniju siječe u $x = \frac{1}{3}H$.

Kinetička energija sistema najveća je u času prolaza sistema kroz nulti položaj. Ona tada iznosi

$$E_k = \frac{p^2 \varphi^2}{2g} q \int_0^H y^2 dx. \quad (71)$$

Potencijalna energija sistema maksimalna je u času maksimalnog otklona, to jest u času kad pomaci dobivaju svoja amplitudna značenja. Ona se može izraziti kao rad

$$E_p = \frac{q^2}{2} q \int_0^H y dx \quad (72)$$

vanjskih sila $q dx$ na odgovarajućim pomacima qy . Kako se prigušivanje titranja zanemaruje, kinetička energija i potencijalna energija prilikom svakog titraja prelaze jedna u drugu. Izjednačujući na osnovu toga izraze za obe energije, za kružnu frekvencu slobodnih titraja po osnovnom tonu dobiva se obrazac

$$p = \sqrt{\frac{\int_0^H y dx}{\int_0^H y^2 dx}} g. \quad [\text{sec}^{-1}] \quad (73)$$

Označimo li ugib vrha $x = 0$ zida zbog statičkog djelovanja horizontalnog opterećenja q sa y_0 , slijedi

$$\int_0^H y dx = \frac{1}{2} y_0 H, \quad \int_0^H y^2 dx = \frac{H}{3} y_0^2, \quad \int_0^H y dx / \int_0^H y^2 dx = 1,5 / y_0$$

$$\text{te } p = 3,84 \sqrt{y_0}.$$

Za osnovni period slobodnih titraja dobiva se konačni obrazac

$$T = \frac{2\pi}{p} = 1,64 \sqrt{y_0}. \quad [\text{sec}] \quad (74)$$

Opći obrazac za koeficijent forme ugibne linije kod slobodnog titranja

$$\eta = y \frac{\int_0^H y dx}{\int_0^H y^2 dx} \quad (75)$$

tada dobiva oblik

$$\eta = 1,5 \left(1 - \frac{x}{H} \right); \quad (76)$$

dat je dakle pravcem s maksimalnom ordinatom $\eta_0 = 1,5$ pri vrhu $x = 0$ zida i nultokom $\eta_H = 0$ pri dnu $x = H$ zida.

U obrascu (74) za period titranja figurira ugib y_0 vrha zida zbog statičkog djelovanja jednoliko podijeljenog horizontalnog opterećenja intenziteta q . Da bismo proračunali taj ugib, treba prethodno riješiti statički neodređeni sistem. U tu svrhu može poslužiti grubi aproksimativni račun prikazan u poglavlju 2.2, dakle račun koji se osniva na pretpostavci da je sila smicanja linearna funkcija. Na primjer kod nesimetričnog zida sa jednim nizom otvora ordinata te funkcije za donji rub $x = H$ zida iznosi (tablica 4)

$$T_H = \frac{3 q l H^2}{8 \Sigma I} \cdot \frac{l^2}{\Sigma I} + \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} + \frac{b^3 h}{4 I_p H^2} \quad (77)$$

Ugib na proizvoljnoj koti x dat je onda jednadžbom

$$\begin{aligned} y &= y_W + y_B = \\ &= \frac{H^2}{6 E \Sigma I} \left[\left(3 - 4 \frac{x}{H} + \frac{x^4}{H^4} \right) q \frac{H^2}{4} - \left(2 - 3 \frac{x}{H} + \frac{x^3}{H^3} \right) T_{kH} l_k \right] + \\ &\quad + \frac{\eta_H \bar{H}}{2 c l_B} (\bar{H} - x), \end{aligned} \quad (78)$$

gdje prvi član daje utjecaj deformacije zida, a drugi utjecaj deformacije podloge temelja. Proračuna li se primjenom ovog obrasca ugib u $x = \frac{H}{3}$, za ugib gornjeg ruba zida dobiva se obrazac

$$y_0 = 1,50 y_{W, H/3} + \frac{H}{H - H/3} y_{B, H/3}.$$

Primjer. Za jedan dvanaestorokatni toranj treba proračunati osnovni period slobodnih titraja zida nesimetrično oslabljenog jednim nizom otvora uz slijedeće podatke: $I_1 = 0,102 \text{ m}^4$, $I_2 = 0,475 \text{ m}^4$, $F_1 = 0,675 \text{ m}^2$, $F_2 = 1,125 \text{ m}^2$, $\delta = 0,50 \text{ m}$, $h = 2,72 \text{ m}$, $H = 35,4 \text{ m}$, $H = 40,1 \text{ m}$, $l = 3,30 \text{ m}$, $b = 1,50 \text{ m}$, $I_p = 0,0065 \text{ m}^4$, $q = 54,4 \text{ Mp/m}$, $E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ Mp/m}^2$, $2c = 10^4 \text{ Mp/m}^3$, $I_B = 3632 \text{ m}^4$.

Vrijednost sile smicanja na donjem rubu zida: $T_H = 124,9 \cdot 54,4 = 6795 \text{ Mp}$.

Ugibi u $x = \frac{H}{3}$: $y_{W, III} = 0,930 \text{ m}$, $y_{B, III} = 0,017 \text{ m}$,

Ugib gornjeg ruba $x = 0$ zida: $y_0 = 1,42 \text{ m}$.

Osnovni period titranja: $T = 1,95 \text{ sec}$.

Za uspoređenje vrijednost perioda proračunata je i po obrascu

$$T = 0,571 H^2 \sqrt{\frac{q}{EI}} \quad [\text{sec}]$$

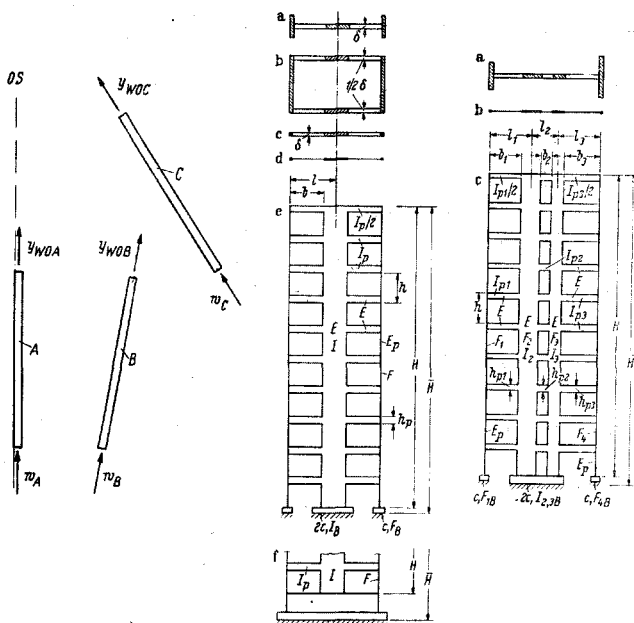
za konzolu konstantne krutosti EI i jednoliko podijeljene mase q/g . Uvrštavajući za I vrijednost $5,0 \text{ m}^4$, dobiva se $T = 2,09 \text{ sec}$.

3. ZIDOVI KOD KOJIH SE KRUTOSTI NA SAVIJANJE NEKIH STUPACA MOGU ZANEMARITI

3.1. Opis zadatka

Kod nekih konstruktivnih rješenja zidova vlastiti su momenti inercije nekih stupaca mali u usporedbi sa vlastitim momentima inercije ostalih stupaca i prečki. Krutost na savijanje takvih stupaca može se zanemariti; u daljem tekstu nazivat ćemo ih pendel-stupcima. Veza prečaka i pendel-stupaca može se tretirati kao zglobna.

Sl. 37 i 38 prikazuje nekoliko mogućnosti oblikovanja zidova pendel-stupcima. Kod zidova sa pojasevima (sl. 38a, b i 39) možemo – pri ispitivanju zida na horizontalno opterećenje u smjeru hrpta – površine poprečnih presjeka pojaseva zamisliti koncentriranima u presjecištu osi pojasa i hrpta (sl. 38d i 39b). Vertikalni nosivi elementi kompozitnog zida (sl. 38c) jesu jedan betonski ili armiranobetonski i dva čelična stupca.

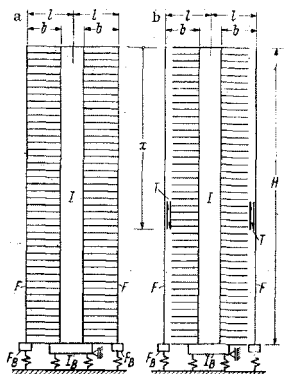


Sl. 37. Opterećenja pojedinih zidova i ugibi gornjih rubova zidova uz numerički primjer.

Sl. 38. Simetričan zid s jednim stupcem krutim na savijanje i dva pendel-stupca: poprečni presjeci dvaju zidova sa pojasevima (a, b) i jednog kompozitnog zida (c), statička shema zida u poprečnom presjeku (d), nacrt zida s odvojeno temeljnim stupcima (e) i dio nacrt zida u kojem se svi stupci oslanjaju na zajednički podrumski zid (f).

Sl. 39. Nesimetričan zid sa dva stupca kruta na savijanje i dva pendel-stupca: poprečni presjek (a), statička shema zida u poprečnom presjeku (b) i nacrt zida (c).

Stupci zida mogu biti temeljeni odvojeno (sl. 38e i 39) ili zajednički (sl. 38f). Drugi od oba navedena načina oslanjanja stupaca može se shvatiti kao specijalan slučaj prvoga, naime slučaj u kojem je koeficijent podloge jednak beskonačno.



Sl. 40. Zamjenjujući (a) i osnovni (b) sistem zida prema sl. 38.

Ugib slobodnog kraja konzole zbog djelovanja jedinične sile na tom mjestu (sl. 41) iznosi $b^3/3EI$ zbog momenata savijanja i kb/GF zbog poprečnih sila. Ako za modul smicanja G uzmemo $3/7$ modula elastičnosti E , a za koeficijent raspodjele tangencijalnih napona za pravokutni poprečni presjek vrijednost 1,2, za reducirani moment inercije prečaka koje su na jednom kraju priključene na pendel-stupce dobiva se izraz

$$I_p = \frac{\delta h_p^3/12}{1 + 0,7 (h_p/b)^2} \quad (79)$$

Vrijednost reduciranog momenta inercije prečaka koje su obostrano upete u stupce krute na savijanje data je obrascem (3) u poglavlju 2.1.

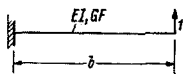
Zidovi kojima neki stupci nisu kruti na savijanje proračunavaju se analogno kao što je ranije opisano za zidove kojima su svi stupci kruti na savijanje. Kako bi u svrhu ispitivanja složenijih sistema omogućili iznalaženje aproksimativnih rješenja, primijenit ćemo energetske metode. Postupak ćemo demonstrirati na primjerima prikazanim na sl. 38. i 39.

3.2. Simetričan zid sa jednim stupcem krutim na savijanje i dva pendel-stupca (sl. 38)

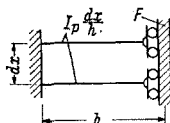
3.2.1. Izvod obrasca za komplementarnu energiju sistema

Promotrit ćemo opći slučaj zida s odvojeno temeljenim stupcima.

Sl. 40a i b prikazuju odgovarajući zamjenjujući i osnovni sistem. Osnovni sistem dobiva se iz zamjenjujućeg time da se zglobova veza lamela i pendel-stupaca učini pomičnom u vertikalnom smjeru, ili – drugim riječima – time da se u tu vezu uvedu nullinije sile smicanja (sl. 42).

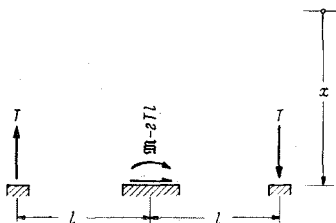


Sl. 41. Uz iznalaženje reduciranog momenta inercije prečke koja je na jednom kraju priključena na stupac krut na savijanje, a na drugom na pendel-stupac.

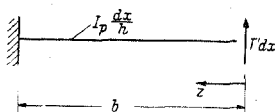


Sl. 42. Detalj nullinije sile smicanja.

Duž nullinije sile smicanja, odnosno poprečne sile, djeluju reducirane sile smicanja T' . Hiperstatička veličina – sila smicanja – definira se opet jednačbom (4), dakle kao integral poprečnih sila $T'dx$ lamela od vrha $x = 0$ zida do promatrane apscise x .



Sl. 43. Unutarnje sile stupaca zida prema sl. 38.



Sl. 44. Opterećenje jedne lamele.

Na sl. 43 označene su unutarnje sile stupaca u nekom proizvoljnom poprečnom presjeku zida u smislu u kojem one – kao vanjske sile – djeluju sa gornjeg odsječnog dijela zida na donji. Zbog simetrije

sistema i pretpostavljene antimetrije opterećenja uzdužna sila srednjeg stupca identično je jednaka nuli. Srednji stupac napregnut je dakle samo na savijanje, vanjski stupac na luv-strani na centrični vlačak, a vanjski stupac na lee-strani na centrični pritisak. Vrijednost sumarnog momenta savijanja data je obrascem (5b).

Uvode se ove oznake:

- $M, M_{\bar{H}}$. . . moment savijanja zbog vanjskog opterećenja u proizvoljnom poprečnom presjeku $0 \leq x \leq H$ zida i u stopi $x = H$ temelja stupca krutog na savijanje,
 F površina poprečnog presjeka jednog pendel-stupca,
 I vlastiti moment inercije stupca krutog na savijanje,
 F_B površina stope temelja jednog pendel-stupca,
 I_B vlastiti moment inercije stope temelja stupca krutog na savijanje,
 E modul elastičnosti stupca krutog na savijanje i prečki,
 E_P modul elastičnosti pendel-stupaca,
 c Winklerov koeficijent podloge temelja za centrični pritisak.

Značenje ostalih oznaka vidi se na sl. 38.

Kako je visina H srednjeg stupca zida znatno veća od njegove širine, on se može smatrati kao štap i raspodjela normalnih napona po poprečnim presjecima pretpostaviti linearnom. Na osnovu jednog poznatog obrasca nauke o otpornosti materijala za komplementarnu energiju srednjeg stupca vrijedi obrazac

$$U_S = \frac{1}{2EI} \int_0^H (M - 2Tl)^2 dx. \quad (80)$$

Komplementarna energija pendel-stupaca iznosi

$$U_P = \frac{1}{E_P F} \int_0^H T^2 dx. \quad (81)$$

Komplementarna energija koja se prilikom deformacije zida akumulira u jednoj lameli iznosi (sl. 44)

$$dU_V = \frac{T'^2 (dx)^2}{2EI_P dx/h} \int_0^b z^2 dz = \frac{hb^3}{6EI_P} T'^2 dx. \quad (82)$$

Komplementarna energija svih lamela tj. obiju zamjenjujućih kontinualnih sila jest prema tome

$$U_V = 2 \int_0^H dU_V = \frac{hb^3}{3EI_P} \int_0^H T'^2 dx. \quad (83)$$

Komplementarna energija podloge temelja jest

$$U_B = \frac{1}{2c} \left[2 \frac{T_H^2}{F_B} + \frac{(\mathfrak{M}_H - 2 T_H l)^2}{2 I_B} \right]. \quad (84)$$

Prvi član izraza (84) daje doprinos podloge temelja vanjskih stupaca, a drugi doprinos podloge temelja unutarnjeg stupca.

Doprinos samih temelja energiji sistema može se – zbog njihove znatne krutosti – zanemariti.

Uvede li se oznaka

$$F' = \frac{E_P}{E} F \quad (85)$$

za reduciranu površinu poprečnog presjeka pendel-stupaca, za komplementarnu energiju sistema zid-podloga temelja dobiva se – superpozicijom doprinosa (80), (81), (83) i (84) – izraz

$$U = \int_0^H \frac{1}{E} \left[\frac{T^2}{F'} + \frac{(\mathfrak{M} - 2 T l)^2}{2 I} + \frac{h b^3}{3 I_P} T'^2 \right] dx + \frac{1}{2c} \left[2 \frac{T_H^2}{F_B} + \frac{(\mathfrak{M}_H - 2 T_H l)^2}{2 I_B} \right]. \quad (86)$$

Na gornjem rubu zida sila smicanja mora biti jednaka nuli. Gornji rubni uvjet je dakle dat jednadžbom (15); u smislu računa varijacija ta se jednadžba može smatrati bitnim rubnim uvjetom.

3.2.2. Egzaktna formulacija i rješenje

Prema teoremu o minimumu komplementarne energije funkcija T odredit će se iz uvjeta da funkcional (86) bude stacionaran u odnosu na male dopuštene varijacije te funkcije, tj. takve varijacije koje zadovoljavaju bitni rubni uvjet (15). Slijedi

$$\delta U = 0. \quad (87)$$

Komplementarna energija sistema je – na osnovu izraza (86) – funkcija od x , T , T' i T_H . Ona se može napisati u općem obliku

$$U = \int_0^H G(x, T, T') dx + \Phi(T_H). \quad (88)$$

Pri tome je sa G označena podintegralna funkcija, a sa Φ rubni član izraza (86).

Prvu varijaciju izraza (88) dobiva se deriviranjem, time da se diferencijali dT , dT' i dT_H zamijene odgovarajućim varijacijama δT , $\delta T'$ i δT_H . Slijedi:

$$\delta U = \int_0^H (G_T \delta T + G_{T'} \delta T') dx + \Phi_{T_H} \delta T_H. \quad (89)$$

Indeksi T , T' i T_H pri tome označuju veličine po kojima treba derivirati funkcije G i Φ . Uvrštenjem vrijednosti odgovarajućih derivacija u izraz (89) on poprima oblik

$$\begin{aligned} \delta U = \int_0^H \frac{1}{E} \left\{ \left[\frac{2T}{F'} - \frac{2l}{I} (\mathfrak{M} - 2Tl) \right] \delta T + \frac{2hb^3}{3I_p} T' \delta T' \right\} dx + \\ + \frac{2}{c} \left[\left(\frac{l^2}{I_B} + \frac{1}{F_B} \right) T_H + \frac{\mathfrak{M}_H l}{2I_B} \right] \delta T_H. \end{aligned} \quad (90)$$

Varijaciju $\delta T'$ funkcije T' primjenom pravila

$$\int_0^H T' \delta T' dx = T_H \delta T_H - \int_0^H T'' \delta T dx \quad (91)$$

za parcijalno integriranje prevodimo u varijaciju funkcije T . Vrijednost varijacije $\delta T'$ na donjoj granici $x = 0$ integracije pri tome je stavljena jednakom nuli, jer i ona mora zadovoljiti bitni rubni uvjet (15).

Uvjet (87) za komplementarnu energiju sistema može se primjenom izraza (90) i obrasca (91) napisati u konačnom obliku

$$\begin{aligned} \int_0^H \frac{1}{E} \left\{ \left[\frac{2T}{F'} - \frac{2l}{I} (\mathfrak{M} - 2Tl) - \frac{2hb^3}{3I_p} T'' \right] \right\} \delta T dx + \\ + \left\{ \frac{2hb^3}{3EI_p} T_H + \frac{2}{c} \left[\left(\frac{l^2}{I_B} + \frac{1}{F_B} \right) T_H - \frac{\mathfrak{M}_H l}{2I_B} \right] \right\} \delta T_H = 0; \end{aligned} \quad (92)$$

kako međutim varijacija δT i rubna vrijednost δT_H te varijacije mogu primiti proizvoljne vrijednosti, jednačba (92) može biti identično zadovoljena samo ako su koeficijenti uz δT i δT_H , tj. oba izraza u zagradama, jednaki nuli.

Uz oznake

$$\left. \begin{aligned} \alpha^2 &= \left(\frac{2l^2}{I} + \frac{1}{F'} \right) \frac{3I_p}{hb^3} \\ \psi &= \frac{l}{I} \frac{3I_p}{hb^3} \end{aligned} \right\} \quad (93)$$

te

$$\left. \begin{aligned} \alpha_L^2 &= \left(\frac{l^2}{I_B} + \frac{1}{F_B} \right) \frac{3 I_p}{h b^3} \frac{E}{c} \\ \psi_L &= \frac{l}{2 I_B} \frac{3 I_p}{h b^3} \frac{E}{c} \end{aligned} \right\} \quad (94)$$

dobiva se – izjednačujući s nulom izraz u prvoj zavojujitoj zagradi – diferencijalna jednadžba (14) sile smicanja i – izjednačujući s nulom izraz u drugoj zavojujitoj zagradi – donji rubni uvjet (19). Jednadžba (19) predstavlja – u smislu računa varijacija – prirodni ili nebitni rubni uvjet.

Diferencijalna jednadžba (14) i rubni uvjeti (15) i (19) – uz oznake (93) i (94) – jednoznačno formuliraju obrađivanu zadaću. Razlika u usporedbi sa zidom u kojem su svi stupci kruti na savijanje samo je u vrijednosti koeficijenata α^2 , ψ , α_L^2 i ψ_L .

U svrhu rješanja zadaće može se u slučaju proizvoljnog opterećenja primijeniti diferencijski postupak opisan u glavi 2.1.2.1.

Za specijalna opterećenja je u glavi 2.1.2.2. navedeno strogo rješenje. Za koeficijente koji figuriraju u obrascima za integracijske konstante i u jednadžbi sile smicanja dobivaju se konačni obrasci

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{w}{2} \quad \psi' = \frac{w}{2} \frac{l}{I} \frac{3 I_p}{h b^3} \\ \gamma &= \frac{w}{6 \xi H} \quad \psi' = \frac{w}{6 \xi H} \frac{l}{I} \frac{3 I_p}{h b^3} \end{aligned} \right\} \quad (95)$$

za slučaj trapeznog opterećenja i

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \frac{w}{2} \quad \psi' = \frac{w}{2} \frac{l}{I} \frac{3 I_p}{h b^3} \\ \gamma &= P \psi = P \frac{l}{I} \frac{3 I_p}{h b^3} \end{aligned} \right\} \quad (96)$$

za slučaj kombinacije jednoliko podijeljenog opterećenja i koncentrirane sile pri vrhu.

3.2.3. Aproksimativno rješenje

Jedno aproksimativno rješenje zadaće izvest će se primjenom Ritzova postupka. Izraz za posmičnu silu traži se u obliku linearne funkcije (sl. 33)

$$T = \frac{x}{H} T_H. \quad (97)$$

Jednparametarski izraz (97), doduše, ne zadovoljava prirodni rubni uvjet (19), ali zadovoljava bitni rubni uvjet (15). Uvjeti su za primjenu Ritzova postupka dakle ispunjeni.

Jednostavnosti radi opterećenje sistema pretpostavlja se jednoliko podijeljenim po visini H zida. Intenzitet tog opterećenja označimo sa w .

Uvrstimo li izraz (97) za hiperstatičku veličinu i odgovarajući izraz za njenu derivaciju u obrazac (86) za komplementarnu energiju sistema, on nakon provedbe integracije i uređenja prima konačni oblik

$$EU = \frac{H}{3 F'} T_H^2 + \frac{1}{2 I} \left(\frac{w^2 H^6}{20} - \frac{w l}{2} H^3 T_H + \frac{4}{3} l^2 H T_H^2 \right) + \frac{h b^3}{3 I_p H} T_H^2 + \frac{E}{2 c} \left[\frac{2}{F_B} T_H^2 + \frac{(\mathfrak{M}_{\bar{H}} - 2 T_H l)^2}{2 I_B} \right]. \quad (98)$$

Komplementarna energija sistema je time izražena kao funkcija nepoznatog parametra T_H izraza (97) za silu smicanja.

Uvjetna jednadžba

$$\frac{d(EU)}{dT_H} = 0. \quad (99)$$

Ritzova postupka daje

$$T_H = \frac{\frac{w l H^3}{4 I} + \frac{\mathfrak{M}_{\bar{H}} l}{I_B} \frac{E}{c}}{\frac{2 H}{3 F'} + \frac{4 l^2 H}{3 I} + \frac{2 h b^3}{3 I_p H} + \frac{2 E}{c} \left(\frac{l^2}{I_B} + \frac{1}{F_B} \right)}. \quad (100)$$

U specijalnom slučaju kad se Winklerov koeficijent c podloge temelja može staviti beskonačno kao i u slučaju kad su svi stupci zida oslonjeni na zajednički temelj ili podrumski zid (sl. 38f) obrazac (100) se pojednostavnjuje u oblik

$$T_H = \frac{\frac{w l H^3}{4 I}}{\frac{2 H}{3 F'} + \frac{4 l^2 H}{3 I} + \frac{2 h b^3}{3 I_p H}}. \quad (101)$$

Unutarnje sile proračunavaju se onda na osnovu sl. 43.

Tablica 5.

Iznalaženje unutarnjih sila uz numerički primjer 3.2.4.

x	x^2	αx	$\operatorname{sh} \alpha x$	$\operatorname{ch} \alpha x$	$C \operatorname{sh} \alpha x$	$D \operatorname{ch} \alpha x$	T_{hom}	$\frac{\beta}{\alpha^2} x^2$	T_{part}	T	$21T$	$\mathfrak{M}$	M
0	0	0	0	1	0	-15,48	-15,48	0	15,48	0	0	0	0
9	81	0,586	0,620	1,177	7,07	-18,22	-11,15	2,65	18,13	7,0	105	41	-64
18	324	1,172	1,459	1,769	16,63	-27,38	-10,75	10,62	26,10	15,4	230	162	-68
27	792	1,757	2,811	2,984	32,04	-46,19	-14,15	23,90	39,33	25,2	378	364	-14
36	1296	2,343	5,158	5,254	58,80	-81,33	-22,53	42,48	57,96	35,4	531	648	117
39	1521	2,539	6,294	6,373	71,75	-98,65	-26,90	49,86	65,34	38,4	577	760	183
42	1764	2,734	7,665	7,730	87,38	-119,66	-32,28	57,82	73,30	41,0	615	832	267
45	2025	2,929	9,328	9,381	106,34	-145,22	-38,88	66,38	81,86	43,0	645	1012	357

3.2.4. Numerički primjer i diskusija rezultata

Proračunat će se jedan primjer s ovim podacima:

$$H = 43 \text{ m}, \bar{H} = 47,5 \text{ m}, h = 3,0 \text{ m}, l = 7,5 \text{ m}, b = 6,0 \text{ m},$$

$$I = 0,5625 \text{ m}^4, F = 0,15 \text{ m}^2, I_p = 45 \cdot 10^{-4} \text{ m}^4,$$

$$I_B = 14,4 \text{ m}^4, F_B = 7,5 \text{ m}^2$$

$$E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ Mp/m}^2, E_p = 2E, c = 10^4 \text{ Mp/m}^3$$

$$w = 1,0 \text{ Mp/m}.$$

Strogo rješenje

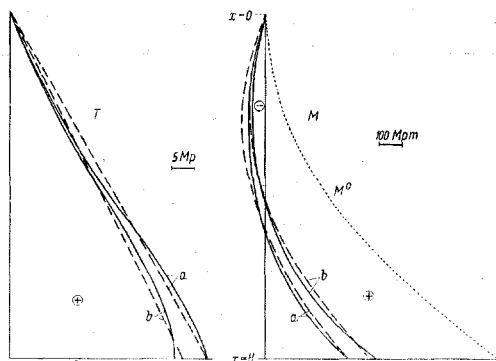
$$\alpha = 6,509 \cdot 10^{-2}$$

$$\beta = 1,389 \cdot 10^{-4}$$

$$\alpha L^2 = 1,76 \cdot 10^{-2}$$

$$\psi L = 1,136 \cdot 10^{-3}$$

$$G = 11,40$$



Sl. 45. Dijagrami sile smicanja i sumarnog momenta savijanja uz numerički primjer.

Proračun unutarnjih sila proveden je u tablici 5, i to proračun vrijednosti sile smicanja prema jedn. (31) = (32) + (45), a sumarnog momenta savijanja prema jedn. (5b).

Aproksimativno rješenje

$$T_H = 43,0.$$

Dijagrami sile smicanja i sumarnog momenta savijanja prikazani su na sl. 45. Pune linije odnose se na strogo, a isprekidane na aproksimativno rješenje. Sa »a« označene krivulje odnose se na zadani slučaj zida s odvojeno temeljenim stupcima (sl. 38e), a sa »b« označene na spe-

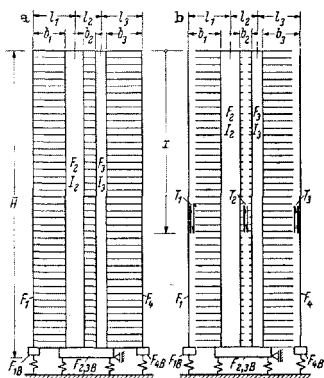
cijalni slučaj zida na apsolutno krutoj podlozi ($c = \infty$) ili na zid sa zajednički temeljenim stupcima (sl. 38f). Vrijednosti određene tačkom linijom polučene su zanemarujući sudjelovanje pojaseva, tj. uzimajući $T \equiv 0$.

Uspoređenje krivulja na sl. 45 pokazuje da pojasevi osjetljivo rasteću zid. Što popustljivije je tlo, to znatnije je rasterećenje i to niže se nalazi nultačka M -krivulje. Uzdužne sile pojaseva i poprečne sile prečaka veće su u slučaju odvojenih, a manje u slučaju zajedničkog temelja.

3.3. Nesimetričan zid sa dva stupca kruta na savijanje i dva pendel-stupca (sl. 39)

Hiperstatičke veličine su sile smicanja T_1 , T_2 i T_3 , koje djeluju duž zglobnih priključaka lamela na vanjske stupce zida, tj. pojaseve.

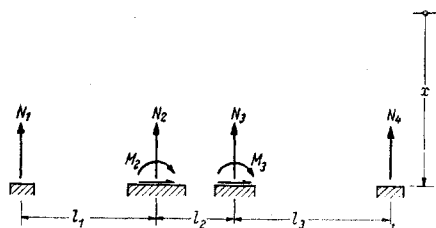
Osnovni sistem sa hiperstatičkim veličinama prikazan je na sl. 46.



Sl. 46. Zamjenjujući (a) i osnovni (b) sistem zida prema sl. 39.

Jednostavnosti radi opterećenje sistema pretpostavlja se jednoliko podijeljenim duž visine H zida.

Vrijednost sumarnog momenta savijanja u nekom proizvoljnom poprečnom presjeku zida data je obrascem (57). On se na oba unutarnja stupca zida dijeli srazmjerno njihovim momentima inercije.



Sl. 47. Unutarnje sile stupaca zida prema sl. 39.

Na sl. 47 naznačene su unutarnje sile nekog proizvoljnog poprečnog presjeka zida u smislu u kojem one – kao vanjske sile – djeluju sa gornjeg odsječenog dijela zida na donji. One se mogu izraziti kao funkcije hiperstatičkih veličina:

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= T_1 \\ N_2 &= T_2 - T_1, \quad M_2 = (0,5 \, wx^2 - T_1 l_1 - T_2 l_2 - T_3 l_3) \frac{l_2}{\Sigma I} \\ N_3 &= T_3 - T_2, \quad M_3 = (0,5 \, wx^2 - T_1 l_1 - T_2 l_2 - T_3 l_3) \frac{l_3}{\Sigma I} \\ N_4 &= -T_3. \end{aligned} \right\} \quad (102)$$

Analogno kao u prijašnjem primjeru za komplementarnu energiju sistema zid-podloga temelja dobiva se izraz

$$\begin{aligned} U = & \int_0^H \frac{1}{2E} \left\{ \frac{hb_1^3}{3 I_{p1}} T_1'^2 + \frac{hb_2^3}{12 I_{p2}} T_2'^2 + \frac{hb_3^3}{3 I_{p3}} T_3'^2 + \right. \\ & + \frac{T_1^2}{F_1'} + \frac{(T_2 - T_1)^2}{F_2} + \frac{(T_3 - T_2)^2}{F_3} + \frac{(-T_3)^2}{F_4'} + \\ & + \frac{1}{\Sigma I} (0,5 \, wx^2 - T_1 l_1 - T_2 l_2 - T_3 l_3)^2 \Big\} dx + \quad (103) \\ & + \frac{1}{2c} \left[\frac{T_{1H}^2}{F_{1B}} + \frac{(T_{3H} - T_{1H})^2}{F_{2,3B}} + \frac{T_{3H}^2}{F_{4B}} + \right. \\ & + \left. \frac{(\mathfrak{M}_H - T_{1H} l_1 - T_{2H} l_2 - T_{3H} l_3)^2}{2 I_B} \right]. \end{aligned}$$

Pri tome F_1' i F_4' označuju reducirane površine poprečnih presjeka vanjskih stupaca, a ΣI sumu vlastitih momenata inercije unutarnjih stupaca.

Na gornjem rubu zida sile smicanja moraju biti jednake nuli. Gornji rubni uvjeti dati su prema tome jednačbama (62). U smislu računa varijacija te se jednačbe mogu smatrati bitnim rubnim uvjetima.

Kako bi stroga formulacija zadaće dovela do sistema triju simultanih diferencijalnih jednačbi II reda, zadovoljit ćemo se aproksimativnim rješenjem.

Za tražene hiperstatičke veličine postavе se opet jednoparametarski izrazi (60).

Uvjetne jednačbe

$$\frac{\partial U}{\partial T_{kH}} = 0 \quad (k = 1, 2, 3) \quad (104)$$

Ritzova postupka dovode – slično kao u poglavlju 2.2 – do jednog sistema triju linearnih algebarskih jednačbi za iznalazjenje triju parametara T_{kH} .

Unutarnje sile iznalaze se onda prema jednačbama (102).

3.4. Proračun primjenom tablica

I zidovi s pendel-stupcima mogu se proračunati primjenom tablica datih u aneksu, ukoliko u obrascu za koeficijent αH krutosti zida uvrstimo vrijednost

$$\frac{3 I_p}{hb^3}$$

za krutost zamjenjujuće kontinualne veze stupaca po jedinici visine umjesto vrijednosti

$$\frac{12 I_p}{hb^3}$$

4. ANEKS
TABLICE ZA BRZO IZNALAZENJE
UNUTARNJIH SILA I UGIBA

TABLICA 1

Jednoliko podijeljeno opterećenje: $\mathcal{M}_H = \frac{1}{2} \omega H^2$, $\mathfrak{T}_H = \omega H$

λ -vrijednosti

x/H	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
λ	0,010	0,040	0,090	0,160	0,250	0,360	0,490	0,640	0,810	1,000

η -vrijednosti

$\frac{aH}{x/H}$	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	25
0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,1	0,023	0,044	0,047	0,044	0,039	0,034	0,027	0,023	0,017	0,014	0,013
0,2	0,046	0,088	0,097	0,092	0,084	0,076	0,065	0,057	0,048	0,045	0,043
0,3	0,068	0,135	0,153	0,149	0,140	0,132	0,117	0,109	0,099	0,095	0,093
0,4	0,091	0,183	0,214	0,216	0,210	0,202	0,188	0,179	0,169	0,165	0,163
0,5	0,113	0,233	0,279	0,291	0,290	0,286	0,276	0,269	0,259	0,255	0,253
0,6	0,134	0,281	0,347	0,373	0,382	0,384	0,381	0,376	0,369	0,365	0,363
0,7	0,152	0,326	0,414	0,457	0,478	0,490	0,498	0,500	0,497	0,495	0,493
0,8	0,165	0,365	0,474	0,535	0,571	0,595	0,621	0,633	0,642	0,643	0,643
0,9	0,177	0,392	0,519	0,595	0,646	0,682	0,729	0,756	0,789	0,801	0,807
1,0	0,181	0,403	0,537	0,621	0,679	0,722	0,781	0,820	0,876	0,905	0,923

η' -vrijednosti

$\frac{aH}{x/H}$	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	25
0,0	0,114	0,216	0,232	0,213	0,187	0,162	0,124	0,100	0,067	0,050	0,040
0,1	0,114	0,220	0,241	0,228	0,206	0,186	0,155	0,137	0,115	0,107	0,103
0,2	0,114	0,228	0,263	0,263	0,253	0,241	0,223	0,213	0,203	0,201	0,200
0,3	0,114	0,238	0,291	0,309	0,313	0,312	0,308	0,304	0,301	0,300	0,300
0,4	0,112	0,245	0,317	0,356	0,376	0,387	0,397	0,399	0,400	0,400	0,400
0,5	0,107	0,246	0,337	0,396	0,434	0,458	0,484	0,494	0,499	0,500	0,500
0,6	0,098	0,237	0,341	0,418	0,474	0,514	0,560	0,582	0,597	0,600	0,600
0,7	0,084	0,213	0,322	0,412	0,483	0,537	0,610	0,650	0,689	0,698	0,700
0,8	0,064	0,170	0,269	0,358	0,433	0,500	0,611	0,670	0,750	0,782	0,793
0,9	0,036	0,101	0,168	0,233	0,295	0,352	0,463	0,532	0,678	0,765	0,818
1,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

η'' -vrijednosti

aH	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	25
η''	0,277	0,597	0,761	0,845	0,891	0,920	0,951	0,967	0,984	0,991	0,994

TABLICA 2

Trapezno opterećenje ($\xi = 2$): $\mathfrak{M}_H = \frac{5}{12} w H^2$, $\mathfrak{I}_H = 0,75 w H$

λ -vrijednosti

x/H	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
λ	0,012	0,046	0,103	0,179	0,275	0,389	0,519	0,666	0,826	1,000

η -vrijednosti

$\frac{aH}{x/H}$	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	25
0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,1	0,024	0,046	0,050	0,047	0,042	0,038	0,030	0,026	0,020	0,017	0,015
0,2	0,048	0,093	0,104	0,100	0,092	0,084	0,072	0,065	0,055	0,052	0,050
0,3	0,072	0,143	0,163	0,161	0,153	0,144	0,130	0,122	0,112	0,108	0,106
0,4	0,096	0,193	0,227	0,231	0,226	0,219	0,206	0,198	0,188	0,184	0,182
0,5	0,119	0,245	0,295	0,310	0,310	0,307	0,298	0,292	0,283	0,279	0,278
0,6	0,140	0,295	0,365	0,393	0,403	0,407	0,406	0,406	0,396	0,393	0,391
0,7	0,159	0,341	0,433	0,477	0,501	0,513	0,523	0,526	0,525	0,523	0,522
0,8	0,174	0,380	0,487	0,555	0,592	0,616	0,643	0,656	0,666	0,668	0,667
0,9	0,184	0,407	0,537	0,614	0,665	0,701	0,746	0,774	0,806	0,817	0,822
1,0	0,188	0,418	0,554	0,638	0,696	0,739	0,796	0,833	0,886	0,913	0,930

η' -vrijednosti

$\frac{aH}{x/H}$	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	25
0,0	0,128	0,255	0,276	0,256	0,227	0,199	0,156	0,127	0,086	0,065	0,052
0,1	0,133	0,259	0,286	0,274	0,250	0,228	0,193	0,172	0,147	0,137	0,133
0,2	0,134	0,268	0,311	0,314	0,305	0,293	0,274	0,265	0,255	0,253	0,253
0,3	0,133	0,278	0,341	0,365	0,372	0,373	0,371	0,370	0,368	0,368	0,369
0,4	0,130	0,285	0,369	0,414	0,440	0,455	0,468	0,476	0,477	0,478	0,479
0,5	0,123	0,283	0,387	0,454	0,498	0,527	0,558	0,578	0,580	0,582	0,582
0,6	0,112	0,269	0,387	0,472	0,534	0,579	0,630	0,674	0,675	0,678	0,679
0,7	0,095	0,240	0,360	0,457	0,533	0,592	0,670	0,714	0,756	0,766	0,768
0,8	0,072	0,188	0,296	0,391	0,473	0,541	0,642	0,712	0,801	0,833	0,846
0,9	0,040	0,111	0,182	0,251	0,315	0,374	0,473	0,558	0,705	0,793	0,847
1,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

η'' -vrijednosti

$\frac{aH}{x/H}$	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	25
η''	0,278	0,599	0,763	0,847	0,893	0,921	0,952	0,968	0,985	0,991	0,994

TABLICA 3

Trokutno opterećenje: $\mathfrak{M}_H = \frac{1}{3} w H^2$, $\mathfrak{T}_H = \frac{1}{2} w H$

λ -vrijednosti

x/H	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
λ	0,015	0,056	0,122	0,203	0,313	0,432	0,564	0,704	0,851	1,000

η -vrijednosti

$\frac{aH}{x/H}$	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	25
0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,1	0,026	0,050	0,055	0,053	0,046	0,043	0,036	0,030	0,024	0,020	0,018
0,2	0,051	0,101	0,114	0,111	0,104	0,096	0,084	0,076	0,068	0,062	0,060
0,3	0,077	0,154	0,178	0,178	0,171	0,163	0,149	0,141	0,131	0,127	0,125
0,4	0,103	0,209	0,243	0,254	0,250	0,244	0,233	0,225	0,216	0,213	0,208
0,5	0,127	0,263	0,316	0,337	0,340	0,338	0,332	0,327	0,319	0,316	0,315
0,6	0,149	0,315	0,392	0,424	0,437	0,442	0,443	0,444	0,437	0,435	0,434
0,7	0,168	0,362	0,461	0,509	0,534	0,548	0,561	0,566	0,566	0,566	0,565
0,8	0,184	0,402	0,520	0,585	0,624	0,649	0,677	0,690	0,702	0,704	0,705
0,9	0,194	0,429	0,563	0,642	0,693	0,729	0,774	0,789	0,830	0,841	0,846
1,0	0,198	0,439	0,580	0,665	0,722	0,764	0,818	0,853	0,901	0,925	0,940

η' -vrijednosti

$\frac{aH}{x/H}$	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	25
0,0	0,171	0,331	0,364	0,343	0,308	0,273	0,218	0,180	0,124	0,095	0,077
0,1	0,172	0,337	0,377	0,365	0,339	0,312	0,270	0,244	0,211	0,199	0,193
0,2	0,172	0,348	0,408	0,416	0,408	0,396	0,378	0,367	0,358	0,357	0,357
0,3	0,171	0,359	0,443	0,477	0,490	0,495	0,498	0,500	0,503	0,505	0,507
0,4	0,165	0,365	0,473	0,533	0,567	0,589	0,611	0,624	0,631	0,635	0,637
0,5	0,156	0,357	0,487	0,571	0,627	0,666	0,706	0,731	0,741	0,745	0,747
0,6	0,141	0,335	0,457	0,583	0,655	0,708	0,771	0,821	0,829	0,835	0,837
0,7	0,118	0,293	0,436	0,548	0,636	0,703	0,792	0,814	0,890	0,903	0,906
0,8	0,088	0,227	0,351	0,458	0,548	0,622	0,733	0,807	0,902	0,937	0,950
0,9	0,049	0,131	0,211	0,286	0,355	0,417	0,524	0,609	0,760	0,850	0,905
1,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

η'' -vrijednosti

aH	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	25
η''	0,279	0,601	0,766	0,849	0,895	0,923	0,954	0,969	0,985	0,992	0,995

TABLICA 4

Koncentrirana sila pri vrhu: $\mathfrak{M}_H = PH$, $\mathfrak{T}_H = P$ λ -vrijednosti

x/H	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
λ	0,100	0,200	0,300	0,400	0,500	0,600	0,700	0,800	0,900	1,000

 η -vrijednosti

$\frac{aH}{x/H}$	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	25
0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,1	0,035	0,073	0,090	0,096	0,099	0,099	0,100	0,100	0,100	0,100	0,100
0,2	0,090	0,145	0,179	0,192	0,197	0,199	0,200	0,200	0,200	0,200	0,200
0,3	0,103	0,215	0,266	0,286	0,294	0,298	0,299	0,300	0,300	0,300	0,300
0,4	0,134	0,282	0,350	0,378	0,390	0,395	0,399	0,400	0,400	0,400	0,400
0,5	0,162	0,344	0,430	0,467	0,484	0,492	0,498	0,499	0,500	0,500	0,500
0,6	0,187	0,399	0,503	0,550	0,573	0,585	0,595	0,598	0,600	0,600	0,600
0,7	0,208	0,447	0,567	0,625	0,655	0,672	0,688	0,695	0,699	0,700	0,700
0,8	0,225	0,484	0,619	0,688	0,727	0,750	0,774	0,786	0,797	0,799	0,800
0,9	0,235	0,509	0,655	0,733	0,779	0,809	0,841	0,863	0,885	0,893	0,897
1,0	0,238	0,518	0,668	0,750	0,800	0,833	0,875	0,900	0,933	0,950	0,960

 η' -vrijednosti

$\frac{aH}{x/H}$	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	25
0,0	0,352	0,734	0,901	0,963	0,987	0,995	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000
0,1	0,349	0,729	0,896	0,960	0,985	0,994	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000
0,2	0,339	0,713	0,882	0,951	0,979	0,991	0,998	1,000	1,000	1,000	1,000
0,3	0,323	0,785	0,858	0,934	0,968	0,985	0,996	0,999	1,000	1,000	1,000
0,4	0,299	0,645	0,820	0,906	0,949	0,972	0,992	0,998	1,000	1,000	1,000
0,5	0,269	0,590	0,766	0,862	0,917	0,950	0,982	0,993	0,999	1,000	1,000
0,6	0,232	0,519	0,691	0,797	0,864	0,909	0,959	0,982	0,998	1,000	1,000
0,7	0,187	0,428	0,588	0,698	0,777	0,835	0,909	0,950	0,989	0,998	0,999
0,8	0,133	0,315	0,448	0,550	0,632	0,699	0,798	0,865	0,950	0,982	0,993
0,9	0,071	0,174	0,258	0,329	0,393	0,451	0,551	0,632	0,777	0,865	0,918
1,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

 η'' -vrijednosti

aH	1	2	3	4	5	6	8	10	15	20	25
η''	0,285	0,612	0,777	0,859	0,904	0,931	0,959	0,973	0,988	0,993	0,996

LITERATURA

- [1] *Rosman*: O statičkom djelovanju nosivih poprečnih zidova višekatnih zgrada. Građevinar, 8, Zagreb 1959.
- [2] *Rosman*: Beitrag zur statischen Berechnung waagrecht belasteter Querswände bei Hochbauten (II), Der Bauingenieur, 1, Berlin 1962.
- [3] *Rosman*: Proračunavanje zidova za horizontalno opterećenje, izdanje Zavoda za betonske konstrukcije, Zagreb 1962.
- [4] *Rosman*: O statičkom djelovanju nosivih poprečnih zidova višekatnih zgrada. Građevinar, 9, Zagreb 1962.
- [5] *Rosman*: Spannungsoptische Untersuchung einer waagrecht belasteten Querwand eines Hochbaues, Der Bauingenieur, 12, Berlin 1962.
- [6] *Rosman*: Beitrag zur Untersuchung des Zusammenwirkens von waagrecht belasteten Wänden und Stockwerkrahmen bei Hochbauten, Beton- und Stahlbetonbau, 2, Berlin 1963.
- [7] *Rosman*: An Approximate Method of Analysis of Walls of Multistory Buildings. Civil Engineering, 1, London 1964.
- [8] *Rosman*: Systeme aus durchbrochenen Wänden und Stockwerkrahmen, Die Bautechnik, 2, Berlin 1964.
- [9] *Rosman*: An Approximate Analysis of Shear Walls Subject to Lateral Loads. Journal of the American Concrete Institute, 6, Detroit 1964.
- [10] *Rosman*: Beitrag zur statischen Berechnung im Erdgeschoss aufgelöster Windscheiben bei Hochbauten, Der Bauingenieur, 5, Berlin 1965.
- [11] *Rosman*: Iznalaženje aproksimativnih vrijednosti komponenata stanja pomaka kod horizontalno opterećenih mnogostruko hiperstatičkih okvira, Građevinar, 4, Zagreb 1959.
- [12] *Rosman*: Zuschrift zu Csonka, Beitrag zur Berechnung waagrecht belasteter Stockwerkrahmen, Die Bautechnik, 3, Berlin 1963.
- [13] *Hsien-San Tsang*: Discussion of a paper of Riko Rosman, Journal of the American Concrete Institute, 12, Detroit 1964.
- [14] *Naumann and Walter*: Bericht zur statischen Berechnung waagrecht belasteter Querswände bei Hochbauten. Vergleichende Betrachtung zu den Berechnungsverfahren von Rosman, Beck und einer spannungsoptischen Modelluntersuchung. Der Bauingenieur, 8, Berlin 1961.
- [15] *Walch*: Spannungsoptische Untersuchung einer im Erdgeschoss aufgelösten Windscheibe, Der Bauingenieur, u štampi, Berlin.
- [16] *Segal, Semendjajev*: Pjatiznačnie matematičeskie tablici. Fizmatgiz, Moskva 1959.

Primljeno za publikaciju 16. ožujka 1965. u Odjelu za matematičke, fizičke i tehničke nauke Jugoslavenske akademije u Zagrebu.

RIKO ROSMAN

ANALYSIS OF SHEAR WALLS SUBJECT TO WIND AND EARTHQUAKE LOADS*

Walls of multistory structures frequently resist horizontal forces. They are usually weakened by one or two vertical bands of openings for doors or windows. Fig. 1, 2, 31, 38 and 39 show the elevations of such walls. Their elements are the piers and the connecting beams. The highest and the lowest connecting beams are referred to as end beams. The piers can be fixed in the same or in separate foundations, or in rigid basement floors. On the ground floor the walls are often resolved into two or three columns for easier traffic circulation. These columns can be vertical or inclined, fully-webbed or fork-shaped; they can be hinged with the foundations and rigidly fixed to the piers or hinged with the piers and rigidly fixed to the foundations. Fig. 3 through 5 show some typical examples of such walls.

This paper presents a method of analysis of walls for various loadings.

ASSUMPTIONS

The values h , b , l , F_1 , I_1 , F_2 , I_2 , h_p , I_p , and E are assumed to be constant throughout the whole height H . The upper end beam has one-half the cross section and one-half the moment of inertia of an interior connecting beam.

* The original title of this paper: *Zidovi oslabljeni nizovima otvora izloženi utjecajima potresa i vjetrova.*

With the wall as in Fig. 4c the relation $I_{1B} : I_{2B} = I_1 : I_2$ should be valid.

Walls weakened only by one band of openings are not necessarily symmetric. Walls containing two bands of openings are assumed to be symmetric.

The points of contraflexure are assumed to be at midspan of the connecting beams. Since the cross sections of the piers are much greater than the cross sections of the connecting beams, this assumption seems admissible unless exceedingly large differences in the rigidities of the adjacent piers exist.

The usual suppositions of structural theory concerning elasticity are assumed to be valid. The Navier hypothesis is valid for the cross sections of the piers, but not for the whole cross section of the wall.

The connecting beams have rectangular cross sections. In their longitudinal direction they are considered absolutely rigid.

FORMULATION OF THE PROBLEM

The system is statically highly indeterminate. The basic idea in this approach consists in the replacement of the connecting beams by a continuous connection (Fig. 7, 8). This connection has the same stiffness from story to story as a connecting beam. The continuous connection can be imagined as laminas of height dx and stiffness $I_p dx/h$, extending one after the other along the whole height H .

To obtain the base systems let the continuous connections be cut along their axes.

Along the intersected lines act shear forces T' related to the unit length. The integral shear force [Eq. (4)] is the statically redundant function. The integration is performed from the upper edge of the wall to the cross section considered.

Not only deformations due to bending moments but also contributions due to normal forces in the piers and shear forces in the connecting beams are taken into account. The neglect of the effect of the normal forces in the piers would give an entirely wrong conception of the state of stresses in the wall, particularly in the case of very high walls. The

influence of the shear forces in the connecting beams can taken into account by introducing the reduced moments of inertia of the connecting beams [Eq. (3)].

The behavior of the function T between its boundary values is governed by a differential equation. The coefficients of this differential equation depend only on the geometrical characteristics of the piers, the connecting beams, and on the loading of the structure. They do not depend on the manner the wall is connected on its lower end with other structural elements. The differential equation of the function T is therefore the same for all the types of walls considered.

In this paper the differential equation of the integral shear force is derived with the wall containing one band of openings using the forces method and alternatively using the minimal principle. Its final form is given with Eq. (14).

This is a linear differential equation of the second order with constant coefficients. The left-hand side of Eq. (14) describes the intrinsic properties of the wall, while the right-hand side represents the loading to which the system is subjected. In the case of a uniformly distributed load, the right-hand side member of the differential equation is a quadratic function.

The boundary conditions at the bottom of the walls are derived separately for the following cases:

1. When piers are fixed in the same foundation, in a rigid basement floor or in a very stiff end beam

Assuming that the supporting structure completely restrains the ends of the piers against a mutual rotation and translation we obtain Eq. (17).

2. When piers are fixed in separate foundations

The properties of the soil are denoted by the subgrade modulus c . The boundary condition is given by Eq. (19).

In the case where the soil is so stiff that the subgrade modulus can be set equal to infinity, the coefficients α_L^2 and ψ_L vanish and the boundary condition simplifies.

3. *When the stiffness of the lower end beam is much different from the stiffness of the upper end beam*

The displacements are to be calculated on the inclined legged frame with hinged bases (Fig. 10).

They depend only on the rigidity of the lower end beam and do not depend on the rigidities of the legs.

In the case of a rectangular frame instead of an inclined legged one the distance L should be replaced by 1.

4. *When the lower end beam has approximately the same stiffness as the upper end beam*

Fig. 16 shows the free-body diagrams. The vertical and horizontal reactions are determined by statics. Foundation displacements produce only a rotation of the wall as a rigid body, but have no influence on the state of stresses in the wall.

The boundary values T_H of the functions T at the bottom of the walls can be determined by the equilibrium conditions of vertical forces on the base systems. We obtain Eq. (23).

SOLUTION OF THE PROBLEM

The problem is to determine the function T which satisfies differential Equation (14) within the domain $0 \leq x \leq H$ and meets the boundary condition of Eq. (15) or (16) on the top and one of the boundary condition of Eq. (17), (19) or (23) on the bottom of the wall.

The general solution of the boundary value problem considered may be found by known mathematical procedures to be Eq. (28).

The integration constants C and D have to be determined from the boundary conditions. The integration constant D is independent of the bottom boundary condition. It is given by Eq. (34).

The constant C is evaluated by applying the corresponding boundary condition at the bottom of the wall. It is given by Eq. (35), (42), (44) or (46).

After the numerical value of the integration constants have been evaluated, the numerical values of the hyperstatic function can easily be carried out using tables of hyperbolic functions.

INTERNAL FORCES

The shear forces Q of the connecting beams can be read from the T -diagram as shown in Fig. 22. It is recommended that the T -curve should be plotted on a relatively large scale.

The bending moments of the connecting beams can be found by Eq. (50).

Since all piers must have the same deflection throughout the whole height H the total bending moment is divided among them proportionally to their moments of inertia. Therefore the bending moments of the piers can be found by Eq. (6). The M_1 and M_2 curves correspond to the substitute systems. They give average values of the actual bending moments in the piers. The additional bending moments can be approximated with good accuracy by Eq. (51).

After the numerical values of T_H , M_{1H} and M_{2H} have been found, the internal forces in the columns and foundations can easily be calculated by statics.

SUMMARY OF THE NUMERICAL PROCEDURE

1. Compute:
 - a) The cross sections and the moments of inertia of the piers and the reduced moments of inertia of the connecting beam.
 - b) The coefficients α^2 and ψ . In the case where the lower end beam can not be assumed as infinitely rigid calculate αL^2 and ψL .
 - c) The integration constant C .
2. Evaluate the equation for the hyperstatic function for about 10 cross sections, i.e., for $x = 0,1 H; 0,2 H; \dots 1,0 H$ and read the shear forces of the connecting beams from the T -diagram.
3. Compute:
 - a) The bending moments of the connecting beams.
 - b) The total bending moments.
 - c) The bending moments of the piers and the additional bending moments.

CONCLUSIONS

The shear forces of the connecting beams are the smallest with the walls as shown in Fig. 3.

The bending moments of the piers are negative throughout the whole height of the wall with exception of the wall shown in Fig. 5a, where they are positive in a small region at the bottom of the wall. The bending moments of the piers are the largest with the walls shown in Fig. 3 i. e. with the walls whose piers are completely fixed at their lower ends. They are smaller with the walls shown in Fig. 4 and are the smallest with the walls shown in Fig. 5. The bending moment is defined as positive, if it produces compression on the left side of the considered pier. In the upper part of the wall the internal forces are only slightly influenced by the manner in which the bottom of the wall is connected to the columns or the foundation.

NOTATION

- F_1, F_2 cross-sectional areas of piers 1 and 2, respectively
 F_{1B}, F_{2B} . . . plan cross-sectional areas of the footings of piers 1 and 2, respectively
 b clear span of the connecting beams
 E modulus of elasticity of concrete
 h distance between the center lines of the connecting beams
 h_p, h_R . . . height of a connecting beam and of the lower end beam, respectively
 H height of the piers
 $\bar{H}$ height of the wall including the height of the columns on the ground floor
 I_1, I_2 moments of inertia of piers 1 and 2, respectively
 I_{1B}, I_{2B} . . . moments of inertia of the footings of piers 1 and 2, respectively
 I_p, I_R reduced moment of inertia of a connecting beam
 l distance between the centroids of the cross sections of the piers
 L distance between the centroids of the columns on the ground floor, at the top of the footings

M	total bending moment at an arbitrary cross section of the wall
M_1, M_2	bending moment of piers 1 and 2 at an arbitrary cross section, respectively
$\Delta M_1, \Delta M_2$. .	additional moment of piers 1 and 2 at an arbitrary cross section, respectively
M_j	bending moment of the connecting beam at location $x_j = jh$, j being counted from the top of the wall
n	number of stories
P	concentrated lateral load, applied at the top of the wall
Q_j	shear force of the connecting beam at location $x_j = jh$, j being counted from the top of the wall
t	distance between the center line of the lower end beam and the top of the footing
T', T	shear force and integral shear force in the continuous connection at an arbitrary cross section of the wall, respectively
T_0, T_H	values of the integral shear force at the upper end the lower edge of the wall, i. e., at $x = 0$ and $x = H$
x	abscissa, measured from the top of the wall
Δ_T, Δ_w	mutual displacements of the cut ends of the continuous connection in the base system at an arbitrary cross section, due to T and P , respectively
Δ_{BT}, Δ_{Bw} . .	values of the displacements Δ_T and Δ_w at the bottom of the wall, i. e., for $x = 0$

Accepted for publication on March 16, 1965, in the Section for mathematical, physical and technical sciences, Yugoslav Academy in Zagreb.

HOMOTHETISCHE POLARE RÄUME

EINFÜHRUNG: Die durch zwei homothetische Flächen 2. Grades, also durch solche die den unendlich fernen Kegelschnitt gemeinsam haben, als Inzidenzflächen bestimmten polaren Räume nennen wir homothetische polare Räume. Die Durchdringungskurve dieser zwei Flächen zerfällt in den gemeinsamen unendlich fernen Kegelschnitt k'' und in einen endlichen Kegelschnitt k . Nimmt man diese zerfallene Raumkurve 4. Ordnung I. Art als Grundkurve eines Flächenbüschels 2. Grades an, dann ist durch dieses Büschel homothetischer Flächen 2. Grades ein Büschel homothetischer polarer Räume bestimmt, für die diese Flächen Inzidenzflächen sind.

Wie bekannt, sind jedem Polarraumbüschel vier Strahlenkomplexe zugeordnet, die durch dieses Büschel ebenfalls bestimmt sind. Es sind dies die folgenden: 1) Der tetraedrale quadratische Strahlenkomplex, den die Achsen der den Raumpunkten im Polarraumbüschel zugeordneten Polarebenenbüschel bilden [1]. 2) Der Majcensche kubische Strahlenkomplex, der durch diejenigen Geraden des Raumes gebildet ist, die die Inzidenzflächen des Polarraumbüschels unendlich fern berühren, resp. die das Inzidenzflächenbüschel des Polarraumbüschels in symmetrischen involutorischen Punktreihen schneiden [2]. 3) Der kubische Komplex der kürzesten Tangentialwege zwischen den Inzidenzflächen des Polarraumbüschels [3]. 4) Der Normalenkomplex der Normalen der Inzidenzflächen des Polarraumbüschels, der vom 8. Grade ist [4].

Jedem Punkt des Raumes ist je ein Strahl dieser vier Komplexe zugeordnet, aber in allen vier dieser Komplexen gilt die Umkehrung nicht. Diese vier durch einen homothetischen Polarraumbüschel bestimmten Strahlenkomplexe werden in dieser Arbeit näher betrachtet.

Die aus den verschiedenen Raumpunkten auf die diesen Punkten in einem Polarraum zugeordneten Polarebenen gefällten Normalen bilden, wie bekannt, den diesen Polarraum bestimmten quadratischen Achsenkomplex. Durch ein Polarraumbüschel sind im allgemeinen Fall ∞^1 derartige diesem Büschel zugeordnete Achsenkomplexe bestimmt, **die ein diesem Polarraumbüschel zugeordnetes Achsenkomplexbüschel bilden.** Alle Geraden des Raumes sind in diesem Achsenkomplexbüschel enthalten. In unserer Arbeit wird auch ein derartiges dem homothetischen Polarraumbüschel zugeordnetes Achsenkomplexbüschel betrachtet.

Es werden ferner einige spezielle homothetische Polarraumbüschel, so wie auch ein homothetisches Polarraumbündel behandelt. Es muss zunächst noch bemerkt werden, dass es drei Arten homothetischer Polarräume gibt. Jede dieser Arten hängt davon ab, ob der gemeinsame unendlich ferne Kegelschnitt reell oder imaginär ist, bzw. in zwei reelle oder imaginäre Geraden zerfallen ist. In einem homothetischen Polarraumbüschel sind also alle Inzidenzflächen entweder Hyperboloide, oder Ellipsoide (Kugeln), oder elliptische, resp. hyperbolische Paraboloiden.

A) DAS HOMOTHETISCHE POLARRAUMBÜSCHEL

1. *Der quadratische tetraedrale Strahlenkomplex des homothetischen Polarraumbüschels.* Es sei ein homothetisches Polarraumbüschel durch zwei homothetische Flächen φ_1, φ_2 2. Grades bestimmt, die sich in einem endlichen reellen Kegelschnitt k , und in einem unendlich fernen Kegelschnitt k^∞ schneiden. Die Mittelpunkte der Flächen φ_1, φ_2 seien mit O_1, O_2 bezeichnet. Der gemeinsame unendlich ferne Kegelschnitt k^∞ der Flächen φ_1, φ_2 kann auch als der gemeinsame Schnitt der unendlich fernen Ebene und der asymptotischen Berührungskegel der Flächen φ_1, φ_2 betrachtet werden. Diese asymptotischen Kegel 2. Grades sind, wie bekannt, die Inzidenzkegel der kollokalen korelativen Bündel mit den Scheiteln O_1, O_2 , die durch die Durchmesser und durch die ihnen in den Polarräumen der Inzidenzflächen φ_1, φ_2 , zugeordneten Mittelpunktsebenen gebildet sind. Jedem Durchmesser einer Fläche 2. Grades ist diejenige Durchmessersebene dieser Fläche konjugiert zugeordnet, welche die dem unendlich fernen Punkte dieses Durchmessers als Pol bezüglich des unendlich fernen Kegelschnittes dieser Fläche zugeordnete Polare enthält. Jede einer Durchmessergeraden bezüglich dieser Fläche

2. Grades konjugiert zugeordnete Gerade befindet sich in der unendlich fernen Ebene. Also die den auf einer Durchmessergeraden sich befindenden Polen zugeordneten Polarebenen bilden ein Büschel paralleler Ebenen.

Die Verbindungsgerade der Mittelpunkte O_1, O_2 sei mit o bezeichnet. Da diese Verbindungsgerade o die Mittelpunkte der Flächen φ_1, φ_2 enthält, befinden sich die dieser Geraden o bezüglich der Flächen φ_1, φ_2 konjugiert zugeordneten Geraden in der unendlich fernen Ebene. Da aber die homothetischen Flächen φ_1, φ_2 den unendlich fernen Kegelschnitt k^n gemein haben, werden die der Geraden o bezüglich der Flächen φ_1, φ_2 konjugiert zugeordneten Geraden in eine unendlich ferne Gerade o^n zusammenfallen. Die jeder Ebene der Geraden o als Polarebene bezüglich der Flächen φ_1, φ_2 zugeordneten Pole befinden sich auf der unendlich fernen Geraden o^n . Da aber die Flächen φ_1, φ_2 den gemeinsamen Kegelschnitt k^n haben, werden für jede Ebene der Geraden o die derselben zugeordneten Pole in einen Punkt der Geraden o^n zusammenfallen. Auf Grund dessen folgt also, dass in den polaren Räumen der Inzidenzflächen φ_1, φ_2 ein gemeinsames involutorisches Büschel konjugiert zugeordneter Ebenen existiert, dessen Achse die Verbindungsgerade o ist.

Wir bezeichnen unser homothetisches Polarraumbüschel mit (II_n) , während mit II_n das Inzidenzflächenbüschel 2. Grades dieses Polarraumbüschels (II_n) bezeichnet sei.

Da die Kegelschnitte k, k^n sich auf jeder der Inzidenzflächen unseres homothetischen Büschels II_n befindet, schneiden sich diese zwei Kegelschnitte in zwei unendlich fernen Punkten A_1^n, A_2^n , die, selbstverständlich, reell oder konjugiert imaginär sein können. Durch die Berührungsebenen der Kegelschnitte k, k^n in den Punkten A_1^n, A_2^n , bestimmten reellen oder konjugiert imaginären Ebenen, sind gemeinsame Berührungsebenen aller homothetischen Inzidenzflächen φ_n des Büschels II_n in den Punkten A_1^n, A_2^n . Dieses Paar reeller, oder konjugiert imaginärer Ebenen schneidet sich in einer reellen Geraden, die der Verbindungsgeraden $A_1^n A_2^n$ in allen polaren Räumen des homothetischen Büschels (II_n) konjugiert zugeordnet ist. Da die Verbindungsgerade $A_1^n A_2^n$ unendlich fern ist, muss die dieser Geraden konjugiert zugeordnete Gerade die Mittelpunkte aller Flächen φ_n des Büschels II_n enthalten, also auch diejenigen der Flächen φ_1, φ_2 . Es handelt sich hier also um die schon erwähnte Gerade o der Mittelpunkte O_1, O_2 . Die unendlich ferne Verbindungsgerade $A_1^n A_2^n$ ist daher identisch mit der

vorher erwähnten Geraden o^n . Man sieht also auch hier, dass alle homothetischen Flächen φ_n des Büschels Π_n ein gemeinsames involutorisches Büschel konjugierter Ebenenpaare der Achse o haben, und dass die Doppelebenen dieses involutorischen Ebenenbüschels alle Flächen φ_n des Büschels Π_n in ihren gemeinsamen unendlich fernen Punkten A_1^n, A_2^n berühren. Es ist auch hier offensichtlich, dass die Gerade o^n die Schnittgerade der Ebenen der Grundkegelschnitte k, k^n ist.

Man betrachte jetzt jenen dem homothetischen Polarraumbüschel (Π_n) zugeordneten Strahlenkomplex, der dem in einem gewöhnlichen Polarraumbüschel sich befindenden tetraedralen quadratischen Strahlenkomplex analog ist. Die Strahlen dieses Komplexes sind, wie bekannt, die Achsen derjenigen Polarebenenbüschel, deren Ebenen in den Polarräumen des Büschels (Π_n) je einem Punkt des Raumes als Polarebenen zugeordnet sind. Das allen Flächen des Büschels Π_n gemeinsame Polartetraeder ist, wie bekannt, das Haupttetraeder des erwähnten diesem Polarraumbüschel zugeordneten und durch ihn bestimmten quadratischen tetraedralen Strahlenkomplexes. In unserem homothetischen Fall des Polarraumbüschels (Π_n) besteht dieses Haupttetraeder immer aus zwei reellen Gegenkanten o, o^n , mit den reellen oder konjugiert imaginären Scheiteln A_1^n, A_2^n auf der Kante o^n , da die Geraden o, o^n konjugiert zugeordnet sind in allen polaren Räumen des Büschels (Π_n) . Die Scheitel auf der Geraden o sind die Doppelpunkte der involutorischen Punktreihe der Schnittpunktpaare dieser Geraden und der Flächen φ_n des Büschels Π_n . Der Schnittpunkt der Geraden o und der Ebene des endlichen Grundkegelschnittes k ist der Zentralpunkt dieser involutorischen Punktreihe, da diese Ebene der Kurve k und die unendlich ferne Ebene der Kurve k^n eine zerfallene Fläche φ_n des Büschels Π_n bilden.

Man wähle beliebig im Raum einen Punkt P und bezeichne die Ebene dieses Punktes und der Geraden o mit π . Der dieser Ebene π als der gemeinsamen Polarebene in allen polaren Räumen des Büschels (Π_n) zugeordnete Pol P^n befindet sich, auf Grund unserer bisherigen Betrachtungen, auf der unendlich fernen Geraden o^n . Der Punkt P^n enthält also die Polarebenen des Pols p in allen homothetischen polaren Räumen des Büschels (Π_n) . Die Ebene π schneidet das Büschel Π_n der homothetischen Flächen φ_n in einem Büschel homothetischer Kegelschnitte, mit einem reellen oder konjugiert imaginären Grundpunktpaar auf dem Kegelschnitt k und einem anderen auf dem Kegelschnitt k^n .

Die Polaren des Pols P in der Ebene π bezüglich aller homothetischen Kegelschnitte des erwähnten Schnittbüschels enthalten, wie bekannt, einen gemeinsamen Punkt P_1 . Offenbar enthalten alle Polarebenen des Pols P bezüglich der Inzidenzflächen φ_n den Punkt P_1 . Alle diese Polarebenen in dem Polarraumbüschel (II_n) bilden also ein Ebenenbüschel, dessen Achse die Verbindungsgerade p der Punkte P_1, P^n ist. Jeder Punkt P_n des Raumes liegt in einer Ebene π_n der Geraden o , deren gemeinsamer Pol P_n^n in allen polaren Räumen des Büschels (II_n) auf der unendlich fernem Geraden o^n liegt. Man sieht also, dass die allen Punkten P_n des Raumes zugeordneten Geraden p_n , die die Polarebenen dieses Punktes in allen polaren Räumen des homothetischen Büschels (II_n) enthalten, die unendlich ferne Gerade o^n schneidet. Alle derartigen den Raumpunkten zugeordneten Geraden p_n bilden also einen speziellen linearen singulären Komplex, dessen Leitgerade die unendlich ferne Gerade o^n ist (einen linearen konoidalen Strahlenkomplex).

Wählt man den Raumpunkt P_n in der Ebene des endlichen Grundkegelschnittes k , dann enthält die Polare p_n des Pols P_n bezüglich des Grundkegelschnittes k die Polarebenen dieses Pols in allen polaren Räumen des homothetischen Büschels (II_n) , da die Inzidenzflächen aller polaren Räume dieses Büschels die Kurve k enthalten. Jede Gerade p_n der Ebene des Kegelschnittes k ist also auf die beschriebene Weise einem Punkt P_n dieser Ebene zugeordnet. Offenbar gilt dasselbe auch für die unendlich ferne Ebene der Konik k^n . Es gilt demnach folgender Satz:

Der bekannte quadratische tetraedrale Strahlenkomplex eines Polarraumbüschels, den die Achsen der den Raumpunkten als Polen zugeordneten Polarebenenbüschel in diesem Polarraumbüschel bilden, zerfällt im Falle eines homothetischen Polarraumbüschels in den singulären linearen Strahlenkomplex der unendlich fernem Geraden o^n als Leitgeraden (linearer konoidaler Strahlenkomplex der Leitgeraden o^n), in dem sich auch die Strahlfelder der Ebenen der Grundkegelschnitte k und k^n befinden.

Es ist offensichtlich, dass die Grundkegelschnitte k und k^n auch imaginär sein können, und dass dadurch keine Änderung eintreten muss. Diesen konoidalen linearen Strahlenkomplex bezeichnen wir mit (TH) .

Die jedem Raumpunkt P_n auf diese Weise zugeordnete Gerade p_n liegt also mit der Ebene des Kegelschnittes k im Raum parallel. Da die Ebenen der Grundkegelschnitte k, k^n ebenfalls eine zerfallene Inzidenzfläche im Inzidenzflächenbüschel II_n sind, schneidet jede Gerade eines

Raumpunktes P in der Ebene (Pp) , die durch diesen Punkt und durch die diesem Punkt zugeordnete Gerade p im Komplex (TH) bestimmt ist, diese Gerade p und die Ebenen der Grundkegelschnitte k, k^n in Punkten P^1, Q, Q^n , die mit dem Punkt P einen harmonischen Punktquadrupel $(P P^1 Q Q^n) = -1$ bilden. Da sich aber der Punkt Q^n immer unendlich fern befindet, wird auf jeder derartigen Geraden p gelten: $PQ = QP^1$, resp. der Punkt P und der ihm zugeordnete Strahl p im Komplex (TH) sind immer von der Ebene des endlichen Grundkegelschnittes k gleich entfernt.

Ist das Büschel Π_n homothetischer Flächen φ_n 2. Grades durch zwei homothetische Hyperboloide gegeben und bestimmt, so wird der unendlich ferne Grundkegelschnitt k^n reell. Die asymptotischen Kegel dieser zwei Flächen, sowie auch diejenigen aller anderen Flächen φ_n des Büschels Π_n , sind in diesem Fall reelle homothetische Strahlenkegel 2. Grades. Der endliche Grundkegelschnitt k kann reell oder imaginär sein. Ist der Kegelschnitt k reell, dann können die unendlich fernen gemeinsamen Punkte A_1^n, A_2^n der Kegelschnitte k, k^n reell oder imaginär sein. Diese zwei unendlich fernen Punkte sind reell dann, wenn auf die asymptotischen Kegel der zwei gegebenen Hyperboloide zwei gemeinsame reelle Berührungsebenen gelegt werden können. Die parallelen Paare der Berührungserzeugenden dieser asymptotischen Kegel, in diesen Berührungsebenen, schneiden sich in den gemeinsamen unendlich fernen Punkten A_1^n, A_2^n der Grundkegelschnitte k und k^n . Alle diese Betrachtungen gelten selbstverständlich ohne Rücksicht darauf, ob die Kegelschnitte k, k^n oder ihre Schnittpunkte A_1^n, A_2^n reell oder konjugiert imaginär sind.

Ist ein Polarraumbüschel und der durch dieses bestimmte und ihm zugeordnete quadratische tetraedrale Strahlenkomplex gegeben, dessen Strahlen den Raumpunkten auf bekannte Weise zugeordnet sind, dann bilden, wie bekannt, die den Punkten einer Ebene τ zugeordneten Strahlen in diesem Strahlenkomplex eine Kongruenz 1. Ordnung 3. Klasse.¹ Die Strahlen dieser Kongruenz sind Bisekanten der durch die Pole der Ebene τ in den polaren Räumen dieses Polarraumbüschels gebildeten Raumkurve 3. Ordnung. Im Fall unseres homothetischen Polarraumbüschels, resp. in unserem konoidalen linearen (TH) Strahlenkomplex, liegen derartige Pole einer Ebene τ auf einer zerfallenen Raumkurve 3. Ordnung, die man auf folgende Weise bestimmen kann:

¹ Siehe [1] S. 27.

Der unendlich fernen Geraden a^n einer Ebene α sei bezüglich des unendlich fernen Kegelschnittes k^n in seiner Ebene der unendlich ferne Pol A_n zugeordnet. Die der Ebene α konjugiert zugeordneten Geraden in allen homothetischen polaren Räumen des Büschels (II_n) enthalten diesen unendlich fernen Pol A_n und die Mittelpunkte dieser homothetischen polaren Räume, da der Pol der Ebene des gemeinsamen Kegelschnittes k^n in jedem polaren Raume des homothetischen Büschels (II_n) sich im Mittelpunkt der Inzidenzfläche dieses polaren Raumes befindet. Der Pol der Ebene α , bezüglich jeder Fläche φ_n unseres Inzidenzflächenbüschels II_n , befindet sich, wie bekannt, auf der dieser Ebene konjugiert zugeordneten Geraden bezüglich der Fläche φ_n des Büschels II_n , die den Mittelpunkt auf der Geraden o enthält. Da diese der Ebene α konjugiert zugeordnete Geraden den unendlich fernen Pol A_n der Geraden a^n enthalten, also parallel sind, und in der Ebene (oA^n) liegen, müssen sich in dieser Ebene (oA^n) auch die Pole der Ebene α in allen homothetischen Polarräumen des Büschels (II_n) befinden.

Es schneide die Ebene (oA^n) die Ebene α in der Geraden a , und das Büschel II_n homothetischer Flächen φ_n in einem Büschel homothetischer Kegelschnitte. Da die erwähnten Pole der Ebene α in der Ebene (oA^n) liegen, müssen diese Pole mit den Polen der Schnittgeraden a bezüglich der Kegelschnitte des homothetischen Schnittkegelschnittbüschels in dieser Ebene identisch sein. Man weiss aber, dass die Pole einer Geraden, bezüglich der Kegelschnitte eines Kegelschnittbüschels, einen Kegelschnitt bilden, der mit s_a bezeichnet sei.

Wie schon erwähnt, schneiden alle den Raumpunkten zugeordneten Strahlen des (IH) Komplexes die unendlich ferne Leitgerade o^n , also schneiden diese Gerade o^n auch diejenigen Strahlen, die den Punkten der Ebene α zugeordnet sind. Es folgt daher, dass die Raumkurve 3. Ordnung der der Ebene α in den homothetischen polaren Räumen des Büschels (II_n) zugeordneten Pole in einen Kegelschnitt s_a in der Ebene (oA^n) und in die unendlich ferne Gerade o^n zerfällt.

Da alle den Punkten P_n einer Ebene der Geraden o zugeordneten Geraden p_n in dem konoidalen Strahlenkomplex (TH) einen Punkt der unendlich fernen Geraden o^n enthalten, bilden diejenigen Strahlen p^n dieses konoidalen Komplexes (TH) , die den Punkten der Geraden a in der Ebene (oA^n) zugeordnet sind, einen Zylinder, der den Kegelschnitt s_a in der Ebene (oA^n) enthält und jenen Scheitel auf der unendlich fernen Geraden o^n besitzt, der auf dieser Geraden der Ebene (oA^n) als gemeinsamer Pol in allen polaren Räumen des Büschels (II_n) zugeordnet

ist. Dieser Scheitel und der Punkt A_n bilden auf der Geraden o'' ein Paar zugeordneter Punkte in der gemeinsamen involutorischen Punktreihe konjugiert zugeordneter Punktepaare in allen homothetischen polaren Räumen des Büschels (II_n) .

Wie bekannt, sind die Geraden o , o'' in allen polaren Räumen des Büschels (II_n) konjugiert zugeordnet. Die Polarebenen jedes Punktes auf der Geraden o bezüglich der Inzidenzflächen φ_n unseres Polarraumbüschels (II_n) bilden das Büschel paralleler Ebenen, die die unendlich ferne Gerade o'' enthalten. Dem Schnittpunkt der Geraden a , o wird demnach in der Ebene (oA_n) ihr Schnittpunkt mit der Geraden o_n zugeordnet, der deswegen auf dem Kegelschnitt s_a in dieser Ebene liegen muss. Dieser Schnittpunkt ist also der erste unendlich ferne Punkt des Kegelschnittes s_a . Da aber die den Raumpunkten P^n in dem konoidalen Strahlenkomplex (TH) zugeordneten Geraden p^n von der Ebene des Grundkegelschnittes k die gleiche Entfernung wie die diesen Geraden p^n zugeordneten Punkte P^n haben, und auf der diesem Punkt P^n gegenüber liegenden Seite mit den betreffenden Geraden p^n parallel laufen, wird dem unendlich fernen Punkt der Geraden a in der Ebene (oA_n) ein ebenfalls unendlich ferner Punkt in dieser Ebene zugeordnet, der auch auf dem Kegelschnitt s_a liegt. Da der Kegelschnitt s_a zwei reelle unendlich ferne Punkte hat, ist er also eine Hyperbel. Einer dieser zwei Punkte liegt auf der Geraden o'' . Es gilt also folgender Satz:

Die den Punkten einer Ebene zugeordneten Polarebenen in den polaren Räumen eines homothetischen Polarraumbüschels bilden Ebenenbüschel, deren Achsen eine konoidale Strahlkongruenz 1. Ordnung 2. Klasse bilden, und deren Leitkurven eine Hyperbel und eine unendlich ferne Gerade sind, die einen gemeinsamen unendlich fernen Punkt haben.

Die analoge einer Ebene des Raumes zugeordnete bekannte Kongruenz der Bisekanten einer Raumkurve 3. Ordnung, im gewöhnlichen Fall eines Polarraumbüschels, zerfällt also in unserem homothetischen Fall in die beschriebene Kongruenz 1. Ordnung 2. Klasse, und in das Strahlenbündel paralleler Geraden, die den unendlich fernen Schnittpunkt der Leithyperbel und der Leitgeraden dieser Kongruenz enthalten.

Es sei nebst einem Büschel (II_n) homothetischer polarer Räume eine beliebig angenommene Gerade r gegeben. Da sich jeder Punkt P_r der Geraden r in einer anderen Ebene der Geraden o befindet, muss jeder diesen Punkten P_r zugeordnete Strahl p_r im Komplex (TH) einen ande-

ren Punkt der unendlich fernen Leitgeraden o^n enthalten. Man wähle nun in unserem homothetischen Polarraumbüschel (Π_n) zwei polare Räume (Π_1) und (Π_2) , und es seien r_1 und r_2 die der Geraden r in diesen polaren Räumen (Π_1) , (Π_2) konjugiert zugeordneten Geraden. Den Punkten der Punktreihe (r) auf der Geraden r sind in den polaren Räumen (Π_1) , (Π_2) Polarebenen zugeordnet, die der Punktreihe (r) projektiv zugeordnete Polarebenenbüschel $[r_1]$, $[r_2]$ bilden, und hier gilt, wie bekannt, $(r) \wedge [r_1]$, $(r) \wedge [r_2]$. Jedem Punkt P_r der Geraden r ist eine Ebene des Büschels $[r_1]$ und eine Ebene des Büschels $[r_2]$ zugeordnet, und die Schnittgerade p_r dieser zwei Ebenen ist, wie bekannt, der diesem Punkt P_r im konoidalen Komplex (TH) zugeordnete Strahl. Die den Punkten der Punktreihe (r) zugeordneten Strahlen sind also das Erzeugnis zweier projektiv zugeordneten Ebenenbüschel $[r_1] \wedge [r_2]$, und bilden daher eine Regelfläche 2. Grades. Auf dieser Regelfläche befindet sich aber auch die unendlich ferne Gerade o^n . Die zweite unendlich ferne Erzeugende dieser Regelfläche ist der Strahl p_∞ , der im (TH) Komplex dem unendlich fernen Punkt P_∞ der Punktreihe (r) zugeordnet ist. Die den Punkten jeder Geraden r im Raum, die kein Strahl des konoidalen Komplexes (TH) ist, zugeordneten Strahlen in diesem Komplex bilden ein hyperbolisches Paraboloid. Alle diese hyperbolischen Paraboloiden haben dieselbe Direktionsebene, deren Lage konjugiert der Geraden o in allen polaren Räumen des homothetischen Polarraumbüschels (Π_n) ist. Bei einem gewöhnlichen Polarraumbüschel erhält man, wie bekannt, auf diese Weise die Erzeugenden eines gewöhnlichen Hyperboloides.

Es sei die Gerade r ein Strahl $p^i (\equiv r)$ unseres konoidalen Strahlenkomplexes (TH) , dem im Raum der Punkt P^i zugeordnet ist. Die den Punkten P_r^i der Geraden p^i im (TH) Komplex zugeordneten Strahlen p_r^i müssen offensichtlich in allen polaren Räumen des homothetischen Büschels (Π_n) den gemeinsamen Punkt P^i haben, da diesen Punkt die Polarebenen aller Punkte P_r^i in allen polaren Räumen des Büschels (Π_n) enthalten. In einem nichthomothetischen Polarraumbüschel bilden derartige Strahlen p_r^i einen Kegel 2. Grades mit dem Scheitel P^i . Da in unserem homothetischen Fall diese Strahlen p_r^i auch die unendlich ferne Gerade o^n schneiden müssen, zerfällt dieser Strahlenkegel 2. Grades in die doppeltzählende Ebene $(P^i o^n)$, und seine Erzeugenden bilden das in dieser Ebene liegende Strahlenbüschel (P^i) . Alle diese Betrachtungen können in folgenden Satz zusammengefasst werden:

Die den Punkten einer beliebig im Raum angenommenen Geraden r zugeordneten Strahlen im konoidalen linearen (TH) Komplex eines homothetischen Polarraumbüschels (Π_n) bilden ein hyperbolisches Paraboloid, dessen eine unendlich ferne Erzeugende mit der unendlich fernen Geraden der Ebene des Grundkegelschnittes k des Inzidenzflächenbüschels Π_n zusammenfällt. Ist die gewählte Gerade r ein Strahl des dem Polarraumbüschel (Π_n) zugeordneten konoidalen linearen Strahlenkomplexes (TH) , dann zerfällt dieses hyperbolische Paraboloid in das Strahlenbüschel des dieser Geraden r zugeordneten Punktes als Scheitel in einer doppeltzählenden Ebene, die konjugiert ist zur Geraden o der Mittelpunkte der Inzidenzflächen φ_n des Büschels (Π_n) in allen polaren Räumen dieses Büschels.

Auf Grund dieses Satzes kann z. B. leicht der geometrische Ort (eine Fläche) derjenigen Raumpunkte gefunden werden, die denjenigen Strahlen des (TH) Komplexes zugeordnet sind, die eine beliebige Gerade r des Raumes schneiden, also eine hyperbolische lineare konoidale Strahlenkongruenz des (TH) Komplexes bilden. Jedem Punkte R^n der Geraden r ist ein Strahl p' im (TH) Komplex zugeordnet, und die den Punkten P^n der Geraden p' im (TH) Komplex zugeordneten Strahlen bilden, wie wir sahen, ein Strahlenbüschel (R^n) des Scheitels R^n in der Ebene $(R^n o^n)$. Da die den Punkten R^n zugeordneten Strahlen p' ein hyperbolisches Paraboloid bilden, sehen wir, dass die den Strahlen des (TH) Komplexes, die die erwähnte hyperbolische lineare Kongruenz bilden, zugeordneten Punkte ein hyperbolisches Paraboloid bilden.

Auf analoge Weise könnte man auch manche andere Probleme lösen, wie z. B.: Die denjenigen Strahlen des (TH) Komplexes zugeordneten Punkte, die einen Punkt enthalten, liegen auf dem diesem Punkt im (TH) Komplex zugeordneten Strahl. Oder: Die den in einer Ebene α liegenden Strahlen des (TH) Komplexes zugeordneten Punkte liegen auf einer Hyperbel, deren Ebene die Gerade o enthält, und in allen polaren Räumen des homothetischen Büschels (Π_n) der Ebene α konjugiert zugeordnet ist, usw.

2. Der dem Majcenschen kubischen Komplex eines gewöhnlichen Polarraumbüschels analoge Komplex in einem homothetischen Polarraumbüschel. Einen derartigen dem homothetischen Polarraumbüschel (Π_n) zugeordneten und durch ihn bestimmten Strahlenkomplex bezeichnen wir mit (MII) . Es ist in der Einführung schon erwähnt, dass dem Majcenschen kubischen Strahlenkomplex folgende Geraden des Raumes bilden: a) Diejenigen Geraden des Raumes, die die Inzidenz-

flächen eines Polarraumbüschels in einer symmetrischen involutorischen Punktreihe (mit einem unendlich fernem Doppelpunkt) schneiden. Auf Grund dessen folgt, dass diese Geraden die Inzidenzflächen unendlich fern berühren. *b)* Alle Geraden der einzelnen Raumpunkte, die parallel sind zu den diesen Punkten in dem quadratischen (TH) Komplex dieses Polarraumbüschels zugeordneten Strahlen, sind Strahlen des diesem Polarraumbüschel zugeordneten Majcenschen Komplexes.

Es ist leicht zu bemerken, dass es sich hier in beiden Fällen um dieselben Geraden des Raumes handelt. Der endliche Doppelpunkt der in *a)* erwähnten involutorischen Punktreihe, und der in *b)* dem Strahl zugeordnete Punkt sind ein und derselbe Punkt auf dem Strahle des Majcenschen Komplexes, welcher Zentralpunkt dieses Strahles heisst. Im Weiterem werden wir zunächst auf Grund der Definition *a)* den erwähnten (MH) Komplex unseres homothetischen Polarraumbüschels (Π_n) betrachten.

Die Ebenen der unendlich fernen Geraden o^n sind, wie bekannt, in allen polaren Räumen des homothetischen Polarraumbüschels (Π_n) der Geraden o konjugiert zugeordnet. Auf dieser Geraden o befinden sich, wie bekannt, die Mittelpunkte dieser polaren Räume. Jede dieser Ebenen schneidet die Inzidenzflächen (das Inzidenzflächenbüschel Π_n) des Polarraumbüschels in einem Büschel konzentrischer homothetischer Kegelschnitte. Man weiss aber, dass jede Gerade in der Ebene eines derartigen konzentrischen homothetischen Kegelschnittbüschels dieses Büschel in einer symmetrischen hyperbolischen involutorischen Punktreihe, also in einer hyperbolischen involutorischen Punktreihe mit einem unendlich fernen Doppelpunkt, schneidet. Alle Geraden des Raumes, die in den Ebenen der Geraden o^n liegen, resp. die diese Gerade schneiden, sind Strahlen des dem homothetischen Polarraumbüschel (Π_n) zugeordneten und durch ihn bestimmten (MH) Komplexes.

Da jede derartige Gerade in einer Ebene der Geraden o^n eine Fläche φ_n des homothetischen Inzidenzflächenbüschels Π_n berührt, u. zw. in dem endlichen Doppelpunkt der hyperbolischen involutorischen Schnittpunktreihe dieser Geraden mit dem erwähnten konzentrischen homothetischen Kegelschnittbüschel in dieser Ebene, sehen wir, dass der (MH) Komplex des Polarraumbüschels (Π_n) aus denjenigen Berührungsgeralen der Flächen φ_n des Inzidenzflächenbüschels Π_n zusammengesetzt ist, die im Raum mit der Ebene des endlichen Grundkegelschnittes h parallel liegen. Nimmt man, im Sinne der darstellenden Geometrie, diese Ebene des Grundkegelschnittes h als Bildebene an, dann kann ein Teil

des (MH) Komplexes des homothetischen Polarraumbüschels (II_n) auch auf folgende Weise definiert werden: Die Hauptgeraden der Berührungsebenen der Inzidenzflächen des homothetischen Polarraumbüschels (II_n) bezüglich der Ebene des Grundkegelschnittes k als Bildebene, die die Berührungspunkte dieser Berührungsebenen enthalten, sind Strahlen des diesem Polarraumbüschel (II_n) zugeordneten (MH) Komplexes.

Auf Grund der Definition $a)$ bilden den (MH) Komplex des Polarraumbüschels (II_n) auch diejenigen Geraden des Raumes, die die Inzidenzflächen φ_n des Büschels II_n unendlich fern berühren. Da jede Gerade des Raumes in den Doppelpunkten ihrer involutorischen Schnittpunktreihe mit einem Flächenbüschel 2. Grades je eine Fläche dieses Büschels berührt, ist offensichtlich, dass die Strahlen des (MH) Komplexes auch unendlich fern eine Fläche φ_n des Inzidenzflächenbüschels II_n berühren.

Dass es sich in der Definition $b)$ um dieselben Strahlen wie in der Definition $a)$ handelt, kann auf folgende Weise geschlossen werden: Einem Raumpunkt D sei im (TH) Komplex des homothetischen Polarraumbüschels (II_n) der Strahl d_t zugeordnet, und in diesem Raumpunkt D ziehe man die Parallele d_m zu der Geraden d_t . Da die Gerade d_m auch die unendlich ferne Gerade o^n schneidet, gehört sie auch als Strahl dem Komplex (TH) an. Wir sahen vorher in unseren Betrachtungen, dass die Ebene (oD) der Geraden d_t in allen polaren Räumen des homothetischen Büschels (II_n) konjugiert zugeordnet ist. Der Geraden d_m ($\parallel d_t$), als einem Strahl des (TH) Komplexes, ist also jener Punkt D_1 zugeordnet, der sich im Schnittpunkt der Geraden d_t und der Ebene (oD) befindet. Das heisst also, dass die dem Punkt D_1 in den homothetischen polaren Räumen (II_n) zugeordneten Polarebenen das durch die Achse d_m bestimmte Ebenenbüschel bilden, ebenso wie die derartig dem Punkt D auf dem Strahl d_m zugeordneten Polarebenen das Ebenenbüschel der Achse d_t bilden. Wird durch die Geraden d_t und o^n eine Ebene gelegt, dann schneidet sie, wie bekannt, die homothetischen Flächen φ_n des Inzidenzflächenbüschels II_n in einem konzentrischen homothetischen Kegelschnittbüschel, das den Strahl d_t in einer hyperbolischen symmetrischen involutorischen Punktreihe schneidet. Der endliche Doppelpunkt dieser involutorischen Punktreihe ist der Punkt D_1 , in dem also dieser Strahl einen Kegelschnitt dieses konzentrischen homothetischen Kegelschnittbüschels in dieser Ebene berührt, und demnach auch eine Fläche φ_n des Inzidenzflächenbüschels II_n . Der zweite

Doppelpunkt, resp. Berührungspunkt mit einer anderen Fläche q_n , befindet sich, wie bekannt, unendlich fern, also ist diese Gerade ein Strahl des erwähnten (MH) Komplexes, so wie er in $a)$ und $b)$ definiert wurde. Ganz das gleiche gilt auch für den Strahl d_n und den Punkt D_1 . Die Punkte D, D_1 sind Zentralpunkte der Strahlen d_n, d_1 im (MH) Komplex, und den Strahlen d_1, d_n zugeordnete Punkte im (TH) Komplex unseres homothetischen Polarraumbüschels. Die unendlich fernen Berührungspunkte dieser Strahlen befinden sich in ihren Schnittpunkten mit der Geraden o^n , da sie in diesen Schnittpunkten zwei unendlich nahe Punkte mit der in die Ebenen der Grundkegelschnitte k und k^n zerfallenen Fläche q_n gemein hat. Diese zwei Ebenen schneiden sich in der Geraden o^n , also hat die zerfallene Fläche q_n in deren Punkten lauter Doppelpunkte.

Auf Grund dieser Betrachtungen ist es klar, dass der lineare singuläre konoidale Strahlenkomplex (TH) unseres homothetischen Polarraumbüschels (II_n) mit der Leitgeraden o^n mit einem Teil des kubischen (MH) Komplexes dieses Polarraumbüschels identisch ist. Mit einem Teil sagen wir deswegen, weil ebenso wie der (TH) Komplex im allgemeinen Fall quadratisch ist, ist auch der (MH) Komplex in diesem Fall kubisch. In unserem homothetischen Fall sahen wir, dass der ganze quadratische tetraedrale Komplex in den singulären linearen Strahlenkomplex (TH) der Leitgeraden o^n ausgeartet ist, in dem sich auch die Strahlfelder der Grundkegelschnitte k und k^n befinden. Der unserem homothetischen Polarraumbüschel (II_n) zugeordnete kubische Majcensche Strahlenkomplex zerfiel also hier in den linearen singulären konoidalen Strahlenkomplex $(MH) \equiv (TH)$ als einen seiner Teile, und noch in einen quadratischen Teil, den wir in Weiteren finden werden.

Die Strahlen der Ebene des Grundkegelschnittes k können, ausser seinen Berührungsgeraden, keine Strahlen des zerfallenen Majcenschen kubischen Komplexes sein, da diese Strahlen keine Fläche q_n des homothetischen Inzidenzflächenbüschels II_n berühren, aber ganz auf der in die zwei Ebenen der Grundkegelschnitte k und k^n zerfallenen Fläche liegen. Wie bekannt, bilden den Majcenschen kubischen Strahlenkomplex diejenigen Geraden des Raumes, die unendlich fern die Inzidenzflächen der polaren Räume des diesem Strahlenkomplex zugeordneten Polarraumbüschels berühren. In unserem homothetischen Fall sind das diejenigen Geraden, die die Inzidenzflächen q_n des Büschels II_n in den Punkten des gemeinsamen unendlich fernen Grundkegelschnittes k^n berühren. Ein im Raum beliebig gewählter Punkt S sei der Scheitel eines

Kegels, der den unendlich fernen Kegelschnitt k^n enthält. Eine Berührungsebene dieses Kegels, die den Grundkegelschnitt k^n in einem ihrer Punkte T^n berührt, schneidet die Gerade o aller Mittelpunkte der homothetischen Flächen φ_n in dem Mittelpunkt O einer dieser Flächen, der der Scheitel des asymptotischen Kegels dieser Fläche ist. Diese Ebene τ berührt längs der Erzeugenden OT^n diesen asymptotischen Kegel ebenso, wie sie den ersten Strahlkegel des Scheitels S längs seiner Erzeugenden ST^n berührt. Die Erzeugende ST^n ist also eine Gerade des Raumes, die den Punkt S enthält und die Fläche φ_n des Mittelpunktes O in ihrem unendlich fernem Punkt T^n berührt. Was für die Erzeugende ST^n , resp. die Berührungsebene τ , gilt, gilt für jede Erzeugende des Kegels des Scheitels S und des unendlich fernen Kegelschnittes k^n , und was für den Raumpunkt S gilt, gilt selbstverständlich auch für alle anderen Raumpunkte, da wir den Raumpunkt S ganz beliebig im Raum gewählt haben. Da aber das Beschriebene für jeden Raumpunkt S gilt, sehen wir, dass die Berührungsgeraden aller homothetischen Inzidenzflächen φ_n des Büschels Π_n längs ihres gemeinsamen unendlich fernen Kegelschnittes k^n , den quadratischen Strahlenkomplex des unendlich fernen Leitkegelschnittes k^n bilden. Die Strahlen dieses Komplexes sind selbstverständlich nur dann reell, wenn der unendlich ferne Grundkegelschnitt k^n reell ist. Ist der Kegelschnitt k^n imaginär, dann besteht auch der ganze quadratische Teil des zerfallenen Majcenschen kubischen Strahlenkomplexes aus lauter imaginären Strahlen.

Die Strahlen dieses zerfallenen Teiles des unserem homothetischen Polarraumbüschel (Π_n) zugeordneten Majcenschen kubischen Komplexes haben keine endlichen Zentralpunkte, da sie nur eine Fläche des homothetischen Flächenbüschels Π_n in ihrem Punkt auf dem Kegelschnitt k^n berühren, und alle anderen Flächen dieses Büschels in diesem Punkt, und noch in einem weiteren endlichen Punkt, schneiden. Die Strahlen dieses zerfallenen quadratischen Komplexes haben demnach auch kein paralleles Paar, das ihm in dem zerfallenen quadratischen tetraedralen Komplex zugeordnet ist, wie es der Fall in einem derartigen Komplex eines gewöhnlichen nichthomothetischen Polarraumbüschel ist, wo dessen Inzidenzflächenbüschel eine nichtzerfallene Grundkurve 4. Ordnung I. Art hat.

In unserem bisherigen Betrachtungen haben wir gesehen, dass der einem Raumpunkt D im linearen konoidalen Strahlkomplex (TH) zugeordnete Strahl d_i ein in dem Strahlkomplex (MH) zugeordnetes Strahl-

paar d_m hat, für das $d_m \parallel d_t$ gilt, und das den Punkt D als seinen Zentralpunkt enthält. Da aber beide Strahlen d_m und d_t , wie gesehen, als Strahlen des Komplexes (MH) , auch Strahlen des Komplexes (TH) sind, hat der Strahl d_t im (TH) Komplex auch den ihm in diesem Komplex zugeordneten Zentralpunkt D_1 , der sich, wie vorher gesehen, in der Ebene (oD) befindet. Jedem Raumpunkt D ist mittels des linearen singulären konoidalen Komplexes $(TH) \equiv (MH)$ auf diese Weise ein Raumpunkt D_1 involutorisch eindeutig zugeordnet. Ebenso ist jedem Strahl d_t des Komplexes $(TH) \equiv (MH)$ ein Strahl d_m desselben Komplexes zugeordnet, und zwar so, dass der diesem Strahl d_m als dem Strahl e_t (also $d_m \equiv e_t$) zugeordnete Strahl e_m mit dem Strahl d_t zusammenfällt, also auch $d_t \equiv e_m$ gilt. Man sieht also, dass die Strahlen des singulären linearen konoidalen Komplexes $(TH) \equiv (MH)$ eines homothetischen Polarraumbüschels in Paaren eindeutig involutorisch zugeordnet sind, und ebenso auch die diesen Strahlen durch diesen Strahlenkomplex zugeordneten Zentralpunkte.

Eine derartige involutorische eindeutige Raumzuordnung durch die eine Raumtransformation bestimmt ist, besteht auch in einem gewöhnlichen nichthomothetischen Polarraumbüschel. In unserem homothetischen Fall besteht, selbstverständlich, auch eine, jedoch degenerierte Raumtransformation, die wir hier nicht betrachten werden. Auf Grund der Tatsache, dass die Punkte D, D_1 eines zugeordneten Punktepaares D, D_1 in einer Ebene der Geraden o liegen, folgt, dass die Verbindungsgeraden aller Punktepaare D, D_1 die Gerade o schneiden. Aus dieser Tatsache folgt weiterhin, dass alle diese Verbindungsgeraden den singulären linearen Strahlenkomplex der Leitgeraden o bilden. Auf jedem Strahl dieses linearen singulären Komplexes liegt ein involutorisch zugeordnetes Punktepaar, für das schon vorher bewiesen wurde, dass die Punkte dieses Paares von der Ebene des endlichen Grundkegelschnittes k gleich entfernt liegen.

Auf Grund der Tatsache, dass zu den Strahlen des betrachteten singulären Komplexes, ganz gleich ob wir ihn als (TH) oder (MH) Komplex betrachten, die zugeordneten Punkte sich in den diesen Strahlen in allen homothetischen Räumen des Polarraumbüschels (Π_a) konjugierten Ebenen befinden, kann sehr leicht folgendes bewiesen werden:

a) Die den Strahlen des $(TH) \equiv (MH)$ Komplexes, die in einer Ebene liegen und einen Punkt enthalten, durch diesen Komplex zugeordneten Punkte liegen auf einem Kegelschnitt, der diesen Punkt enthält und die Gerade o schneidet. Diese Ebene enthält offensichtlich die Gerade o^a .

b) Auf Grund derselben Tatsachen liegen die den in einer beliebigen Ebene liegenden Strahlen des $(TH) \equiv (MH)$ Komplexes (ein Büschel paralleler Strahlen) zugeordneten Punkte auf einer Geraden, die die Gerade o schneidet.

c) Die denjenigen Strahlen des $(TH) \equiv (MH)$ Komplexes zugeordneten Punkte, die parallel zu einer Ebene im Raum liegen (ein Bündel paralleler Geraden), liegen in einer Ebene der Geraden o , die diesen parallelen Strahlen in allen polaren Räumen des homothetischen Polarraumbüschels (II_n) konjugiert ist.

3. *Der dem Tangentialkurzwegekomplex eines Flächenbüschels 2. Grades analoge Komplex in einem homothetischen Flächenbüschel 2. Grades.* Es sei dieser Komplex mit (RH) bezeichnet. Durch die Ausführungen in einer unlängst veröffentlichten Arbeit ist bekannt, dass die einem Raumpunkt P zugeordnete Gerade p_r dieses (RH) Komplexes, eines allgemeinen nichthomothetischen Polarraumbüschels, den diesem Punkt P im (TH) Komplex dieses Polarraumbüschels zugeordneten Strahl p_t senkrecht schneidet. Offenbar schneidet dieser Strahl p_r auch den dem Punkt P im (MH) Komplex dieses Polarraumbüschels zugeordneten Strahl p_m senkrecht, da $p_t \parallel p_m$ ist. Die Ebene (Pp_r) des Punktes P und der ihm zugeordneten Geraden p_t berührt in diesem Punkt P eine Fläche φ_p des homothetischen Flächenbüschels II_n , da die Ebene (Pp_t) Polarebene des Pols P bezüglich der Fläche φ_p ist. Wie bekannt, berührt jede Gerade des Raumes zwei Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades. Die Berührungsgersten der Fläche φ_p im Punkt P berühren je noch eine Fläche des Flächenbüschels II_n in einem anderen Punkt, der sich auf dem diesem Punkt im (TH) Komplex zugeordneten Strahl p_t befindet. Diesen Strahl enthalten, wie bekannt, die Polarebenen des Pols P in allen polaren Räumen des Büschels (II_n) . Das aus dem Punkt P auf den Strahl p_t gefällte Lot ist, auf Grund des eben Erwähnten, offenbar derjenige dem Punkt P als Ausgangspunkt zugeordnete Tangentialweg, der innerhalb anderer Tangentialwege dieses Punktes, die ein Strahlenbüschel in der Berührungsebene (Pp_t) bilden, der kürzeste ist. In einem gewöhnlichen nichthomothetischen Polarraumbüschel, resp. in seinem Inzidenzflächenbüschel 2. Grades, ist dieser Tangentialkurzwegekomplex vom 3. Grade.² Wir wollen jetzt nachsehen, wie ein derartiger Tangentialkurzwegekomplex in unserem homothetischen Polarraumbüschel (II_n) , als der ihm zugeordnete und durch ihm bestimmte (RH) Komplex, aussieht.

² Siehe [3] S. 152.

Der einem Punkt P des Raumes zugeordnete Strahl d_m im (MH) Komplex unseres homothetischen Polarraumbüschels (Π_n) enthält diesen Punkt als seinen Zentralpunkt, und er ist die Berührungsgerade der diesen Punkt enthaltenden Inzidenzfläche φ des Büschels Π_n , die mit der Ebene des endlichen Grundkegelschnittes k parallel liegt. In der Berührungsebene dieser Fläche φ in diesem Punkt P ist die auf den Strahl p_m des (MH) Komplexes senkrecht gelegte Gerade, der diesem Punkt P in dem beschriebenen (RH) Komplex zugeordnete Strahl p_r . Von allen Berührungsgeraden der Fläche φ im Punkt P hat die Gerade p_r mit der Ebene des Grundkegelschnittes k den grössten Neigungswinkel, weil die Gerade p_m des Punktes P mit dieser Ebene im Raum parallel liegt. Man kann also den (RH) Komplex des homothetischen Polarraumbüschels (Π_n) auf folgende Weise definieren:

Alle diejenigen Berührungsgeraden der Inzidenzflächen eines homothetischen Polarraumbüschels, die im Raum mit der Ebene des endlichen Grundkegelschnittes dieses Inzidenzflächenbüschels den grössten Neigungswinkel haben, sind Strahlen des diesem homothetischen Polarraumbüschels zugeordneten und durch ihn bestimmten (RH) Komplexes.

Wird auch hier, im Sinne der darstellenden Geometrie, die Ebene des endlichen Grundkegelschnittes k als Bildebene angenommen, dann kann der (RH) Komplex als der geometrische Ort der die Berührungspunkte enthaltenden Fallinien der Berührungsebenen der Inzidenzflächen φ_n des Polarraumbüschels (Π_n) in allen ihren Punkten betrachtet werden.

Nun wollen wir den Grad dieses (RH) Komplexes bestimmen. Man wähle beliebig im Büschel Π_n der Inzidenzflächen φ_n eine Fläche φ_1 , und im Raum einen beliebigen Punkt T . Die Polarebene des Pols T bezüglich der Fläche φ_1 sei mit τ_1 bezeichnet, und die gemeinsame Gerade der Polarebenen des Pols T bezüglich aller Flächen φ_n des Büschels (also der dem Punkt T im (TH) Komplex zugeordnete Strahl) sei t_t . Offenbar ist die Gerade t_t die Schnittgerade der Ebene τ_1 und der Berührungsebene der den Punkt T enthaltenden Inzidenzfläche φ_n in diesem Punkt. Der Schnittkegelschnitt der Fläche φ_1 und der Ebene τ_1 sei mit c_1 bezeichnet. In den Punkten des Kegelschnittes c_1 wird die Fläche φ_1 von ihren den Punkt T enthaltenden Berührungsebenen berührt, und diese Ebenen hüllen, wie bekannt, einen Kegel 2. Grades des Scheitels T ein, den wir mit (Tc_1) bezeichnen werden. Wir sahen vorher, dass die Pole der Ebene τ_1 sich bezüglich aller Flächen φ_n des Inzidenzflächenbüschels Π_n in einer Ebene der Geraden o , also in der Ebene (oT) befinden, und dass sie eine Hyperbel v bilden, die die un-

endlich ferne Gerade o'' schneidet, und selbstverständlich den Punkt T enthält. Der jedem Punkt F des Kegelschnittes c_1 zugeordnete Strahl f_i im (TH) Komplex liegt in jener Berührungsebene des Kegels (Tc_1) , die den Kegelschnitt c_1 in diesem Punkt F berührt, weil sie in diesem Punkt auch die Fläche φ_1 berührt. Alle derartigen den Punkten F_n des Kegelschnittes c_1 zugeordneten Geraden f_i'' bilden eine Regelfläche 4. Grades, was wir auf folgende Weise beweisen können: Jeder Strahl f_i , der in der diesem Strahl zugeordneten Berührungsebene des Kegels (Tc_1) liegt, schneidet die Hyperbel v und die unendlich ferne Gerade o'' . Da der Scheitel T sich in jeder Berührungsebene des Kegels (Tc_1) befindet, und die Hyperbel v diesen Scheitel enthält, schneidet jede dieser Berührungsebenen die Hyperbel v nur noch in einem weiteren Punkt. Da jeder Punkt der Geraden o'' und jeder Punkt der Hyperbel v zwei Berührungsebenen des Kegels (Tc_1) enthält, wird auch jeder Punkt der Geraden o'' und jeder Punkt der Hyperbel v zwei Erzeugenden der gesuchten Regelfläche enthalten. Diese Regelfläche kann also als das Erzeugnis einer Punktreihe erster Ordnung und einer Punktreihe zweiter Ordnung, die zweizweideutig zugeordnet sind, betrachtet werden. Wenn die unendlich ferne Gerade o'' und die Hyperbel v keinen gemeinsamen Punkt hätten, dann wäre der Grad dieser Regelfläche $(2.2 + 1.2) = 6$. Da aber alle Berührungsebenen des Kegels (Tc_1) , die den Schnittpunkt der Hyperbel v und der Geraden o'' enthalten und in zwei Ebenen liegen, auch Erzeugenden der gesuchten Regelfläche I' sind, und wenn wir diese zwei Büschel paralleler Geraden ausser acht lassen, bleibt der Grad der gesuchten Regelfläche vier. Dieser Regelfläche gehört, wie gesehen, die Hyperbel v und die unendlich ferne Gerade o'' , als zerfallene Raumdoppelkurve 3. Ordnung an. Die Fusspunktcurve b dieser Regelfläche bezüglich des Punktes T ist eine Raumkurve 8. Ordnung, die in dem Punkt T einen Doppelpunkt hat, weil dieser Punkt sich auf der Doppellinie v dieser Regelfläche befindet. Der Bisekantenkegel (Tb) dieser räumlichen Fusspunktcurve, dessen Erzeugenden den Punkt T enthalten, ist vom 6-ten Grade, weil sich der Scheitel T auf der Doppellinie v der Regelfläche I' befindet. Zieht man durch die Punkte F_n des Kegelschnittes c_1 lotrechte Geraden auf die diesen Punkten zugeordneten Strahlen des (TH) Komplexes, die Erzeugende der Regelfläche I' sind, dann sind diese lotrechten Geraden die diesen Punkten zugeordnete Strahlen des (RH) Komplexes, die eine weitere Regelfläche I'' bilden. Wir haben also zwei jede Erzeugende der Regelfläche I' senkrecht schneidende und im Raum parallel

liegende Geraden. Eine dieser zwei Geraden ist Erzeugende des den aus den Bisekanten der Fusspunktkurve 8. Ordnung zusammengesetzten Kegels (Tb) 6. Grades, und die zweite ist eine Erzeugende der eben erwähnten Regelfläche T_t , die durch die den Punkten des Kegelschnittes c_1 zugeordneten Strahlen im (RH) Komplex gebildet ist. So viele derartige parallele Gerade, die die Erzeugenden der Regelfläche T senkrecht schneiden, in einem Strahl des (RH) Komplexes zusammenfallen, also mit einer Erzeugenden des Kegels (Tc_1) sich decken, in so vielen Strahlen (Erzeugenden) wird der Strahlenkegel (Tc_1) 2. Grades den Kegel der den Punkt T enthaltenden Strahlen des (RH) Komplexes durchdringen. Der Berührungskegel (Tb) des Scheitels T der Regelfläche T 4. Grades mit der Doppellinie (v, o^n), und der Berührungskegel der aus den den Punkten des Kegelschnittes c_1 zugeordneten Strahlen im (RH) Komplex zusammengesetzten Regelfläche T_t , mit demselben Scheitel T , sind mit dem Kegel (Tc_1) identisch, weil jedes Paar paralleler, auf die beschriebene Weise zugeordneter, Erzeugenden der Regelflächen T und T_t , in einer Berührungsebene des Kegels (Tc_1) liegen. Auf Grund dessen kann der Kegel (Tb), der 6. Grades ist und durch die Bisekanten der erwähnten Fusspunktkurve 8. Ordnung bestimmt ist, den Kegel (Tc_1), der 2. Grades ist, nicht in 12 gewöhnlichen Erzeugenden durchdringen, sondern nur in 6 dieser Erzeugenden berühren, da zwei Durchdringungserzeugende immer zusammenfallen. Es gibt also nur 6 Strahlen des (RH) Komplexes, die den Punkt T enthalten, und die den Punkten des Kegelschnittes c_1 zugeordnet sind, resp. auf dem Kegel (Tc_1) liegen. Der Kegel der den Punkt T enthaltenden Strahlen des (RH) Komplexes kann also den Kegel (Tc_1) 2. Grades nur in 6 Strahlen durchdringen. Nimmt man anstatt der Fläche φ_1 irgend eine andere Fläche φ_n des Inzidenzflächenbüschels H_n , so bekommt man offensichtlich wieder dasselbe. Jeder der Kegel (Tc_n), die alle 2. Grades sind, durchdringt also den Kegel der den Punkt T enthaltenden Strahlen des (RH) Komplexes in 6 Erzeugenden. Was für den Punkt T gilt, gilt selbstverständlich auch für alle andere Punkte des Raumes. Diejenigen Strahlen des (RH) Komplexes, die einen Raumpunkt enthalten, bilden also einen Kegel 3. Grades. Es folgt daher, dass der (RH) Komplex eines homothetischen Polarraumbüschels auch vom 3. Grade ist.

Dieser Grad ist also dem Grad eines derartigen Komplexes in einem gewöhnlichen nichthomothetischen Polarraumbüschel gleich,³ aber die

³ Siehe [3] S. 152.

betreffenden Komplexe unterscheiden sich durch mehrere Eigenschaften und Vereinfachungen.

Die mit den Strahlen und mit den diesen Strahlen zugeordneten Punkten verbundenen Eigenschaften des (RH) Komplexes können auf dieselbe Weise bestimmt werden, wie es in einem nichthomothetischen Polarraumbüschel getan wurde.⁴

4. *Der Normalenkomplex der Inzidenzflächen eines homothetischen Polarraumbüschels.* Wir bezeichnen diesen Normalenkomplex mit (NH) . In einem gewöhnlichen nichthomothetischen Polarraumbüschel ist dieser Strahlkomplex 8. Grades.⁵ Die Fusspunkte der Strahlen eines derartigen Strahlkomplexes 8. Grades, die im Raum parallel mit einer Ebene sind, liegen auf einer allgemeinen Fläche 3. Ordnung.⁶ Wegen dieser Tatsache bilden die Fusspunkte der in einer Ebene liegenden Strahlen dieses Strahlkomplexes eine Kurve 3. Ordnung. Bei den gewöhnlichen nichthomothetischen Polarraumbüschel wird diese Tatsache mittels derjenigen Fläche 3. Ordnung bestimmt, die durch die Berührungspunkte der Inzidenzflächen dieses Polarraumbüschels mit den mit einer Geraden parallelen Ebenen gebildet ist. In unserem Fall des homothetischen Polarraumbüschels (Π_n) , befindet sich jeder unendlich ferne Punkt in der Ebene des unendlich fernen Grundkegelschnittes k^n des Inzidenzflächenbüschels Π_n . Werden jetzt an die Flächen φ_n des Inzidenzflächenbüschels Π_n die einen unendlich fernen Punkt enthaltenden Berührungsebenen gelegt, also solche Berührungsebenen, die im Raum parallel mit einer Geraden sind, so liegen die Berührungspunkte derartiger Berührungsebenen auf einer Fläche 2. Grades, die den endlichen Grundkegelschnitt k enthält, da in diesem Fall die oben erwähnte Fläche 3. Ordnung in die unendlich ferne Ebene und eine Fläche 2. Grades zerfällt. Es folgt also, dass in unserem homothetischen Polarraumbüschel (Π_n) die Fusspunkte der in einer Ebene liegenden Strahlen des diesem Polarraumbüschel (Π_n) zugeordneten (NH) Komplexes auf einer Kurve 2. Grades liegen.

In der unendlich fernen Ebene des Grundkegelschnittes k^n sei eine Gerade m^n gegeben, durch die ein Büschel paralleler Ebenen bestimmt ist. Die diesen Ebenen α_n in dem Inzidenzflächenbüschel Π_n gemeinsame konjugiert zugeordnete Ebene β enthält die Gerade o , und ent-

⁴ Siehe [3] S. 159–163.

⁵ Siehe [4] S. 258.

⁶ Siehe [4] S. 256.

hält offenbar auch den unendlich fernen Pol M^n der Polare m^n bezüglich des unendlich fernen Kegelschnittes k^n . Wie bekannt, liegen in der Ebene β die Pole der Ebenen α_n in allen polaren Räumen des homothetischen Polarraumbüschels (II_n) . Jede dieser parallelen Ebenen α^n berührt einige Flächen φ_n des Inzidenzflächenbüschels II_n , und dem Erwähnten nach müssen diese Berührungspunkte in der Ebene β liegen. Diese Berührungspunkte in der Ebene β fallen also mit den Berührungspunkten der Schnittgeraden a^n der Ebene β und der Ebenen α_n mit den Kegelschnitten des Schnittkegelschnittbüschels der Ebene β mit den homothetischen Inzidenzflächen des Polarraumbüschels (II_n) , zusammen. Da die Ebene β das Flächenbüschel II_n in einem Kurvenbüschel 2. Grades schneidet, das zwei unendlich ferne Grundpunkte auf dem Grundkegelschnitt k^n hat, und da die parallelen Schnittgeraden a^n in der Ebene β einen Punkt der unendlich fernen Verbindungsgeraden dieser zwei Grundpunkte enthalten, liegen die Berührungspunkte der Geraden a^n und der Kurven des erwähnten Schnittkegelschnittbüschels in der Ebene β aus einer Kurve 2. Grades. Die Kurve 3. Ordnung der Berührungspunkte zerfällt also hier in die unendlich ferne Gerade und in eine Kurve 2. Grades. Die den Punkten dieser Kurve 2. Grades zugeordneten Normalen der Flächen φ_n des Inzidenzflächenbüschels II_n enthalten den Pol M_n der Geraden m^n bezüglich des absoluten Kegelschnittes in der unendlich fernen Ebene. Es ist klar, dass wir zuerst den Pol M_n beliebig wählen können, durch den dann die Polare m^n und der Pol M^n bestimmt wären. Auf Grund dieser Betrachtungen sieht man, dass die einen unendlich fernen Punkt enthaltenden Strahlen des (NH) Komplexes eines homothetischen Polarraumbüschels (II_n) , einen Zylinder 2. Grades bilden. In je einer Ebene γ des Raumes liegen ∞^1 derartige Strahlen des (NH) Komplexes, die eine Kurve folgender Art umhüllen: Die Fusspunkte der in der Ebene γ liegenden Strahlen des (NH) Komplexes liegen, wie wir sahen, auf einer Kurve 2. Grades, und jeden unendlich fernen Punkt dieser Ebene γ enthalten zwei Strahlen dieses Komplexes, die in dieser Ebene liegen. Man hat also das Erzeugnis einer linearen und einer konischen Punktreihe, die einseitig derartig zugeordnet sind, dass jedem Punkt der konischen Punktreihe ein Punkt der unendlich fernen Geraden, und einem unendlich fernem Punkt zwei Punkte der konischen Punktreihe zugeordnet sind. Die Klasse der erzeugten Einhüllenden muss also $(1 \cdot 2 + 2 \cdot 1) = 4$ sein. Die in einer Ebene des Raumes liegenden Strahlen des (NH) Komplexes hüllen also eine Kurve 4. Klasse um, und durch diese Tatsache ist auch bewiesen,

dass der Normalenkomplex der Inzidenzflächen φ_n eines homothetischen Polarraumbüschels (Π_n) 4. Klasse, also demnach auch 4. Grades ist.

Der Normalenkomplex der Inzidenzflächen eines gewöhnlichen nicht-homothetischen Polarraumbüschels ist, wie bekannt, vom 8. Grade. In unserem homothetischen Fall hat dieser Normalenkomplex den Grad 4 deswegen, weil eine Hälfte (k^n) der zerfallenen Grundkurve 4. Ordnung I. Art des Inzidenzflächenbüschels Π_n in der unendlich fernen Ebene des absoluten Kegelschnittes liegt. Also, der absolute Kegelschnitt befindet sich auf der in die Ebenen der Grundkegelschnitte k und k^n zerfallenen Inzidenzfläche des Büschels Π_n .

Auf die gleiche Weise, wie wir es bei dem gewöhnlichen nichthomothetischen Polarraumbüschel ausgeführt haben, können auch hier in unserem homothetischen Fall einige Eigenschaften des (NH) Komplexes ausgeführt und betrachtet werden. Z. B.: Jeder Strahl des (NH) Komplexes hat einen ihm zugeordneten Fusspunkt. Der geometrische Ort der Fusspunkte derjenigen Strahlen des (NH) Komplexes, die einen Punkt T im Raum enthalten und einen Kegel (T_n) 4. Grades bilden, liegen im gewöhnlichen nichthomothetischen Fall, wo dieser Kegel 8. Grades ist, auf einer Raumkurve 9. Ordnung. Da in unserem homothetischen Fall eine derartige Raumkurve jede Inzidenzfläche φ_n des Büschels Π_n in 6 Fusspunkten der den Punkt T enthaltenden Normalen dieser Fläche schneiden, und weiterhin auch in den 4 Fusspunkten der den Punkt T enthaltenden Normalen der Grundkegelschnitte k und k^n des Inzidenzflächenbüschels Π_n , muss die Ordnung dieser Kurve $1/2(6 + 4) = 5$ sein. Also, die Fusspunkte der einen Raumpunkt enthaltenden Strahlen des (NH) Komplexes eines homothetischen Polarraumbüschels, die einen Kegel 4. Grades bilden, liegen auf einer Raumkurve 5. Ordnung. Der Scheitel T ist ein gewöhnlicher Punkt dieser Raumkurve, und auf jeder Erzeugenden des Kegels (T_n) befindet sich, ausser dem Scheitel T , nur noch ein Punkt dieser Raumkurve.

Da sich auf jeder derartigen Raumkurve auch der ihr zugeordnete Punkt T befindet, sehen wir, dass diese Eigenschaft des (NH) Komplexes ganz mit seinem Grad zusammenpasst, weil die den Punkt T enthaltenden Bisekanten dieser Raumkurve einen Strahlenkegel 4. Grades bilden, und auf jeden Erzeugenden dieses Kegels sich, ausser dem Punkt T , nur noch ein Punkt dieser Raumkurve befindet.

Auf Grund dieser Tatsache, und der Tatsache dass die Fusspunkte der in einer Ebene liegenden Strahlen des (NH) Komplexes eine Kurve

2. Grades bilden, gilt auch folgendes: *Die den Punkten einer Ebene als Fusspunkten zugeordneten Strahlen des (NH) Komplexes bilden eine Kongruenz 5. Ordnung und 2. Klasse,*

Auf ähnliche Weise können auch weitere Eigenschaften des (NH) Komplexes, bezüglich seiner Strahlen und ihrer Fusspunkte, bestimmt und betrachtet werden.

5. *Die Achsenkomplexe der homothetischen Polarraumbüschel.* Die Fusspunkte der einem Punkt T zugeordneten Strahlen in den quadratischen Achsenkomplexen der polaren Räume eines Polarraumbüschels liegen auf einem Kreis, der den Punkt enthält und den diesen Punkt zugeordneten Strahl in dem bekannten tetraedralen (TK) Komplex dieses Polarraumbüschels senkrecht schneidet [5]. Dasselbe gilt offenbar auch in unserem homothetischen Polarraumbüschel, wo ein derartiger einem Punkt T zugeordneter Kreis den diesem Punkt zugeordneten Strahl t_t im (TH) Komplex dieses Polarraumbüschels senkrecht schneidet. Da aber jeder derartige Strahl t_t , wie bekannt, mit der Ebene des Grundkegelschnittes k parallel liegt, und von dieser Ebene auf der anderen Seite gleich entfernt ist wie der dieser Geraden zugeordnete Punkt T , so folgt, dass die Mittelpunkte aller derartigen Kreise in der Ebene des Grundkegelschnittes k liegen, und dass die Ebenen dieser Kreise auf dieser Ebene senkrecht stehen.

Auf Grund der Tatsache, dass die einer Ebene in allen polaren Räumen des homothetischen Polarraumbüschels (II_n) zugeordneten Pole in einer Ebene liegen und eine Hyperbel bilden, folgt, dass die Fusspunkte der den Punkten einer Ebene zugeordneten Strahlen, in den Achsenkomplexen der polaren Räume des Büschels (II_n) , in dieser Ebene eine Hyperbel bilden, und nicht eine Kurve 3. Ordnung, wie es im nichthomothetischen Fall ist. Diese Kurve zerfällt in unserem homothetischen Fall in die erwähnte Hyperbel und die unendlich ferne Gerade ihrer Ebene.

Jedem Punkt des Raumes, als dem Pol in dem Achsenkomplex jedes polaren Raumes, ist auch in unserem homothetischen Fall sein Strahl, der Fusspunkt dieses Strahles, die Polarebene, der reziproke Strahl, der Fusspunkt dieses Strahles, der reziproke Pol und die diesem Pol zugeordnete reziproke Polarebene zugeordnet. Diese einem Raumpunkt zugeordneten Elemente in den Achsenkomplexen der polaren Räume des homothetischen Polarraumbüschels (II_n) bilden den stetigen Punktreihen zugeordnete stetige eindimensionale Mengen von

Punkten, Geraden und Ebenen, also Kurven, Regelflächen und Torsen, die im gewöhnlichen nichthomothetischen Fall allgemein bestimmt und betrachtet wurden.⁷ In unserem homothetischen Fall können diese eindimensionalen geometrischen Örter auf die gleiche Weise wie im nichthomothetischen Fall bestimmt und betrachtet werden, nur wären hier die Resultate dieser Betrachtungen etwas verschieden von denjenigen im nichthomothetischen Fall, weil ihre Ordnungen, Klassen und Grade reduziert wären, und dadurch oft viel einfacher hergeleitet werden könnten, als es bei den gewöhnlichen nichthomothetischen Polarraumbüscheln der Fall ist. In dieser Arbeit haben wir nicht die Absicht, uns auch mit derartigen geometrischen Örtern des homothetischen Polarraumbüschels (Π_n) zu befassen.

6. Wenn ein homothetisches Polarraumbüschel (Π_n) so gegeben wäre, dass seine Inzidenzflächen φ_n eine gemeinsame Symmetrieebene haben, in der offenbar die Gerade o liegen müsste, oder wenn sie eine gemeinsame Achse haben, die mit der Geraden o identisch ist, und dadurch auch zwei gemeinsame Symmetrieebene haben, könnte man alle bisher ausgeführten Betrachtungen auch in diesen speziellen Fällen durchführen, aber mit sehr reduzierten und vereinfachten Resultaten. Offenbar wäre die Symmetrie die Haupteigenschaft aller gewonnenen Erzeugnisse.

B) DAS BÜNDEL HOMOTHETISCHER POLARER RÄUME

7. Es sei durch drei homothetische Flächen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ 2. Grades, von denen keine sich in dem durch die zwei anderen bestimmten Flächenbüschel befindet, ein Flächenbündel 2. Grades bestimmt und gegeben. Alle Flächen 2. Grades des durch die homothetischen Flächen φ_1, φ_2 gebildeten Flächenbüschels ($\varphi_1 \varphi_2$) sind zu diese zwei Flächen homothetisch, und jede Fläche eines durch die Fläche φ_3 und je eine Fläche des Büschels ($\varphi_1 \varphi_2$) bestimmten Flächenbüschels ist offenbar zu diesen drei Flächen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ homothetisch, da alle ∞^2 auf diese Weise bestimmten Flächen des durch die Flächen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ bestimmten Flächenbündels Π_n^2 einen gemeinsamen unendlich fernen Kegelschnitt k^n haben. Die durch die homothetischen Flächen des Bündels Π_n^2 als Inzidenzflächen bestimmten polaren Räume bilden ein homothetisches Polarraumbündel (Π_n^2). Alle Inzidenzflächen des Bündels Π_n^2 haben

⁷ Siehe [5] S. 244–254.

ausser dem unendlich fernem Kegelschnitt k^n noch zwei endliche reelle oder konjugiert imaginäre Punkte M, N gemeinsam, in denen der endliche gemeinsame Kegelschnitt der homothetischen Flächen φ_1, φ_2 die Fläche φ_3 schneidet. Die zwei weiteren Schnittpunkte befinden sich auf dem unendlich fernem gemeinsamen Kegelschnitt k^n . Also, anstatt durch die bekannten 8 assoziierten Punkte ist in unserem Fall das homothetische Inzidenzflächenbündel Π_n^2 durch zwei endliche Punkte M, N und durch den erwähnten unendlich fernem Kegelschnitt k^n bestimmt. Das Punktepaar M, N und der Grundkegelschnitt k^n können offenbar auch imaginär sein, und der unendlich ferne Grundkegelschnitt k^n kann auch in zwei reelle oder konjugiert imaginäre Geraden zerfallen.

Die Mittelpunkte der homothetischen Inzidenzflächen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ seien mit O_1, O_2, O_3 bezeichnet. Die Mittelpunkte aller Inzidenzflächen des homothetischen Polarraumbündels (Π_n^2) liegen offenbar in der Ebene σ dieser drei Mittelpunkte O_1, O_2, O_3 , da die Mittelpunkte O_n des vorher erwähnten Inzidenzflächenbüschels $(\varphi_1 \varphi_2)$ auf der Verbindungsgeraden $O_1 O_2$ liegen, und die Mittelpunkte aller anderen Inzidenzflächen des Bündels Π_n^2 auf den Verbindungsgeraden des Mittelpunktes O_3 und der auf der Verbindungsgeraden $O_1 O_2$ befindlichen Mittelpunkte liegen. Man sieht also, dass die Ebene $\sigma \equiv (O_1 O_2 O_3)$ eine gemeinsame Diametralebene aller Inzidenzflächen des homothetischen Polarraumbündels (Π_n^2) ist, die das Flächenbündel Π_n^2 bilden. Die dieser Ebene σ , in allen polaren Räumen des homothetischen Bündels (Π_n^2) konjugiert zugeordneten Geraden sind im Raum parallel, da alle diese Geraden den unendlich fernem Pol S^n der unendlich fernen Geraden s^n der Ebene σ , bezüglich des unendlich fernen Kegelschnittes k^n , enthalten. Dies gilt, selbstverständlich, auch für jede Ebene des Raumes und für die mit dieser Ebene parallelen Ebenen. Die Ebene der endlichen Durchdringungskurve 2. Grades zweier homothetischer Flächen 2. Grades ist, wie wir sahen, immer der Verbindungsgeraden der Mittelpunkte dieser zwei Flächen, bezüglich dieser zwei Flächen, konjugiert zugeordnet. Dies gilt selbstverständlich auch für die homothetischen Flächenpaare $\varphi_1 \varphi_2$ und $\varphi_1 \varphi_3$, die sich in endlichen Kegelschnitten k_{12} und k_{13} durchdringen, und die, wie wir sahen, die Grundpunkte M, N des Flächenbündels Π_n^2 enthalten. Es folgt also, dass die Verbindungsgerade der Punkte M, N , als Schnittgerade der Ebenen der Kegelschnitte k_{12} und k_{13} , zu der Ebene σ konjugiert zugeordnet ist. Die Flächen des durch die Flächen φ_1, φ_2 bestimmten Flächenbüschels

2. Grades, resp. des Flächenbüschels mit dem endlichen Grundkegelschnitt k_{12} , durchdringen die zu ihnen homothetische Fläche φ_3 in endlichen Kegelschnitten k_3^i , die alle die Punkte M, N enthalten. Durch jeden Kegelschnitt k_3^i ist, wie schon erwähnt, ein Büschel der Inzidenzflächen des Polarraumbündels (II_n^2) bestimmt. Durch jede Berührungsgerade der Fläche φ_3 im Punkt M , resp. N , ist einer dieser Kegelschnitte k_3^i bestimmt, da durch diese Berührungsgerechten die Ebene dieses Kegelschnittes k_3^i , der die Punkte M, N enthält, bestimmt ist. Jede Ebene α des Punktes M , resp. N , schneidet die Berührungsebene der Fläche φ_3 im Punkt M , resp. N , in einer Berührungsgerechten dieser Fläche, durch die eines der vorher erwähnten Flächenbüschel der Inzidenzflächen des Bündels II_n^2 bestimmt ist, und durch diese Ebene α ist weiterhin in diesem Büschel eine Fläche, resp. in dem Polarraumbündel (II_n^2) ein polarer Raum dieser Inzidenzfläche, bestimmt. Durch jede Ebene des Punktes M , resp. N , ist also in unserem homothetischen Polarraumbündel (II_n^2) ein polarer Raum bestimmt.

Es ist bei einem gewöhnlichen nichthomothetischen Polarraumbündel bekannt, dass die einem Raumpunkt P in allen polaren Räumen dieses Bündels zugeordneten Polarebenen einen gemeinsamen Punkt P_1 haben.⁸ Alle derartigen ∞^3 Raumpunktpaare P, P_1 sind mittels dieses Polarraumbündels involutorisch eineindeutig zugeordnet, und die Verbindungsgeraden dieser Punktpaare bilden einen kubischen Strahlkomplex. Durch diese eincindeutige involutorische Zuordnung ist auch eine kubische Raumtransformation bestimmt.⁹

In einem Büschel homothetischer polarer Räume, dessen Inzidenzflächen den gemeinsamen endlichen Grundkegelschnitt k haben, hat man gesehen, dass die einem Raumpunkt P in dem (TH) Komplex dieses Polarraumbündels zugeordnete Gerade p_l mit der Ebene des Kegelschnittes k parallel ist, und auf der dem Punkt P gegenüber liegenden Seite dieser Ebene gleich so wie dieser Punkt entfernt ist. Dies gilt offenbar für jeden Raumpunkt in allen Polarraumbündeln (II_n) des Polarraumbündels (II_n^2) , also auch für diejenigen, die durch die Grundkegelschnitte k_3^i auf der Fläche φ_3 bestimmt sind. Da die Polarebenen eines Raumpunktes P in allen polaren Räumen des homothetischen Bündels (II_n^2) einen Punkt P_1 enthalten, müssen also auch die dem Punkt P zugeordneten Strahlen p_l in den (TH) Komplexen der homothetischen Polarraumbündel deren die Kegelschnitte k_3^i enthaltenden Inzidenz-

⁸ Siehe [1] S. 136.

⁹ Siehe [1] S. 137.

flächen diesen Punkt P_1 enthalten. Der jedem Raumpunkt P derartig zugeordnete Punkt P_1 befindet sich also gleich weit wie der Punkt P auf der anderen Seite der Ebene eines jeden der Kegelschnitte k_3^i . Die Punkte P, P_1 befinden sich daher in einer Ebene der Verbindungsgeraden MN und sind von dieser Geraden gleich entfernt. Die Verbindungsgeraden aller Punktepaare P, P_1 in unserem homothetischen Fall eines Polarraumbündels schneiden also die Verbindungsgerade der Grundpunkte M, N . Es gilt daher folgender Satz:

Die Verbindungsgeraden der durch ein homothetisches Polarraumbündel bestimmten ∞^3 eindeutige involutorisch zugeordneten Punktepaare bilden einen singulären linearen Komplex, dessen Leitgerade die Verbindungsgerade der zwei endlichen Grundpunkte dieses Polarraumbündels ist.

Da die den Punkten der Ebene σ zugeordneten Polarebenen in allen polaren Räumen des Polarraumbündels (II_n^2) den vorher erwähnten unendlich fernen Punkt S^n enthalten, ist dieser Punkt S^n in der beschriebenen involutorischen Raumzuordnung allen Punkten der Ebene σ zugeordnet.

Dass die Verbindungsgeraden der zugeordneten Raumpunkte P, P_1 die Verbindungsgerade MN schneiden müssen, kann auch auf folgende Weise erkannt werden: Jeder Punkt P des Raumes befindet sich in der Ebene eines Grundkegelschnittes k_3^i . Die diesem Punkt P zugeordneten Polarebenen in den polaren Räumen des durch den in dieser Ebene liegenden Kegelschnitt k_3^i bestimmten Polarraumbüschels, enthalten die Polare p_t des Pols P bezüglich des Kegelschnittes k_3^i in dieser Ebene. Da auf dieser Geraden p_t der dem Punkt P zugeordnete Punkt P_1 liegt, und diese Gerade p_t in der Ebene des Kegelschnittes k_3^i , die den Punkt P enthält, sich befindet, liegen also beide diese Punkte in dieser Ebene der Geraden MN . Da ferner alle Kegelschnitte k_3^i die Punkte M, N enthalten, schneiden die Verbindungsgeraden aller derartigen Punktepaare P, P_1 die Verbindungsgerade MN .

Wie bekannt, schneiden sich die einem Punkt P des Raumes in drei polaren Räumen des Polarraumbündels (II_n^2) zugeordneten Polarebenen in demjenigen Punkt P_1 des Raumes, der die Polarebenen des Pols P auch in allen anderen polaren Räumen des Polarraumbündels (II_n^2) enthält. Es sei im Raum eine Gerade m gegeben. Die den Punkten M^n dieser Geraden zugeordneten Polarebenen bezüglich der Inzidenzflächen φ_1, φ_2 schneiden sich in Geraden m^n , die, wie wir in der Abt. 1. dieser Arbeit sahen, ein System von Erzeugenden eines hyperbolischen

Paraboloides bilden. Die Polarebenen der Punkte M^a auf der Geraden m bilden im Polarraum der Inzidenzfläche φ_3 , wie bekannt, ein Ebenenbüschel, für welches die Achse m_3 die der Geraden m in dem polaren Raum der Inzidenzfläche φ_3 konjugiert zugeordnete Gerade ist. Dieses Ebenenbüschel $[m_3]$ und das eben erwähnte Erzeugendensystem des hyperbolischen Paraboloides sind projektiv der Punktreihe M^a auf der Geraden m zugeordnet, und dadurch sind sie offenbar auch untereinander projektiv zugeordnet. Das Erzeugnis dieses dem Ebenenbüschel $[m_3]$ projektiv zugeordneten Erzeugendensystems ist, wie bekannt, eine Raumkurve 3. Ordnung, die mit l^3 bezeichnet sei. Da eine Erzeugende des erwähnten Erzeugendensystems immer unendlich fern liegt, so muss auf dieser unendlich fernen Erzeugenden auch der immer reelle Punkt der Raumkurve l^3 liegen. Dieser unendlich ferne Punkt ist der schon bekannte Punkt S^a , da er dem Schnittpunkt der Geraden m und der Ebene σ , in unserer vorher erwähnten involutorischen Raumzuordnung in allen polaren Räumen des Polarraumbündels (II_n^2) zugeordnet ist. Da die Gerade m beliebig im Raum angenommen wurde, gilt folgender Satz:

Durch die Punktepaare P, P_1 der in einem Polarraumbündel (II_n^2) homothetischer polarer Räume bestimmten involutorischen Raumzuordnung ist eine kubische Raumtransformation gegeben. Die jeder Geraden des Raumes in dieser Raumtransformation zugeordnete Raumkurve 3. Ordnung enthält den unendlich fernen Pol S^a der gemeinsamen Diametralebene der Inzidenzflächen in allen polaren Räumen dieses homothetischen Polarraumbündels.

Offenbar enthält auch die jeder Ebene des Raumes in dieser Raumtransformation zugeordnete Fläche 3. Ordnung diesen unendlich fernen Punkt S^a .

Man betrachte jetzt eine Ebene α und alle ∞^2 in dieser Ebene liegenden Geraden. Alle ∞^2 diesen Geraden zugeordneten Raumkurven l^3 3. Ordnung befinden sich selbstverständlich auf der dieser Ebene zugeordneten Fläche 3. Ordnung, und alle enthalten den vorher erwähnten unendlich fernen Punkt S^a . Man betrachte eine Gerade n , die den unendlich fernen Punkt S^a enthält, also im Raum $n \parallel MN$ liegt. Auf dieser Geraden n befindet sich nur ein endlicher Punkt der erwähnten Fläche 3. Ordnung, und zwar derjenige, der dem Schnittpunkt der Ebene α und derjenigen Geraden $n_1 \parallel MN$ zugeordnet ist, die in der Ebene (nMN) liegt, und so wie die Gerade n , aber auf der anderen Seite der Geraden MN , von dieser gleich entfernt ist. Es folgt also, dass

die einer Ebene α im Raum zugeordnete Fläche 3. Ordnung im unendlich fernem Punkt S^n einen Doppelpunkt hat. Da die Ebene α irgendwelche Ebene des Raumes sein kann, gilt auch dieser Satz:

Die allen Ebenen des Raumes in der durch ein homothetisches Polarraumbündel bestimmten kubischen Raumtransformation zugeordneten Flächen 3. Ordnung haben einen gemeinsamen unendlich fernen Doppelpunkt, der der Pol der gemeinsamen Diametralebene der Inzidenzflächen in allen polaren Räumen dieses Polarraumbündels ist.

LITERATUR

- [1] Th. Reye: Die Geometrie der Lage, Abt. III (1910), S. 1–32.
- [2] U. Niže: Ergänzende Beiträge zum Majcenschen kubischen Strahlenkomplex, Rad Jug. akad., knj. 325 (1962), S. 107–125.
- [3] U. Niže: Über die kürzesten Tangentialwege zwischen den Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades, Rad Jug. akad., knj. 331 (1965), S. 145–172.
- [4] U. Niže: Normalenkomplex der Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades, GLASNIK mat. fiz. i astr. T. 18 (1963), No. 4, S. 255–268.
- [5] U. Niže: Die Achsenkomplexe der in einem Büschel sich befindenden Polarräume, GLASNIK mat. fiz. i astr. T. 19, (1964), No. 3–4, S. 244.

*Institut für Mathematik der Universität
in Zagreb*

Angenommen zur Veröffentlichung am 15. II. 1966. in der Abteilung für mathematische, physikalische und technische Wissenschaften der Jugoslawischen Akademie in Zagreb.

HOMOTETIČNI POLARNI PROSTORI

Uvod: Dvjestima homotetičnim ploham 2. stupnja određen je pramen takvih ploha, kojemu se temeljna prostorna krivulja 4. reda I vrste raspala u jednu konačnu i jednu neizmjereno daleku koniku. Uzmemo li svaku plohu takva pramena kao incidentnu plohu jednog polarnog prostora, tada je tim pramenom homotetičnih incidentnih ploha zadan homotetični pramen polarnih prostora.

Poznato je da je svakom pramenu polarnih prostora pridružen i njime određen a) tetraedralni kvadratni kompleks osi pramenova polarnih ravnina pridruženih tačkama prostora kao polovima, b) Majcenov kubični kompleks pravaca, koji neizmjereno daleko diraju incidentne plohe pramena polarnih prostora, c) kubični kompleks najkraćih dirnih putova između incidentnih ploha takvog pramena i d) kompleks normala incidentnih ploha tog pramena, koji je 8. stupnja. Svakoj tački prostora pridružena je po jedna zraka svakog ovog kompleksa, ali u sva četiri kompleksa ne vrijedi i obrat. U ovoj je radnji razmatran i pramen osnih kompleksa, pridruženih polarnim prostorima homotetičnog pramena, a na kraju radnje razmatran je i svežanj homotetičnih polarnih prostora.

A) HOMOTETIČAN PRAMEN POLARNIH PROSTORA

1. *Tetraedralni kvadratni kompleks homotetičnog pramena polarnih prostora.* Homotetičnim ploham φ_1, φ_2 , koje se sijeku u konačnoj konici k i neizmjereno dalekoj konici k^n , određen je pramen Π_n takvih ploha φ_n 2. stupnja, a tim pramenom Π_n određen je dalje homotetičan pramen (Π_n) polarnih prostora. Konike k, k^n mogu biti ili realne, ili

imaginarne. Središta ploha φ_1, φ_2 označimo s O_1, O_2 , a njihovu spojnicu sa o . Konjugirani pravci spojnici o , s obzirom na plohe φ_1, φ_2 , nalaze se u neizmjereno dalekoj ravnini i oni su polare neizmjereno daleke tačke pravca o s obzirom na zajedničku neizmjereno daleku koniku k^n . Označimo taj pravac sa o^n , koji je konjugiran spojnici o u svim polarnim prostorima našeg homotetičnog pramena (Π_n). Konike k, k^n nalaze se na svakoj plohi φ_n pramena Π_n , dakle se sijeku u dvjema neizmjereno dalekim tačkama A_1^n, A_2^n , koje, naravski, mogu biti ili realne, ili konjugirano imaginarne. Spojnici $A_1^n A_2^n$ konjugirani pravci u svim polarnim prostorima pramena (Π_n) prolaze središtima O_n incidentnih ploha φ_n tih prostora, te polom polare $A_1^n A_2^n$ s obzirom na koniku k^n u neizmjereno dalekoj ravnini. Ovaj konačan konjugiran pravac prolazi i središtima O_1, O_2 ploha φ_1, φ_2 , dakle se podudara sa spojnicom o , odnosno izlazi da je $o^n \equiv A_1^n A_2^n$, a odatle dalje da se središta svih ploha φ_n nalaze na spojnici o . Sve plohe φ_n pramena Π_n diraju u tačkama A_1^n, A_2^n dvije ravnine pravca o , koje su, naravski, ili realne, ili konjugirano imaginarne, kao i tačke A_1^n, A_2^n .

Potražimo sada zrake tetraedrnog kompleksa pridruženog ovakvom pramenu (Π_n) polarnih prostora. Zrake ovakvog kompleksa su, kao što znamo, osi pramenova polarnih ravnina pridruženih tačkama prostora kao polovima u svim polarnim prostorima pramena (Π_n). Zajedničkim dijametralnim ravninama incidentnih ploha φ_n pridruženi polovi nalaze se na pravcu $o^n \equiv A_1^n A_2^n$, a ti polovi i sjecišta s opisanim njima pridruženim polarnim ravninama na tom pravcu čine involutorni niz s dvostrukim tačkama A_1^n, A_2^n . Budući da svaka tačka prostora P leži u jednoj ravnini pravca o , prolaze njene polarne ravnine u pramenu (Π_n) jednom tačkom P^n na pravcu o^n . A jer sve te ravnine prolaze jednim pravcem p , mora taj pravac u konačnosti biti usporedan s ravninom konačne temeljne konike k . U svakoj ravnini pravca o nalazi se ∞^2 tačaka P , a svim tim tačkama pridruženi pravci p , dakle njih ∞^2 , prolaze neizmjereno dalekom tačkom P^n , dakle su to svi pravci te tačke. Vidimo, dakle, da su svi oni pravci prostora – koji su usporedni s ravninom konačne temeljne konike k – zrake tetraedrnog kompleksa pridruženog na opisani način homotetičnom pramenu polarnih prostora.

Poznato je da je takav tetraedralni kompleks kod običnog pramena polarnih prostora kvadratan. Malo prije opisane zrake takva kompleksa u našem homotetičnom pramenu čine, međutim, samo singularan linearni kompleks neizmjereno daleke ravnalice o^n . Svakoj tački P ravnine konačne temeljne konike k , pridružene polarne ravnine u svim polarnim

prostorima pramena (Π_n), prolaze polarom p pola P u toj ravnini s obzirom na koniku k . Vidimo dakle da su i svi pravci ravnine konike k zrake našeg raspadnutog tetraedrnog kompleksa. Isto ovo vrijedi i za neizmjereno daleku ravninu konike k'' . Budući da smo na ovaj način odredili zrake tetraedrnog kompleksa pridružene svim tačkama prostora, očito vrijedi ovaj stavak:

a) *Tetraedrni kompleks pramena polarnih prostora, koji se sastoji iz osi pramenova polarnih ravnina pridruženih u tim prostorima svim tačkama prostora, raspada se u slučaju homotetičnog pramena polarnih prostora u linearni singularni kompleks neizmjereno daleke presječne ravnina temeljnih konika kao ravnalice. Polja pravaca u ravninama tih konika nalaze se također u tom kompleksu.*

Označimo sa (TH) takav singularni linearni kompleks pridružen homotetičnom pramenu (Π_n) polarnih prostora. Iz činjenice da ravnine konika k i k'' možemo smatrati raspadnutom plohom φ homotetičnog pramena Π_n , izlazi da su svaka tačka prostora P i njoj pridružena zraka p u (TH) kompleksu jednako udaljeni od ravnine konike k , ali na različitim njenim stranama.

Iz pojednostavnjenih osobina ovakvog (TH) kompleksa može se jednostavnim zaključivanjem doći do ovih stavaka:

b) *Tačkama po volji odabrane ravnine, kao polovima pridružene polarne ravnine u polarnim prostorima jednog homotetičnog pramena, čine za svaku takvu tačku pramen ravnina, a osi svih tih pramenova, kao zrake (TH) kompleksa, čine konoidalnu kongruenciju 1. reda 2. razreda, kojoj je ravnalica jedna hiperbola i jedan neizmjereno daleki pravac koji tu hiperbolu siječe*

c) *Tačkama po volji odabranog pravca u prostoru pridružene zrake u singularnom linearnom kompleksu (TH) čine hiperbolički paraboloid, kojemu se jedna izvodnica nalazi u neizmjereno dalekom pravcu o'' ravnine temeljne konike k . Ako je taj pravac zraka (TH) kompleksa, prelazi taj hiperbolički paraboloid u pramen pravaca s vrhom u tački pridruženoj toj zraci, a u ravnini usporednoj s ravinom konačne temeljne konike k*

2. *Kompleks analogan Majcenovom kubičnom kompleksu.* Takav kompleks homotetičnog pramena polarnih prostora nazovimo (MH) kompleks. Iz činjenice da su zraka (MH) kompleksa i zraka (TH) kompleksa, pridružene jednoj tački prostora, međusobno usporedne, dakle su i sve zrake (TH) kompleksa usporedne sa zrakama (MH) kompleksa,

te iz činjenice da svaki pravac usporedan s ravninom konike k dira u konačnosti samu jednu plohu φ_n pramena Π_n izlazi da su oni pravci prostora koji su usporedni s ravninom konike k zrake (MH) kompleksa. Uzmemo li ravninu konike k kao ravninu slike, tada su zrake (MH) kompleksa sutažnice dirnih ravnina incidentnih ploha φ_n pramena Π_n , koje prolaze njihovim diralištima.

Sve zrake kompleksa (MH) , koje su i zrake kompleksa (TH) , sijeku neizmjereno daleku presječnicu σ^n ravnina konika k i k^n , koje čine jednu raspadnutu incidentnu plohu φ pramena Π . Svaka zraka ovog kompleksa $(TH) \equiv (MH)$ »dira« prema tome u njenom sjecištu s presječnicom σ^n , dakle neizmjereno daleko, ovu raspadnutu plohu φ homotetičnog pramena Π_n .

Kao što znamo, zrake Majcenova kubičnog kompleksa pridruženog pramenu polarnih prostora jesu oni pravci prostora koji neizmjereno daleko diraju incidentne plohe polarnih prostora tog pramena. Sve incidentne plohe φ_n našeg homotetičnog pramena (Π_n) prolaze neizmjereno dalekom konikom k^n . Svaki pravac prostora koji siječe koniku k^n leži u jednoj dirnoj ravnini jedne incidentne plohe φ_n , dakle je zraka (MH) kompleksa. Za homotetičan pramen polarnih prostora vrijedi prema tome i ovaj stavak:

d) *Majcenov kubični kompleks, pridružen homotetičnom pramenu polarnih prostora, raspada se u singularan linearni kompleks konoidalnog oblika, kojemu je direkciona ravnina ravnina konačne temeljne konike k , te u kvadratni kompleks neizmjereno daleke ravnalice k^n .*

Iz identičnosti konoidalnih linearnih singularnih kompleksa $(TH) \equiv (MH)$ proizlazi jednojednoznačna prostorna pridruženost parova zraka u takvu kompleksu, kao i njima pridruženih tačaka, čime je pak određena jedna prostorna transformacija, koja u ovoj radnji nije pobliže razmatrana. U slučaju običnog pramena polarnih prostora ta je prostorna transformacija 5. reda.

Na temelju činjenice da zrakama $(TH) \equiv (MH)$ kompleksa pridružene tačke leže u ravnini, koja je konjugirana toj zruci u svim polarnim prostorima homotetičnog pramena, mogu se izvesti i ovi stavci:

e) *Zrakama kompleksa $(TH) \equiv (MH)$, koje prolaze jednom tačkom prostora, a leže kao što znamo u jednoj ravnini, pridružene tačke nalaze se na jednoj konici koja prolazi tom tačkom i siječe pravac središta incidentnih ploha.*

f) Zrakama $(TH) \equiv (MH)$ kompleksa, koje leže u jednoj ravnini, pridružene tačke nalaze se na jednom pravcu koji siječe pravac središta incidentnih ploha.

g) Pridružene tačke onim zrakama $(TH) \equiv (TM)$ kompleksa, koje su u prostoru usporedne s jednom ravinom, dakle čine snop usporednih pravaca, nalaze se u jednoj ravnini središta svih incidentnih ploha, koja je u svim polarnim prostorima homotetičnog pramena konjugirana smjeru tih pravaca.

3. Analogan kompleks kompleksu najkraćih dirnih putova. Označimo ovakav kompleks sa (RH) . Poznato je da su zraka Majcenova kompleksa i zraka kompleksa najkraćih dirnih putova, pridružene jednoj tački prostora, međusobno okomite, prolaze tom tačkom i leže u dirnoj ravnini incidentne plohe koja prolazi tom tačkom. U našem homotetičnom slučaju pramena polarnih prostora može se uz pomoć ove činjenice lako izvesti ovaj stavak:

h) Sve tangente incidentnih ploha homotetičnog pramena polarnih prostora, koje s ravinom konačne temeljne konike zatvaraju najveći kut, jesu zrake (RH) kompleksa pridruženog ovom pramenu polarnih prostora.

Stepen (RII) kompleksa homotetičnog pramena polarnih prostora, koji je kubičan kao i kod običnog pramena, može se ovdje izvesti analognim postupkom kao kod običnog pramena. Međutim (RH) kompleks se dosta razlikuje po nekim svojim osobinama od takvog kompleksa kod običnog pramena polarnih prostora, ali one se mogu dobiti analognim postupkom kao tamo.

4. Kompleks normala incidentnih ploha. Ovakav kompleks u pramenu homotetičnih polarnih prostora označimo sa (NH) . Kod običnog pramena polarnih prostora takav je kompleks 8. stupnja. Iz činjenice da dirališta dirnih ravnina usporednih s jednim pravcem sa svim plohama jednog pramena ploha 2. stupnja čine plohu 3. reda izlazi da nožišta normala incidentnih ploha jednog pramena polarnih prostora, okomitih na jednom pravcu, dakle usporednih s jednom ravinom, čine opću plohu 3. reda. U slučaju homotetičnog pramena polarnih prostora takva se ploha raspada u plohu 2. stupnja i neizmjereno daleku ravninu, jer je ta ravnina dio jedne incidentne plohe tog pramena u kojoj se nalazi apsolutna čunosječnica. Nožišta zraka našeg kompleksa (NH) , koje leže u jednoj ravnini, čine prema tome krivulju 2. stupnja. Sve normale te krivulje, kao zrake (NH) kompleksa, omataju krivulju 4. raz-

reda, koja nastaje kao proizvod jednog neizmjereno dalekog linearnog niza i jednog konačnog niza 2. reda, koji su jednodvosložno pridruženi. Iz činjenice da zrake (NH) kompleksa u jednoj ravnini omataju krivulju 4. razreda proizlazi dalje ovo:

i) *Normale incidentnih ploha homotetičnog pramena polarnih prostora čine kompleks (NH) četvrtog stupnja.*

Raspadanje ovog kompleksa u stepen manji od osmog, proizlazi iz činjenice da sve incidentne plohe prolaze konikama k i k'' , kao i iz činjenice da su ravnine tih konika jedna raspadnuta incidentna ploha.

Zrake (NH) kompleksa koje prolaze jednom tačkom prostora čine prema tome stožac 4. stupnja. Krivulja nožišta tih zraka probada svaku incidentnu plohu u šest tačaka, jer je kongruencija normala plohe 2. stupnja 6. reda 2. razreda. Osim toga, možemo svakom tačkom prostora postaviti na konačnu temeljnu koniku k po četiri okomice, koje su također u tim nožištima na konici k normale neke incidentne plohe φ_n pramena II_n . Krivulja nožišta zraka (NII) kompleksa, koje prolaze jednom tačkom prostora i čine stožac 4. stupnja, probada svaku incidentnu plohu našeg homotetičnog pramena u 10 tačaka, osim onih koje imaju takva nožišta na temeljnoj konici k . Izlazi, prema tome, da je takva prostorna krivulja 5. reda, što u ostalom mora i biti, jer je vrh tog stošca njena jednostruka tačka. Iz ove činjenice, kao i one da nožišta zraka (NII) kompleksa, koje leže u jednoj ravnini, čine krivulju 2. stupnja, proizlazi ovaj stavak:

j) *Tačkama neke ravnine, kao nožištima pridružene normale incidentnih ploha jednog homotetičnog pramena polarnih prostora, čine kongruenciju 5. reda 2. razreda.*

Na sličan način mogu se odrediti i neke dalje osobine kompleksa normala incidentnih ploha homotetičnog pramena polarnih prostora.

5. *Kvadratični osni kompleksi homotetičnog pramena polarnih prostora.* Zrake osnih kompleksa polarnih prostora jednog pramena takvih prostora, koje su pridružene jednoj tački prostora kao polu, čine pramen pravaca. Ravnina tog pramena okomita je na zraci tetraedrnog kompleksa pridruženog tom pramenu polarnih prostora, koja je pridružena toj tački, a nožišta tih zraka su na kružnici koja prolazi tom tačkom i okomito siječe tu zraku tetraedrnog kompleksa u njenom najbližem mjestu toj tački. Iz svojstava homotetičnog pramena polarnih prostora izlazi da su središta svih takvih kružnica, pridruženih tačkama

prostora, u ravnini konačne temeljne konike k i da su im ravnine na ravnini konike k okomite. Osobine homotetičnog pramena polarnih prostora u vezi s njihovim osnim kompleksima, mogle bi se izvesti analogno kao kod običnog takvog pramena, samo bi se te osobine ovdje pojavile u pojednostavnjenim i raspadnutim oblicima.

6. *Pramen homotetičnih polarnih prostora* može biti zadan tako, da sve njegove incidentne plohe imaju jednu zajedničku simetralnu ravninu, u kojoj tada leži pravac o središta incidentnih ploha. Ako sve te incidentne plohe imaju dvije zajedničke simetralne ravnine, bit će njihova presječna pravac o . Osobine ovakvih homotetičnih pramenova polarnih prostora se očito i dalje veoma pojednostavnjuju.

B) SVEŽANJ HOMOTETIČNIH POLARNIH PROSTORA

7. Trima homotetičnim plohama 2. stupnja $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, od kojih se nijedna ne nalazi u pramenu ploha određenom s ostale dvije, određen je svežanj Π_n^2 homotetičnih ploha 2. stupnja. Uzmemo li plohe tog svežnja kao incidentne plohe polarnih prostora, bit će tim svežnjem ploha 2. stupnja određen svežanj (Π_n^2) homotetičnih polarnih prostora. Lako se vidi da se središta svih incidentnih ploha tog svežnja nalaze u ravnini σ središta O_1, O_2, O_3 ploha $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Sve plohe svežnja Π_n^2 imaju očito zajedničku neizmjereno daleku koniku k^n , dok u konačnosti prolaze parom realnih, ili konjugirano imaginarnih tačaka M, N . Ove su tačke sjecišta zajedničke konačne konike ploha φ_1, φ_2 s plohom φ_3 . Svežanj Π_n^2 incidentnih ploha određen je dakle tačkama M, N i neizmjereno dalekom konikom k^n . Ravnina σ svih središta konjugirana je smjeru spojnice MN u svim polarnim prostorima homotetičnog svežnja (Π_n^2) .

Poznato je kod svežnja polarnih prostora da polarne ravnine jedne tačke P prostora, u svim polarnim prostorima tog svežnja, prolaze jednom tačkom $\bar{P}$. Spojnice tako involutorno pridruženih ∞^3 parova tačaka u prostoru čine kubični kompleks. U našem homotetičnom svežnju prelazi taj kompleks u singularni linearni kompleks spojnice MN kao ravnalice. Budući da je spojnica MN konjugirana ravnini σ u svim polarnim prostorima svežnja (Π_n^2) , bit će svim tačkama ravnine σ pridružena, u spomenutoj involutornoj pridruživosti, ista tačka S^n , koja je neizmjereno daleko na spojnici MN . Involutornom pridruženošću

parova tačaka $\bar{P}, P$ u prostoru, određena je jedna prostorna transformacija 3. reda. U našem homotetičnom svežnju polarnih prostora dobiva ova kubna transformacija ovu osobinu:

Parovima pridruženih tačaka $P, \bar{P}$ jednog homotetičnog svežnja polarnih prostora određena kubna prostorna transformacija ima tu osobinu, da tačkama svakog pravca u prostoru pridružena prostorna krivulja 3. reda prolazi neizmijerno dalekom tačkom spojnice temeljnih tačaka M, N , a svakoj ravnini na taj način pridružena ploha 3. reda ima u toj neizmijerno dalekoj tački dvostruku tačku.

*Institut za matematiku Sveučilišta
u Zagrebu*

Primljeno za publikaciju 15. veljače 1966. u Odjelu za matematičke, fizičke i tehničke nauke Jugoslavenske akademije u Zagrebu.

GEOMETRIC PROPERTIES OF PRIMITIVE ANALYTICITY DOMAINS OF PERTURBATION THEORY AMPLITUDES

1. INTRODUCTION

An amplitude corresponding to a Feynman diagram S with N external lines (moments p_a , $a = 1, 2, \dots, N$) is given by the integral of the form¹

$$f_S(p) = \int_V da_1 da_2 \dots da_r \frac{\delta \left(1 - \sum_{e=1}^r a_e\right)}{\left[\sum_{a,b=1}^N A_{ab}(a) p_a p_b - C(a)\right]^k}, \quad k > 0 \quad (1)$$

$$V = \{a | a_e > 0, e = 1, 2, \dots, r\}; \quad C(a) > 0 \left(\sum_{e=1}^r a_e > 0\right).$$

The form of the functions $A_{ab}(a)$ and $C(a)$ depends on the topological structure of diagram S . The moments p_a satisfy the conservation law

$$\sum_{a=1}^N p_a = 0. \quad (2)$$

If $N > 5$, we shall suppose that the space-time dimension is arbitrarily large. The number of independent kinematical invariants $p_{ab} = p_a p_b$ is then

$$n = \frac{N(N-1)}{2}. \quad (3)$$

Let x_i , $i = 1, 2, \dots, n$ be any set of independent invariants p_{ab} . The integral (1) may be written in the form²

¹ In fact, the Feynman integral is more complicated, but the factor omitted is not essential to the analytic properties of the amplitude.

² In the following we use the notations: R_n and C_n — n -dimensional real and complex space, respectively; $x, y \in R_n$, $z = x + iy \in C_n$.

$$f_S(x) = \int_U da_1 da_2 \dots da_r \frac{\delta \left(1 - \sum_{e=1}^r a_e\right)}{[Q_S(a; x)]^k}, \quad (4)$$

where

$$Q_S(a; x) = \sum_{i=1}^n A_i(a) x_i - B(a). \quad (5)$$

The functions $A_i(a)$ and $B(a)$ are linear combinations of functions $A_{ab}(a)$ and $A_{ab}(a)$, $C(a)$ respectively.

There exists [1] the domain $D_S \subset R_n$ containing the origin, defined as follows

$$D_S = \{x \mid Q_S(a; x) < 0, \ a \in U, \ \sum_{e=1}^r a_e > 0\}. \quad (6)$$

Evidently, D_S is convex. In D_S the function $f_S(x)$ is holomorphic. Let $U_S \subset C_n$ be a set defined as follows: $z = x + iy \in U_S$ if and only if there exists a real ϱ with the property $x + \varrho y \in D_S$. U_S is a simply-connected domain and $U_S \supset D_S$. The function (4) has a single-valued analytic continuation in U_S [2]:

$$f_S(z) = \int_U da_1 da_2 \dots da_r \frac{\delta \left(1 - \sum_{e=1}^r a_e\right)}{[Q_S(a; z)]^k}, \quad (7)$$

where

$$Q_S(a; z) = \sum_{i=1}^n A_i(a) z_i - B(a). \quad (8)$$

Let G be a set of all connected diagrams of a given process and let

$$U = \bigcap_{S \in G} U'_S. \quad (9)$$

All functions $f_S(z)$, $S \in G$ are single-valued and analytic in U . Thus the amplitude of an arbitrarily finite³ order (i.e. the finite sum of functions $f_S(z)$, $S \in G$) is single-valued and analytic in U . The domain U may be constructed as follows: There exists [1] a non-empty domain (real domain of holomorphy of an arbitrary order amplitude)

$$D = \bigcap_{S \in G} D_S. \quad (10)$$

The domain D may be determined by majorization methods [1 — 10]. The domain constructed with the help of D in the same way as the domain U_S with the help of D_S is identical with U .

³ The problem of convergence of perturbation theory series is open as yet.

In the case when one of the invariants p_{aa} is fixed — p_{NN} , for example, the amplitude $f(z)$ of an arbitrarily large order may be decomposed as follows [11, 12]: Let us select the following set of n invariants

$$p_{ab}, \quad a, b = 1, 2 \dots N-1, \quad a \leq b. \quad (11)$$

The invariants (11) are denoted as x_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Because of the relation (2), the invariants x_i satisfy the equation of the form

$$\sum_{i=1}^n h_i x_i = p_{NN}, \quad h_i = 1 \text{ or } 2. \quad (12)$$

Each set of $n-1$ invariants (11) is a set of independent variables. We shall consider the amplitude $f(z)$ of an arbitrary order to be a function of n variables z_i defined on the hyperplane

$$\sum_{i=1}^n h_i z_i = p_{NN}. \quad (13)$$

By $z^{(i)}$ we denote a set of variables z_i other than z_j . Let p_{NN} be fixed in such a way that there exists a real domain of holomorphy (10). It means that in the $(n-1)$ -dimensional space of variables x_i ($i \neq j$) there exists a domain D in which the amplitude is holomorphic. Then the amplitude $f(z)$ may be represented in the form

$$f(z) = \sum_{j=1}^n f_j(z^{(j)}), \quad (14)$$

where $f_j(z^{(j)})$ is a function single valued and analytic in the domain

$$T_j = \overline{W}_j U K_j^+ U K_j^-. \quad (15)$$

$\overline{W}_j$ is the $\overline{W}$ -domain, constructed with the help of the real domain

$$\begin{aligned} \overline{D}_j &= U x^{(j)} e_{D_j} \{x^{(j)} - t\} \\ 0 &\leq t_i < \infty \end{aligned} \quad (16)$$

$$K_j^+ \text{ are cones} \quad K_j^+ = [z | y_i \geq 0, \quad i \neq j]. \quad (17)$$

The decomposition of the form (14) is also valid in the case when besides p_{NN} , other invariants are fixed.

In Sec. 2 an analytic description of the $\overline{W}$ -domains in terms of D -domains is given. The result obtained is applied to scattering and production amplitudes in Secs. 3 and 4. Some geometric properties of the corresponding $\overline{W}$ - and T -domains have been found.

2. ANALYTIC DESCRIPTION OF THE $\mathcal{W}$ -DOMAIN

Let us consider in C_n the $(2n-2)$ -parametric set of two-dimensional half-planes

$$T(a, b, \mu): z = a\mu + b\lambda, \quad (18)$$

where a and b are real orthogonal unit vectors, μ — a real parameter, $0 \leq \mu < \infty$ and λ — a complex variable, $\operatorname{Im} \lambda > 0$. Evidently, the set of half-planes (18) generates a set of complex⁴ points in C_n . The plane (18) with the following parameters passes through a complex point $z = x + iy$

$$\begin{aligned} a(z) &= \frac{x - \frac{xy}{y^2} y}{\left| x - \frac{xy}{y^2} y \right|}, \quad b(z) = \frac{y}{|y|}, \\ \mu(z) &= \left| x - \frac{xy}{y^2} y \right|. \end{aligned} \quad (19)$$

To the point z corresponds

$$\lambda(z) = \frac{xy}{|y|} + i|y|. \quad (20)$$

For each a and b there exists $\mu > 0$ such that the straight line $x = a\mu + b\lambda$ has a real intersection with the boundary of $D(\bar{D}_i)$. Let $\bar{\mu}(a, b)$ be the maximal μ with that property (if such a μ does not exist we put $\bar{\mu}(a, b) = \infty$). Let

$$\bar{\mu}(z) \equiv \bar{\mu}(x, y) \equiv \bar{\mu}(a(z), b(z)). \quad (21)$$

Theorem [13]. The complex point $z = x + iy$ lies in $\mathcal{W}(\bar{U}_i)$ if and only if it holds

$$\left| x - \frac{xy}{y^2} y \right| - \bar{\mu}(x, y) < 0. \quad (22)$$

Proof. Let $\mu(z) < \mu(z)$. From the convexity of $D(\bar{D}_i)$ it follows that the straight line

$$X = x + \varrho y = a\mu + b(\operatorname{Re} \lambda + \varrho \operatorname{Im} \lambda),$$

⁴ A point $z = x + iy$ is a complex one if $y \neq 0$.

where a, b, μ and λ are determined by (19) and (20), has a real intersection with $D(\bar{D}_i)$. It means that there exists a real ϱ with the property $x + \varrho y \in D(D_i)$ and therefore $z \in \mathcal{U}(\bar{\mathcal{U}}_i)$. Let $z \in \mathcal{U}(\bar{\mathcal{U}}_i)$ be complex. Then there exists a real ϱ with the property $x + \varrho y \in D(\bar{D}_i)$ or

$$a\mu + b(\operatorname{Re} \lambda + \varrho \operatorname{Im} \lambda) \in D(\bar{D}_i)$$

where a, b, μ and λ are determined by (19) and (20). That means $\mu(z) < \bar{\mu}(z)$. The theorem is proved.

From the above it follows that the complex boundary of the domain $\mathcal{U}(\bar{\mathcal{U}}_i)$ is the hypersurface

$$\left[x - \frac{xy}{y^2} y - \bar{\mu}(x, y) \right] = 0. \quad (23)$$

Conclusions analogous to those above are valid also when some of the invariants are fixed (in such a way that in the space of variable invariants there exists a real domain of holomorphy).

3. SCATTERING AMPLITUDES

Let us consider the scattering amplitude (Fig. 1) in the case when all external moments are on the mass-shell:

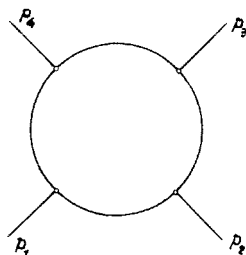


Fig. 1

$$p_a^2 = M_a^2, \quad a = 1, \dots, 4. \quad (24)$$

In the variables $z_1 = (p_1 + p_2)^2$, $z_2 = (p_1 + p_3)^2$ the domain D is of the form [8]

$$D = [x \mid x_1 < k_1, \quad x_2 < k_2, \quad x_1 + x_2 > k_3], \quad (25)$$

where

$$k_1 = 4 m^2, \quad k_2 = 4 m^2, \quad k_3 = 0 \quad (26)$$

for the meson-meson scattering:

$$k_1 = 4 M^2, \quad k_2 = 4 m^2, \quad k_3 = 4 (M^2 - m^2) \quad (27)$$

for the nucleon-nucleon scattering;

$$k_1 = 4 m^2, \quad k_2 = 4 m^2, \quad k_3 = 0 \quad (28)$$

for the nucleon-antinucleon scattering, and

$$k_1 = (M + m)^2, \quad k_2 = 4 m^2, \quad k_3 = (M - m)^2 \quad (29)$$

for the pion-nucleon scattering⁵. M and m are the nucleon and meson mass respectively.

The parameter $\bar{\mu}(a, b)$ corresponds to the straight line⁶ $x = a\mu + b\lambda$ which passes through the point (a, β) ,

$$(a, \beta) = (k_1, k_2); (k_1, k_3 - k_1); (k_3 - k_2, k_2). \quad (30)$$

Hence we obtain

$$\bar{\mu}(a, b) = \frac{a b_2 - \beta b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad (31)$$

or, according to (19)

$$\mu(x, y) = \frac{a y_2 - \beta y_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1} \left| x - \frac{x y}{y^2} y \right|. \quad (32)$$

With the help of (23) and (32) we obtain that the complex boundary of $\mathcal{U}$ is composed of parts of the hypersurfaces

⁵ The domain D for the pion-nucleon scattering, obtained by the majorization method [8] is smaller than (29), but the generally accepted hypothesis is that in this case the domain D is identical with (29).

⁶ If D does not contain the origin, one has instead of the line $x = a\mu + b\lambda$ to consider the line $x - x^{(0)} = a\mu + b\lambda$, where $x^{(0)} \in D$ is a fixed point. However, in our cases the equation of the boundary of $\mathcal{U}$ is invariant with respect to the position of the $x^{(0)}$.

$$(x_1 - a) y_2 - (x_2 - \beta) y_1 = 0$$

or

$$\Phi_{\alpha\beta}(z) = (z_1 - \alpha)(\bar{z}_2 - \beta) - (z_2 - \beta)(z_1 - \alpha) = 0. \quad (33)$$

Let us calculate the Levi determinant of the function $\Phi_{\alpha\beta}(z)$ at the point z on the hypersurface (33). We obtain

$$L(\Phi_{\alpha\beta}) = - \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial \Phi_{\alpha\beta}(z)}{\partial z_1} & \frac{\partial \Phi_{\alpha\beta}(z)}{\partial z_2} \\ \frac{\partial \Phi_{\alpha\beta}(z)}{\partial \bar{z}_1} & \frac{\partial^2 \Phi_{\alpha\beta}(z)}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} & \frac{\partial^2 \Phi_{\alpha\beta}(z)}{\partial \bar{z}_1 \partial z_2} \\ \frac{\partial \Phi_{\alpha\beta}(z)}{\partial \bar{z}_2} & \frac{\partial^2 \Phi_{\alpha\beta}(z)}{\partial z_1 \partial \bar{z}_2} & \frac{\partial^2 \Phi_{\alpha\beta}(z)}{\partial z_2 \partial \bar{z}_2} \end{vmatrix} = -\Phi_{\alpha\beta}(z) = 0. \quad (34)$$

Hence, on the basis of the known theorems (see 14, Sections 18 and 19) we conclude that the hypersurface (33) is analytic and that $\mathcal{U}$ is the domain of holomorphy.

With the help of the variables z_1 , z_2 and $z_3 = (p_2 + p_3)^2$ the amplitude as a function defined on the hyperplane

$$z_1 + z_2 + z_3 = \sum_{a=1}^4 M_a^2 \quad (35)$$

may be represented, according to (14) in the form

$$f(z) = f_1(z_2, z_3) + f_2(z_1, z_3) + f_3(z_1, z_2) \quad (36)$$

where f_i is the function analytic in T_i (see 15)). According to (10), the domains D_i etc. are of the form

$$x_2 < \gamma_2, \quad x_3 < \gamma_3 \quad \text{etc.} \quad (37)$$

and the complex boundaries of the domains $\bar{U}_i$ etc. are hypersurfaces⁷

$$(z_2 - \gamma_2)(\bar{z}_3 - \gamma_3) - (z_3 - \gamma_3)(\bar{z}_2 - \gamma_2) = 0 \quad \text{etc.} \quad (38)$$

where
$$\gamma_1 = k_1, \quad \gamma_2 = k_2, \quad \gamma_3 = \sum_{a=1}^4 M_a^2 - k_3. \quad (39)$$

The domains T_i are domains of holomorphy.

⁷ In ref. [12], equation (38) was derived in another way.

4. PRODUCTION AMPLITUDE

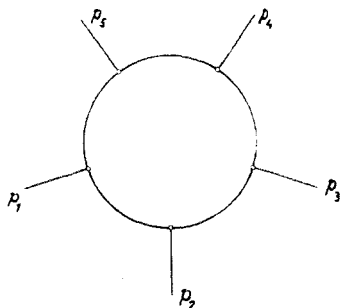


Fig. 2

We shall consider the production amplitude (Fig. 2) in the case when all external moments are on the mass-shell and when all masses (external and internal) are equal to 1. The domain D is determined by the conditions [2]:

$$p_{\delta\epsilon} < 1, \quad \delta, \epsilon = 1, \dots, 5, \quad \delta \neq \epsilon \quad (40)$$

$$p_{\delta\epsilon}^2 + p_{\delta'\epsilon'}^2 - p_{\delta\epsilon'}^2 - p_{\delta\epsilon'}^2 < \frac{3}{4} \quad \text{whenever } p_{\delta\epsilon} + p_{\delta'\epsilon'} > \frac{3}{2} \quad (41)$$

$\delta, \epsilon, \delta', \epsilon'$ are all different.

Because of $p_0^2 = 1$, there exist five independent invariants $p_{\delta\epsilon}$. Let x_i , $i = 1, \dots, 5$ be a set of such invariants and let x_i , $i = 6, 7, \dots, 10$ be a set of other invariants $p_{\delta\epsilon}$. Then it holds

$$x_i = \sum_{j=1}^5 c_{ij} x_j + d_i, \quad i = 1, 2, \dots, 10 \quad (42)$$

where $c_{ij} = \delta_{ij}$, $d_i = 0$, for $i \leq 5$. (43)

The parameter $\bar{\mu}(a, b)$ corresponds to the straight line $x = a\mu + b\lambda$ which passes through a point lying on the plane of the form

$$x_i = 1, \quad x_j = 1 \quad (44)$$

or which is tangent to the hypersurface [see (41)]

$$x_i^2 + x_j^2 - x_i x_j = \frac{3}{4} \quad (45)$$

or which passes through a point lying on one of the surfaces [see (41)]

$$x_i^2 + x_j^2 - x_i x_j = \frac{3}{4}, \quad x_k = 1, \quad k \neq i, j; \quad (46)$$

$$x_i^2 + x_j^2 - x_i x_j = \frac{3}{4}, \quad x_k^2 + x_e^2 - x_k x_e = \frac{3}{4}. \quad (47)$$

In the following we denote

$$a_i = \sum_{k=1}^5 c_{ik} a_k, \quad b_i = \sum_{k=1}^5 c_{ik} b_k, \quad i = 1, \dots, 10. \quad (48)$$

Let us substitute $x_k = a_k \mu + b_k \lambda$, $k = 1, \dots, 5$ in (44) and (45). From (44) it follows

$$\bar{\mu}_1(a, b) = \frac{b_i - b_j}{a_i b_i - a_j b_j}. \quad (49)$$

From (45) we obtain the equation

$$A \lambda^2 + B \lambda + C = 0 \quad (50)$$

where

$$\begin{aligned} A &= b_i^2 + b_j^2 - b_i b_j \\ B &= \mu (2 a_i b_i + 2 a_j b_j - a_i b_j - a_j b_i) + 2 b_i d_i + \\ &\quad + 2 b_j d_j - b_i d_j - b_j d_i \\ C &= (a_i^2 + a_j^2 - a_i a_j) \mu^2 + (2 a_i d_i + 2 a_j d_j - a_i d_j - a_j d_i) \mu + \\ &\quad + d_i^2 + d_j^2 - d_i d_j - \frac{3}{4}. \end{aligned} \quad (51)$$

For $\mu = \bar{\mu}(a, b)$ the discriminant of equation (50) must be equal to zero

$$B^2 - 4 AC = 0$$

$$\text{or} \quad \bar{\mu}_2(a, b) = \text{Max} \left\{ \frac{b_i d_j - b_j d_i \pm \sqrt{b_i^2 + b_j^2 - b_i b_j}}{a_i b_i - a_j b_j} \right\}. \quad (52)$$

In the following we denote

$$y_i = \sum_{k=1}^5 c_{ik} y_k, \quad z_i = \sum_{k=1}^5 c_{ik} z_k + d_i, \quad i = 1, \dots, 10. \quad (53)$$

According to (23), with the help of (19), (49) and (52) we obtain hypersurfaces the parts of which lie on the complex boundary of $\mathcal{U}$:

$$\Phi_{ij}^{(1)}(z) \equiv (z_i - 1)(\bar{z}_j - 1) - (z_j - 1)(\bar{z}_i - 1) = 0 \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}^{(2)}(z) &\equiv (z_i - \bar{z}_i)^2 + (z_j - \bar{z}_j)^2 - (z_i - \bar{z}_i)(z_j - \bar{z}_j) - \\ &\quad - (z_i z_j - z_i \bar{z}_j) = 0, \end{aligned} \quad (55)$$

where $1 \leq i, j \leq 10$ [see (41)].

The form of the boundary hypersurfaces, obtained from the conditions (46) and (47) is more complicated.

We shall examine the local properties of the hypersurfaces (54) and (55). Let e_k , $k = 1, \dots, 5$ be a vector of the property

$$\sum_{k=1}^5 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z_k} e_k + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}_k} \bar{e}_k \right) = 0, \quad \Phi(z) = 0 \quad (56)$$

where $\Phi = \Phi_{ij}^{(1)}$ or $\Phi = \Phi_{ij}^{(2)}$ and let

$$e_i = \sum_{k=1}^5 c_{ik} e_k, \quad i = 1, \dots, 10. \quad (57)$$

Then one has

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z_i} e_i + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}_i} \bar{e}_i + \frac{\partial \Phi}{\partial z_j} e_j + \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{z}_j} \bar{e}_j = 0, \quad \Phi(z) = 0. \quad (58)$$

Let

$$H(z; e) = \sum_{k, k'=1}^5 \frac{\partial^2 \Phi(z)}{\partial z_k \partial \bar{z}_{k'}} e_k \bar{e}_{k'}. \quad (59)$$

With the help of (57) we have

$$H(z; e) = H(z_i, z_j; e_i, e_j) \quad (60)$$

where

$$\begin{aligned} H(z_i, z_j; e_i, e_j) &= \frac{\partial^2 \Phi(z_i, z_j)}{\partial z_i \partial \bar{z}_i} e_i \bar{e}_i + \frac{\partial^2 \Phi(z_i, z_j)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} e_i \bar{e}_j + \\ &+ \frac{\partial^2 \Phi(z_i, z_j)}{\partial z_j \partial \bar{z}_i} e_j \bar{e}_i + \frac{\partial^2 \Phi(z_i, z_j)}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} e_j \bar{e}_j. \end{aligned} \quad (61)$$

For the Levi determinant of the function $\Phi(z_i, z_j)$ at the point (z_i, z_j) of the hypersurface $\Phi(z_i, z_j) = 0$ one finds

$$L(\Phi) = - \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial \Phi(z_i, z_j)}{\partial z_i} & \frac{\partial \Phi(z_i, z_j)}{\partial z_j} \\ \frac{\partial \Phi(z_i, z_j)}{\partial \bar{z}_i} & \frac{\partial^2 \Phi(z_i, z_j)}{\partial z_i \partial \bar{z}_i} & \frac{\partial^2 \Phi(z_i, z_j)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \\ \frac{\partial \Phi(z_i, z_j)}{\partial \bar{z}_j} & \frac{\partial^2 \Phi(z_i, z_j)}{\partial z_j \partial \bar{z}_i} & \frac{\partial^2 \Phi(z_i, z_j)}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} \end{vmatrix} = 0. \quad (62)$$

From (58) and (62) it follows

$$H(z_i, z_j; e_i, e_j) = 0 \quad (63)$$

and because of (60)

$$H(z; e) = 0, \quad \Phi(z) = 0. \quad (64)$$

From (56) and (64) we conclude (as in Sec. 3) that the hypersurfaces (54) and (55) are analytic.

We shall now consider the production amplitude as a function of two independent invariants, when the other three independent invariants are real and fixed in such a way that in the space of variable invariants there exists a real domain of holomorphy of the amplitude.

Let us select a set of invariants

$$p_{12}, p_{13}, p_{14}, p_{23}, p_{24}, p_{34} \quad (65)$$

and let the invariants p_{14}, p_{24}, p_{34} be fixed and submitted to the conditions

$$p_{14} < 1, p_{24} < 1, p_{34} < 1, p_{45} < 1. \quad (66)$$

(66) is necessary and sufficient for the existence of the real domain of holomorphy of the amplitude in the space of variable invariants. With the help of the variables p_{12}, p_{13} and p_{23} the amplitude $f(p)$ as a function defined on the hyperplane

$$p_{12} + p_{13} + p_{23} = -\left(\frac{3}{2} + p_{14} + p_{24} + p_{34}\right) \quad (67)$$

may be represented, according to Sec. 1, in the form

$$f(p) = f_{12}(p_{13}, p_{23}) + f_{13}(p_{12}, p_{23}) + f_{23}(p_{12}, p_{13}) \quad (68)$$

where the functions f_{12} etc. are analytic in the domains T_{12} etc. (see (15)). The invariants other than (65) are expressed with the help of the variables (p_{13}, p_{23}) , (p_{12}, p_{23}) and (p_{12}, p_{13}) respectively, in the following way:

$$\begin{aligned} p_{15} &= \frac{1}{2} + p_{23} + p_{24} + p_{34} \\ p_{25} &= \frac{1}{2} + p_{13} + p_{14} + p_{34} \end{aligned} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} p_{35} &= -(1 + p_{13} + p_{23} + p_{34}) \\ p_{16} &= \frac{1}{2} + p_{23} + p_{24} + p_{34} \\ p_{26} &= -(1 + p_{12} + p_{23} + p_{24}) \\ p_{36} &= \frac{1}{2} + p_{12} + p_{14} + p_{24} \end{aligned} \quad (70)$$

$$\begin{aligned}
p_{15} &= -(1 + p_{12} + p_{13} + p_{14}) \\
p_{25} &= \frac{1}{2} + p_{13} + p_{14} + p_{34} \\
p_{35} &= \frac{1}{2} + p_{12} + p_{14} + p_{24}.
\end{aligned} \tag{71}$$

From (16) and (69) — (71) it follows that the domains $\bar{D}_{12}$ etc. are determined by the conditions of the following form only

$$p_{13} < q_{13}, \quad p_{23} < q_{23}; \quad \text{etc.} \quad (q_{ij} = \text{const.}). \tag{72}$$

This means that the complex boundaries of the domains $\bar{U}_{12}$ etc. are analytic hypersurfaces of the form (54) only (precisely, of the form (33)) and we conclude (as in Sec. 3) that the domains T_{12} etc. are the domains of holomorphy.

REFERENCES

- [1] N. A. Černikov, A. A. Logunov and I. T. Todorov, Preprint D-578 (Dubna, 1960)
- [2] T. T. Wu, Phys. Rev. **123**, 678 (1961),
- [3] Y. Nambu, Nuovo Cimento **16**, 1064 (1957),
- [4] K. Symanzik, Progr. Theor. Phys. **20**, 690 (1958),
- [5] A. A. Logunov, A. N. Tavshelidze, I. T. Todorov and N. A. Černikov, Dokl. Akad. Nauk SSSR **135**, 801 (1960),
- [6] A. A. Logunov, I. T. Todorov and N. A. Černikov, Žurn. Eksp. Theor. Fiz. **42** 1285 (1962).
- [7] Ź. Garczyński, Bull. Acad. Polon. Sci. Mat. astr. et phys. **10**, 499 (1962),
- [8] A. A. Logunov, Lu I-Cen, I. T. Todorov, N. A. Černikov, Ukrainskij matem. žurn. **15**, 250 (1963),
- [9] J. B. Boyling, Ann. of Phys. **25**, 249 (1963); **28**, 435 (1964).
- [10] I. Aganović, Nuovo Cim. **10**, 1384 (1965),
- [11] I. Aganović, Nuovo Cim. (in press),
- [12] D. Ja. Petrina, Ukrainskij matem. žurn. **16**, 31 (1964),
- [13] I. Aganović, Disertacija (Zagreb, 1965),
- [14] Ů. S. Uladimirov, Metody teorii funkcij mnogih kompleksnyh peremennyh (Moskva, 1964).

Institute of Mathematics, University of Zagreb
and Institute »Ruder Bošković«, Zagreb

Accepted for publication on October 11, 1966, in the Section for mathematical, physical and technical sciences, Yugoslav Academy in Zagreb.

GEOMETRIJSKA SVOJSTVA PRIMITIVNIH PODRUČJA ANALITIČNOSTI AMPLITUDA U RAČUNU SMETNJE

1. UVOD

Amplituda koja odgovara Feynmanovu dijagramu S sa N vanjskih linija (impulsa p_a) dana je integralom oblika (1). Uz pretpostavku da je prostorno-vremenska dimenzija proizvoljno velika (za $N > 5$) broj linearno neovisnih kinematičkih invarijanti $p_a p_b$ dan je sa (3). Integral (1) može se napisati u obliku (4), gdje je $\{x_i\}$ skup linearno-neovisnih invarijanti $p_a p_b$. U području (6) funkcija (4) je holomorfna i ima jednoznačno analitičko produljenje (7) u području $\mathcal{U}$ definiranom na slijedeći način: $z = x + iy \in \mathcal{U}$ onda i samo onda ako postoji realan q sa svojstvom $x + qy \in D_S$. Ako je G skup svih vezanih dijagrama danog procesa, amplituda proizvoljnog konačnog reda je holomorfna u području (9) koje se pomoću područja (10) definira na isti način kao područje $\mathcal{U}$ pomoću područja (6). Ako je invarijanta p_{NN} fiksirana, amplituda proizvoljnog reda (kao funkcija definirana na ravnini (13), gdje je $\{z_i\}$ skup invarijanata (11)) može se prikazati u obliku (14), gdje je funkcija f_j (koja ovisi samo o varijablama z_i , $i \neq j$) holomorfna u području (15). Područje $\mathcal{U}_j$ je $\mathcal{U}$ – područje definirano pomoću realnog područja (16).

2. ANALITIČKA DESKRIPTCIJA $\mathcal{W}$ -PODRUČJA

Promatramo u C_n skup poluravnina (18) gdje su a i b realni ortogonalni jedinični vektori, μ realan parametar, $0 \leq \mu < \infty$ i λ kompleksna varijabla, $\text{Im } \lambda > 0$. Skupom (18) generiran je skup kompleks-

nih tačaka. Kroz kompleksnu tačku z prolazi ravnina (18) sa parametrima (19). Neka je $\bar{\mu}(a, b)$ najveći μ sa svojstvom da pravac $x = a\mu + b\lambda$ ima realan presjek sa (10) odn. (16). Dokazuje se

Teorem. Kompleksna tačka $z = x + iy$ leži u $\mathcal{W}(\bar{\mathcal{W}}_i)$ onda i samo ako vrijedi (22).

Iz teorema slijedi da kompleksnu granicu područja $\mathcal{W}(\bar{\mathcal{W}}_i)$ realizira hiperploha (23).

3. AMPLITUDA RASPRŠENJA

Razmatra se amplituda raspršenja (sl. 1) u slučaju kad su svi vanjski impulsi na masenoj plohi. Područje D je oblika (25), gdje je $x_1 = (p_1 + p_2)^2$, $x_2 = (p_1 + p_3)^2$. Parametar $\bar{\mu}(a, b)$ odgovara pravcu $x = a\mu + b\lambda$ koji prolazi kroz tačku (30). Iz toga (pomoću (19)) slijedi (31) i (32). Iz (23) i (32) dobiva se da je kompleksna granica područja $\mathcal{W}$ sastavljena od dijelova hiperploha (33). Ispitivanjem Levijeve determinante (34) zaključuje se (pomoću poznatih teorema) da je hiperploha (33) analitička i da je $\mathcal{W}$ područje holomorfije. Pomoću varijabli z_1 , z_2 i $z_3 = (p_2 + p_3)^2$ amplituda (kao funkcija definirana na hiperravnini (35)) može se prikazati u obliku (36). Područja $\bar{D}_1, \dots$ su oblika (37). Kao kompleksne granice područja $\bar{\mathcal{W}}_1, \dots$ dobivaju se hiperplohe oblika (38). Područja $T_1, \dots$ su područja holomorfije.

4. AMPLITUDA PRODUKCIJE

Razmatra se amplituda produkcije (sl. 2) u slučaju kad su svi vanjski impulsi na masenoj plohi i kad su sve mase (unutrašnje i vanjske) jednake 1. Područje D je određeno uvjetima (40) i (41). Ako je x_i , $i = 1, \dots, 5$ skup neovisnih invarijanata $p_\delta p_\epsilon$, a, x_i , $i = 6, \dots, 10$ skup ostalih invarijanata, vrijedi (42). Parametar $\bar{\mu}(a, b)$ odgovara pravcu koji prolazi kroz tačku na ravnini (44) ili koji tangira hiperplohu (45) ili koji prolazi kroz tačku na plohi (46) odn. (47). Uz oznake (48) iz (44) dobivamo (49). Iz (45) slijedi (50). Za $\mu = \bar{\mu}(a, b)$ diskriminanta jednadžbe (50) mora iščezavati, iz čega slijedi (52). Uz oznake (53) iz (19), (49) i (52) dobivamo hiperplohe (54) i (55), čiji dijelovi leže na kompleksnoj granici područja $\mathcal{W}$. Plohe, koje se dobivaju iz (46) i (47) su znatno komplicirane. Za plohe (54) i (55) utvrđuje se ispitivanjem forme (59) (uz uvjet (56)) da su analitičke.

Neka su invarijante p_{14} , p_{24} i p_{34} fiksirane uvjetima (66) (ti uvjeti su nužni i dovoljni za egzistenciju realnog područja holomorfности amplitude). Amplituda kao funkcija definirana na ravnini (67) prikazuje se u obliku (68). Pomoću (69) — (71) zaključuje se da su područja $\bar{D}_{12}, \dots$ oblika (72). Iz (72) dobivamo da su kompleksne granice područja $U_{12}, \dots$ analitičke hiperplohe oblika (54) (tačnije (33)), iz čega slijedi da su područja $T_{12}, \dots$ područja holomorfije.

*Institut za matematiku Sveučilišta
u Zagrebu
i Institut »Ruder Bošković«, Zagreb*

Primljeno za publikaciju 11. listopada 1966. u Odjelu za matematičke, fizičke i tehničke nauke Jugoslavenske akademije u Zagrebu.

SPOR BOŠKOVIĆ – ROCHON
POVODOM BOŠKOVIĆEVE RASPRAVE
» MÉMOIRE SUR UN NOUVEAU MICROMÈTRE
ET MÉGAMÈTRE «

Koncem godine 1773. Bošković je došao u Pariz, gdje je u to vrijeme djelovalo više istaknutih naučnika, među kojima spomenimo samo Clairauta, d'Alemberta, Laplacea, Rochona, da ne spominjemo Voltairea, Rousseaua i Diderota, čija se djelatnost nije u tolikoj mjeri ispreplitala s Boškovićevim radom. Ovakvo je jedno društvo – svakako – na različite načine prihvatilo Boškovića, uz to još isusovca, čija se družba tada nalazila pod udarom. Od samog dolaska Bošković ima neprilike, najprije oko svojeg prelaza u Pariz i postavljenja za direktora optike u pomorstvu (Directeur d'optique pour la Marine), kasnije oko prijema u Francusku akademiju nauka, što mu je obećano kad je prelazio iz Italije u Pariz, i najzad oko svojih dviju rasprava koje su bile upućene pariškoj Akademiji nauka. Još za svoga boravka u Italiji, godine 1771, poslao je Bošković Akademiji nauka u Parizu dvije svoje rasprave o određivanju staza kometa [3]. Tek 1776., dakle kad je Bošković bio u Parizu, pročitao je Laplace u Akademiji nauka raspravu u kojoj je dokazivao da su sve metode koje se temelje na pretpostavci jednolikog gibanja po pravcu pogrešne [3]. Iako Bošković pri tome nije izričito spomenuo, bilo je jasno da se to odnosi na njega. Bošković je odbacivao Laplaceove zaključke – kao pogrešne. Obojica traže mišljenje Akademije nauka, i ona određuje komisiju, koja je 4. 6. 1777. donijela svoj izvještaj, u kojem nije dala potpunu zadovoljštinu Boškoviću. Ona je smatrala da su se oba učenjaka međusobno približila u svojim pogledima i preporučila je da i jedan i drugi iznesu svoja otkrića i tako unaprijede znanost [3].

Ovaj se sukob nije ni završio, kad izbi novi, između Boškovića i Rochona¹ povodom rasprave »Mémoire sur un nouveau micromètre et mégamètre«, koju je Bošković predao 7. 5. 1777. ministru mornarice A. R. de Sartineu. Ovu raspravu je zatim 16. 5. 1777. čitao u Akademiji nauka dobar prijatelj Boškovićev – Lalande.² Spor je izbilo ne- uobičajenom žestinom, uz bučnu podršku većine akademika, kojima je to bila povoljna prilika da ocrne Boškovića kao plagijatora i da mu zatvore vrata Akademije nauka u Parizu, u čemu su djelomično i uspjeli.

Da bismo mogli ocijeniti suštinu spora, iznijet ćemo kratak sadržaj Boškovićeve rasprave, zadržavajući se na spornim zamislima i konstrukcijama i ukazujući na njih (sl. 1).

Neka na slici 1 linija DEF predstavlja objektiv jednog durbina, a LEH njegovu optičku os, koja je – kao što je poznato – upravna na liniju DEF . Linija GHJ – koja je također upravna na optičku os – predstavlja mjesta stvarnih slika udaljenih predmeta. Tačka H je fokus (žarište) svjetlosnih zrakâ, koje dolaze u objektiv paralelno s pravcem osi LE , i to je ujedno slika tačke L (nekog predmeta), koja se (teoretski) nalazi na beskonačnoj udaljenosti od objektiva. Tačka K je slika tačke L' i ona se nalazi na glavnoj svjetlosnoj zruci LEK , koja je nagnuta prema optičkoj osi za kut $L'EL$.

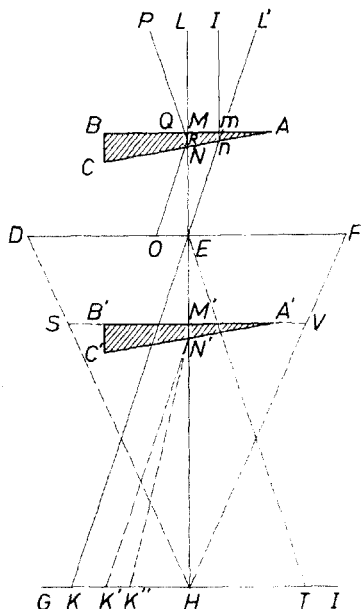
Stavimo sad pred objektiv (izvan durbina) staklenu prizmu čiji je poprečni presjek ABC , a koja ima plohu AB (čiji je poprečni presjek AB) kružnog oblika. Ta kružna ploha ima manji promjer nego što je otvor objektiva DF i upravna je na optičku os LH . Dio svjetlosnih zrakâ koje će prolaziti izvan te prizme stvarat će slike tačaka L i L' na istim mjestima H i K kao da prizma ABC i ne postoji. Slike će samo biti slabije osvijetljene. Dio – pak – svjetlosnih zraka koje prolaze kroz prizmu

¹ Alexis-Marie de Rochon rođen je u Brestu 21. 2. 1741., a umro je 5. 4. 1817. u Parizu. Bio je – kao i Bošković – opat (abbé) i bavio se problemima mehanike i optike. Primljen je u Akademiju nauka u Parizu 25. 11. 1767. godine kao dopisni, a kao pravi član 14. 12. 1783. godine. Zanimljivo je da je upravo on zamijenio Boškovića na položaju direktora za optiku pomorstva, što se vidi iz ovoga akta: »M. l'abbé Boscovich astronome opticien de la marine étant mort, le Roi a nommé à sa place M. l'abbé Rochon de l'Académie des Sciences...« (Paris, Arch. Nation. C 7, 38; akt od 3. 4. 1787).

² Međutim, Branimir Truhelka u svojim bilješkama navodi da je raspravu čitao akademik Leroi (Leroy), a tako je pribilježeno i u zapisnicima sjednica Akademije nauka. – Bošković je bio dopisni član Akademije nauka u Parizu.

ABC nakon dvostruke refrakcije (pri ulazu i izlazu iz prizme) promijenit će svoj prvobitni smjer, a kut otklona (refrakcije) zavisit će od kuta prizme u vrhu A između ploha AB i AC i od vrste stakla od kojeg je prizma izrađena.³

Od svih svjetlosnih zrakâ koje prolaze kroz prizmu ABC sigurno će ih biti i takvih kao što je zraka PQ (sl. 1), koja polazi od tačke P i pod određenim kutom prema optičkoj osi LE dolazi na plohu AB prizme ABC i nakon dvostruke refrakcije u tačkama Q i N izlazi u pravcu NE . Te svjetlosne zrake stvarat će u tački H sliku udaljene tačke P . Prema tome u tački H imamo slike dviju tačaka L i P . Sliku tačke L stvaraju svjetlosne zrake koje prolaze kroz objektiv izvan prizme ABC , a tačke



Sl. 1.

³ Opširnije i s dokazima može se vidjeti u radu navedenom u popisu literature pod brojem [4].

P svjetlosne zrake koje prolaze kroz objektiv i kroz tu prizmu. Produžimo li liniju PQ do njena presjecišta s optičkom osi u tački R , onda je kut LRP mjerilo optičke udaljenosti između tačaka L i P , koje imaju sjedinjene slike u tački H . Lako je dokazati da je taj kut približno jednak polovini kuta u vrhu A prizme, uz uvjet da je taj kut relativno malen [4].

Pogledajmo sad što će se dogoditi kad prizmu ABC približujemo ili udaljujemo od objektiva. Iz slike 1 vidi se da će kut LRP uvijek biti isti, tako da ćemo u vidnom polju imati sjedinjenje slika uvijek dviju istih tačaka L i P u tački H , bez obzira na udaljenost prizme od objektiva, ali samo u tom slučaju ako se prizma nalazi izvan durbina.

Ako je prizma unutar durbina, između objektiva i njegova fokusa, onda se to neće tako dešavati. U tome slučaju prizma je označena s $A'B'C'$ (sl. 1). Pretpostavimo da slika tačke L' koja je dobivena pomoću svjetlosnih zrakâ koje idu samo kroz objektiv pada u tačku K , i da je u toj tački slika i tačke L koja je dobivena od svjetlosnih zrakâ koje prolaze i kroz prizmu i kroz objektiv.

Kad je prizma $A'B'C'$ unutar durbina, slika tačke L' koja je dobivena pomoću svjetlosnih zrakâ koje idu samo kroz objektiv opet će pasti u tačku K . Ali slika tačke L koju čine svjetlosni zraci paralelni s pravcem LEM' izlazeći iz prizme uvijek pod istim kutom (jer je ista prizma, određenih svojstava), u ovom slučaju paralelno s pravcem EK , past će u tačku K' . Dakle, kut $HN'K'$ uvijek je isti, ali udaljenost HK' se mijenja i ona je proporcionalna udaljenosti HN' .

Prema tome, pomicanje prizme $A'B'C'$ ima kao posljedicu mijenjanje tačaka, čije će se slike podudarati sa slikom one tačke koja je dobivena pomoću svjetlosnih zrakâ koje su prošle mimo prizme, odnosno djelovanje će biti analogno promjeni kuta prizme u vrhu A . Dakle, promjenom udaljenosti EM' prizme od objektiva (sl. 1) možemo određivati kutove između raznih tačaka u prostoru. To je zapravo i bio osnovni zadatak koji se u ono doba želio na taj način riješiti. Naime, na taj se način željelo određivati prividne kutove između zvijezda i Sunca ili Mjeseca, zatim prividne veličine Sunčeva ili Mjesečeva kruga (diska), ili najzad visinu nekog nebeskog tijela iznad horizonta.

Ovo Boškovićovo rješenje (naime, da se dodavanjem jedne staklene prizme između objektiva i njegova žarišta, koja se može pomicati uzduž osi durbina) predstavlja prvo sporno pitanje između Boškovića i Rochona. Izgleda da je Rochon naročitu pažnju poklanjao ovome problemu u prepirci s Boškovićem.

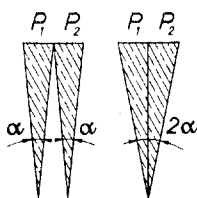
Uz ovo teoretsko rješenje Bošković opširno izlaže kako je sastavljena akromatska prizma, pozivajući se na svoje ranije radove iz optike [5] i [6]. Kod toga naročito naglašava da je otklanjanje kromatske aberacije složen problem, ali da je on to djelomično već riješio i da se i dalje tim problemom bavi. Smatra da je to vrlo zanimljiv i nov dio dioptrike.

Da bi slika koja je dobivena prolazom svjetlosnih zrakâ kroz prizmu i objektiv bila podjednako osvijetljena kao i slika koja nastaje prolazom svjetlosnih zrakâ samo kroz objektiv, nužno je da se promjeri prizme i objektiva odnose kao $1 : 1/2$, što je približno $5 : 7$. Naime, u tom slučaju je površina prizme jednaka površini prstena objektiva, koji ostaje nepokriven s prizmom. Međutim, kako se prolazom kroz prizmu, iz poznatih razloga, gubi nešto od jasnoće slike, Bošković predlaže da odnos prije navedenih promjera bude $5 : 6$. Udaljujući prizmu od objektiva, količina svjetla će se stalno smanjivati. Kad prizma bude na udaljenosti od objektiva koja je jednaka jednoj šestini žarišne daljine objektiva, slika koja nastaje prolazom svjetlosnih zrakâ koje prolaze samo kroz objektiv sasvim će nestati [4].

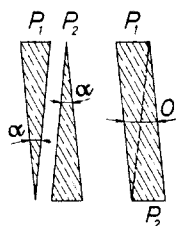
Ove praktične napomene uz teoretsko rješenje naveli smo zbog toga da bismo vidjeli kako je daleko Bošković došao u svojem radu, jer za ovako važne i iscrpne zamisli potrebno je daleko više vremena nego što je sporno vrijeme od četiri nedjelje pri računanju prioriteta, na koje se Rochon poziva.

Uviđajući i nedostatke ovog rješenja, naročito zbog praktične izvedbe ove konstrukcije, Bošković je došao do drugog rješenja, kojim također može mijenjati refrakciju svjetlosnih zrakâ pomoću sistema prizama. Namjesto jedne on uvodi dvije akromatske prizme, čije su osnovice kružnog oblika. Obje prizme imaju približno jednake kutove u svojim vrhovima. Veličina tih kutova je približno jednaka polovini kuta koji se želi mjeriti. Prizme bi bile tako ugrađene da se jedna može okretati oko zajedničke im osi. Tim okretanjem prizme mogu biti dovedene u položaj da im se tanji krajevi podudaraju (sl. 2) i tada je ukupni kut refrakcije složene prizme jednak sumi kutova α (približno 2α , jer su kutovi približno jednaki). U položaju koji se vidi na sl. 3 ukupni kut refrakcije jednak je približno nuli, odnosno različiti kutova α , koji su približno jednaki.

Da bi odredio pojedine vrijednosti kuta refrakcije svjetlosnih zrakâ za pojedine međusobne položaje prizama, Bošković je zamislio da prizme budu ugrađene u kružne prstenove, od kojih bi jedan imao dijametralno izbušene rupice, uz koje bi bili naznačeni podjelci koji bi

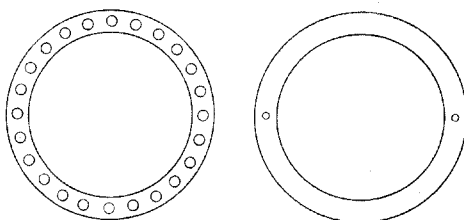


Sl. 2.



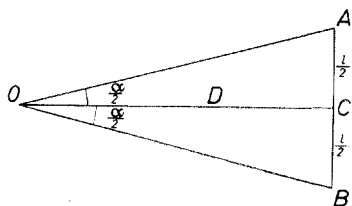
Sl. 3.

označivali veličinu kuta koji se mjeri. Na drugom prstenu bila bi dva konična ili cilindrična zupčića, čija bi veličina bila upravo takva da mogu ulaziti u rupice prvoga prstena (sl. 4).



Sl. 4.

Pomak prstena sa zupčićima prema prstenu koji ima rupice određen je podjelom naznačenom uz rupice na prstenu, a do te podjele došlo bi se mjerenjem na terenu, i to na ovaj način. Na određenim udaljenostima od instrumenta postavljala bi se horizontalna letva s podjelom koja je označena vertikalnim linijama (sl. 5).



Sl. 5.

Iz slike vidimo da je

$$\cotg \frac{\alpha}{2} = \frac{2D}{l}$$

Kut α je, dakle, određen udaljenošću D instrumenta (koji se nalazi u tački O) od letve AB , budući da je „ l “ poznato.

Pretpostavimo li sad da smo okretanjem jedne prizme oko druge doveli da nam se tačka B vidi na istom mjestu gdje i tačka A , znači da se te dvije tačke podudaraju, onda smo zapravo izmjerili kut α , jer su nam dužine D i l poznate. Ako letvu sad udaljujemo ili približujemo instrumentu i svaki put dovedemo da nam se tačke A i B podudaraju u vidnom polju, onda smo mi svaki put izmjerili kut α , koji odgovara raznim udaljenostima letve od instrumenta. Obilježimo li na prstenu s rupicama (sl. 4) odgovarajuće iznose kutova, za koje smo morali pomicati prsten sa zupčicama da bismo dobili podudaranje tačaka A i B , dobili smo jednom zauvijek прибор s kojim možemo mjeriti kutove između dviju tačaka, ili ako nam je poznata udaljenost tih dviju tačaka, onda mjerenjem kuta α dobivamo udaljenost D . Ovaj drugi postupak (određivanje dužine D) našao je široku primjenu u geodetskoj praksi. A ovakva konstrukcija kakvu je predložio Bošković, s malim konstruktivnim poboljšanjima, u potpunosti je danas prihvaćena, s dužnim priznanjem njenu izumitelju.

Ovo je osnovna zamisao koju je Bošković dalje iscrpno obradio. Od njegovih opisa navest ćemo u glavnim crtama samo neke, i to zbog toga da bi se vidjelo koliko je Bošković u svojem radu otišao dalje od svog suparnika. Naime, ovo je drugo sporno rješenje između Boškovića i Rochona (za ovo rješenje, kao što ćemo kasnije vidjeti, Rochon je dao samo principijelne postavke).

Ponajprije Bošković predlaže da se prizme ugrade u prstenove (sl. 4) koji omogućuju okretanje jedne prizme oko zajedničke im osi, a podjela na jedneme od njih daje nam iznose kutovâ zaokreta jedne prizme oko druge, odnosno daje odmah veličine kutovâ koje mjerimo. Da bi što bolje otklonio kromatsku aberaciju, predviđa da svaka od ovih dviju prizama bude sastavljena od dvije prizme, i to jedne od flint, a druge od običnog stakla. Osim toga ove prizme ne moraju biti iste jačine (istih refrakcija). Ako se predviđa da kutovi koje ćemo mjeriti neće biti veći od 32 minute, onda će biti dovoljno da prva prizma skreće svjetlosne zrake za 31 minutu, a druga svega za 3 minute. U ovom slučaju okretanjem prizama moći ćemo mjeriti sve kutove koji se nalaze između 28 i 34 minute (suma i razlika jačina pojedine prizme). Od osobite je važnosti za kasnije konstrukcije zamisao Boškovića da se taj uređaj (sistem prizama) postavlja izvan durbina pred objektivom. Isto tako, ova kombinacija dviju akromatskih prizama, od kojih jedna i to nepomična, ima znatno veću moć refrakcije, a druga, pokretna, manju, ima tu prednost da se može znatno tačnije mjeriti tražena veličina (du-

žina ili kut). Naime, pokretna prizma omogućuje da se odredi samo razlika (zapravo suma ili razlika) između optičke moći nepokretne i pokretne prizme. Kako je kut otklona kod pokretne prizme relativno malog iznosa, pogodnom konstrukcijom može se ostvariti da se taj mali kut očitava na podjeljcima koji su naneseni na cijeli kružni bubanj. Tako, ako je konstrukcija bubnja takva da se direktno mogu očitavati 90-i dijelovi sekunde, onda bismo za prizmu čija je refrakcija 3 minute mogli direktno čitati dvije sekunde ($3' : 90$), a dijelovi sekunde mogli bi se procjenjivati.

Opisujući detaljno i konstrukciju takvih uređaja, Bošković kaže: »Un ouvrier habile en aura assez pour imaginer le mécanisme le plus simple et exécute cet instrument.« Kao što danas znamo, to se kasnije (dvadesetih godina ovoga stoljeća) potpuno ostvarilo.

Pored toga Bošković izlaže kako se može na ovaj uređaj s prve dvije prizme dodati jedan ili više analognih uređaja koji bi omogućivali da se mjere kutovi i do 100 stupnjeva. Čitanje na svakom pojedinom uređaju vršilo bi se odvojeno, tako da bi se dobio sličan način kao kod običnog sata, gdje na jednom mjestu čitamo sate, na drugom minute a na trećem sekunde. Ovakvim uređajem od više dvostrukih prizama mogli bismo se dobro koristiti u određivanju geografske širine i velikih udaljenosti između nebeskih tijela. Ove instrumente naziva Bošković megametrima.

Ovdje je zanimljivo spomenuti da Bošković polaže veliku nadu u kemiju, koja bi u budućnosti mogla pomoći da se dođe do tako providnih materijala koji bi omogućili konstrukciju optičkih instrumenata oslobođenih svih nedostataka koje susrećemo kod sadašnjih materijala (stakla).

Međutim, Bošković je uvjeren da se običnim akromatskim prizmama, koje se dobiju kombinacijom flint-stakla i običnog stakla, mogu dobiti dobri megometri za mjerenje kutova do 20 stupnjeva.

U nastavku rasprave Bošković opisuje primjenu gorskog kristala (cristal de roche) kao i islandskog kristala (cristal d'Island), odakle se vidi da on vrlo dobro poznaje učinak kristalâ dvolomaca. Spominje da je jedna od najvećih teškoća u tome da se nadu veći i čisti komadi kristala, a zatim da ih je vrlo teško obrađivati i da daju relativno malene kutove refrakcije (svoga nekoliko minuta). Kao prednost kristalnih prizama ističe da je osvjetljenje obiju slika približno isto kod pomicanja prizama uzduž osi durbina. Da bi se prizma od gorskog kristala

oslobodila od kromatske aberacije, preporučuje da joj se doda prizma od običnog stakla, pozivajući se na svoje radove iz optike koje je već ranije objavio u Beču [5].

Na kraju rasprave Bošković iscrpno opisuje primjenu sistema od dviju prizama od običnog stakla, koji smo mi naprijed ukratko prikazali. Razmatra razne međusobne položaje tih prizama i geometrijski dokazuje da su između svih položaja koje mogu prizme međusobno zauzeti najinteresantniji oni kad su prelomni kutovi sistemâ prizama jednaki nuli ili sumi prelomnih kutova pojedine prizme. Ovakav sistem od dvije prizme Bošković razmatra kao jednu prizmu s promijenljivim kutom refrakcije.

Ova – ukratko prikazana – rasprava izaziva spor koji se u ono doba jako nepovoljno svršio za našega Boškovića.

Kao što smo spomenuli, raspravu je u Akademiji 16. 5. 1777. čitao Lalande⁴ koji je sam smatrao da je rasprava tako značajna da se može čitati u Akademiji nauka.

Tih dana Bošković boravi u Nointelleu blizu Beaumonta [2], oko 8 milja od Pariza, gdje ga obavještavaju o buri koju je izazvala njegova rasprava. Jedan od dobronamjernih izvjestilaca je Condorcet, sekretar Akademije nauka, na čije pismo od 17. 5. 1777. odgovara Bošković odmah idućeg dana (18. 5. 1777). U pismu Bošković objašnjava šta ga je navelo da prepusti raspravu Lalandeu i prečutno dozvoli da se ona čita u Akademiji, ovim riječima [7]:

«... en le faisant prier de le faire publier dans le journal des Sçavants, comme je me proposais de le faire inserer encore dans d'autres journaux. Je lui ai mandé aussi, que comme on ne pourrait pas le faire imprimer si tôt à cause des articles déjà préparés avant le mien. il pourrait le faire voir à qui bon lui semblerait, et, s'il le jugerait à propos, en faire part à l'Académie.» Kao što vidimo, Lalande je, ipak, imao, pa makar i indirektno, odobrenje da može raspravu čitati u Akademiji. Ovo navodimo zbog toga što Bošković kasnije u toku spora kaže da on nije raspravu ni uputio Akademiji. Odmah dalje u istom pismu Bošković piše: «...» Mon intention était, comme je l'ai aussi exprimé sur la fin du même mémoire, de faire connaître au plus tôt une découverte, que je crois très utile à l'Astronomie, et que j'espère de rendre encore bien utile à la marine, à fin de donner lieu à tout le

⁴ Primjedba 2. na str. 136.

monde d'y réfléchir, et de perfectionner le mécanisme des instruments par de moyens, qui pourront être beaucoup plus simples, et faciles à employer dans l'usage ordinaire, que ceux, que j'ai imaginés jusqu'à présent.«

U istom pismu Bošković se osvrće na spor s Laplaceom, koji još nije završen, i kaže da će u oba ova slučaja čekati na javnu ocjenu: »... je dois attendre à son temps le jugement du public.«

Odmah iza ovoga pisma (čiji se prepis nalazi u Arhivu Jugoslaven-ske akademije u Zagrebu) Bošković piše još jedno pismo sekretaru Aka-demije nauka u Parizu (21. 5. 1777), koje Truhelka nije mogao naći u arhivu te akademije. Međutim, to se pismo nalazi među korespon-dencijom Boškovićevom, koju je objelodanio V. Varićak u 185. knjizi »Rada« Jugoslaven-ske akademije 1911. godine na str. 420 [10].⁵

U ovome pismu Bošković piše da mu je jedan njegov prijatelj javio da se Rochon svakome žali zbog sadržaja njegove rasprave. »Međutim, ja sam jasno rekao«, kaže Bošković, »u svojem prvom pismu, šta sam ja želio s ovom raspravom. Ja sam je smatrao novom i korisnom za astronomiju i mornaricu i nikako nisam želio da ona bude predmet spora pred slavnim skupom kojem ste sekretar. Ako je Rochon zaista došao do istog otkrića prije više godina, ja mu to nikako ne spo-rim. Ja sam polaskan time ako sam doprinio da je to sada postalo po-znato. Kad se u Parizu govorilo o njegovu mikrometru u kojem se isko-rištava dvostruka refrakcija gorskog kristala, ja sam pokazao opatu Fontani učinak prizme od običnog stakla, i to prije nego sam napravio model instrumenta i prije nego što sam napisao svoju raspravu. On ništa nije znao o ovakvim Rochonovim konstrukcijama. O tome sam govorio i gospodinu Lalandeu. Ni on nije ništa znao, jer mi nije rekao nijedne riječi, a da je znao, zar bi on tada nosio moju raspravu u Aka-demiju. Pošto sam predao svoju raspravu ministru (Sartineu, 7. 5. 1777), govorio sam o njoj s vitezom Borda i gospodinom Messierom. Nago-vijestio sam im da ću je objaviti u časopisima, ali oni mi ne dadoše nikakve obavijesti da o tome nešto znaju. Drugi mi samo reče da je gospodin Rochon rekao da je moja rasprava samo dodatak njegovoj, ali bitni dio da je njegov.« Dalje se Bošković u pismu poziva i na go-spodina Slopa, astronoma na Univerzitetu u Pisi, koji isto tako nije

⁵ Pismo je faksimilirano u 36. svesci: Crelle, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1948.

ništa čuo o mikrometrima te vrste. Na kraju pisma Bošković izražava nadu da valjda nitko neće pomisliti da se on – koji je toliko djela napisao i još sada to isto radi – tuđima djelima hvali.

Kao što je poznato, od ovoga pisma Bošković je imao više štete nego koristi, jer su svi ovi nabrojani francuski učenjaci poricali da su vodili s Boškovićem ovakve razgovore. Po našem mišljenju najviše je zaka-
zao Lalande, jer da on i sam nije bio uvjeren da su Boškovićeve ideje i konstrukcije nove i originalne, ne bi se prihvatio toga da ih iznese (i čita?) na sjednicama Akademije nauka.

Kako je Bošković u uvodu ove svoje rasprave spomenuo Rochona i njegove radove iz ovoga područja, kao i osobe pred kojima je on iznosio svoja rješenja i poboljšanja Rochonovih rješenja, to Rochon traži od Akademije da odredi komisiju koja će ispitati sve okolnosti i donijeti sud o prioritetu. Istovremeno se Rochon pobrinuo da dobije pismene izjave od osoba koje je Bošković naveo kao svoje sugovornike u razgovorima koji su vođeni prije čitanja njegove rasprave u Akademiji. Tako Fontana, na koga se Bošković najviše oslanja, daje pismenu izjavu već 19. 5. 1777, Lalande 28. 5. 1777, Messier 28. 5. 1777. i Borda isto u tome mjesecu (ali nema označenog datuma). Svakako je najznačajnija izjava opata Fontane, koju zbog toga u cijelosti dajemo.

Certificat de M. l'abbé Fontana

Moi, sous-signé certifie comme étant la pure vérité, qu'auparavant que M. Turgot, Ministre d'État me parlât de l'usage que faisait M. l'abbé Rochon de la double réfraction, occasionnée par le cristal de roche, pour mesurer des angles et les diamètres des planètes, je n'avais jamais rien lu, ni entendu dire sur cette matière; que M. Turgot ayant bien voulu me permettre d'assister à diverses expériences faites à ce sujet en sa maison par M. l'abbé Rochon, et auxquelles furent de même présents MM. le Marquis de Condorcet, et Desmarests, je les trouvais absolument neuves, ingénieuses, et utiles. Quelque temps après M. Turgot m'a dit que M. l'abbé Rochon lui avait montré une lunette avec laquelle il pouvait mesurer les angles à une seconde près de précision, et même plus, et cela en faisant mouvoir au dedans de cette lunette le micromètre de cristal de roche fait sur ses principes, c'est à dire en l'approchant, ou l'éloignant de l'objectif. Ayant eu, par la suite, l'occasion de parler des découvertes physiques avec M. l'abbé Bosco-

vich je lui communiquai celles de M. l'abbé Rochon, comme étant déjà très connues à Paris; M. l'abbé Boscovich me dit qu'il avait eu des idées analogues à celles-là, et que M. de Lalande lui avait déjà parlé des découvertes de M. l'abbé Rochon et de ce que ce dernier avait lu à l'Académie des Sciences sur cette matière. (Citati na francuskom donosit će se po današnjem pravopisu).

Paris le 19 mai 1777.

Félix Fontana

*Physicien de son Altesse Royale
Le Grand Duc de Toscane et Directeur
du Cabinet d'Histoire Naturelle.*

Ona je – po Boškovićevu mišljenju – unijela veliku zbrku u tok događaja i s njom je Bošković više nego nezadovoljan. Međutim, s obzirom na prilike koje su u ono doba vladale u naučnim krugovima oko Boškovića, Fontana se nije usudio stati na stranu Boškovića, koji je bio u nezavidnom položaju, i to zbog zavisti francuskih naučenjaka. Izzavanc ugledom koji je uživao u francuskim višim krugovima. Pročitamo li pažljivo ovu izjavu, čini nam se da je ona vrlo mudro napisana i da bi Bošković mogao s njom biti potpuno zadovoljan. Naime, u ovoj izjavi daje se puno pravo i prioritet Rochonu, ali samo s priznama od gorskog kristala. To Fontana na dva mjesta ističe, a to je potpuno dovoljno za Boškovića, i toga se Bošković trebao držati. Fontana nijednom riječi ne spominje staklene prizme, iako je to mogao učiniti. Stoga smatramo da ova izjava potkrepljuje Boškovićeve tvrdnje i ide potpuno njemu u prilog. Bošković je nezadovoljan njome jer on očekuje od Fontane da potvrdi da mu je on prvi govorio o promjeni kuta otklona sistema prizama kad se one pomiču uzduž i unutar durbina. To mu Fontana – možda – nije mogao dati jer se nije tačno sjećao datuma i razgovora, a možda se nije htio ni smio zamjeriti francuskim akademikima. Međutim, pravilna interpretacija ove izjave daje punu podršku Boškoviću, jer ona daje Rochonu ideje i konstrukcije samo s priznama od gorskog kristala.

Za Boškovića je mnogo nepovoljnija izjava Lalandea, koja glasi:

»L'Académie m'ayant interpellé de m'expliquer sur ce qui s'est passé entre M. Boscovich et moi à ce sujet, je déclare que je n'avait point entendu parler à M. l'abbé Boscovich, ni à qui que se fût, de l'idée ingénieuse de faire mouvoir un prisme le long de l'axe d'une lunette, ni de faire mouvoir un prisme circulaire, lorsque M. l'abbé Rochon a

présenté cette découverte à l'Académie; et que lorsque j'en ai parlé à M. l'abbé Boscovich, il ne m'a point dit qu'il eût eu cette idée. Fait à Paris, le 28 mai 1777. Signé de Lalande, de l'Académie des Sciences.»

U ovoj izjavi jako je nepovoljno to što Lalande tvrdi da mu Bošković nikad nije govorio da i on ima sličnih rješenja prije nego što je Rochon podnio svoje radove Akademiji. Međutim, izjava je nepotpuna, jer Lalande ne spominje o kakvim se prizmama radi – staklenim ili od gorskog kristala. On, isto, svu težinu daje pomicanju prizama uzduž durbina i promjeni kuta refrakcije okretanjem jedne prizme oko druge. Baš ova nepotpunost više ide na štetu Boškoviću nego Rochonu.

Borda u svojoj izjavi iznosi da mu je Bošković tek 14. 5. 1777., dakle nakon podnošenja rasprave ministru Sartineu, saopćio da postoji način da prizme od običnog stakla zamijene prizme od gorskog kristala, koje je dosada primjenjivao Rochon u konstrukciji optičkih mikrometara. Izjava je bez datuma, ali je svakako data prije 28. 5. 1777. Izjava je od nekog posebnog značenja, ali kad se radi o vremenskom prioritetu, više ide na štetu Boškoviću nego Rochonu.

Sve se to odvija do 28. 5. 1777., kada Akademija nauka određuje komisiju u sastavu: Bézout, Borda, Cassini (sin) i Vandermonde. Sad spor poprima zvaničan tok i obje strane poduzimaju određene akcije kojima bi potkrijepile svoja stajališta. Tako je, prema bilješkama Truhelke [7], Lalande pisao 30. 5. 1777. Boškoviću jedno pismo, koje Bošković nije primio, pa mu on stoga ponovo piše 4. 6. 1777. i saopćuje mu da . . . »... pour calmer l'Académie et empêcher qu'on ne portât des plaintes au ministre . . .« da je on izjavio:

a) da Bošković ne pretendira na prioritet pomicanja prizama uzduž osi durbina,

b) da Bošković želi da se »Mémoire . . .« uzme »comme non venu«,

c) da je Bošković sebi pripisivao samo upotrebu staklenih prizama.

Zatim mu piše da on (Lalande) želi da Bošković u tom smislu piše Akademiji i da pismo pošalje njemu, i da se ni Fontana ni on ne mogu sjetiti da im je Bošković prvi govorio o pomicanju prizama uzduž osi durbina [7].

Prema tom savjetu (vrlo vjerojatno) Bošković je pisao 5. 6. 1777., sekretaru Akademije Condorcetu »... pour couper court à tout ce qu'il y avait de contestations . . .«

U tome pismu još traži »... communication de tout ce qu'il y avait sur le sujet en contestation pour démêler ce qui est d'autrui et le déclarer ouvertement en laissant à moi ce qui me reste...«⁶

Ovo je pismo čitao Borda članovima komisije 7. 6. 1777.

Istoga dana (7. 6. 1777) Rochon je zatražio od Akademije da se Boškoviću pošalju svi njegovi radovi koji se odnose na konstrukciju mikrometra.⁷ U sporazumu (vjerojatno) s članovima komisije sâm Rochon dostavlja Boškoviću svoje rasprave koje su čitane u Akademiji 25. 1., 26. 2., 9. 4. i 7. 6. 1777. Pored toga je Bošković proučio i ranije Rochonove radove (iz 1768. g.) koji se odnose na ove i slične probleme. Iza toga slijedi – negdje koncem lipnja 1777 – Boškovićevo opširno pismo Akademiji, koje je 2. srpnja iste godine upućeno članovima komisije.⁸ U pismu je Bošković vrlo iscrpno iznio čitav tok spora i ukazao na sve ono što on smatra da je bitno i šta je njegovo kod spornih zamisli i rješenja. Zbog zanimljivosti, a i važnosti za sâm spor, iznijet ćemo ukratko sadržaj toga pisma, citirajući važnije rečenice i misli.

U uvodu ovoga pisma Bošković citira nekoliko rečenica iz pisma sekretaru Akademije Condorcetu od 5. 6. 1777. To je jedini podatak o tome pismu, jer njega danas nema [7].

U uvodu dalje napominje da mu je Rochon, po odobrenju Akademije, poslao svoje radove, koje je iscrpno proučio. Nakon toga prelazi na opis poslatih radova i počinje s raspravom koju je Rochon čitao 25. 1. 1777., pa između ostalog kaže: »... il n'y a que le micromètre objectif formé par le mouvement circulaire d'un prisme sur l'autre, chacun de ces deux prismes est composé de cristal de roche et de verre franc pour le rendre achromatique«. Druga rasprava, čitana 27. 2. iste godine, smatrana je kao dodatak uz prvu, a opisuje prvi put upotrebu prizme koja se pomiče uzduž osi durbina. Kakva je ta prizma, Bošković ne govori u svojem pismu, ali dodaje: »Je crois que les expressions qu'il y emploie en l'énonçant font bien voir, qu'il a eu cette idée, quelque temps après avoir lu son premier mémoire.«

U trećoj raspravi, koja je čitana 9. 4. 1777., Bošković nalazi da je iscrpno prikazana upotreba prizme koja se pomiče uzduž osi durbina. Prizma je od gorskog kristala, to Bošković ne navodi, ali on naglašava

⁶ Iz uvoda pisma upućenog članovima komisije 2. 7. 1777, a pismo od 5. 6. 1777. nedostaje.

⁷ Iz prijepisa zapisnika sjednica pariške Akademije nauka.

⁸ Prijepis ovog pisma nalazi se u Arhivu Jugoslavenske akademije u Zagrebu.

da je Rochon rekao da bi se taj mikrometar mogao primijeniti s istim uspjehom pri mjerenju i većih kutova kad bi se upotrijebio islandski kristal.

Na kraju iznosi da je Rochon u ovoj raspravi opisao sistem od dvije akromatske staklene prizme, koje okrećući se jedna oko druge omogućuju da se mjere kutovi od nule do sume kutova preloma obiju prizama.

U posljednjoj radnji (od 7. 6. 1777), koja za nas nije od osobitog interesa, jer je došla poslije Boškovićeve rasprave koja je izazvala ovaj spor, Rochon navodi neke druge materijale koji bi se mogli upotrijebiti umjesto gorskog kristala. Tako spominje dijamant, a zadržava se na islandskom kristalu, koji ima mnogo veću moć refrakcije od gorskog kristala.

Pregledavajući starije Rochonove radove, Bošković spominje da je u njegovim radovima iz 1768. našao dva mjesta gdje se govori o ovim problemima. To su 60. i 88. strana iz Rochonova djela »*Opuscules mathématiques*«, na koje ćemo se vratiti kasnije, kad budemo iznosili definitivno mišljenje o ovom sporu. Bošković se sasvim kratko osvrnuo na sadržaj tih dviju strana.

Završavajući ovaj prikaz, Bošković kaže: »Voici tout ce que j'ai trouvé dans ce, qui m'a été communiqué par M. l'abbé Rochon, et que j'ai vu dans la collection ancienne des ses opuscles.

Dans le temps, que j'ai écrit mon mémoire, je ne savais rien de ces anciens opuscles. Je vois à présent, qu'il y a employé des prismes de verre en les appliquant aux objectifs; mais leur usage dans cette application est très différent de l'usage, que j'en ai fait dans mon mémoire, comme on s'en apercevra aisément en comparant ces ouvrages. Le prisme dans ces instruments restait toujours sans aucun mouvement analogue à ceux que M. l'abbé Rochon a employé dans son nouveau micromètre de cristal de roche, et que j'ai retenu, en y substituant le verre simple.«

Odmah nakon ovoga uvoda Bošković objašnjava kad je on i kako prvi put nešto čuo o Rochonovim radovima. Nešto malo poslije čitanja prve rasprave Rochonove u Akademiji nauka (dakle nešto poslije 25. 1. 1777) pričao mu je opat Fontana⁹ o pokusima i upotrebi prizama od gorskog kristala da bi se dobile slike dviju raznih tačaka na jednom

⁹ Felix Fontana (1735–1803), fizičar velikog vojvode toskanskog, poslije profesor matematike u Milanu i Paviji [2].

mjestu. Bošković mu je odmah primijetio da on ima mnogo jednostavniji način da se dobije isti učinak, i to samo pomoću jedne staklene prizme, čijim se pomicanjem uzduž osi durbina dobivaju slike dviju tačaka koje su na raznim udaljenostima.

»*Bien des jours après*«, neposredno pred čitanje druge Rochonove rasprave u Akademiji (dakle prije 27. 2. 1777) došao je Bošković Fontani, gdje je zatekao gospodina Turgota¹⁰. Kad je on otišao, opat Fontana saopćava Boškoviću da je Turgot došao zbog toga da mu javi da je i Rochon – također – došao do pravolinijskog pomicanja samo jedne prizme (ali ne kaže kakve prizme) uzduž osi durbina, donoseći to kao vrlo zanimljivu novost, dodajući još k tome da će Rochon iznijeti to na sljedećoj sjednici Akademije nauka. Bošković mu je odmah prigovorio da je mogao reći da je on njemu već mnogo prije prikazao istu ideju. On se tada ispričavao »*en disant, qu'il n'avait pas jugé à propos d'en parler, pour ne pas donner des suppositions de quelque accord, pour donner à moi l'antériorité de la découverte*«. Iako Bošković nije bio zadovoljan s ovim odgovorom, on mu je jednostavno rekao da on s te strane ništa ne očekuje i da mu je stalo samo do javnog dobra.

Vraćajući se ponovo na treću raspravu (od 9. 4. 1777) Bošković iznosi da je na kraju ove rasprave Rochon opisao upotrebu akromatskih prizama, ali se nije izričito izrazio da su to prizme od običnog stakla. Tačno je da Rochon nije izričito rekao da su to staklene prizme, ali može se sa sigurnošću utvrditi da to mogu biti samo staklene prizme, i to prema njihovu kutu refrakcije. Dakle, tu ne može biti dvojbe.

Međutim, mnogo je zanimljivija tvrdnja Boškovićeva u kojoj on kaže: »*Des personnes qui ont assisté le 9 avril à la lecture de ce mémoire m'ont assuré que ce jour là M. l'abbé Rochon n'y a lu que la première partie dans laquelle il ne fait usage que de la double réfraction du cristal de roche, le reste ayant été lu longtemps après. Si cela est vrai on ne pouvoit pas savoir dans ce temps là, qu'il y avait dans le même mémoire l'usage des prismes du simple verre.*«

Ovo je sasvim tačno, što se lako može utvrditi iz zapisnika sjednica Akademije nauka [7] i iz rasprave koja je štampana u *Histoire de l'Académie Royale*, i to tek 1780., str. 64–68. Na strani 68. naročito je naglašeno da se ova rasprava sada prvi put objavljuje, ali se traži da se smatra da je pisac (Rochon) ovo iznio 9. 4. 1777. Neobično zanimljiva

¹⁰ Turgot, ministar mornarice 1774. g., pristaša enciklopedista, a po tom i Boškovićevih protivnika [2].

napomena i traženje. Sve to ide u prilog sumnjama Boškovićevim, ali se članovi komisije nisu na to osvrnuli. Na ovaj dio Rochonove rasprave vratit ćemo se još jednom, pri donošenju konačnih zaključaka.

U četvrtoj raspravi (7. 6. 1777), kaže Bošković, još se jasnije vidi da Rochon nije nikad pomišljao na primjenu staklenih prizama u ove svrhe, jer on mjesto gorskog kristala uvodi islandski kristal da bi mogao izmjeriti prividni promjer Sunca.

Bošković dalje kaže da je on ovdje iznio potpuno vjerno i iskreno sve ono što je našao u starijim i novijim Rochonovim radovima, što bi se odnosilo na sporna pitanja. Ponavlja da je on u svojoj raspravi naveo da je Rochon prvi za konstrukciju mikrometara upotrijebio kristalne prizme, koje se mogu kružno okretati oko svojih osi. Međutim, za pravocrtno pomicanje prizama (ne kaže kakvih prizama) uzduž osi durbina ja nisam tada znao – kaže Bošković – a ne znam ni danas koji je od nas dvojice to prije zamislio. Uza sve to Bošković je napisao »il a le mérite d'avoir imaginé la même chose dans le même temps et peut-être avant moi« a malo dalje zatim: »il a le mérite d'une belle découverte, et l'astronomie lui en aura toute l'obligation«. Zbog ovih izjava Bošković je očekivao da će mu Rochon biti zahvalan.

Ali Bošković ne može da se oslobodi svojih sumnji i pokušava da objasni otkuda one dolaze. Ja nisam označio, kaže Bošković, vrijeme kad je Rochon došao na ideju o pravocrtnom pomicanju prizama uzduž durbina, ali sam imao pravo da sumnjam da je on to otkrio poslije mene. Gospodin Turgot je došao Fontani i donio njegovu ideju kao novo otkriće, a ja sam to već prije zamislio, čak, štaviše, o tome i govorio (misli s Fontanom). Uza sve to on ne traži ništa. On se samo žali na Fontanu što u familijarnom razgovoru nije rekao Turgotu da je upoznat s tom idejom već prije od drugoga (Boškovića).

Opat Fontana ne potvrđuje sada sve ovo što sam ja iznio, kaže Bošković, priznavajući neke bitne činjenice. Za ostalo (misli se što Fontana ne priznaje), produžuje dalje Bošković, nadam se da se ne misli da sam ja u stanju »de mentir avec tant d'effronterie, en composant tant de circonstances, qui sont si détaillées«. Kako je Fontana na početku ovog sukoba dao pismenu izjavu koja je odlučno protiv mene, u kojoj on uvjerava da ja njemu nisam ništa govorio o pravocrtnom pomicanju prizama prije nego što je Rochon čitao o tome svoju raspravu u Akademiji, pisao sam mu sa sela, gdje sam se tada nalazio, podsjećajući ga na okolnosti koje sam naprijed iznio, moleći ga da objasni stvari onako kako su tekle, jer je nemoguće da se ne sjeća razgovora koji smo

vodili nakon odlaska gospodina Turgota i moga prigovora (misli na prigovor što Fontana nije odmah tada rekao Turgotu da mu je Bošković već ranije govorio o tome što je Turgot donio kao značajnu novost) On mi nije odgovorio da se toga ne sjeća, nego da je njegovo svjedočenje beskorisno i da ne predstavlja pravni dokaz. Ja sam mu odgovorio da se ovdje ne radi o pravnom dokazu za moj prioritet, budući da ja tu ništa drugo ne tražim nego da se utvrdi istina o tome da sam ja njemu pokazao svoju raspravu prije nego što sam je odnio ministru Sartineu. I ne samo to, on mi je ponudio jednog svoga suradnika, koji dosta dobro crta, da nacрта ove instrumente po mojim zamislima. I drugi njegov odgovor glasio je da bi njegovo svjedočenje bilo nekorisno, jer nije po zakonu (*légal*). Kako sam ja stalno i uporno zahtijevao da je potrebno da on otkloni vrlo nepovoljan dojam koji je proizvela njegova prva pismena izjava, i stalno ponavljao da nemam nikakve potrebe za pravnim dokazom jer ga nisam ni tražio u svojoj raspravi, ali kako sam napadnut, ja imam pravo da se utvrdi istina. Na koncu, on mi je pisao da će potvrditi ono što sam pokazao u pojedinostima (*di attestare quelle, che ella ha scritto ne soi fogli come comunicatomi in particolare*), a dodao je da je to već učinio kod više osoba, među kojima je i gospodin Vandermont (*Vandermonde*), a da će to izjaviti gospodinu *le chevalier Borda*. Uvjeravan sam da je on to zaista i učinio i da je rekao da sam mu govorio o pravocrtnom pomicanju prizama, i to jedan dan prije nego što mu je o tome govorio Turgot. Već s tim, vidi se, potvrđuje istinu od koje se u početku ogradio, a to je da sam ja njemu prije o tome govorio nego što mu je g. Turgot saopćio otkriće Rochonovo. Ja sam mu se požalio u jednom pismu zbog ograničenja na 24 sata, što ne odgovara istini, jer sam ja u svojoj raspravi naveo nekoliko dana. Ja sam mu to ponavljao nekoliko puta i nagonio ga da iznese pravu istinu. U svome odgovoru on kaže da ne može sada u pameti imati sve te okolnosti kao što ih imam ja koji sam neposredno zainteresiran za tu stvar.

Ja insistiram na svim tim pojedinostima, kaže dalje Bošković, jer se radi o mojoj časti, a ne da dobijem neki pravni dokaz. Ali ja se nadam da će svi oni koji me dobro poznaju prije povjerovati da je opat Fontana zaboravio pojedinosti, ili da je imao neki razlog da ih zataji, nego da sam ja sposoban da nešto neistinito tvrdim s tolikom jasnoćom i tačnošću. Ali ovdje se radi o pojedinostima koje su se dogodile između dviju strana bez svjedoka.

Kakvo pravo prioriteta ja mogu tražiti, nastavlja Bošković, kad sam već u svojoj raspravi rekao »il a le mérite d'avoir imaginé la même chose dans le même temps et j'y ai ajouté et peut-être avant moi et absolument sans avoir connaissance de mes idées«. I malo dalje: »il a le mérite d'une belle découverte et l'Astronomie lui en aura toute l'obligation, Qui dit que l'Astronomie lui aura tout l'obligation reserve-t-il quelque partie d'obligation pour lui à réclamer juridiquement?«

Zatim se Bošković u jednoj poglavlju osvrće prilično oštro na ono što se dešavalo i govorilo u Akademiji pri čitanju njegove rasprave. To ovdje namjerno izostavljamo, jer nije od nekog značenja za sâm spor.

Svoje pismo Bošković završava ovim riječima:

»Ce que j'ai dit jusqu'ici se rapporte à ce qu'on a prétendu, que j'ai volé à un autre: je dirai à présent en deux mots, ce que je crois qu'il me reste en propre. Je crois jusqu'à présent que la substitution du verre simple au cristal de roche est à moi avec le principe du mouvement de la double image, bien différant de celui de la double réfraction du cristal de roche. Au moins je le croirai jusqu'à ce que quelqu'un le réclame avec raison. Celui-là est un point essentiel, parce qu'on obtient les mêmes avantages, et beaucoup plus, à cause des angles très grands qu'on peut mesurer par ce moyen en adossant plusieurs prismes selon que je l'ai indiqué dans mon mémoire, et dans la première lettre que j'ai eu l'honneur de vous écrire: on obtient tout cela par une substance qu'on trouve et qu'on travaille plus aisément, et qui coute beaucoup moins: je suis persuadé que ces trois articles feront toujours donner la préférence à mon instrument sur celui du cristal de roche ou d'Islande qui ne sera jamais d'usage commun.«

Pismo ima još jednu nedovršenu rečenicu, barem prema bilješkama koje nama stoje na raspolaganju [7].

Međutim i ovo je potpuno dovoljno da se dobije jasna slika o ovim događajima. Najzanimljivije i najvažnije su upravo proročanske riječi Boškovićeve na završetku pisma o upotrebi kristalnih prizama u budućnosti. Kao što danas znademo, te su se riječi obistinile. Kasnije generacije prihvatile su Boškovića kao stvaraoca sistema staklenih prizama, ne vodeći uopće računa o prioritetu izuma i izumitelja pravocrtnog pomicanja prizama uzduž osi durbina.

Izgleda da je to posljednje Boškovićevo pismo Akademiji, pisano u toku rada komisije kojoj je bio zadatak da donese mišljenje o spornim problemima.

Komisija, čiji smo sastav naprijed naveli, iznijela je svoje mišljenje 23. 8. 1777.

Zbog važnosti samog akta i konačne ocjene o toku spora iznijet ćemo sve glavnije pojedinosti onako kako ih je komisija izlagala.

Poslije uobičajenog uvoda, iz kojeg se vidi da je Rochon molio Akademiju da se na ovaj način riješi nastali spor, počinju s izlaganjem Rochonovih radova.

Opat Rochon se već od 1767. bavio primjenom prizama, kaže komisija, u mjerenju kutova, dodajući ih uz astrometar. To se može vidjeti u jednoj njegovoj ranijoj raspravi, koja je štampana u njegovim matematičkim radovima (*Opuscles Mathématiques*, Brest, 1768). Tu on iznosi način kako se instrument gospodina Bouguera može osposobiti za mjerenje mnogo većih kutova, dodajući na jedan od durbina (ovaj instrument ima 2 durbina) akromatske prizme.¹¹ Akromatičnost se dobiva sastavljanjem triju prizama od tri razne vrste stakla. Naglašavaju da je bilo najteže dobiti sistem akromatskih prizama.

Poslije više godina, zapravo 1776, Rochon se ponovo bavi otklanjanjem kromatske aberacije kod prizama, što je od osobite važnosti kod svih durbina. Rasprava u kojoj govori o tome štampana je u *Würtembergu* 24. 2. 1776. Kromatsku aberaciju otklanja kombinacijom triju prizama, jedne od flint stakla i dviju od običnog stakla. Prizme su ugrađene u jedan prsten, i to tako da se dvije prizme od običnog stakla mogu okretati u suprotnim pravcima oko prizme od flint stakla, koja ostaje nepomična.

Sve ovo (nastavlja komisija) što je dosada radio Rochon imalo je za cilj da poboljša heliometar i usavrši durbine otklanjajući kromatsku aberaciju. U daljim Rochonovim radovima spominju njegov način rastavljanja bijele sunčeve svjetlosti u dugine boje, i to opet primjenom staklenih prizama koje se mogu okretati jedna oko druge. Ti radovi doveli su Rochona do ideje o primjeni prizama od gorskog kristala, koje daju dvije slike, a ugrađene su opet tako da se mogu okretati jedna oko druge. Da bi otklonio kromatsku aberaciju uz svaku od ovih prizama, Rochon je dodao po jednu prizmu od običnog stakla. Sve ovo bilo je saopćeno na sjednici Akademije nauka, održanoj 25. 1. 1777. Komisija kaže: »Voilà la première mention qui fut faite à l'Académie de ce nouveau micromètre.« Nekoliko dana iza toga Rochon je pokazao i jedan model, koji je ispitan i isproban, i nitko od prisutnih

¹¹ Na ovaj instrument osvrnut ćemo se kasnije.

nije rekao da je vidio ili čuo nešto slično tome. Iako taj instrument potpuno odgovara svojoj namjeni, Rochon radi na njegovu usavršavanju i 26. 2. 1777. čita drugu raspravu kao dodatak onoj od 25. 1. U ovoj novoj konstrukciji Rochon primjenjuje samo jednu prizmu od gorskog kristala, kojoj dodaje dvije staklene prizme (od francuskog stakla). Taj sistem prizama može se pokretati unutar durbina uzduž osi durbina. To unutarnje kretanje sistema prizama zamjenjuje međusobno okretanje prizama i omogućuje mjerenje kutova. Veličinu kutova određuje mogućnost pomicanja sistema prizama između objektiva i njegova fokusa. Komisija zaključuje:

«Voilà la véritable date, l'époque authentique de la découverte perfectionnée de M. l'abbé de Rochon, établie d'une manière incontestable d'après l'acte qu'il en a pris devant l'Académie et dans ses registres.»

Jedan od članova komisije (ne navodi se njegovo ime) posebno izjavljuje da ga je Rochon pozvao 16. 2. 1777, a on ga je posjetio 19. 2. i tom je prilikom vidio novi mikrometar s kružnim okretanjem prizama koje se stavljaju na durbin, a učinak pravocrtnog pomicanja prizama uzduž osi durbina Rochon mu je pokazao samo na papiru. Osam dana kasnije to je prikazao i u Akademiji.

Ova izjava jednog od članova komisije vrlo je karakteristična, a naročito datum na koje se on poziva. Na tu će se izjavu osvrnuti u konačnom prikazu i ocjeni spora.

U ove dvije posljednje rasprave (nastavlja dalje komisija) Rochon se zadovoljio da s nekoliko riječi dade rezultate svojih istraživanja, obećavajući da će o tome dati jedan opširniji rad, što je i učinio na javnoj sjednici od 9. 4. 1777. Evo naslova toga rada:

Mémoire sur le moyen d'employer la double réfraction à la mesure précise des petits angles. Détermination des diamètres des planètes par cette méthode et description succincte d'un instrument destiné à donner avec exactitude la distance de la lune aux étoiles lorsque cette distance n'excède pas 20°.

Taj naslov citirali smo u cijelosti zbog toga da bi se malo osvijetlio rad ove komisije. Naime, kao što ćemo vidjeti kasnije, u zapisnicima javnih sjednica Akademije taj rad nosi naslov »Mémoire sur les micro-mètres objectifs«, a kad je kasnije, 1780. štampan u »Histoire de l'Académie Royale« uopće nema naslova. Naime, očividno je da Rochon surađuje s komisijom i radu je dao ovaj naslov u tome momentu.

Međutim, komisija pridaje naročitu važnost tom radu i ona to i naglašava, i to zbog toga da bi se moglo utvrditi da li je Bošković svojom raspravom nešto dodao otkriću i idejama Rochona.

U ovoj raspravi (kaže komisija) Rochon ponovo objašnjava dvije konstrukcije svojega mikrometra. U prvoj se koristi dvjema prizmama od gorskog kristala, koje se mogu kružno okretati jedna oko druge, a u drugoj primjenjuje samo jednu akromatsku prizmu od gorskoga kristala, koja se može pomicati uzduž osi durbina.

Najzad, u zadnjem dijelu svoje rasprave, produžuje komisija svoj izvještaj, Rochon se bavi mjerenjem velikih kutova, što nije mogao vršiti pomoću prizama od gorskog kristala. Stoga on predlaže da se isto kao i u Bouguerovu astrometru pred objektiv durbina postave dvije prizme od običnog stakla jednu uz drugu, ali tako da se one mogu okretati jedna oko druge. Na taj način mogu se mjeriti kutovi od 0 do 20°.

Dakle, opet primjena staklenih prizama, po izvještaju komisije, ali samo u Bouguerovu astrometru. Međutim, kako tamo primjena staklenih prizama ima sasvim drugu ulogu, sigurno je da ni sâm Rochon nije zadovoljan ovom interpretacijom komisije. Ali komisija i Rochon i dalje se osiguravaju, pa komisija kaže:

«Nous ne devons pas laisser ignorer que quoique Monsieur l'abbé Rochon n'ait parlé à l'Académie de ce micromètre prismatique de verre simple qu'à la séance du 9 avril, il y a avait déjà bien longtemps qu'il l'avait imaginé comme le prouve un certificat que nous avons entre les mains signé de M. le Marquis de Condorcet, et conçu en ces termes.»

Condorcet daje pismenu izjavu da mu je Rochon već 27. 3. 1777. (dakle desetak dana prije čitanja rasprave u Akademiji, a to je za komisiju »longtemps«) pokazao instrument za mjerenje kutova, u kojem se upotrebljavaju dvije prizme od običnog stakla. Jedna od prizama može se kružno okretati oko druge, i, prema tome, instrumentom se mogu mjeriti kutovi od nula stupnjeva do sume prelomnih kutova obiju prizama. Istovremeno on potvrđuje da mu je konstrukciju toga instrumenta Rochon objašnjavao već 5. 3. 1777.

Eto, kaže komisija, to je sve bilo poznato gotovo mjesec dana prije nego što je čitana Boškovićeva rasprava u Akademiji nauka (10. 5. i 16. 5. 1777), »qui a donné lieu aux plaintes de M. l'abbé de Rochon, et dont il convient de donner ici en peu de mots l'extrait«.

Prije nego počnem s izlaganjem kako je Boškoviću raspravu prikazala Komisija, moram naglasiti da je ona to učinila na sasvim drugi na-

čin nego što je to radila u izlaganju Rochonovih radova. Odnos i rječnik je gotovo uvrijedljiv za Boškovića. Pogledajmo samo prvu rečenicu kojom počinje njihov izvještaj o Boškovićевой raspravi:

»L'auteur au commencement de ce mémoire paraît vouloir insinuer qu'il avait déjà eu les mêmes idées que M. l'abbé de Rochon, selon lui, dès...«

Dok su spominjući Rochona uvijek dodavali neku titulu ili neki epitet, dotle za Boškovića kažu samo »l'auteur«, pa »selon lui«; još bi se moglo i oprostiti i protumačiti da se to čini radi kratkoće, ali upotrijebiti riječ »insinuer«, nije ni lijepo ni pažljivo.

Komisija poslije naprijed citirane rečenice nastavlja kako prema Boškovićevu pisanju izlazi da je on, čim je čuo od jednog od svojih prijatelja o prvoj konstrukciji Rochonova mikrometra, odmah rekao »qu'il voyait bien comment cela se faisait, mais qu'il y aurait beaucoup plus à gagner, si l'on rendait variable la distance du prisme au foyer de la lunette«, i dalje spominju otprilike sve ono što je Bošković naveo u svojem pismu Akademiji od 2. 7. 1777. Doslovno citiraju Boškovićevu izjavu kojom on ništa ne traži i sve počasti prepušta Rochonu. Takva Boškovićeva izjava, kaže komisija – ne ostavlja mjesta nikakvoj sumnji i prepirci, ali ipak komisija želi da dublje uđe u prepirku, pa kaže:

»... nous allons passer à un point plus essentiel qui est l'objet véridable de son mémoire.

M. l'abbé de Rochon, dit M. Bošković, n'a employé pour son micro-mètre que la double réfraction du crystal de roche, et l'on m'a assuré qu'il a dit que son prisme ne pouvait lui donner que jusqu'à six degrés.«

Ovdje se moramo malo zadržati, jer je komisija obilato iskoristila ovaj Boškovićev lapsus calami. On je zapravo htio reći »six minutes«, a ne »six degrés.« Bošković je kasnije izjavio da je to običan propust u pisanju, ali mu to njegovi protivnici nisu uvažili. Komisiji je bilo (kao i Rochonu) neobično stalo do toga da dokaže da je i Rochon došao do mikrometara s kojima se mogu mjeriti i veći kutovi, što bi značilo da se već i on koristio prizmama od običnog stakla. A, osim toga, prikazuju Boškovića kao neupućenog u Rochonove konstrukcije (i čude se što se on nije bolje upoznao s Rochonovim dostignućima), jer kad tvrdi da se Rochon koristio samo kristalnim prizmama, kako onda prima izjave da Rochon može da mjeri kutove do 6°. Jer, čim se govori o kutovima od 6°, jasno je da se tu radi o prizmama od francuskog (običnog) stakla.

Medutim, kao što ćemo vidjeti kasnije, ovaj nesporazum oko stupnjeva i minuta nije od neke presudne važnosti, ali komisiji dobro dolazi sve što može naškoditi Boškoviću. Komisija dalje nastavlja: »Quoiqu'il en soit en partant de cette fausse supposition, M. l'abbé Bošković poursuit et dit: Ainsi je crois rendre un service encore plus considérable en proposant cette autre espèce de micromètre à verre simple, en développant sa théorie, en l'étendant aux angles beaucoup plus grands.

Voyant à présent la construction de ce micromètre et examinons en quoi il peut différer de celui de M. l'abbé de Rochon. M. l'abbé Boskovich propose successivement diverses constructions qui ont toujours pour base ou le mouvement circulaire ou le mouvement rectiligne des prismes inventés précédemment par l'académicien.»

Medutim, ova tvrdnja komisije nije tačna. Bošković se uopće ne koristi prizmama onakvim kakve je predložio Rochon, čak ni u onom slučaju gdje su im zamisli gotovo identične i gdje Rochon može računati na prioritet.

U daljem svojem izlaganju navodi komisija one nedostatke konstrukcije s pravocrtnim pomicanjem prizama koje je navodio Bošković i pri tome povlađuje Boškoviću.

Zbog poteškoća i nedostataka, kaže komisija, Bošković predlaže rješenje s dvije staklene prizme, koje kružnim okretanjem jedne oko druge omogućuju mjerenje većih kutova. Najzad on prelazi na mjerenje velikih kutova i evo konstrukcije na kojoj se on – kako se čini – zadržao.

Citirajući Boškovića, komisija navodi:

»On peut – dit il – multiplier des prismes composés acromatiques et à angles variables en faisant que l'un donne les degrés de 5 en 5 ou deux en deux et l'autre les minutes. On peut en mettre deux dehors près de l'objectif qui changeront la distance des images par le mouvement circulaire, et donneront l'angle cherché un peu plus grand que le véritable et un autre dedans qui donnera avec toute précision les secondes.

Voilà donc la véritable construction de l'instrument de M. l'abbé Boscovich pour mesurer de grands angles. Comparons-le à celui de M. l'abbé de Rochon connu plus d'un mois avant celui-ci.»

Akademik (misle na Rochona) stavlja dvije staklene prizme pred objektiv jednog astrometra i kružno ih okreće jednu oko druge. Gospodin opat Bošković postavlja isto tako pred objektiv svoga durbina dvije staklene prizme koje se mogu okretati jedna oko druge. Akademik se

tu zadržao. Ali gospodin Bošković – bez sumnje – bojeći se da kružnim kretanjem neće dobiti dovoljnu tačnost, služi se i trećom prizmom koja se može pomicati unutar durbina uzduž njegove osi.

«Ova treća prizma je stvarni i jedini dodatak instrumentu o kojemu je Rochon javno čitao raspravu 9. 4. 1777. Ali, primijetimo da je pravocrtno pomicanje posuđeno iz jednog ranijeg akademikova otkrića. Uostalom, da li je Bošković pravocrtnim pomicanjem prizme nešto povećao tačnost dobivenu kružnim okretanjem prizama, jer zar je važno da na jedan način tačno mjerimo sekunde kad na drugi ne mjerimo ni minute.»

Ovim riječima je komisija završila svoju stručnu ocjenu spornih ideja i konstrukcija.

Prije nego predemo na zaključak komisije, osvrnut ćemo se samo na ovaj njezin dio izvještaja, gdje ona ipak priznaje da je dodatak ove treće prizme s pravocrtnim pomicanjem unutar durbina jedini dodatak Rochonovoj konstrukciji, a odmah iza toga omalovažava i taj dodatak.

Međutim, taj dodatak jest Boškovićev, ali on nije od nekog osobitog značenja u ovome sporu, iako se s njim zaista postiže veća tačnost. To je Bošković spomenuo samo kao jednu mogućnost, isto kao što je spomenuo i mogućnost dodavanja jednog ili više sistema (binarnih) dvojnih prizama kojima bi omogućio mjerenje i velikih kutova. Ali to komisija ne spominje.

Zaključak komisije dajem doslovno:

Nous ne pouvons en conséquence, penser autre chose, si ce n'est que M. l'abbé Boscovich a été induit en erreur sur l'état des recherches et des découvertes de M. l'abbé de Rochon, que si on ne lui eut pas fait des rapports infidèles et s'il eut bien voulu ne s'en rapporter qu'à lui même pour s'informer et s'instruire des faits et des matières traitées par l'académicien il n'aurait certainement pas présenté au Ministre et à l'Académie comme neuves, des idées et des découvertes dont l'honneur appartenait déjà depuis longtemps à M. l'abbé de Rochon.

Fait à la salle de l'Académie le 23 août 1777.

le chevalier de Borda

Bézout
Vandermonde
Cassini

Ovaj izvještaj zasluživao bi – možda – detaljnu analizu, i to ne samo zbog toga da bi se pokazalo da izabrana komisija nije bila sklona Boškoviću nego i zbog toga što bi se – možda – i na taj način moglo doći do objektivnih zaključaka. Mi smo se, međutim odlučili da krenemo drugim putem i da redom iznesemo sve događaje i činjenice koje su prethodile sporu, zatim koje su iskrsele u toku spora, i najzad objektivan sud o samom sporu.

Čini nam se da ćemo se najviše približiti stvarnim činjenicama ako se strogo držimo zapisnika sjednica Akademije nauka koje su održavane u vrijeme spora i na kojima su čitani radovi i Rochona i Boškovića.

Prepise zapisnika tih sjednica izvršio je Branimir Truhelka i oni se nalaze u Arhivu Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti u Zagrebu [7].

U zapisnicima dati su i kratki sadržaji rasprava koje su čitane, ali ne uvijek, a mi ih iznosimo u nešto skraćenom obliku, zadržavajući uvijek sve ono što je značajno za ovaj spor.

Evo tih zapisnika (nešto skraćenih) u prijevodu:

Subota. 25. 1. 1777.

Opat Rochon je čitao »raspravu o novom objektivu s mikrometrom«. Za ispitivanje toga objektiva imenovana je komisija u kojoj su bili: Lemonnier, Leroi (Leroy) i Condorcet.

Skraćeni sadržaj: ... Čini mi se da je naročito pogodno da se s preciznošću pokaže dvostruka refrakcija raznih gorskih kristala. To istraživanje dovelo me je do pronalaska jednog objektiva s mikrometrom, za koji smatram da će biti od koristi da se odmah prikaže u Akademiji.

Taj mikrometar je sastavljen od dviju prizama od gorskog kristala istih (vršnih) kutova i prema tome dvostruke refrakcije istog iznosa. U svakom slučaju ta je refrakcija proporcionalna refrakcionom kutu (u vrhu) prizama. Prema određenom položaju prizama dobivaju se spektri koji se udaljuju ili se mijеšaju, prema sumi ili razlici vršnih kutova.

Dakle, radi se samo o tome da se ne poremeti učinak koji izlazi od prizmatičkog oblika svake pojedine prizme i da se ne smanji dvostruka refrakcija, koja je tako pogodna za precizno mjerenje kutova. To se postiže sasvim jednostavno, dodajući svakoj prizmi od gorskog kristala jednu prizmu od običnog (francuskog) stakla, koja – kao što se zna – može u svim slučajevima poništiti boje i prema tome i nejasnoću koja tom prilikom nastaje.

Srijeda, 29. 1. 1777.

Opat Rochon je pokazao mikrometar o kojem je čitao raspravu na prošloj sjednici (Akademije).

Srijeda, 26. 2. 1777.

Opat Rochon je čitao ovaj dodatak uz svoju raspravu o novom objektivnom mikrometru.

Dodatak raspravi o mikrometru koji je izrađen od gorskog kristala

Ja sam već pokazao da dvostruka refrakcija gorskog kristala može poslužiti za mjerenje malih kutova; ali ja nisam zamišljao da će se ovaj način moći primijeniti kod svih durbina, a da se pri tome ni na koji način ne pokvari jasnoća kojom treba vidjeti planete kad se žele mjeriti njihovi promjeri tačnošću koju iziskuje tako delikatno mjerenje. Konstrukcija prvoga mikrometra te vrste, koji sam ja pokazao Akademiji, imala je nekoliko nedostataka, koje ovaj predloženi uređaj sasvim otklanja.

Taj način ima i tu prednost da je jednostavniji i jeftiniji, a sastoji se samo od jedne prizme od gorskog kristala, kombinirane s dvije prizme od francuskog (običnog) stakla da bi se uništile boje (kromatska aberacija).

Prizme se udaljuju od fokusa objektiva ili mu se približavaju, i to tako da se dodiruju dvije slike Jupitera, ili neke druge planete čiji promjer želimo izmjeriti; taj dodir ocjenjuje se s tačnošću utoliko većom što se te dvije slike bolje razlikuju, kao što bi bio slučaj i da nema prizama, jer one su sasvim blizu okulara.

Ja neću ulaziti u pojedine prednosti ove nove konstrukcije i slabe strane prethodne (konstrukcije), nego imam namjeru da o tome predmetu dadem jednu iscrpnu raspravu kada se izvrši veći broj ispitivanja o stepenu tačnosti koju može pružiti ovaj instrument.

Srijeda, 5. 3. 1777.

Gospoda Lemonnier, Leroy i ja čitala su ovaj izvještaj.¹²

Prema nalogu Akademije proučili smo dvije rasprave gospodina opata Rochona o dva mikrometra koje je on pronašao. Ta dva instrumenta namijenjena su mjerenju bilo promjera zvijezda, bilo udaljenosti vrlo

¹² Ja sam čitao (Condorcet) izvještaj o dva mikrometra opata Rochona s gospodom Lemonnierom i Leroyem kao svjedocima (koji su to potvrdili).

bliskih zvijezda, ili, bolje rečeno, kuta pod kojim se taj promjer ili ta udaljenost vidi sa Zemlje. Gospodin opat Rochon upotrebljava kombinirane prizme s gorskim kristalom, koji – kao što se zna – uzrokuje dvostruku refrakciju.

On počinje s izradom različitih prizama od kristala i običnog stakla – dakle jedne kombinirane prizme akromatske s dvostrukom refrakcijom.

Zatim on mjeri veličinu te dvostruke refrakcije. U tu svrhu stavlja svoju prizmu na objektiv jednog manje ili više jakog durбина, promatra tim durbinom jedan predmet određenog promjera; zatim se udaljuje dotle dok se dvije slike toga predmeta ne počnu odvajati. Odnos između udaljenosti (d) fokusa objektiva durбина do središta (S) opažanog predmeta i promjera toga predmeta određuje kut dvostruke refrakcije.

Jedina nesigurnost koju bi on mogao imati pri tom određivanju zavisi o momentu kad se uzima da je postignut dodir dviju slika. Međutim, lako se vidi da će se kad se upotrebljavaju vrlo jaki durbini moći odrediti momenat dodira s velikom preciznošću. Kad je to tako postavljeno, ako se želi odrediti promjer jednog predmeta, uzet će se dvije slične akromatske prizme i one će se postaviti jedna prema drugoj na taj način da se jedna od njih može okretati oko svoga središta; tada se vidi da će se na taj način dobiti (tim njihovim raznim položajima) jedna sastavljena prizma koja će moći predstavljati postepeno sve prizme, od one čija dvostruka refrakcija iznosi nulu do one koja ima dvostruku refrakciju svake pojedine prizme.

Pretpostavimo da refrakcija jedne jednostavne prizme iznosi 15 minuta. Uzmimo zatim da pri međusobnom položaju prizama kad ne postoji refrakcija svjetlosnih zraka očitavanje na onom krugu u kojem je ugrađena pomična prizma bude 0; a kada refrakcija svjetlosnih zraka bude dvostruka, odnosno bude jednaka sumi refrakcija svjetlosnih zraka pojedinih prizama, neka očitavanje na spomenutom krugu bude 180°. U tome slučaju svakom pomaku pomične prizme za jedan stupanj odgovara promjena kuta refrakcije od 10" ($30 \cdot 60'' / 180 = 10''$).

Ako – dakle – tim durbinom koji je snabdjeven tom dvostrukom prizmom promatramo neki predmet kojem želimo odrediti prividni promjer, potražiti ćemo dedirnu tačku dviju slika toga predmeta i oči-

tati broj stupnjeva označenih na krugu koji nosi pokretnu prizmu, i promjer promatranog predmeta imat će toliko puta po 10" koliko smo očitali stupnjeva na tom krugu.

To je prvi mikrometar koji je predložio g. opat Rochon. Ali on je primijetio:

1. da bi taj mikrometar koji se stavlja na objektiv durbina trebao biti izrađen istom tačnošću (istom savršenošću) kao i objektiv, a to može biti jedna od nezgoda pri svakodnevnoj upotrebi:

2. da ćemo, ako opažamo jednu tačku ovim mikrometrom, imati samo jednu sliku kada na krugu koji nosi pokretnu prizmu očitavamo 0° , dvije slike ćemo imati kad očitavamo 180° , a četiri kad na tom krugu imamo očitavanje između 0° i 180° . Prema tome, opažanje tačke gdje se slike dodiruju iziskuje mnogo pažnje da bi se dobro razlikovale slike u momentu dodira;

3. da bi se kod toga pribora gubilo mnogo svjetlosti, a poznato je da što manje ima svjetlosti, to ima manje tačnosti u opažanju dodirne tačke.

Ova razmišljanja navela su gospodina opata Rochona da potraži jedan drugi mikrometar.

Ovaj (drugi) mikrometar, koji on predlaže, sastoji se samo od jedne prizme i osigurat će najprije, kao kod prvog mikrometra, vrijednost dvostruke refrakcije, a prizma je stavljena uz objektiv durbina. Tu prizmu udaljujemo od objektiva, približavajući je okularu; tada se kut dvostruke refrakcije odnosi prema onome koji smo imali u prvom položaju kao udaljenost objektiva od fokusa prema udaljenosti prizme od istog fokusa. Pretpostavimo, na primjer, da dvostruka refrakcija iznosi 7 minuta, a udaljenost od objektiva do fokusa tri stope, i ako se prizma približi na polovinu te udaljenosti, dvostruka refrakcija će biti tri i pol minute, i tako redom. Ako se, dakle, želi izmjeriti promjer nekog predmeta, primaknut će se prizma do momenta dodira dviju slika toga predmeta; tada, poznavajući kut refrakcije (upotrebljene prizme), udaljenost predmeta od fokusa objektiva i udaljenost prizme do istog fokusa, dobit će se jednostavnom proporcijom promjer predmeta. Na primjer, ako je u momentu dodira slika dvostruka refrakcija sedam minuta, fokusna udaljenost objektiva tri stope, udaljenost prizme do fokusa tri palca, tada će promjer predmeta biti 35 sekundi. Jedna (pariška) linija u tome primjeru ima vrijednost manju od jedne sekunde. Taj je primjer dovoljan da bi se ocijenila tačnost toga pribora.

Vidimo da ta tačnost u prvom slučaju – kod prvog mikrometra – zavisi od tačnosti određivanja dvostruke refrakcije prizme. Greška od 1" u tome određivanju (refrakcije) daje 1" ili čak 2" pri mjerenju promjera predmeta.

Kod drugog mikrometra greška od 1" u određivanju dvostruke refrakcije može prouzrokovati u mjerenju promjera mnogo manju grešku. Te dvije greške odnosit će se kao udaljenost objektiva od fokusa prema udaljenosti prizme do fokusa. Tako u primjeru koji smo mi odabrali greška od 1" u određivanju dvostruke refrakcije prouzrokovat će grešku od 1/12" u određivanju promjera nekog predmeta.

Taj novi mikrometar ima prednost da je smješten blizu okulara, pa prizme ne trebaju biti tako precizno izrađene kao za prvi mikrometar. Gubitak svjetlosti – također – mnogo je manji.

Ta dva mikrometra predstavljaju duhovita rješenja i osnivaju se na sasvim novim principima. Drugi od ova dva mikrometra bit će naročito pogodan za mjerenje vrlo malih kutova s velikom tačnošću. Teorija nam nije pokazala da ima neki prigovor na tačnost toga instrumenta, a pokusi koje je izvršio gospodin opat Rochon izgleda da su potvrdili teoriju. Mislimo, dakle, da ne bi trebalo mnogo bodriti gospodina opata Rochona, da dade izraditi u velikom broju svoj novi mikrometar, od kojeg se može očekivati velika korist u vrlo velikom broju astronomskih opažanja, i to vrlo osjetljivih. Sama primjena može pokazati dokle će upotreba toga biti prikladna i da li će biti u praksi lako dobiti potpunu tačnost koju je predvidjela teorija. Ali, mi mislimo da u međuvremenu Akademija treba iznijeti na javnost dokle dopire korist od izvanrednih ideja koje sadržavaju ove dvije rasprave gospodina opata Rochona.

Srijeda, 9. 4. 1777. (javna sjednica Akademije)¹³

Gospodin opat Rochon čitao je raspravu o dva instrumenta, koji su namijenjeni mjerenju kutova ili bolje rečeno kutnih daljina i prividnih promjera pojedinih predmeta.

Kod prvoga instrumenta Rochon stavlja jednu akromatsku prizmu od gorskog kristala kombiniranu s jednom prizmom od običnog stakla u unutrašnjost durbina blizu objektiva. Udaljenost ove prizme od fokusa objektiva određuje se što je moguće tačnije. Kod primjene ovog instrumenta, u određivanju prividnog promjera nekog predmeta, taj se

¹³ Ovaj prikaz uzet je iz *Histoire de l'Académie Royale des Sciences* 1780.

predmet promatra durbinom u čijem se vidnom polju vide dvije slike opažanog predmeta. Dvije slike dobijamo učinkom umetnute prizme od gorskog kristala. Pomicanjem te prizme uzduž durbina možemo postići da se te dvije slike dodiruju. Pošto izmjerimo – što tačnije – udaljenost predmeta od fokusa objektivu, iz dobivenih podataka možemo dobiti prividni promjer toga predmeta. To je osnovna operacija; i ovaj prvi – na ovaj način dobiveni – promjer služi nam za određivanje prividnih promjera predmeta čije udaljenosti od fokusa objektivu nemamo, i to na ovaj način: promatramo predmet čiji prividni promjer želimo odrediti i opet pomicanjem kristalne prizme dovodimo do dodira slika opažanog predmeta. Ako sad izmjerimo udaljenost prizme od fokusa objektivu, onda ćemo prividni promjer promatranog predmeta dobiti iz proporcije

$$d : d' = e : e',$$

gdje su:

- d — poznati prividni promjer iz osnovnog (prvobitnog) mjerenja;
- e — udaljenost prizme od fokusa objektivu pri osnovnom mjerenju;
- d' — traženi prividni promjer;
- e' — udaljenost prizme od fokusa objektivu u momentu dodirivanja dviju slika opažanog predmeta.

Dalje se u raspravi govori o velikoj tačnosti ovoga instrumenta, koja omogućuje da se određuju prividni promjeri nebeskih tijela, faze pomračenja Sunca i mnoga druga precizna opažanja.

Od naročite je važnosti — za geodetske potrebe — Rochonova napomena, kako se ovako opremljenim instrumentom može mjeriti udaljenost od instrumenta do promatranog predmeta.

Pretpostavimo — objašnjava Rochon — da promatramo predmet čiji prividni promjer znamo, i tada odredimo momenat kad se dvije slike dodiruju (zapravo odredimo položaj pokretne kristalne prizme kad se dvije slike dodiruju). Budući da znamo na kojoj udaljenosti mora biti predmet kad se kristalna prizma nalazi na kraju durbina (ona se može pravocrtno pomicati uzduž durbina u određenim granicama) i da se slike predmeta dodiruju, onda možemo postaviti ovu proporciju: tražena udaljenost prema onoj koja odgovara ekstremnom položaju kristalne prizme odnosi se kao udaljenost kristalne prizme od fokusa objek-

tiva kad je ona u ekstremnom položaju prema udaljenosti kristalne prizme od istog fokusa u momentu kad se dodiruju slike promatranog predmeta, odnosno

$$d : d_1 = e : e_1.$$

Ovdje su

- d — udaljenost predmeta od instrumenta kad se prizma nalazi na kraju durбина;
- d_1 — tražena udaljenost;
- e — udaljenost kristalne prizme od fokusa objektiva kad se ona nalazi na kraju durбина;
- e_1 — udaljenost kristalne prizme od fokusa objektiva u momentu kad se dodiruju slike opažanog predmeta.

Dakle, potrebno je samo jedno opažanje predmeta čiji prividni promjer poznamo pa da dobijemo traženu udaljenost od instrumenta do opažanog predmeta. Na kraju napomene se kaže: »On sent avec quelle facilité on peut par conséquent employer cet instrument à toutes les opérations géographiques, surtout aux mesures de degrés et les rendre à la fois et beaucoup plus simples, et beaucoup plus exactes que par tous les moyens connus jusqu'ici; les opérations de l'arpentage qui, pour être faites en grand, demandent beaucoup de temps et de dépenses, se feraient, au moyen de cet instrument, avec autant de promptitude que de facilité.«

Međutim, ovim instrumentom mogu se mjeriti kutne udaljenosti do 20 minuta. Stoga Rochon opisuje drugu konstrukciju kojom se mogu mjeriti veći kutovi. Mjesto kristalne prizme uzima dvije akromatske staklene prizme koje se mogu kružno okretati jedna oko druge, i to na taj način da predstavljaju sistem prizama od ravne ploče do prizme koja ima učinak kao obje prizme zajedno. Tako, promatrajući neki predmet istovremeno i kroz durbin i kroz taj sistem prizama, a okrećući prizme (jednu oko druge) dok se slike opaženog predmeta ne dodiruju, dobit ćemo da je prividni promjer predmeta jednak kutu refrakcije kombinirane prizme. Tačnost ovog instrumenta zavisi o mogućnosti što tačnijeg određivanja kuta prizme pri raznim položajima jedne prizme prema drugoj pri njihovu kretanju. Rochon uvjerava da je potrebna tačnost osigurana. Tako, ako se upotrijebe dvije prizme po 5^o stupanja, tom se kombinacijom mogu mjeriti kutovi od 0^o do 10^o. Neka je okre-

tanje prizama jedne oko druge dato s tačnošću od jedne minute, tačnost instrumenta bit će $1 : 36$ minute ($360^{\circ} : 10^{\circ} = 1' : t$). Ovom instrumentu, iznosi Rochon, može se dati i mnogo veća tačnost ako znamo približnu vrijednost kuta koji želimo mjeriti. Neka je ta približna vrijednost između 4° i 6° . U tom slučaju bit će dovoljno da kombiniramo prizme od 1° i 5° , a prizme ćemo morati međusobno zaokretati za svega 2° (od 4° do 6°). Tada će tačnost instrumenta biti $1/3$ sekunde ($2^{\circ} : 360^{\circ} = t : 1'$).

Ova rasprava štampana je u »Historic de l'Académie Royale«, str. 64–68, 1780. Na kraju rasprave napominje se da ju je pisac čitao na javnom zasjedanju 9. 4. 1777. i da se ima smatrati da je tada objavljena.

Kao što vidimo, o ovoj drugoj konstrukciji Rochon mnogo manje govori nego o prvoj. Štampanog teksta o tome drugom instrumentu ima svega jedna strana, a o prvom pune tri strane.

Ovim bi bio dat kratak sadržaj rasprava koje je Rochon podnio Akademiji nauka prvih mjeseci 1777. prije čitanja Boškovićeve rasprave u Akademiji 10. 5. i 16. 5. 1777. Pokušajmo sada rezimirati šta je Rochon u tim raspravama saopćio:

Subota, 25. 1. 1777.

Rochon je čitao raspravu o mikrometru sastavljenom od dviju prizama od gorskog kristala. Prizme imaju iste kutove u vrhovima, i one mogu imati razne međusobne položaje. Prema tim položajima ulazna svjetlosna zraka skreće sa svoga prvobitnog pravca za razne veličine kutova od 0 do sume prelomnih kutova obiju prizama. Da bi se kromatska aberacija što bolje odstranila, uz svaku od ovih prizama dodao je jednu prizmu od običnog (francuskog) stakla.

Srijeda, 29. 1. 1777. Rochon je u Akademiji pokazao mikrometar o kojem je čitao raspravu na prošloj sjednici.

Srijeda, 26. 2. 1777. Rochon je čitao »Dodatak« raspravi o mikrometru izrađenom od gorskog kristala. Prednost nove konstrukcije je u tome što se mikrometar sastoji samo od jedne prizme od gorskog kristala, kombinirane s još dvije prizme od običnog stakla. Ove staklene prizme treba da otklanjaju kromatsku aberaciju. Ovaj sistem prizama može se pravocrtno pomicati, približavajući se fokusu objektiva ili se udaljujući od njega.

Srijeda, 9. 4. 1777. Rochon je čitao na javnoj sjednici Akademije nauka raspravu o dva instrumenta za mjerenje kutova. U prvom instrumentu Rochon upotrebljava jednu prizmu od gorskog kristala kombiniranu s jednom prizmom od običnog stakla unutar durbina. Prizma se može pravocrtno pomicati uzduž durbina. Tim instrumentom mogu se mjeriti samo mali kutovi (do 20').

U drugom instrumentu mjesto prizme od gorskog kristala upotrijebljene su dvije akromatske prizme od običnog stakla, koje se mogu kružno okretati jedna oko druge, a omogućuju mjerenje i većih kutova.

Kao što vidimo, u ovim raspravama Rochon nije nikad opisao ili u primjeni upotrijebio prizme od običnog stakla koje bi se pomicale pravocrtno unutar durbina. A to je ono na čemu je Bošković insistirao da se dokaže i ono što je on – već u prvim razgovorima – saopćio Fontani. Ti razgovori su vođeni koncem siječnja 1777. Međutim, što se tiče prioriteta, čak ni datum od 9. 4. 1777. nije važan, jer Rochon – kao što smo rekli – nikad nije upotrijebio prizme samo od običnog stakla koje bi se mogle pomicati unutar durbina. Dakle, u konstrukcijama ove vrste naš Bošković ima prvenstvo, i pravo je čudo kako mu je to osporavano.

Što se tiče konstrukcije sistema od dvije prizme od običnog stakla, očividno je da je to Rochon (9. 4. 1777) najavio prije Boškovića (7. 5. 1777), ali, naglašavamo, samo najavio. Štaviše, i ono što je Rochon objavio tek 1780., tražeći da se smatra da je to objavljeno 9. 4. 1777., tako je kratko i oskudno (svega 27 redaka) prema onome što je Bošković o tome napisao i predao sasvim gotovo 7. 5. 1777., da se zaista moramo zapitati da li je od neke stvarne važnosti taj prioritet od 28 dana, na kojem Rochon insistira. Bošković je opisao i buduću konstrukciju instrumenta koji bi omogućivao mjerenje kutova, ili uz poznatu veličinu prividnog promjera nekog predmeta udaljenost toga predmeta od instrumenta. Taj Boškovićev opis teško je izraziti u broju napisanih redaka, kao kod Rochona, jer se kod njega radi o više strana i o jednom detaljnom uputstvu, koje omogućuje punu primjenu njegovih ideja i konstrukcija. Stoga nije čudo što su kasniji pisci i konstruktori isključivo pravo na ovu konstrukciju pripisivali Boškoviću.

Sigurno je da je Bošković imao ovo rješenje prije 9. 4. 1777. i o tome je on razgovarao sa Fontanom, pa nije nikakvo čudo što on sumnja da su njegove ideje saopćene Rochonu. Bošković je na te sumnje imao puno pravo, jer su njegovi opisi mnogo detaljniji. Uzme-

mo li u obzir da se Bošković – već u samom početku – odriče prvenstva, jer nema stvarnih dokaza da ga dokaže, a Rochon nastoji na sve moguće načine da za sebe osigura to prvenstvo, ta žurba i nastojanja Rochonova još više upućuju na pomisao da je Rochonov prioritet samo prividan i formalan. Stoga Rochon traži da se komisijski to utvrdi, a kad prvi put štampa tu raspravu u *Histoire de l'Académie Royale*, na kraju rasprave stoji:

»Ces instruments ont été connus de l'Académie, dans les premiers mois de 1777: l'Auteur en a lû la description dans l'Assemblée publique du 9 Avril de la même année. Ainsi quoiqu'il n'en ait point encore imprimé ni la construction ni les usages, on doit les regarder comme connus du Public depuis cette époque.«

Međutim, gotovo je sigurno da Rochon nije predao ovu raspravu Akademiji do 9. 4. 1777, jer u originalnim zapisnicima Akademije nauka stoji [7]:

(23^e) Mercredi 9 avril 1777.¹⁴

M. l'abbé Rochon (a lû)¹⁵ un mémoire sur les micromètres objectifs, de son invention.

(27^e) Mercredi 23 avril 1777.

M. l'abbé Rochon a commencé la lecture de son mémoire sur les micromètres objectifs.¹⁶

(28^e) Samedi 26 avril 1777.

M. l'abbé Rochon a continué la lecture de son mémoire sur les micromètres objectifs.¹⁷

(31^e) Mercredi 7 mai 1777.

M. l'abbé Rochon a continué la lecture de son mémoire sur les micromètres.

¹⁴ Assemblée publique.

¹⁵ U zagradi stoji »a lû«.

¹⁶ Prisutan Lalande.

¹⁷ Prisutan Lalande.

(32^e) Samedi 10 mai 1777.

M. Leroy a lû un mémoire de M. l'abbé Boscovich, sur les micromètres objectifs.

(34^e) Vendredi 16 mai 1777.

M. Leroy a achevé le mémoire de M. l'abbé Boscovich; on a été aux voix et il a été décidé qu'on écrirait à M. l'abbé Boscovich pour savoir si son intention est que l'Académie prononce sur son mémoire.

(35^e) Mercredi 28 mai 1777.

1. J'ai lû¹⁸ deux lettres de M. l'abbé Boscovich en réponse à celle que j'ai été de lui écrire.

2. M. le chevalier de Borda a lû une déclaration de M. l'abbé Fontana, relativement à cet objet; on a été nommé des commissaires avec MM. de Borda, Bézout, Vandermonde et Cassini fils.

(38^e) Samedi 7 juin 1777.

1. M. de Borda a lû une lettre du P. Boscovich sur les micromètres. M. l'abbé Rochon a demandé qu'on communiquât ses mémoires au P. Boscovich.

2. M. l'abbé Rochon a fini l'écrit suivant.¹⁹

Rochon na ovom posljednjem čitanju svoje rasprave opisuje primjenu islandskog kristala za mjerenje malih kutova i saopćuje da je sa svojim instrumentom mjerio promjer Sunca. Da bi provjerio tačnost svojeg mjerenja, upoređuje mjerenje udaljenosti od svoje sobe do jednog paviljona. Tu udaljenost odredio je jedan stručnjak (vjerojatno nekom letvom) i našao da iznosi 210 toaza. Rochon je našao sa svojim prizmama da je ta dužina 230 toaza. Stoga on vrši ponovno mjerenje na isti način kao i onaj stručnjak i nalazi da je ta dužina 230 toaza i 2 stope. Ova tačnost odgovara jednoj desetinki sekunde. Pogreška nastaje zbog nesigurnosti u određivanju međusobnog dodira promatratih tačaka. Zatim Rochon upozorava koje su sve prednosti optičkog mjerenja dužina prema mjerenju po terenu i navodi gdje se sve može ovaj način mjerenja primjenjivati.

¹⁸ Ova pisma je čitao Condorcet.

¹⁹ M. l'abbé Rochon a fini la lecture de son mémoire sur les micromètres objectifs et les doubles refractions.

Zaključuje čitanje s napomenom da islandski kristal ima vrlo veliku moć refrakcije, s proporcionalno manjom kromatskom aberacijom.

(39^e) Mercredi 11 juin 1777.

M. l'abbé Rochon a lu de nouvelles réflexions sur les micromètres objectifs et les doubles réfractions.

(45^e) Mercredi 2 juillet 1777.

M. de Borda a lu une lettre du R. Boscovich sur sa contestation avec l'abbé Rochon, il a été décidé qu'elle serait renvoyée aux commissaires après avoir été communiquée à M. l'abbé Rochon.

(46^e) Samedi 5 juillet 1777.

J'ai²⁰ lu une lettre de M. l'abbé Rochon relativement à la contestation avec le R. Boscovich, elle a été renvoyée aux commissaires.

(60^e) Samedi 23 août 1777.

MM. de Borda, Bézout, Cassini et Vandermonde, ont lu le rapport suivant.

Ovo su prepisi zapisnika sjednica Akademije nauka, koji nam omogućuju da slijedimo tok događaja oko ovoga spora. Od posebnog je značenja, a donekle je i čudno, što o sadržaju rada svake sjednice imamo bar nekoliko rečenica, ali o onome što je Rochon čitao 23. i 26. 4. i 7. 5. 1777. nema ništa zapisano osim naslova rasprave. Na ovu činjenicu pozvat ćemo se u konačnoj ocjeni spora.

Da pogledamo sada da li je Rochon u svojim prethodnim radovima nešto objavio o ovim konstrukcijama. To nam je dužnost, jer je on u jednom svom odgovoru Boškoviću napisao da je on već davno prije (1768. g.) došao do tih ideja i konstrukcija. Da bi o tome uvjerio i samoga Boškovića, poslao mu je te svoje radove. Bošković je to pažljivo proučio i u svome pismu (2. 7. 1777) članovima komisije ukazuje da u Rochonovim radovima ima nešto slično, ali ujedno naglašava da je to nešto sasvim drukčije od onoga što je on iznio u svojoj raspravi. Bošković navodi čak i strane na kojima se to nalazi u »Opuscules Mathématiques« Brest, 1768. (str. 60. i 88). Ako pogledamo šta se nalazi na ovim stranama, možemo utvrditi da je na str. 59. i 60. naprijed citiranog djela Rochon opisao kako se može Bouguerov heliometar osposo-

²⁰ To je čitao Condorcet, sekretar Akademije [7].

biti za mjerenje kutova većih od 6° . Kutove do 6° mjeri ovaj heliometar pomoću dva objektiva. Dakle, dvostruka slika se dobiva posredstvom dvaju objektiva. Da bismo ostali što vjerniji u ovome izlaganju, a zbog kratkoće teksta, citirat ćemo samog Rochona: »Je suppose que l'héliomètre auquel je veux faire mesurer des angles de 24° , en mesure 6° par l'écartement des objectifs. Je prends trois prismes achromatiques, dont le premier cause une réfraction de 6° , le second de 12° , le troisième de 18° . Il importe peu qu'il y ait quelques minutes de plus, pourvu qu'on y ait égard; ainsi cette condition ne renferme rien qui ne soit praticable. Je mets ces trois prismes dans un châssis qui glisse dans une rainure, de manière qu'on peut faire passer devant un des objectifs, le prisme qui convient. Ainsi si on veut mesurer un angle de $15^\circ 30'$, on interpose le prisme qui cause une réfraction de 12° , et l'écartement des objectifs fera le reste.«

Kao što vidimo, ovdje Rochon upotrebljava staklene akromatske prizme koje omogućuju otklon svjetlosnih zraka za 6° , 12° i 18° , omogućujući – prema potrebi – da se jedna od njih stavi pred jedan od objektiva. Na taj način Rochon je samo usavršio Bouguerov heliometar, jer je – dovodeći jednu od ovih prizama pred jedan od objektiva – povećao mogućnost odvajanja slika na veća rastojanja, odnosno osobio je ovaj heliometar da se s njim mogu mjeriti kutovi veći od 6° . A to je, kao što vidimo, nešto sasvim drugo od onoga što je Bošković iznio u svojoj raspravi.

U istom tom djelu na strani 88. Rochon predlaže da se pri ispitivanju oktanta što ga je konstruirao Caleb Smith primijeni akromatska prizma mjesto ogledala. Navodimo sve ono što je tu rečeno: »J'aimerais cependant mieux me servir d'un prisme achromatique que d'un miroir fixe, parce qu'il y a beaucoup moins de précaution à prendre pour le placer devant l'objectif. D'ailleurs, il produit le même effet que le miroir fixe, et rendrait conséquemment l'octant de Mr. Caleb Smith susceptible d'être vérifié.«

Nije teško zaključiti da i ovdje staklena akromatska prizma ima sasvim drugu zadaću nego u Boškovićevim zamislima i predloženim konstrukcijama.

To tvrdi i sâm Bošković u pismu od 2. jula 1777, upućenom članovima komisije, gdje stoji:

»Je vois à présent, qu'il y a employé des prismes de verre en les appliquant aux objectifs, mais leur usage dans cette application est très différent de l'usage, que j'en ai fait dans mon mémoire, comme on s'en apercevra aisément en comparant ces ouvrages. Le prisme dans ces

instruments restait toujours fixe sans aucun mouvement analogue, à ceux que M. l'abbé Rochon a employés dans son nouveau micromètre de cristal de roche, et que j'ai retenu, en y substituant le verre simple.»

Međutim, ne može se poreći da Rochon nema velikih zasluga u onim konstrukcijama gdje se javlja potreba refrakcije svjetlosnih zraka, ali bilo bi nepravедno tvrditi da je on te svoje ideje primijenio onako i u onim slučajevima kako je to uradio Bošković.

Stoga bi naše mišljenje i sud o sporu Bošković–Rochon bilo ovo:

1. Apsolutno je sigurno da je primjenu akromatske staklene prizme koja zaklanja jedan dio otvora durbinog objektiva za dobivanje slika dviju raznih tačaka na jednom mjestu u vidnom polju durbina prvi pokazao Bošković (sl. 1). Pomicanjem te prizme uzduž durbina između objektiva i njegova fokusa mijenjaju se tačke čije slike vidimo na jednom mjestu u vidnom polju durbina.

Rochon – naprotiv – u tu svrhu upotrebljava prizme od gorskog kristala, koristeći se svojstvima kristalâ (dvolomacâ) za stvaranje dvostrukih slika.

Te kristalne prizme Rochon u prvim svojim konstrukcijama okreće kružno jednu oko druge, a u kasnijim ih pomiče uzduž durbina.

Kao što vidimo, ogromna je razlika između zamisli i konstrukcija Boškovićevih i Rochonovih.

Ove stvarne i očevидne razlike i razloge pariška Akademija nauka potpuno je zanemarila i nanijela veliku nepravdu Boškoviću.

2. Primjenu dviju akromatskih staklenih prizama koje kružnim okretanjem jedna oko druge stvaraju slike dviju raznih tačaka na jednom mjestu u vidnom polju durbina najavio je Rochon Akademiji nauka 9. 4. 1777. Istu primjenu detaljno opisanu, s teoretskim obrazloženjem, skicama za izradu odgovarajućeg pribora predao je Bošković ministru Sartineu 7. 5. 1777. Ako se uspoređuju ova dva datuma, izgleda da Rochon ima prioritet od 28 dana.

Međutim, taj prioritet nužno je pažljivo preispitati, i to iz ovih razloga:

a) Rochon je 9. 4. 1777. najavio čitanje svoje rasprave, a počeo je najezino čitanje 23. 4. Nastavio je čitanje 26. 4. i 7. 5., a završio 7. 6. 1777. (vidi zapisnike sjednica Akademije nauka).

Ne može se utvrditi kada je čitao onaj dio u kojem se govori o upotrebi dviju staklenih prizama. Prema štampanom sadržaju te rasprave (štampana je tek 1780.) može se utvrditi da je taj dio na kraju rasprave i iznosi svega 28 redaka.

b) Rasprava je objavljena, kao što smo naveli, tek 1780. godine, s napomenom da je čitana 9. 4. 1777. na javnoj sjednici Akademije nauka u Parizu, a iz zapisnika sjednica se vidi da to nije tačno, nego da je Rochon počeo čitanje te rasprave tek 23. 4. 1777.

c) Dok je Rochon ukratko iznio samo ideju o primjeni ovih prizama, dotle je Bošković opširno opisao i konstrukciju jednog takvog pribora. Iscrpno je naveo gdje i kako bi se smjestile prizme (tako da dio vidnog polja durbina ostane slobodan), kako bi se mjerili kutovi u raznim međusobnim položajima dviju prizama itd. Pri tome skromno dodaje, što se tiče praktičnih rješenja, da se to može usavršiti, razumije se, ako se time pozabavi iskusan majstor.

Dakle, ne treba se čuditi što je Bošković sumnjao da su njegove ideje saopćene Rochonu – jer je on 7. 5. 1777. otišao mnogo dalje nego što je to Rochon najavio 9. 4. iste godine. Tim više što je Bošković obaviješten da na sjednici od 9. 4. Rochon nije ni čitao svoju raspravu. Ako ju je čitao na četiri sjednice (što je sigurno), a u zapisnicima nema ni kratkog sadržaja šta je na kojoj čitao, onda je teško govoriti o prioritetu pojedine zamisli i konstrukcije. Samo ono što je čitao 7. juna 1777. zapisano je u zapisniku te sjednice. Prema onako objavljenoj raspravi kako je to učinjeno 1780. u *Histoire de l'Académie Royale*, str. 64–68, kao što smo naprijed već rekli, taj se dio nalazi na stranama 67. i 68., sasvim na kraju rasprave. Prema tome, do čitanja tog dijela nije moglo doći prije 7. 5. 1777. Naime, upoređujući tekstove rasprave koji su čitani u Akademiji, bar onoga dijela koji je čitan 7. 6. 1777., i onoga koji je štampan 1780., vidi se da je Rochon raspravu pretrađivao, dotjerivao, pa je sigurno da je ona do 1780., dok je pripremana za štampu, poprimila sasvim drugi red izlaganja od onoga koji je imala kad je čitana 1777.

Prema tome, pod vrlo velikim je upitnikom prioritet Rochona, pogotovo ako bi se spor pravno tretirao. Naime, Bošković je predao napisanu raspravu 7. 5. 1777., i nije je više dotjerivao i mijenjao, a Rochon je svoju završio tek na posljednjem čitanju na sjednici od 7. 6. 1777.

Zbog nemogućnosti da se utvrdi činjenično stanje, ako i prihvatimo da je od odlučujućeg značenja najava rasprave određenog sadržaja, a ne čitanje, publiciranje i stvaran sadržaj rasprave, onda ne preostaje ništa drugo nego da se prizna Rochonu da je on prvi iznio, i to svega nekoliko dana prije, i to samo principijelno, primjenu dviju staklenih prizama za mjerenje kutova. Kao što vidimo, prioritet je dat samo zbog

toga što se ne može tačno utvrditi kad je Rochon pročitao onaj dio svoje rasprave u kojem se govori o primjeni staklenih prizama. Međutim, prema zapisnicima sjednica Akademije nauka, to sigurno nije moglo biti prije 23. 4. 1777. godine, jer je toga dana on započeo čitanje svoje rasprave.

Prema tome vidimo da je mišljenje izabrane komisije suviše olako doneseno i da je našem Boškoviću u ono doba učinjena velika nepravda.

I nama se čini da čak ni ovaj naš sud nije povoljan za Boškovića kad Rochonu dajemo prednost od nekoliko dana. Teško da bi tako postupili pravnici u parničkom postupku.

Međutim, historija je Boškoviću dala zadovoljštinu. Naime, svi korisnici (bar koliko je nama poznato) primjene staklenih prizama u ove svrhe citiraju samo Boškovića kao pronalazača ovih konstrukcija.

Od poznatijih pisaca i konstruktora u geodetskoj literaturi koji citiraju Boškovića naveli bismo ove:

1. Rodolphe Bosshardt, u članku pod naslovom »Entstehungsgeschichte der Reduktionstachymeters« u časopisu *Zeitschrift für Vermessungswesen*, Stuttgart, Nr. 2/1956, piše: »Die Glaskeile, als Mittel für Distanz-Messzwecke, waren schon lange bekannt. Auch die Drehkeile wurden schon 1777. von Boscovich verwendet, aber nicht an einem Distanzmesser, sondern für mikrometrische Zwecke.«

2. *Handbuch der Physik*, herausgegeben von H. Geiger und K. Schnel, Band XVIII, Berlin 1927, O. Eppenstein: Fernrohr, 5.603: »Das Drehkeilpaar, das auch nach Herschel genannt wird, aber ebenso wie das oben beschriebene Linsenpaar auf Boscovich²¹ zurückgeht, wird insbesondere im Entfernungsmesserbau vielfach verwendet.«

S. 611:

»Bei kleinen Entfernungsmessern ist durch Carl Zeiss das vor dem Objektiv drehbare Keilpaar nach Boscovich, dass das Innenrohr kurz zu halten gestattet, eingeführt.«

3. Deumlich-Seyfert, *Instrumentenkunde der Vermessungstechnik*, Veb Verlag Technik, Berlin 1957, Seite 310:

»Ein Drehkeilpaar vor oder in dem Fernrohr. Prinzip: Boscovich entdeckte die besondere Eigenschaft eines Drehkeilpaares, das als optischer Keil mit veränderlichen brechenden Winkel aufgefasst werden kann. Hierbei werden zwei um die Ziellinie des Fernrohrs drehbare achromatische Glaskeile mit gleichen brechenden Winkeln ($k_1 = k_2$) verwendet.«

²¹ R. J. Boscovich, *Phil. Trans. T.* 66 (2), p. 789, 1777.

Na čitavoj ovoj i idućoj strani detaljno je opisan i slikama objašnjen učinak ovih prizama, koji se potpuno slaže sa zamislima i konstrukcijama koje su date u Boškovićevoj raspravi.

4. Albert König-Horst Köhler, *Die Fernrohre und Entfernungsmesser*, Berlin 1959, S. 348:

»In anderer Weise verwirklichte Boscovich 1777 den veränderlichen Keil. Er drehete zwei gleiche Keile, die in der optischen Achse hintereinander und zu ihr nahe senkrecht angeordnet sind, um entgegengesetzt gleiche Beträge. Man bezeichnet ein solches Drehkeilpaar auch als Keilkompensator.«

Dakle, slobodno možemo reći da je Bošković u ovome sporu u većini spornih pitanja bio u pravu i da komisija Akademije nauka u Parizu nije bila sklona da mu to prizna.

Međutim, korisnici ovih duhovitih rješenja obilato su to nadoknadili Boškoviću.

LITERATURA

- [1] *Ruder Bošković*, Opera pertinentia ad opticam et astronomiam, Tom II, Bassani 1785.
- [2] *Franjo Rački*, Rugjer Josip Bošković, Rad JAZU, Zagreb 1887/8, str. 1-100.
- [3] *Zurko Dadić*, Boškovićevi radovi o određivanju staze kometa, Rad Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti, knjiga 325, Zagreb 1962.
- [4] *Branko Borčić*, Doprinosi Rudera Boškovića konstrukciji geodetskih daljinomjera s dvostrukim slikama, Rad Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti, knjiga 331, Zagreb 1965.
- [5] *Ruder Bošković*, Dissertationes quinque ad dioptricam pertinentes, Viennae 1767.
- [6] *Ruder Bošković*, Theoria micrometri obiectivi, Viennae 1757.
- [7] *Branimir Truhelka*, Prijepis rukopisa. Arhiv Jug. akademije znanosti i umjetnosti u Zagrebu.
- [8] Histoire de l'Académie Royale, 1780, str. 64-68.
- [9] *Rochon*, Opusculs mathématiques, Brest 1768, str. 58-61, 88, 89.
- [10] *Dr Uladimir Uričak*, Ulomak Boškovićeve korespondencije, Rad Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti, knjiga 185, str. 420.
- [11] *Rodolphe Bosshart*, Entstehungsgeschichte der Reduktionstachymeters, Zeitschrift für Vermessungswesen, Stuttgart, Nr. 2/1956.
- [12] *O. Eppensteib*, Handbuch der Physik, Band XVIII, Fernrohr, S. 603.
- [13] *Deumlich-Seyfert*, Instrumentenkunde der Vermessungstechnik, Berlin 1957, S. 310.
- [14] *Albert König-Horst Köhler*, Die Fernrohre und Entfernungsmesser, Berlin 1959.

Primljeno za publikaciju 5. svibnja 1967. u Odjelu za matematičke, fizičke i tehničke nauke Jugoslavenske akademije u Zagrebu.

DISPUTE BOŠKOVIĆ-ROCHON
ON THE OCCASION OF THE BOŠKOVIĆ
TREATISE »MÉMOIRE SUR UN NOUVEAU
MICROMÈTRE ET MÉGAMÈTRE«*

The treatise »Mémoire sur un nouveau micromètre et mégamètre« which Bošković submitted to the Minister of the Navy, A. R. de Sartine, on May 7, 1777, brought about a dispute between Bošković and the French Academician Rochon. The treatise was read – by Bošković's permission – in the Academy of Sciences of Paris on May 16, 1777. The dispute was an unusually heated one as most of the Academicians sided with Rochon in an attempt to accuse Bošković of plagiarism and thus prevent his election to the Academy, in which they partly succeeded.

To enable us to understand the gist of the dispute we shall briefly outline the treatise pointing out the disputed concepts and constructions (Figure 1).

Let the line DEF represent the object glass of a telescope, and LEH its optical axis, which – as known – is vertical on the DEF line. The line GHJ – also vertical on the optical axis – represent the places of actual images of remote objects. The point H is the focus of light rays which enter the object glass parallel to the direction of the axis LE which, at the same time, is the image of the point L (of some object) infinitely remote (theoretically) from the object glass. The point K is the image of the point L' , and it is situated on the main light ray $L'EK$ which forms the angle $L'EL$ with the main optical axis.

Let us now put in front of the object glass (outside the telescope) a glass prism whose transversal section is ABC and which has the plane AB (whose transversal section is AB) of a circular shape. This circular plane has a diameter smaller than the opening of the object glass DF

* The original title of this paper: *Spor Bošković-Rochon povodom Boškovićeve rasprave »Mémoire sur un nouveau micromètre et mégamètre«.*

and is vertical on the optical axis LH . Those light rays which pass outside the prism will form images of the points L and L' at the same places H and K as though the prism ABC did not exist. The images will be only more weakly lighted. Those light rays, on the other hand, which pass through the prism ABC , after double refraction (on entering and leaving the prism), will change their original direction, and the refraction angle will depend on the angle of the prism at the vertex A between the planes AB and AC and the kind of glass of which the prism is made.¹

Among all the light rays which pass through the prism ABC there will certainly be such as the ray PQ (Figure 1) which starts from the point P and under a certain angle to the optical axis LE , reaches the plane AB of the prism ABC , and after double refraction at the points Q and N leaves in the direction NE . These light rays will form in the point H the image of distant point P . Accordingly, in the point H we have the images of two points, L and P . The image of the point L is produced by the light rays passing through the object glass outside the prism ABC , and that of the point P by the light rays passing through the object glass and the prism. If the line PQ is continued to its intersection with the optical axis at the point R , the angle LRP is the measure of the optical distance between the points L and P , which have merged images at the point H . It is easy to prove that this angle approximately equals one half of the angle at the vertex A of the prism, provided the angle is a comparatively small one.

Now let us see what will happen when the prism ABC is brought closer to, or moved away from, the object glass. From Figure 1 it becomes apparent that the angle LRP will in either case remain unchanged so that in the field of vision there will always be merged images of the same two points L and P at the point H , regardless of the distance of the prism from the object glass, but only if the prism is outside the telescope.

If the prism is inside the telescope, between the object glass and its focus, the result will be different. In that case the prism is marked $A'B'C'$ (Figure 1). Let us suppose that the image of the point L' produced by light rays which pass only through the object glass appears at the point K , and that the image of the point L resulting from light rays passing through both the prism and the object glass is at the same point.

¹ More fully with proofs in the Bibliography under [4].

When the prism $A'B'C'$ is inside the telescope the image of the point L' resulting from light rays passing only through the object glass will again be at the point K . But the image of the point L produced by light rays parallel to the line LEM' emerging from the prism always under the same angle (because it is the same prism with definite properties), in this case parallel with the line EK , will appear at the point K' . Consequently, the angle $HN'K'$ is always the same, but the distance HK' changes and it is proportional to the distance HN' .

Accordingly, the shifting of the position of the prism $A'B'C'$ results in the change of the points whose images will coincide with the image of the point resulting from the light rays which passed by the prisms, of the effect will be analogous to the change of the angle of the prism at the vertex A . Consequently, by the change of the distance EM' of the prism from the object glass (Figure 1) we can determine the angles between various points in space. That in fact was the main problem at that time and it was tried to solve it in this way. Namely, that was the way in which it was hoped it might be possible to measure the apparent angles between stars and the sun or the moon, as well as the apparent size of the sun or moon disk, or, finally, the height of a celestial body above the horizon.

The solution offered by Bošković – the addition of a glass prism between the object glass and its focus in such a way that the prism can be moved along the longitudinal axis of the telescope – represents the first issue of the dispute between Bošković and Rochon. It seems that Rochon gave particular prominence to this problem in his dispute with Bošković.

In addition to this theoretical solution, Bošković describes in detail the achromatic prism referring to his earlier works on optics [5] and [6]. In this connection he particularly stresses that the elimination of chromatic aberration is a complicated problem, but that he has already solved it partly and that he is still working on it. He believes that this is a very interesting and new field of optics.

In order to have the image resulting from the passage of light rays through the prism and the object glass lighted with the same intensity as the image resulting from the passage of light rays through the object glass only, it is necessary that the diameters of the prism and the object glass should have a ratio of $1 : \sqrt{2}$, which is approximately $5 : 7$. Namely, in this case the surface of the prism equals the surface of the ring of the object glass which is not covered by the prism. But, as by the passage through the prism for known reason the clearness of the image

is somewhat impaired, Bošković suggests that the ratio of the diameters should be 5 : 6. By moving the prism away from the object glass the amount of light will steadily decrease. When the prism is moved from the object glass to a distance equalling one sixth of the focal distance of the object glass the image resulting from the passage of light rays through the object glass only will disappear completely [4].

We have mentioned these practical remarks accompanying the theoretical solution only to show how far Bošković had progressed in his work and it becomes obvious that such detailed work could have required much more time than the four weeks upon which Rochon bases his priority.

Being aware of the shortcomings of the solution, particularly as regarded its practical execution, Bošković arrived at another solution by which the refraction of light rays could be varied by means of a system of prisms. Instead of one he introduced two achromatic prisms with circular bases. Both prisms had approximately the same angles at their vertices. The angles were approximately half the angle which was to be measured. The prisms were to be mounted in such a way that one could be rotated round their common axis. In this way the prisms could be brought in a position where their thinner ends would coincide (Figure 2), in which case the refraction angle of the compound prism would equal the sum of the angles α (approximately 2α , because the angles are approximately equal). In the position shown in Figure 3 the total angle of refraction approximately equals zero, that is, the difference of the two angles α which are approximately equal.

To determine the value of the refraction angle of light rays for various mutual positions of the prisms, Bošković suggests that the prisms should be mounted in circular rings, one of which has diametrically punched small holes marked in such a way as to indicate the size of the angle which is being measured. The other ring would have two small conical or cylindrical teeth which could mesh with the holes of the first ring (Figure 4). The movement of the ring with teeth in reference to the one with holes is determined by the gradations marking the holes, and the gradations would result from practical measuring in the following way. At a certain distance from the instrument a horizontal rod with vertical gradations is set (Figure 5). The Figure shows that

$$\cotg \frac{\alpha}{2} = \frac{2 D}{l} .$$

The angle α is, accordingly, determined by the distance D of the instrument (placed at the point O) from the rod AB , as l is known. Let us suppose that by rotating one prism round the other the point B is seen in the same direction as the point A , which means that the two points coincide, this means in fact that we have measured the angle α , because the distance D and l are known. If the rod is now brought closer to the instrument or moved away from it and each time the points A and B are made to coincide in the field of vision, in each instance we have measured the angle α , which corresponds to the various distances of the rod from the instrument. If the ring with holes (Figure 4) is marked by corresponding values of the angles for which we had to move the ring with teeth to achieve coincidence of the point A and B we have obtained once for all a device by means of which it is possible to measure angles between two points, and then, by measuring the angle α , the distance D is determined. The second procedure (the determination of the distance D) is widely applied in surveying; and the construction proposed by Bošković, with slight improvements, is now generally accepted, with due credit to the inventor.

This is the basic idea which Bošković elaborated exhaustively. We propose to outline only some of his ideas to show how much further Bošković progressed than his opponent. Namely, this is the second solution disputed by Bošković and Rochon (for this solution, as will be shown later on, Rochon gave only the principles).

To begin with, Bošković suggests that the prisms should be mounted in rings (Figure 4) which makes it possible to rotate one prism round the common axis, while the gradations on one of them enable us to read the angles between the two prisms, in other words – the readings give the sizes of the angles that are being measured. To eliminate more efficiently chromatic aberration, he suggests that either of the two prisms be made of two prisms, one of flint glass and the other of ordinary glass. In addition, the two prisms should not be of the same strength (have the same angles of aberration). If it is expected that the angles to be measured will not exceed 32 minutes, it will be enough if the first prism deviated light rays by 31 minutes and the second by only 3 minutes. In this case, by turning the prisms we shall be able to measure all angles between 28 minutes and 34 minutes (the sum and difference of the strength of each prism). It is of particular importance for later constructions that Bošković puts the system of prisms outside the telescope, in front of the object glass. Also the combination of two achro-

matic prisms, one of which – the fixed one – has much greater refraction power than the other – the movable one – has the advantage of making possible considerably more accurate measuring of the required value (length or angle). Namely, the movable prism makes it possible to determine only the difference (rather: sum or difference) between the optical power of the fixed and the movable prism. As the refraction angle of the movable prism is comparatively small, an appropriate construction will make it possible to read the values of this small angle by means of gradations round the whole of the circular drum. Thus, if the drum is constructed in such a way as to make possible direct readings of ninetyth parts of the circle, then, for a prism whose refractory power is 3 minutes, it would be possible to read directly two seconds ($3' : 90$), and parts of the second could be estimated.

Describing in detail also the construction of such a device, Bošković says: »Un ouvrier habile en aura assez pour imaginer le mécanisme le plus simple et exécuter cet instrument.« As we know today, that was fully achieved later (in the twenties of this century).

In addition, Bošković shows how one of more similar units could be added to the construction with two prisms which would make it possible to measure angles up to 100 degrees. The readings on individual units would be done separately in a way similar to reading a clock where in one place we read hours, minutes in the second, and seconds in the third. Such a device with several double prisms could be usefully applied in determining geographical latitude and great distances between celestial bodies. Bošković calls these instruments megameters.

It seems interesting to point out that Bošković hopes that in the future chemistry could help to produce such transparent materials as would make it possible to construct optical instruments without the shortcomings the known materials (glass) have.

But Bošković believes that by means of the usual achromatic prism, made by combining flint glass and ordinary glass, good megameters for measuring angles up to 20 degrees can be constructed.

Further in his treatise, Bošković describes the application of rock crystal (*cristal de roche*) and Iceland spar (*cristal d'Island*), from which it is obvious that he knows well the effect of double refraction crystals. He states that one of the greatest difficulties is to find sizable pure crystals and, in addition, they are hard to work and they yield comparatively small refraction angles (of only few minutes). The advantage of crystal prisms is that the lighting of both images is approximately

the same when the prisms are moved along the axis of the telescope. To eliminate chromatic aberration in rock crystal prisms, he recommends the addition of another prism of ordinary glass, referring to his a work on optics published earlier in Vienna [5].

In conclusion, Bošković exhaustively describes the application of the system of two prisms of ordinary glass which we have already outlined.

It was the treatise briefly described here that caused the dispute which ended very unfavourably for Bošković.

The Secretary of the Academy notified Bošković by letter on May 17, 1777, of the unexpected reaction to the reading of his treatise in the Academy. Bošković replied promptly the next day (May 18, 1777). In his letter Bošković explained why he had given the treatise to Lalande and tacitly consented to its being read in the Academy of Science [7].

This letter was immediately (May 21, 1777) followed by another addressed to the Secretary of the Academy notifying him that he had no intention of causing a dispute. At the same time he mentioned all the persons (Fontana, Lalande, Borda, Messier) with whom he had discussed his treatise without any of them informing him of knowing anything about the existence of another similar treatise. In conclusion, Bošković expressed his hope that nobody would think that he had tried to ascribe to himself the work of another.

But Rochon was not satisfied with the course events had taken. He insisted that the Academy should set up a commission to investigate the circumstances and to establish priority.

At the same time, Rochon had obtained written statements from the scientists mentioned by Bošković as his interlocutors in the talks they had had before his treatise was read in the Academy. All the written statements were very unfavourable for Bošković.

All this had happened before May 28, 1777, on which date the Academy of Science set up a commission consisting of Bézout, Borda, Cassini junior, and Vandermonde.

Immediately after the appointment of the commission, Lalande wrote to Bošković on two occasions (May 30 and June 4, 1777) advising him to make a statement that he had no priority claim on the moving of the prisms along the longitudinal axis of the telescope, that he wanted the »Mémoire...« to be considered »comme non avenu«, and that he claimed for himself only the use of glass prisms.

He added that he wanted Bošković himself to write to the Academy in that sense and to send the letter to him: he particularly stressed that

neither he nor Fontana had any recollection of Bošković's having told them anything in connection with moving the prisms along the longitudinal axis of the telescope.

Following the advice, Bošković wrote to the Secretary of the Academy Condorcet on June 5, 1777, but the letter has been lost. In a lengthy letter of July 2, 1777, addressed to the members of the commission, Bošković delineated the course of the dispute pointing out the moments he believed to be decisive for the disputed ideas and solutions mentioning his letter of June 6, 1777.

The letter of July 2, 1777, is very important because in it Bošković deals exhaustively with all Rochon's works having to do with the disputed issues.

He began with the treatise read by Rochon on January 25, 1777, quoting Rochon's actual words. From the quotation it followed that Rochon suggested rock crystal prisms combined with ordinary glass to avoid chromatic aberration.

The second treatise, read on February 26, 1777, was considered an addition to the first and it described for the first time the use of a prism moving along the longitudinal axis of the telescope.

In the third treatise, read on March 9, 1777, Bošković found a detailed description of the use of a prism moving along the longitudinal axis of the telescope. The prism was of rock crystal, which Bošković neglected to mention but which is evident from the treatise.

In the conclusion of his letter, Bošković said that in his treatise Rochon had described a system of two achromatic glass prisms which, revolving one round the other, made it possible to measure angles from zero to the sum of the refraction angles of both prisms.

In the last treatise (of June 7, 1777), which is of no particular interest for us, because it came after Bošković's treatise which caused the dispute, Rochon mentioned some other materials (diamond, Iceland spar) that could be used instead of rock crystal.

In Rochon's earlier works Bošković found two other instances where the disputed points were mentioned.

After this, Bošković stated that he had first heard of these works of Rochon's on January 25, 1777, when Abbot Fontana told him of the use of prisms of rock crystal to get images of two different points in one place in the field of vision of the telescope. Bošković immediately replied that that could be achieved by only one glass prism, which, by being moved along the longitudinal axis of the telescope, would produce images of two points which were at different distances.

It was again Abbot Fontana who told him a few days later, but before February 26, 1777, that Minister Turgot had told him that Rochon had found the solution by moving one prism (but what kind of a prism it was, he did not mention) and that Rochon would speak about it at the next session of the Academy of Science. Bošković immediately rebuked him for not having mentioned to Turgot that he (Bošković) had already told him about it. Fontana offered only clumsy excuses for not having done so.

Turning again to the third treatise (the one of April 9, 1777) Bošković admitted that Rochon had described the use of achromatic prisms but that those who were present at the reading assured him that that day Rochon read only the first part of the treatise and thus there was no way of knowing what was in the second part of the treatise. As will be seen later, this statement of Bošković was absolutely correct.

In the fourth treatise (the one of July 7, 1777), Bošković wrote, it was even more obvious that Rochon had never thought of using glass prisms for this purpose as, instead of rock crystal, he suggested Iceland spar for measuring the apparent diameter of the sun.

At the end of the letter Bošković wrote of his talks with Abbot Fontana who had in the meantime given a written statement denying Bošković's allegation in connection with their talks. Bošković appealed to him on several occasions to give a truthful account of those talks, but all in vain.

Bošković concluded his letter with the following words:

»Ce que j'ai dit jusqu'ici se rapporte à ce qu'on a prétendu, que j'ai volé à un autre: je dirai à présent en deux mots, ce que je crois qu'il me reste en propre. Je crois jusqu'à présent que la substitution du verre simple au cristal de roche est à moi avec le principe du mouvement de la double image, bien différent de celui de la double réfraction du cristal de roche. Au moins je le croirai jusqu'à ce que quelqu'un le réclame avec raison. Celui là est un point essentiel, parce qu'on obtient les mêmes avantages, et beaucoup plus, à cause des angles très grands qu'on peut mesurer par ce moyen en adossant plusieurs prismes selon que je l'ai indiqué dans mon mémoire, et dans la première lettre que j'ai eu l'honneur de vous écrire: on obtient tout cela par une substance qu'on trouve et qu'on travaille plus aisément, et qui coûte beaucoup moins; je suis persuadé que ces trois articles feront toujours donner la préférence à mon instrument sur celui du cristal de roche ou d'Island qui ne sera jamais d'usage commun.«

This seems to be Bošković's last letter to the Academy written during the activity of the commission set up to pronounce upon the priority claim.

The commission, whose members we have mentioned earlier, gave its opinion on August 23, 1777.

We shall give the main points of this important document containing the final decision on the dispute.

Following the usual introduction, from which it is seen that Rochon requested the Academy to settle the dispute in this manner, Rochon's works are discussed.

Abbot Rochon had as early as 1767 studied the use of prisms in measuring angles, which was evident from his works (*Opuscules Mathématiques*, Brest, 1768).

A similar problem was treated in Rochon's treatise published in Würtemberg on January 24, 1776.

These works dealt with the problem of eliminating chromatic aberration in optical instruments and they led Rochon to the idea to apply prisms of rock crystal for measuring angular distance. He reported on the results of his work at the Academy sessions of January 25 and February 26, 1777.

This part of its report the commission concluded with the following words:

«Voilà la véritable date, l'époque authentique de la découverte perfectionnée de M. l'abbé de Rochon, établie d'une manière incontestable d'après l'acte qu'il en a pris devant l'Académie et dans ses registres.»

The commission particularly dwelt on the treatise which Rochon began to read at the open session of the Academy of April 9, 1777.

In this treatise (the commission reported) Rochon once again explained two constructions of his micrometer. The first of them made use of two prisms of rock crystal which could rotate circularly one round the other; the second envisaged the use of only one achromatic prism of rock crystal which could be moved along the longitudinal axis of the telescope.

Finally, in the last part of the treatise (the commission continued) Rochon dealt with the measuring of large angles by means of two prisms of ordinary glass which he placed in front of the object glass of the telescope, but in such a way that they could rotate circularly one round the other. In this manner angles ranging from 0° to 20° could be measured.

All this (said the commission) was known almost a whole month before Bošković's treatise was read in the Academy of Science (May 10 and 16, 1777). »qui a donné lieu aux plaintes de M. l'abbé de Rochon, et dont il convient de donner ici en peu de mots extrait.«

Then the commission gave a report on Bošković's treatise. To show the extent of the commission's bias against Bošković, we shall quote the opening sentence of its report:

»L'auteur au commencement de se mémoire paraît vouloir insinuer qu'il avait déjà eu les mêmes idées que M. l'abbé de Rochon.«

The use of the word »insinuer« was at least in bad taste.

The commission proceeded to report on most of what Bošković had written to the Academy on July 2, 1777, and verbatim quoted his statement by which he renounced all honour in favour of Rochon.

Yet, in doing so, the commission made use of a slip Bošković had made and said:

»M. l'abbé Rochon, dit M. Bošković, n'a employé pour son micro-mètre que la double réfraction du crystal de roche, et l'on m'a assuré qu'il a dit que son prisme ne pouvoit lui donner que jusqu'à six degrés.«

What Bošković wanted to say was »six minutes« rather than »six degrés« but the commission believed that it was no slip because of the following reasons:

1. to show that Rochon could measure larger angles, which meant that he made use of prisms of ordinary glass, and

2. to show that Bošković did not know the properties of rock crystal prisms, by means of which only small angles could be measured, under 1°.

Comparing the works of Bošković and Rochon, the commission came to the following conclusion:

The Academician (meaning Rochon) put two glass prisms in front of the object glass of an astrometer and rotated them circularly one round the other. M. l'abbé Bošković made the same thing but he also added a third prism which could be moved inside the telescope along its longitudinal axis. This third prism is the only addition to the instrument on which Rochon had publicly reported on April 9, 1777.

This is the conclusion of the commission:

»Nous ne pouvons en conséquence, penser autre chose, si ce n'est que M. l'abbé Boscovich a été induit en erreur sur l'état des recherches et des découvertes de M. l'abbé de Rochon, que si on ne lui eut pas fait des rapports infidèles et s'il eut bien voulu ne s'en rapporter qu'à

lui même pour s'instruire des faits et des matières traitées par l'académicien il n'auroit certainement pas présenté au Ministre et à l'Académie comme neuves, des idées et des découvertes dont l'honneur appartenait déjà depuis longtemps à M. l'abbé de Rochon.

Fait à la salle de l'Académie le 23 août 1777.

le chevalier de Borda

Bézout
Vandermonde
Cassini

In this way the dispute between Bošković and Rochon was concluded very unfavourably for Bošković.

In order to arrive to unbiased conclusions, we have decided to follow the minutes of the Academy sessions held during the dispute and at which Rochon's and Bošković's treatises were read.

Saturday, January 25, 1777

Abbot Rochon read his »Treatise on a New Object Glass with a Micrometer«, which we have outlined.

Wednesday, January 29, 1777

Abbot Rochon demonstrated the micrometer the treatise on which he had read at the last session (January 25, 1777).

Wednesday, February 26, 1777

Abbot Rochon read an appendix to his treatise on the new micrometer, made of rock crystal.

Wednesday, March 5, 1777

The commission consisting of Lemonnier, Leroy and the Secretary of the Academy Condorcet reported on the advantages of these new constructions. The report was exhaustive and concluded with the opinion that both micrometers represented ingenious solutions based on new principles. The second of the two micrometers would be particularly suitable for measuring small angles with great accuracy. Theory had not shown that any fault could be found with the accuracy of the instrument, and the demonstration conducted by M. l'abbé de Rochon seemed to have corroborated the theory. We believe, therefore, that it would not require much persuasion for M. l'abbé de Rochon to have his new micrometer produced in large numbers from which great usefulness can be expected

in a large number of astronomic observations requiring great precision. Only practical application can show to what extent the instrument is useful and whether in practice the theoretical precision would be reached. But, we believe, that in the meantime the Academy should notify the public of the usefulness of the brilliant ideas contained in these two treatises of M. l'abbé de Rochon.

Wednesday, April 9, 1777

At this session, Rochon read a treatise on two instruments for measuring angles.

In the first instrument, he put an achromatic prism of rock crystal combined with a prism of ordinary glass inside a telescope near the object glass. The instrument was particularly suitable for determining apparent diameters of celestial bodies, phases of the eclipses of the sun and other accurate observations, as it was very precise.

Of particular importance – for surveying purposes – was Rochon's statement that by means of this instrument the distance from the instrument to the object observed could be measured. In that case we must have the apparent diameter of the object observed.

But, by means of this instrument only angles up to 20 minutes could be measured. Rochon, therefore, described another construction by means of which larger angles could be measured. Instead of a crystal prism it made use of two achromatic glass prisms which could be rotated circularly one round the other, in such a way as to represent a system of prisms from flat plate to prism with an effect equalling the effect of both prisms combined.

The treatise was printed in *«Histoire de l'Académie Royale»*, pp. 64–68, in 1780. At the end of the treatise there is a note saying that the author read it at the open session of the Academy on April, 9, 1777, and that it should be regarded as published at that time.

As it is quite evident, in these treatises Rochon never described or actually used prisms of ordinary glass, which should be moved linearly inside the telescope. It follows that in constructions of this kind Bošković had priority and it seems unbelievable that it could be denied him.

As regards the construction of the system of two prisms of ordinary glass, it is obvious that Rochon (April 9, 1777) announced it before Bošković (May 7, 1777), but we want to stress that he only *«announced»* it. What is more, even what Rochon published only in 1780, wanting it to be regarded as published on April 9, 1777, was so short and sketchy (only

27 lines) as compared to what Bošković wrote about it and submitted completely finished on May 7, 1777, that one cannot help wondering whether the priority of 28 days insisted upon by Rochon has any real significance.

Moreover, it is almost certain that Rochon did not submit the treatise to the Academy by April 9, 1777, as the original minutes of the Academy run as follows [7]:

(23^e) Mercredi 9. avril 1777²

M. l'abbé Rochon (a lû)³ un mémoire sur les micromètres objectifs, de son invention.

(27^e) Mercredi 23. avril 1777.

M. l'abbé de Rochon a commencé la lecture de son mémoire sur les micromètres objectifs.⁴

(28^e) Samedi 26. avril 1777.

M. l'abbé Rochon a continué la lecture de son mémoire sur les micromètres objectifs.⁵

(31^e) Mercredi 7. Mai. 1777.

M. l'abbé Rochon a continué la lecture de son mémoire sur les micromètres.

(32^e) Samedi 10. Mai 1777.

M. Leroy a lû un mémoire de M. l'abbé Boscovich, sur les micromètres objectifs.

(34^e) Vendredi 16. Mai 1777.

M. Leroy a lû un mémoire de M. l'abbé Boscovich, sur les micromètres et il a été décidé qu'on écrirait à M. l'abbé Boscovich pour savoir si son intention est que l'Académie prononce sur son mémoire.

(35^e) Mercredi 28. Mai 1777.

1. J'ai lû⁶ deux lettres de M. l'abbé Boscovich en reponse à celle qui j'ai été de lui écrire.

² Assemblée publique.

³ »a lû« is in brackets.

⁴ Lalande was present.

⁵ Lalande was present.

⁶ It was Condorcet who read these letters.

2. M. le chevalier de Borda a lu une déclaration de M. l'abbé Fontana, relativement à cet objet: on a été nommé des commissaires avec MM. de Borda. Bézout, Vandermonde et Cassini fils.
(38^e) Samedi 7. juin 1777.

1. M. de Borda a lu une lettre du P. Boscovich sur les micromètres, M. l'abbé Rochon a demandé qu'on communiquât ses mémoires au P. Boscovich.

2. M. l'abbé Rochon a fini l'écrit suivant.⁷

According to these minutes, Rochon started reading his treatise only on April 23, 1777, and finished it on June 7, 1777. From the minutes it also follows that the last part of the treatise as read on June 7, 1777, differs from the corresponding part of the treatise published in 1780.

Taking everything into consideration, our opinion on the dispute between Bošković and Rochon would be as follows:

1. There is no doubt whatever that Bošković was the first to introduce the application of an achromatic glass prism, which partly covers the opening of the object glass of a telescope in order to produce the image of two different points in one place in the field of vision of the telescope (Figure 1). By moving the prism along the telescope between its object glass and focus, the points whose images are seen in one place of the field of vision of the telescope are changed.

Rochon, on the other hand, for this purpose uses prisms of rock crystal, making use of the properties (double refraction) of rock crystal for the production of a double image. Rochon in his early constructions revolves these crystal prisms circularly round each other and later moves them along the axis of the telescope.

The difference between the ideas and constructions of the two scientists is striking.

These obvious differences were completely ignored by the Academy of Science of Paris and thus a great injustice was done to Bošković.

2. The use of two achromatic glass prisms which by circular rotation one round the other produce the images of different points in one place in the field of vision of the telescope Rochon announced to the Academy of Science on April 9, 1777. The same principle, described in detail with theoretical explanation, was contained in the treatise Bošković submitted to Minister Sartine on May 7, 1777. Comparing these two dates it would seem that Rochon had a priority of 28 days.

⁷ M. l'abbé Rochon a fini la lecture de son mémoire sur les micromètres objectifs et les doubles refractions.

But it is necessary to consider that priority carefully because of the following reasons:

a) Rochon announced the reading of his treatise on April 9, 1777, and began to read it on April 23. He continued the reading on April 26 and May 7, and concluded it on June 7, 1777. It is impossible to establish when the part dealing with the use of two glass prisms was read.

b) The treatise was published only in 1780, with a note to the effect that it was read on April 9, 1777, at an open session of the Academy of Science of Paris, but the minutes of the session show that this is not true.

c) In the form in which the treatise was published in 1780, in the »Histoire de l'Académie Royale, pp. 64–68, the part dealing with glass prisms is on pages 67 and 68, that is, at the end of the treatise. Accordingly, this part could not have been read before May 7, 1777.

It is quite obvious that Rochon's priority is very doubtful, particularly from a legal point of view.

Namely, Bošković submitted the completed treatise on May 7, 1777, without any subsequent changes and additions, whereas Rochon completed his only at the last reading at the session of June 7, 1777.

Rochon's priority stands only because it is impossible to establish beyond doubt when he read the part dealing with the use of glass prisms. But that certainly could not have occurred before April 23, 1777, because on that day Rochon began reading his treatise.

It becomes obvious that the commission came to its decision without due consideration of facts, thus doing Bošković a great injustice.

But even our conclusion is not favourable for Bošković as it gives Rochon a priority of a few days.

However, Bošković can be fully satisfied, because all constructors (as far as we know) making use of glass prisms for this purpose acknowledge only Bošković as the inventor of these constructions.

To mention only the more prominent names – Rodolphe Bosshardt, outstanding constructor of surveying instruments; our contemporary, Albert König-Horst Köhler, scientific adviser of the firm Zeiss, Jena; Deumlich-Seyfert and O. Eppensteib, well-known authors and theoreticians specialized in constructions of optical surveying instruments, particularly telescopes.

Accepted for publication on May 5, 1967, in the Section for mathematical, physical and technical sciences, Yugoslav Academy in Zagreb.

DIE GEMEINSAMEN KONGRUENZEN DER VIER STRAHLEKOMPLEXE EINES POLARRAUMBÜSCHELS

EINFÜHRUNG: Durch ein Polarraumbüschel sind, wie bekannt, vier Strahlkomplexe bestimmt und ihm zugeordnet. Das sind: 1) Der quadratische tetraedrale Basiskomplex, dessen Haupttetraeder das Autopolaritetraeder dieses Polarraumbüschels ist, 2) der kubische Majcensche Strahlkomplex, 3) der Normalenkomplex der Inzidenzflächen dieses Polarraumbüschels, der achten Grades ist, und 4) der kubische Komplex der kürzesten Tangentialwege zwischen diesen Inzidenzflächen (der Tangentialkurzwegekomplex).

Es seien das Polarraumbüschel mit (Π_n) , das Büschel seiner Inzidenzflächen φ_n mit Π_n , und seine vier Strahlkomplexe mit (TK) , (MK) , (NK) und (RK) bezeichnet. Die Grundkurve 4. Ordnung I. Art des Inzidenzflächenbüschels Π_n sei mit c^4 bezeichnet. Jeder dieser vier Komplexe wurde in bisherigen Arbeiten einzeln, mit seinen wichtigsten Eigenschaften, bearbeitet. Nur in der Arbeit »Über neue Eigenschaften der Büschel und der Bündel polarer Räume« wurde der gemeinsame Strahlort (Kongruenz) des quadratischen tetraedralen und des kubischen Majcenschen Komplexes betrachtet, und die Ordnung der Fläche der stetigen quadratischen Punktmenge, der den Strahlen dieses gemeinsamen Strahlortes zugeordneten Raumpunkte, bestimmt. In dieser Arbeit haben wir die Absicht weitere fünf durch je zwei der erwähnten Strahlkomplexe bestimmten Strahlkongruenzen zu betrachten. Selbstverständlich werden auch die geometrischen Örter der den Strahlen dieser Kongruenzen zugeordneten Punkte bezüglich beider seiner Komplexe erforscht und betrachtet.

Es ist offensichtlich, dass die betrachteten Kongruenzen auch imaginäre Teile haben können, da zwei Komplexstrahlkegel in jedem Raum-

punkt sich auch in Paaren konjugiert imaginärer Erzeugenden durchdringen können. Diese imaginären Teile werden wir in dieser Arbeit nicht speziell betrachten, da dies allen Aussichten nach mit synthetischen Mitteln nicht leicht ausführbar wäre. Über einige spezielle reelle Teile der vier erwähnten Komplexe und ihrer gemeinsamen Kongruenzen wird etwas später gesprochen.

Die durch die Strahlkomplexe $I = (TK)$, $II = (MK)$, $III = (NK)$ und $IV = (RK)$ bestimmten Kongruenzen bezeichne man mit $I - II = (TM)$, $I - III = (TN)$, $I - IV = (TR)$, $II - III = (MN)$, $II - IV = (MR)$ und $III - IV = (NR)$. Die Kongruenz (TM) wurde schon in der vorher erwähnten Arbeit betrachtet, braucht also hier nicht in Betracht gezogen zu werden. Als nächste wäre also die (TN) Kongruenz des tetraedralen Komplexes und des Normalenkomplexes der Inzidenzflächen an der Reihe.

Bevor wir aber die aufgezählten geometrischen Erzeugnisse näher zu betrachten beginnen, müssen wir uns zuerst mit einigen Eigenschaften der vier erwähnten, einem Polarraumbüschel zugeordneten Strahlkomplexen beschäftigen, besonders mit denjenigen Eigenschaften, die mit der unendlich fernen Ebene verbunden sind.

Die unendlich fernen Strahlen des (TK) Komplexes hüllen eine Kurve 2. Grades ein, und die ihnen durch diesen Komplex zugeordneten Punkte bilden die bekannte kubische Mittelpunktkurve k^3 der Inzidenzflächen φ_n .

Jede Gerade des Raumes berührt, wie bekannt, zwei Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades, und das gilt offenbar auch für die unendlich ferne Geraden. Jede Gerade der unendlich fernen Ebene berührt also zwei Inzidenzflächen φ_n des Büschels Π_n . Auf Grund der bekannten Definition des Majcenschen kubischen (MK) Komplexes gehören daher alle Geraden der unendlich fernen Ebene dem (MK) Komplex als Strahlen an. Da diese Strahlen unendlich fern zwei Inzidenzflächen φ berühren, müssen sie als zweidcutige singuläre Strahlen des (MK) Komplexes betrachtet werden.

Drei Flächen des Inzidenzflächenbüschels Π_n berühren die unendlich ferne Ebene. Da sich in dieser Ebene der absolute Kegelschnitt befindet, sind die unendlich fernen Berührungsgeralen dieser drei Flächen auch deren »Normalen«. Also, die Strahlen der drei erwähnten Tangentenbüschel 1. Ordnung in der unendlich fernen Ebene sind Strahlen des diesem Polarraumbüschel (Π_n) zugeordneten (NK) Komplexes.

Die Bestimmung des Grades des (NK) Komplexes wurde in der Arbeit »Normalenkomplex der Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades« mittels der Klasse 8 der Einhüllungskurve der in einer Ebene liegenden Strahlen des (NK) Komplexes durchgeführt. Jeder unendlich ferne Punkt in dieser Ebene enthielt fünf dieser Strahlen, daher war die unendlich ferne Gerade eine dreifache Berührungsgerade dieser Kurve 8. Klasse. Jede unendlich ferne Gerade ist also ein dreideutiger Strahl des (NK) Komplexes. Diese Tatsache kann auch auf folgende Weise bewiesen werden: Die Normale einer Fläche in einem ihrer Punkte P enthält den unendlich fernen Pol der unendlich fernen Geraden der Berührungsebene dieser Fläche in diesem Punkt, bezüglich des absoluten Kegelschnittes. Selbstverständlich kann sich der Punkt P auch unendlich fern befinden.

Es sei p^n eine unendlich ferne Gerade, und ihr unendlich ferner Pol bezüglich des absoluten Kegelschnittes sei mit P^n bezeichnet. Jedem Punkt R_n der Geraden p^n ist eine Polare r_n bezüglich des absoluten Kegelschnittes zugeordnet, die den Pol P^n enthält. Jede dieser Polaren r_n berührt zwei Flächen φ_n des Inzidenzflächenbüschels Π_n in Punkten, die mit B_n^1, B_n^2 bezeichnet sein. Offenbar ist die Gerade r_n die gemeinsame unendlich ferne Gerade der Berührungsebenen dieser zwei Inzidenzflächen φ_n in ihren Punkten B_n^1, B_n^2 , also sind die unendlich fernen Verbindungsgeraden $P^n B_n^1, P^n B_n^2$ die Normalen dieser zwei Flächen φ_n in ihren Punkten B_n^1, B_n^2 . Wie bekannt bilden die Punktepaare B_n^1, B_n^2 auf allen den Pol enthaltenden Polaren r_n eine Kurve 3. Ordnung [1], die die Gerade p^n in drei Punkten schneidet. Es gibt also auf der Geraden p^n drei Punkte R_n , für die einer der Punkte des ihnen zugeordneten Punktepaars B_n^1, B_n^2 auf dieser Geraden liegt. Die Gerade p^n ist also eine Normale dreier Inzidenzflächen φ_n in ihren auf dieser Geraden liegenden Punkten. Jede unendlich ferne Gerade ist also ein dreideutiger Strahl des (NK) Komplexes in jedem Polarraumbüschel (Π_n) .

Es sei weiterhin p der im (TK) Komplex einem Raumpunkt P zugeordnete Strahl. Findet man auf der unendlich fernen Geraden der Ebene (Pp) den dem unendlich fernem Punkt P^n der Geraden p^n bezüglich des absoluten Kegelschnittes konjugierten Punkt $\bar{P}^n$, so ist die Verbindungsgerade der Punkte $P, \bar{P}^n$ der dem Punkt P im (RK) Komplex des Polarraumbüschels (Π_n) zugeordnete Strahl [2]. Befindet sich der Punkt P unendlich fern, dann liegt unendlich fern auch der diesem Punkt im (RK) Komplex zugeordnete Strahl.

Die den Punkten einer unendlich fernen Geraden zugeordnete Strahlen im (TK) Komplex bilden ein Erzeugendensystem einer Regelfläche 2. Grades, die durch diese unendlich ferne Gerade in zwei Punkten geschnitten wird. Auf Grund des vorher Erwähnten ist also diese unendlich ferne Gerade ein doppeldeutiger Strahl des (RK) Komplexes. Da die unendlich ferne Gerade ganz beliebig angenommen werden kann, gilt, dass alle Geraden der unendlich fernen Ebene Strahlen des (RK) Komplexes in jedem Polarraumbüschel (H_n) des Raumes sind.

1. Die (TN) Kongruenz des tetraedralen und des Normalenkomplexes des Polarraumbüschels und einige ihrer Eigenschaften. Der tetraedrale Strahlkomplex eines Polarraumbüschels ist, wie bekannt, vom Grad zwei, während sein Normalenkomplex vom Grad acht ist. Die gemeinsame (TN) Kongruenz müsste also den Grad sechzehn haben. Da aber alle Geraden der Hauptpunkte eines Polarraumbüschels Strahlen seines tetraedralen Basiskomplexes und seines Normalenkomplexes sind, gehören also auch die vier Strahlenbündel der Hauptpunkte dieser Kongruenz an. Wegen dieser Ausartung in vier Strahlbündel, die nicht in Betracht gezogen werden, hat also die (TN) Kongruenz die Ordnung 12 und die Klasse 16.

Jedem Strahl dieser (TN) Kongruenz ist ein Punkt durch den tetraedralen Basiskomplex, und ein weiterer durch den Normalenkomplex zugeordnet. Jede dieser zwei stetigen quadratischen Raumpunktmengen bildet eine Fläche, die wir jetzt näher untersuchen werden.

Die den Punkten einer Ebene zugeordneten Strahlen im tetraedralen Basiskomplex (TK) eines Polarraumbüschels (H_n) bilden, wie bekannt, eine Kongruenz 1. Ordnung 3. Klasse, die von den Bisekanten der durch die Pole dieser Ebene bezüglich aller Inzidenzflächen bestimmten Raumkurve 3. Ordnung gebildet wird.

Die Fusspunkte der in einer Ebene liegenden Strahlen des Normalenkomplexes eines Polarraumbüschels bilden eine Kurve 3. Ordnung,¹ und die Fusspunkte der einen Raumpunkt enthaltenden Strahlen dieses Normalenkomplexes, die einen Kegel 8. Grades bilden, liegen auf einer Raumkurve 9. Ordnung [3]. Auf Grund dieser zwei Eigenschaften folgt, dass diejenigen Strahlen des Normalenkomplexes eines Polarraumbüschels, deren Fusspunkte in einer Ebene τ liegen, eine Strahlkongruenz 9. Ordnung 3. Klasse bilden.² Also, jeder Punkt des Raumes,

¹ Siehe [1] S. 49.

² Siehe [3] S. 265.

ausser den Punkten der Ebene τ , enthält neue Strahlen des (NK) Komplexes, deren zugeordnete Fusspunkte in der Ebene τ liegen, und in jeder Ebene des Raumes, ausser der Ebene τ , liegen drei Strahlen des (NK) Komplexes, deren zugeordnete Fusspunkte in der Ebene τ sind. Die in der Ebene τ liegenden Strahlen des (NK) Komplexes hüllen eine Kurve 8. Klasse ein, und die diesen Strahlen zugeordneten Fusspunkte bilden, wie eben erwähnt, eine Kurve 3. Ordnung.

Es sei durch die Punkte einer Ebene τ eine derartige Strahlkongruenz 9. Ordnung 3. Klasse in unserem Polarraumbüschel (II_n) gegeben. Der tetraedrale Basiskomplex dieses Polarraumbüschels ist, wie bekannt, vom Grade 2. Dieser tetraedrale Strahlkomplex und die beschriebene Strahlkongruenz 9. Ordnung 3. Klasse haben also eine Regelfläche vom Grad 2 $(9 + 3) = 24$ gemeinsam, deren Erzeugende Strahlen unserer (TN) Kongruenz sind. Die Ebene τ schneidet offenbar diese Regelfläche in einer Kurve 24. Ordnung. Da aber die (TN) Kongruenz von 16. Klasse ist, also in der Ebene τ sich 16 Strahlen dieser Kongruenz befinden, deren durch den (NK) Komplex zugeordnete Punkte auch in dieser Ebene liegen, sind auch diese Strahlen die Erzeugenden der erwähnten Regelfläche 24. Grades. Die Schnittkurve der Ebene τ und dieser Regelfläche 24. Grades zerfällt also in diese 16 Strahlen und in eine Kurve 8. Ordnung. Die durch den (NK) Komplex den Erzeugenden der erwähnten Regelfläche zugeordneten Punkte bilden also in der Ebene τ eine Kurve 8. Ordnung. Da die Ebene τ im Raum ganz beliebig angenommen war, gilt offensichtlich dasselbe für jede Ebene des Raumes. Den zweidimensionalen stetigen geometrischen Ort der durch den Normalenkomplex (NK) den Strahlen der (TN) Kongruenz zugeordneten Fusspunkte, schneidet also jede Ebene des Raumes in einer Kurve 8. Ordnung. Es gilt also folgende Satz:

Die den Strahlen der (TN) Kongruenz durch den betreffenden Normalenkomplex zugeordneten Fusspunkte bilden eine Fläche 8. Ordnung.

Man bezeichne diese Fläche mit F_{TN}^8 . Der eben erwähnte Satz kann auch auf folgende Weise ausgesprochen werden:

Im (TK) Basiskomplex eines Polarraumbüschels befindet sich immer eine Strahlkongruenz 12. Ordnung 16. Klasse, deren jeder Strahl eine Normale einer Inzidenzfläche dieses Polarraumbüschels ist. Die Fusspunkte dieser Normalen bilden eine Fläche 8. Ordnung.

Da die Normalen einer Fläche 2. Grades eine Kongruenz 6. Ordnung 2. Klasse bilden, bilden diejenigen Normalen jeder Inzidenzfläche φ

des Büschels Π_n , die auch Strahlen des (TK) Komplexes sind, eine Regelfläche $2(6 + 2) = 16$. Grades. Die Fusspunkte dieser Erzeugenden bilden offenbar eine Raumkurve 16. Ordnung, die die Durchdringungskurve der betreffenden Inzidenzfläche φ und der erwähnten Fläche 8. Ordnung ist. Diese Raumkurve 16. Ordnung ist auch eine Hälfte der Durchdringungskurve dieser Inzidenzfläche φ und der Erwähnten Regelfläche 16. Grades, die offenbar 32. Ordnung ist und in zwei Teile 16. Ordnung zerfällt.

Die beschriebene Fläche 8. Ordnung enthält die Grundkurve c^4 des Inzidenzflächenbüschels Π_n nicht, da die den Punkten dieser Grundkurve im (TK) Komplex zugeordneten Strahlen die Tangenten dieser Raumkurve c^4 sind, während im (NK) Komplex diesen Punkten die Normalen dieser Raumkurve in diesen Punkten zugeordnet sind.

Die den Punkten der im Raum beliebig angenommenen Ebene τ zugeordneten Strahlen im (TK) Komplex unseres Polarraumbüschels (Π_n) bilden, wie bekannt, eine Kongruenz 1. Ordnung 3. Klasse. Jeder Punkt, ausser den Punkten der Ebene τ , enthält also einen Strahl des (TK) Komplexes dessen zugeordneter Punkt in der Ebene τ liegt, und in jeder Ebene des Raumes, ausser der Ebene τ , befinden sich drei Strahlen des (TK) Basiskomplexes deren zugeordnete Punkte in der Ebene τ liegen.

Die gemeinsamen Strahlen des Normalenkomplexes und dieser Kongruenz bilden in diesem Polarraumbüschel eine Regelfläche vom $8(1 + 3) = 32$ -ten Grade, und alle Erzeugenden dieser Fläche sind also Strahlen unserer (TN) Kongruenz.

Man nehme in einer Seitenebene des Haupttetraeders unseres Polarraumbüschels (Π_n) eine Gerade g , und betrachte die den Punkten dieser Geraden zugeordneten Strahlen im (TK) Komplex dieses Polarraumbüschels. Die diesen Punkten im (TK) Komplex zugeordneten Strahlen bilden, wie bekannt, einen Kegel 2. Grades, dessen Spitze sich in dem dieser Seitenebene gegenüberliegendem Scheitel dieses Haupttetraeders befindet. Man weiss aber weiterhin, dass die Geraden der Scheitelpunkte des Haupttetraeders auch als Strahlen des (NK) Komplexes betrachtet werden können. Da die beliebig angenommene Ebene τ die vier Seitenebenen des Haupttetraeders in vier Geraden schneidet, zerfällt also die eben erwähnte Regelfläche 32. Grades in vier Kegel 2. Grades und in eine Regelfläche 24. Grades. Die Erzeugenden dieser Regelfläche sind diejenigen Strahlen der (TN) Kongruenz, deren durch den (TK) Komplex zugeordnete Punkte in der Ebene τ liegen und eine stetige Punktreihe, also eine Kurve bilden. Diese Kurve wird die Schnittkurve der

Ebene τ und des geometrischen Ortes (der Fläche) der den Strahlen der (TN) Kongruenz durch den (TK) Komplex zugeordneten Punkte sein, und die Ordnung dieser Kurve wird offenbar der Ordnung des erwähnten geometrischen Ortes gleich sein.

Wie erwähnt, bilden die den Punkten der Ebene τ zugeordneten Strahlen des (TK) Basiskomplexes eine Kongruenz 1. Ordnung 3. Klasse, die durch die Bisekanten der Polraumkurve 3. Ordnung der Ebene τ bezüglich der Inzidenzflächen φ_n des Büschels Π_n gebildet ist. Die erwähnte Regelfläche 24. Grades enthält also diese Raumkurve 3. Ordnung. Da ferner die (TN) Kongruenz 12. Ordnung ist, muss die eben erwähnte Raumkurve 3. Ordnung eine 12-fache Kurve unserer Regelfläche 24. Grades sein. Man betrachte in der Ebene τ eine beliebige Gerade p . Die den Punkten dieser Geraden p im (TK) Komplex zugeordneten Strahlen bilden, wie bekannt, eine Regelfläche 2. Grades, die die eben erwähnte Raumkurve 3. Ordnung enthält, weil die Gerade p in der Ebene τ liegt. Die Durchdringungskurve dieser Regelfläche 2. Grades und unserer beschriebenen Regelfläche 24. Grades ist offenbar eine Raumkurve 48. Ordnung. Da die 12-fache Raumkurve 3. Ordnung schon ein Teil 36. Ordnung dieser Durchdringungskurve 48. Ordnung ist, muss also noch ein Teil von 12. Ordnung dieser Durchdringungskurve bestehen und gefunden werden.

Auf Grund unserer Betrachtungen sahen wir, dass die Erzeugenden der erwähnten Regelfläche 2. Grades und unserer Regelfläche 24. Grades Bisekanten der beschriebenen Polraumkurve 3. Ordnung der Ebene τ sind. Es kann also keine Erzeugende der Regelfläche 2. Grades, ausser in den Punkten der 12-fachen Raumkurve 3. Ordnung, die Regelfläche 24. Grades schneiden. Der gesuchte Durchdringungsteil 12. Ordnung muss also als zerfallene Raumkurve aus 12 Geraden bestehen, die offenbar die erwähnten Bisekanten sind. Es folgt also, dass es auf der Geraden p in der Ebene τ 12 Punkte gibt, deren zugeordnete 12 Strahlen im (TK) Komplex auch Erzeugende der Regelfläche 24. Grades sind, also auch als Strahlen zu der (TN) Kongruenz unseres Polarraumbüschels (Π_n) gehören. Die den Erzeugenden der Regelfläche 24. Grades durch den (TK) Komplex zugeordneten Punkte bilden also in der Ebene τ eine Kurve, die mit der beliebig angenommenen Geraden p zwölf Punkte gemeinsam hat, also von 12. Ordnung ist. Da im allgemeinen Fall die drei sich mit den ihnen zugeordneten Punkten in der Ebene befindenden Strahlen des (TK) Komplexes nicht auch Strahlen des (NK) Komplexes sein können, gilt folgender Satz:

Die den Strahlen der (TN) Kongruenz eines Polarraumbüschels durch den (TK) Komplex dieses Büschels zugeordneten Punkte bilden eine Fläche 12. Ordnung.

Es sei diese Fläche mit F_{TN}^T bezeichnet. Die den Geraden der Hauptpunkte des Polarraumbüschels (H_n) , als den gemeinsamen Strahlen des (TK) und des (NK) Komplexes, durch den (TK) Komplex zugeordneten Punkte liegen in den Seitenebenen des Haupttetraeders.

Die Fläche F_{TN}^N der Punkte die den Strahlen der (TN) Kongruenz durch den (HK) Komplex zugeordnet sind, ist 8. Ordnung, während die Fläche F_{TN}^T der durch den (TK) Komplex zugeordneten Punkte, wie wir eben sahen, von 12. Ordnung ist. Diese zwei Flächen durchdringen sich also in einer Raumkurve 96. Ordnung, die mit 1^{96} bezeichnet sei. Die je einem Punkt dieser Raumkurve in den (TK) und (NK) Komplexen zugeordnete Strahlen sind offenbar Strahlen der (TN) Kongruenz, also beide Strahlen gleichzeitig Strahlen dieser beiden Komplexe. Man nehme auf der Kurve 1^{96} einen Punkt, der auf der Fläche F_{TN}^T mit T , und auf der Fläche F_{TN}^N mit N bezeichnet sei. Die in der Kongruenz (TN) durch die Komplexe (TK) und (NK) dem Punkt $T \equiv N$ zugeordneten Strahlen seien mit t und n bezeichnet. (Die Gerade n enthält den Punkt $T \equiv N$, und die Gerade t nicht.) In jeder dieser Geraden befindet sich noch eine dem anderen Komplex zugeordnete Gerade n_1 und t_1 . Also ist $n \equiv t_1$ und $t \equiv n_1$. Die den Punkt $T \equiv N$ enthaltende und auf der Geraden $n \equiv t_1$ senkrecht stehende Ebene bezeichne man mit α . Das ist die Berührungsebene in diesem Punkt der diesen Punkt enthaltenden Inzidenzfläche φ des Büschels H_n . Die dem Punkt T im (TK) Komplex zugeordnete Gerade t liegt, wie bekannt, in der Ebene α , und auf dieser Geraden liegt offenbar auch der dem Strahl t_1 durch den (TK) Komplex zugeordnete Punkt T_1 . Da aber der Strahl t auch Strahl n_1 des (NK) Komplexes ist, muss der Fusspunkt N_1 dieses Strahles sein Schnittpunkt mit der Ebene $(t_1 T_1)$ sein, da diese Ebene die Berührungsebene einer neuen Inzidenzfläche φ des Büschels im Punkt T_1 ist. Da ferner diese Ebene normal auf dem Strahl n_1 steht, muss $T_1 \equiv N_1$ und $t = n_1 \perp T_1 N \equiv TN_1 \perp t_1 \equiv n$ sein. Es folgt also, dass sich der Punkt $T_1 \equiv N_1$ auch auf der Raumkurve 1^{96} befinden muss, und dass die Punkte $T_1 \equiv N_1$ und $T \equiv N$ eineindeutig involutorisch zugeordnet sind. Jedem Polarraumbüschel ist eine derartige Raumkurve 96. Ordnung zugeordnet, die durch dasselbe auch bestimmt ist.

II. Die gemeinsame (TR) Kongruenz des einem Polarraumbüschel zugeordneten tetraedralen Basiskomplexes und des Komplexes der kürzesten Tangentialwege seiner Inzidenzflächen.

Wie vorher erwähnt werden wir diese Strahlkongruenz mit (TR) bezeichnen. Da der tetraedrale Basiskomplex quadratisch, und der Tangentialkurzwegekongruenz kubisch ist, müsste die (TR) Kongruenz 6. Grades sein, wenn sie keine zerfallenen Teile enthielte, die man ausser Betracht lassen wollte. Der einem Raumpunkt zugeordnete Strahl in dem (RK) Tangentialkurzwegekongruenz ist, wie bekannt, die kürzeste Transversale der diesem Punkt zugeordneten Strahlen im tetraedralen Basiskomplex und im Normalenkomplex desselben Polarraumbüschels. Da die Geraden der Hauptpunkte des Polarraumbüschels Strahlen des tetraedralen Basiskomplexes und des Normalenkomplexes sind, folgt auf Grund der eben erwähnten Eigenschaft eines Polarraumbüschels, dass die Geraden der Hauptpunkte auch Strahlen des diesem Polarraumbüschel zugeordneten Tangentialkurzwegekongruenz sind. Die (TR) Kongruenz zerfällt also in die vier Strahlenbündel der Hauptpunkte und in eine Kongruenz 2. Ordnung 6. Klasse.

Die Bisekanten der Grundkurve c^4 des Inzidenzflächenbüschels Π_n bilden eine Kongruenz 2. Ordnung 6. Klasse. Da aber diese Bisekanten keine Strahlen des (TK) Komplexes sein können, handelt es sich offenbar hier nicht um dieselbe Kongruenz. Die den Strahlen dieser Kongruenz durch den (TK) Komplex zugeordneten Punkte bilden eine Fläche, und die ihnen durch den (RK) Komplex zugeordneten Punkte bilden eine andere Fläche. Auf Grund der bekannten Eigenschaften des (TK) und des (RK) Komplexes ist leicht zu beweisen, dass diese zwei Flächen zwei verschiedene Flächen sind, die nicht zusammenfallen können. In unseren weiteren Betrachtungen werden nur die Strahlen des nicht zerfallenen Teiles der Kongruenz (TR) 2. Ordnung 6. Klasse umfasst.

Einem Raumpunkt P sei im (TK) Komplex des Polarraumbüschels (Π_n) der Strahl p zugeordnet. Die Flächen φ_n des Inzidenzflächenbüschels Π_n schneidet, wie bekannt, der Strahl p in Punktepaaren einer involutorischen Punktreihe, und auf Grund einer weiteren Eigenschaft folgt, dass die zwei Verbindungsgeraden des Punktes P mit je einem Punktepaar dieser involutorischen Punktreihe in Punkten dieses Paares eine Inzidenzfläche φ_n des Büschels Π_n berühren. In den Doppelpunkten P_1, P_2 dieser involutorischen Punktreihe auf der Geraden p , also in ihren zwei Berührungspunkten mit je einer Inzidenzfläche φ_n des Bü-

schels Π_n , fallen diese zwei Verbindungsgeraden in der Ebene (Pp) zusammen. Diese Ebene (Pp) , die wie bekannt im Punkt P eine Fläche φ_n des Inzidenzflächenbüschels Π_n berührt, berührt also in den Punkten P_1, P_2 noch zwei weitere Inzidenzflächen des Büschels Π_n . Auf Grund dieser Betrachtungen folgt offensichtlich, dass dem Punkt P_1 die Verbindungsgerade PP_2 , und dem Punkt P_2 die Verbindungsgerade PP_1 im (TK) Komplex zugeordnet sind. Die in der Ebene (Pp) aus dem Punkt P auf die Gerade p senkrecht gelegte Gerade r ist, wie bekannt, ein Strahl des diesem Polarraumbüschel zugeordneten Tangentialkurzwegekomplexes $(RK)^3$. Die Gerade r berührt offenbar die Inzidenzfläche φ_n im Punkt P , und in ihrem Schnittpunkt P_3 mit der Geraden p noch eine andere. Die zwei diese Gerade p enthaltenden Berührungsebenen zweier Inzidenzflächen des Büschels Π_n sind offenbar zwei verschiedene Ebenen, die im allgemeinen Fall nicht zusammenfallen können. Ist aber die Gerade p nicht nur ein Strahl des (TK) Komplexes, sondern auch ein Strahl $\bar{r}$ des Tangentialkurzwegekomplexes (RK) desselben Polarraumbüschels (Π_n) , also $p \equiv \bar{r}$, müssen die Berührungspunkte $\bar{P}_1, \bar{P}_2$ des Strahles $\bar{r}$ mit den Berührungspunkten P_1, P_2 des Strahles p zusammenfallen, da eine Gerade, die auf keiner der Flächen φ_n liegt, im Raum nur zwei Flächen des Büschels Π_n berühren kann. Da aber die Gerade $p \equiv \bar{r}$ auch Strahl des (TK) Komplexes bleibt, müssen die zwei die Gerade $\bar{r}$ enthaltenden Berührungsebenen in die gemeinsame Berührungsebene (Pp) der Berührungspunkte P_1, P_2 zusammenfallen. Man sieht also, dass der Ausgangspunkt $\bar{P}$ und der Endpunkt $\bar{P}_3$ dieses kürzesten Tangentialkurzweges $\bar{r}$ zwischen zwei Flächen des Inzidenzflächenbüschels in einer gemeinsamen Berührungsebene dieser zwei Flächen liegen. Es gilt also folgender Satz:

In dem (RK) Komplex der kürzesten Tangentialwege zwischen den Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades besteht eine Kongruenz 2. Ordnung 6. Klasse derartiger Tangentialkurzwege, deren beide Endpunkte in derselben gemeinsamen Berührungsebene der zwei betreffenden Flächen liegen.

Der der Geraden $p \equiv \bar{r}$ durch den (TK) Komplex zugeordnete Punkt P bleibt offenbar ausserhalb der Geraden $p \equiv \bar{r}$.

Die den Punkten einer Ebene β in dem (RK) Komplex zugeordneten Strahlen bilden, wie bekannt,⁴ eine Kongruenz 7. Ordnung 5. Klasse.

³ Siehe [2] S. 148.

⁴ Siehe [2] S. 159.

Also jeder Punkt des Raumes, ausser den Punkten der Ebene β , enthält 7 Strahlen des (RK) Komplexes, für welche einer der zwei ihnen zugeordneten Punkte in der Ebene β liegt, und in jeder Ebene des Raumes, ausser der Ebene β , liegen 5 Strahlen des (RK) Komplexes, für die einer der zwei diesen Strahlen zugeordneten Punkte in der Ebene β liegt. Die gemeinsamen Strahlen dieser Kongruenz und des (TK) Komplexes bilden offenbar eine Regelfläche $2(7+5) = 24$. Grades, die sich in der (TR) Kongruenz befindet. In der Ebene β befinden sich aber 6 Strahlen der (TR) Kongruenz, deren durch den (RK) Komplex zugeordnete Punkte auch in dieser Ebene liegen, so dass also diese sechs Strahlen auch Erzeugende der erwähnten Regelfläche 24. Grades sind. Die Ebene β schneidet daher diese Regelfläche in einer Kurve 18. Ordnung und in den 6 erwähnten Strahlen der (TR) Kongruenz. Da für jede Ebene des Raumes dasselbe gilt, folgt offenbar, dass jede Ebene des Raumes die durch die den Strahlen der (TR) Kongruenz durch den (RK) Komplex zugeordneten Punkte gebildete Fläche in einer Kurve 18. Ordnung schneidet, also diese Fläche 18. Ordnung ist.

Im Zusammenhang mit der vorher ausgesprochenen Definition der (TR) Kongruenz kann auf Grund der letzten Betrachtungen das Ausgeführte auf folgende Weise ausgesprochen werden:

Diejenigen kürzesten Tangentialwege zwischen den Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades, die in den beiden Endpunkten dieselbe Tangentialebene der betreffenden zwei Flächen haben, und die wie erwähnt die betrachtete (TR) Kongruenz 2. Ordnung 6. Klasse bilden, haben ihre Endpunkte auf einer Fläche 18. Ordnung

Man bezeichne diese Fläche mit F_{TR}^R . Nimmt man die Ausgangspunkte dieser Strahlen in einer Ebene, die, wie wir sahen, eine Kurve 18. Ordnung bilden, dann liegen die Endpunkte dieser Tangentialwege auf einer Raumkurve 90. Ordnung. Man bekommt diese Zahl 90 auf Grund der Tatsache, dass durch die zugeordneten Punktepaare auf jedem Strahl des (RK) Komplexes eine Raumtransformation 5. Ordnung bestimmt ist.⁵

Diese Raumtransformation ist, wie bekannt, durch die bekannte involutorische eineindeutige Zuordnung der Punktepaare auf jedem Strahl des (RK) Komplexes bestimmt, und eine derartige involutorische Zu-

⁵ Siehe [2] S. 161.

ordnung besteht offenbar auch zwischen den Punktepaaren auf der Fläche P_{TR}^R , die durch die Strahlen der (TR) Kongruenz verbunden sind. In jeder Ebene des Raumes befinden sich offenbar 6 derartig zugeordnete Punktepaare.

Die Geraden der vier Hauptpunkte des Polarraumbüschels (II_n) sind Strahlen der diesem Büschel zugeordneten (TK) und (RK) Komplexe. Da aber die durch den (RK) Komplex diesen Strahlen zugeordneten Punkte sich in diesen Hauptpunkten befinden, also nicht in der Ebene β liegen, kann keine Erzeugende der erwähnten Regelfläche 24. Grades einen dieser vier Hauptpunkte enthalten.

Die den Punkten einer Ebene β zugeordneten Strahlen in dem (TK) Komplex unseres Polarraumbüschels (II_n) bilden, wie schon erwähnt, die bekannte Kongruenz 1. Ordnung 3. Klasse, die durch die Bisekanten der kubischen Polraumkurve dieser Ebene gebildet ist. Die gemeinsamen Strahlen dieser Kongruenz und des Tangentialkurzwegekomples (RK) dieses Polarraumbüschels (II_n) , der kubisch ist, bilden eine Regelfläche vom $3(3 + 1) = 12$. Grade. Alle Erzeugenden dieser Regelfläche sind, offenbar, Strahlen der betrachteten (TR) Kongruenz. Es ist aber hier notwendig hervorzuheben, dass die sechs in der Ebene β liegenden Strahlen der (TR) Kongruenz nicht Erzeugende dieser Regelfläche sind, weil die ihnen durch den (TK) Komplex zugeordneten Punkte nicht in der Ebene β liegen.

Die den Punkten einer Seitenebene des Haupttetraeders zugeordneten Strahlen im (TK) Basiskomplex enthalten den dieser Seitenebene gegenüber liegenden Eckpunkt dieses Haupttetraeders. Die den Punkten der Schnittgeraden der Ebene β mit einer der Seitenebenen des Haupttetraeders zugeordneten Strahlen im (TK) Komplex bilden, wie schon erwähnt, einen Kegel 2. Grades, mit dem Scheitel in dem dieser Seitenebene gegenüber liegenden Eckpunkt dieses Haupttetraeders. Also, die Erzeugenden derartiger vier Kegel sind Strahlen auch des dem Büschel (II_n) zugeordneten (TK) Komplexes, da die Ebene β die vier Seitenebenen in je einer Geraden schneidet. Innerhalb der erwähnten Regelfläche 12. Grades befinden sich also auch derartige vier Kegel 2. Grades. Da wir die die Hauptpunkte enthaltenden Strahlen der (TR) Kongruenz ausserhalb unserer Betrachtungen lassen wollen, bleibt im Rahmen unserer Betrachtungen nur eine auf die beschriebene Weise der Ebene β zugeordnete Regelfläche 4. Grades. Die den Erzeugenden dieser Regelfläche, als Strahlen der (TR) Kongruenz, durch den (TK) Komplex zugeordneten Punkte, bilden in der Ebene β die Schnittkurve dieser

Ebene mit derjenigen Fläche, die durch die den Strahlen der (TR) Kongruenz 2. Ordnung 6. Klasse durch den (TK) Komplex zugeordneten Punkte gebildet ist.

Man nehme in der Ebene β eine beliebige Gerade p . Die den Punkten dieser Geraden im (TK) Komplex zugeordneten Strahlen bilden, wie bekannt, ein Erzeugendensystem einer Regelfläche 2. Grades. Die vorher erwähnte Regelfläche 4. Grades enthält die Polraumkurve der Ebene β als zweifache Kurve, da sich die Komplexstrahlkegel des (TK) und des (RK) Komplexes in jedem Punkt dieser Raumkurve in sechs Erzeugenden durchdringen, von welchen vier je einen Hauptpunkt des Polarraumbüschels (Π_n) enthalten, also nur die letzten zwei die Erzeugenden dieser Regelfläche 4. Grades sein können. Die eben erwähnte der Geraden p zugeordnete Regelfläche 2. Grades enthält, offenbar, auch die kubische Polraumkurve, da die Erzeugenden eines ihrer Erzeugendensystems Bisekanten dieser Raumkurve sind. Diese zwei Regelflächen der kubischen Polraumkurve durchdringen sich in einer Raumkurve 8. Ordnung. Da ein Teil dieser Durchdringungskurve die kubische Doppelpolraumkurve ist, besteht irgendwo noch ein quadratischer Teil. Da aber die Erzeugenden der beiden dieser Regelflächen Bisekanten der kubischen Polraumkurve sind, also keine der Erzeugenden einer dieser Flächen keine der Erzeugenden der anderen Fläche, ausser in der kubischen Polraumkurve, schneiden kann, folgt, dass der erwähnte quadratische Restteil der Durchdringungskurve 8. Ordnung in zwei Bisekanten dieser kubischen Polraumkurve, also in zwei Geraden, zerfallen muss. Die diesen zwei Strahlen der (TR) Kongruenz durch den (TK) Komplex zugeordneten Punkte liegen auf der Geraden p , also schneidet die Gerade p die Schnittkurve der Ebene β mit der gesuchten Fläche in zwei Punkten. Also, jede Gerade des Raumes schneidet die gesuchte Fläche in zwei Punkten, und deswegen gilt auch folgender Satz:

Die den Strahlen der (TR) Kongruenz durch den (TK) Komplex zugeordneten Punkte bilden eine Fläche 2. Ordnung.

Es sei diese Fläche mit F_{TR}^I bezeichnet. Die unendlich fernen Strahlen des (TK) Basiskomplexes hüllen, wie bekannt, eine Kurve 2. Klasse ein, sind aber auch Strahlen des (RK) Komplexes, da alle Geraden der unendlich fernen Ebene als zweideutige Strahlen jedes (RK) Komplexes betrachtet werden können. Da die diesen unendlich fernen Strahlen der (TR) Kongruenz durch den (TK) Komplex zugeordneten Punkte die Mittelpunkte der Inzidenzflächen φ_n sind, folgt weiterhin, dass die eben

erwähnte Fläche 2. Grades die kubische Raumkurve t^3 der Mittelpunkte der Inzidenzflächen φ_n enthalten muss, also eine Regelfläche 2. Grades sein muss.

Die den Strahlen der (TR) Kongruenz durch den (RK) Komplex zugeordneten Punkte bilden, wie wir sahen, eine Fläche 18. Ordnung. Diese und die eben erwähnte Fläche 2. Grades haben also eine Raumkurve 36. Ordnung gemeinsam, deren Punkten je ein Strahl der (TR) Kongruenz durch den (TK) Komplex, und ein anderer durch den (RK) Komplex zugeordnet sind. Diese beiden Strahlen gehören aber dem einen und dem anderen dieser Komplexe als Strahlen an.

III. Die gemeinsame Kongruenz (MN) des einem Polarraumbüschel zugeordneten Majcenschen Komplexes und des Normalenkomplexes der Inzidenzflächen dieses Polarraumbüschels. Da der Majcensche Komplex den Grad drei hat, und der Normalenkomplex vom Grad acht ist, hat die gemeinsame Kongruenz dieser Komplexe, offenbar, den Grad 24.

Wie wir in der Einführung dieser Arbeit gesehen haben, ist jede unendlich ferne Gerade ein zweideutiger Strahl des kubischen Majcenschen (MK) Komplexes, und ein dreideutiger Strahl des Normalenkomplexes (NK) in jedem Polarraumbüschel unseres Raumes. Jede unendlich ferne Gerade des Raumes ist also ein sechsdeutiger Strahl der betrachteten (MN) Kongruenz. Lässt man diese unendlich fernen Strahlen der (MN) Kongruenz ausserhalb unserer Betrachtungen, so befinden sich in jeder Ebene des Raumes nur 18 Strahlen dieser Kongruenz, die also die Ordnung 24 und die Klasse 18 haben muss.

Wie bekannt, berühren die Strahlen des Majcenschen Komplexes je eine Inzidenzfläche des Polarraumbüschels unendlich fern. Es gilt also das Folgende:

Diejenigen eigentlichen Normalen der Inzidenzflächen eines Polarraumbüschels, die je eine dieser Inzidenzflächen unendlich fern berührt, bilden eine Strahlkongruenz 24. Ordnung und 18. Klasse.

Es ist bekannt, dass diejenigen Normalen der Inzidenzflächen eines Polarraumbüschels, deren Fusspunkte in einer Ebene γ liegen, eine Strahlkongruenz 9. Ordnung 3. Klasse bilden. Diejenigen Strahlen dieser Kongruenz, die je eine der erwähnten Inzidenzflächen φ_n unendlich fern berühren, also Strahlen des (MK) Komplexes sind, bilden eine Regelfläche $3(9 + 3) = 36$. Grades. Die Erzeugenden dieser Regelfläche sind also auch Strahlen der (MN) Kongruenz, deren durch den (NK) Komplex zugeordnete Punkte in der Ebene γ liegen. Da die (MN) Kongruenz 18. Klasse ist, befinden sich in der Ebene γ 18 ihrer

Strahlen, die auch Erzeugende der erwähnten Regelfläche 36. Grades sind, da die ihnen durch den (NK) Komplex zugeordneten Punkte auf diesen Strahlen, also in der Ebene γ liegen. Die Ebene γ schneidet also diese Regelfläche in 18 Erzeugenden und in einer Kurve 18. Ordnung. Da für jede Ebene des Raumes offenbar dasselbe gilt, hat jedes Polarraumbüschel auch folgende Eigenschaft:

Die den Strahlen der (MN) Kongruenz durch den (NK) Komplex zugeordneten Fusspunkte bilden eine Fläche 18. Ordnung.

Wie bekannt, bilden die den Punkten einer Ebene als Mittelpunkten zugeordneten Strahlen des (MK) Komplexes eine Kongruenz 4. Ordnung 2. Klasse. Es sei durch die Punkte der Ebene eine derartige dieser Ebene zugeordnete Kongruenz gegeben. Diejenigen Strahlen dieser Kongruenz, die auch Strahlen des (NK) Komplexes desselben Polarraumbüschels sind, bilden eine Regelfläche $8(4 + 2) = 48$. Grades, da der (NK) Komplex 8. Grades ist. Auch die Erzeugenden dieser Regelfläche sind, offenbar, Strahlen der diesem Polarraumbüschel zugeordneten (MN) Kongruenz. Aber auch diese Regelfläche 48. Grades hat in der Ebene γ 18 Erzeugende, da die Kongruenz (MN) 18. Klasse ist, und die ihren Strahlen durch den (MK) und durch den (NK) Komplex zugeordneten Punkte sich auf diesen Strahlen befinden. Die Ebene γ schneidet also diese Regelfläche in diesen Erzeugenden und in einer Kurve 30. Ordnung. Da dies für jede Ebene des Raumes gilt, gilt offenbar auch folgender Satz:

Die den Strahlen der (MN) Kongruenz durch den (MK) Komplex zugeordneten Mittelpunkte bilden eine Fläche 30. Ordnung.

Dieser Satz kann auch auf folgende Weise ausgesprochen werden:

Diejenigen Geraden des Raumes, die Strahlen des Majcenschen Komplexes und des Normalenkomplexes eines Polarraumbüschels sind, berühren die Inzidenzflächen dieses Polarraumbüschels in einer stetigen quadratischen Raumpunktmenge, die eine Fläche 30. Ordnung bildet.

Man bezeichne diese Fläche mit F_{NM}^M . Auf Grund der Tatsache, dass jede Gerade des Raumes zwei Inzidenzflächen φ_a berührt (ausser den Tangenten der Grundraumkurve c^4), und dass jeder Punkt des Raumes nur eine Fläche φ_a enthält, folgt, dass die Flächen F_{NM}^M und F_{NM}^N keine reelle Durchdringungskurve haben können.

IV. *Die Kongruenz (MR) der gemeinsamen Strahlen des Majcenschen (MK) Komplexes und des (RK) Tangentialkurzwegekomplexes eines Polarraumbüschels.* Da der (RK) Komplex den Grad drei hat, und des-

gleichen auch der Majcensche (MK) Komplex, müsste offenbar die Kongruenz (MR) den Grad 9 haben. Am Anfang dieser Arbeit sahen wir aber, dass jede unendlich ferne Gerade ein zweideutiger Strahl des einem Polarraumbüschel zugeordneten (MK) Komplexes und des diesem Büschel zugeordneten (RK) Komplexes ist. Die (MR) Kongruenz 9. Grades zerfällt also in dieses vierdeutige unendlich ferne Strahlungsfeld und in eine Strahlkongruenz 5. Klasse und 9. Ordnung.

Es muss aber bei diesen Betrachtungen auch das Folgende berücksichtigt werden: Jede Gerade des Raumes berührt nur zwei Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades. Auf den Strahlen des Majcenschen Komplexes befindet sich einer dieser zwei Berührungspunkte immer unendlich fern, während auf einem gewöhnlichen Strahl des (RK) Komplexes diese zwei Berührungspunkte sich im Endlichen befinden. Fällt also ein Strahl des dem Polarraumbüschel (Π_n) zugeordneten (MK) Komplexes mit einem Strahl des diesem Büschel (Π_n) zugeordneten (RK) Komplexes zusammen, muss auch der kürzeste Tangentialweg auf einem derartigen Strahle unendlich lang sein, resp. der diesem Weg zugeordnete Endpunkt befindet sich unendlich fern. Hieraus folgt offenbar, dass alle Tangentialwege eines derartigen endlichen Raumpunktes unendlich lang, und dadurch gleich lang sind. Ein derartiger Strahl der (MR) Kongruenz kann also nur in demjenigen Fall bestehen, wenn der einem endlichen Punkt P der im (TK) Komplex zugeordnete Strahl unendlich fern liegt, oder wenn der einem Strahl des (TK) Komplexes zugeordnete Punkt sich unendlich fern befindet. In der (MR) Kongruenz kommen also nur derartige Strahlen in Betracht. Man sieht weiterhin auch, dass sich in der (MR) Kongruenz kein »richtiger« Strahl des (RK) Komplexes befindet, aber alle ihre Strahlen als »richtige« Strahlen des (MK) Komplexes betrachtet werden können. Der erste der erwähnten Fälle tritt dann auf, wenn sich der Raumpunkt P im Mittelpunkt einer Inzidenzfläche φ_n des Büschels Π_n befindet, da dann die Polarebene dieses Pols P bezüglich dieser Inzidenzfläche φ_n die unendlich ferne Ebene ist, also auch der dem Punkt P im (TK) Komplex zugeordnete Strahl unendlich fern liegt. Die dem Pol P in allen polaren Räumen des Büschels (Π_n) zugeordneten Polarebenen sind also parallel. In diesem Parallelebenenbüschel enthält eine dieser Ebenen, etwa ε , den Punkt P , in dem sie die diesen Punkt P enthaltende Inzidenzfläche des Büschels Π_n berührt. Die diesen Punkt P in dieser Ebene ε enthaltenden Geraden können also als »unrichtige« Strahlen des dem Polarraumbüschel (Π_n) zugeordneten (RK) Komplexes betrachtet werden, da

alle Tangentialwege des Punktes P »gleich lang« sind, also auch den kürzesten enthalten. Ausserdem »schneiden« alle diese Tangentialwege des Punktes P die unendlich ferne Gerade der Ebene ε »senkrecht«, als den dem Punkt P im (TK) Komplex zugeordneten Strahl. Da aber alle diese Geraden des Punktes P als »parallel« mit dem diesem Punkt im (TK) Komplex zugeordneten unendlich fernen Strahl genommen werden können, und dabei unendlich fern je eine Fläche φ_n berühren, sind sie, auf Grund der bekannten Definition des Majcenschen Komplexes, richtige Strahlen des dem Büschel (II_n) zugeordneten kubischen Majcenschen Komplexes. Es können also alle derartige Geraden der Mittelpunkte der Inzidenzflächen φ_n als Strahlen der gemeinsamen Kongruenz (MR) angenommen werden. Offenbar sind die Mittelpunkte der Inzidenzflächen (die bekannte kubische Raumkurve) singuläre Punkte des Majcenschen Komplexes, da die diese Mittelpunkte enthaltenden Strahlen nicht die bekannte Eigenschaft dieses Komplexes haben, nach welcher jedem Raumpunkt nur ein Strahl dieses Komplexes zugeordnet ist.

Die allen Mittelpunkten P_n der Inzidenzflächen φ_n auf die eben beschriebene Weise zugeordneten Ebenen ε_n bilden ein Ebenengewinde 5. Ordnung, da dieses als Erzeugnis einer eindeutige zugeordneten Punktreihe 3. Ordnung und eines unendlich fernen Strahlenbüschels 2. Klasse betrachtet werden kann. Jede Ebene β des Raumes schneidet die kubische Mittelpunktskurve der Inzidenzflächen φ_n in drei Punkten. Jeder dieser drei Schnittpunkte enthält einen in dieser Ebene ihm zugeordneten Strahl der (MR) Kongruenz. Da jeder Raumpunkt fünf Ebenen ε_n des erwähnten Ebenengewindes enthält, enthält diesen Punkt auch je ein Strahl der (MR) Kongruenz in jeder dieser fünf Ebenen. Alle derartigen in den Ebenen ε_n des erwähnten Ebenengewindes liegenden Strahlen der (MR) Kongruenz, abgesehen von den vierdeutigen unendlich fernen Strahlen, bilden also eine Kongruenz 5. Ordnung und 3. Klasse. Es ist ersichtlich dass diese Kongruenz eine singuläre Kongruenz des (MK) Komplexes ist, die durch die »unrichtigen« Strahlen des (RK) Komplexes gebildet wird.

Der Rest der gesamten (MR) Kongruenz, die 9. Ordnung und 5. Klasse ist, kann also höchstens nur noch eine Kongruenz 4. Ordnung und 2. Klasse sein.

Der jedem unendlich fernen Punkt P zugeordnete Strahl t im (TK) Komplex ist, wie bekannt, eine Bisekante der kubischen Mittelpunktskurve k^3 des Inzidenzflächenbüschels II_n . Alle diesen unendlich fer-

nen Punkt P enthaltenden und den endlichen ihm zugeordneten Strahl t im (TK) Komplex schneidenden Geraden sind, wie bekannt, Strahlen des diesem Polarraumbüschel (Π_n) zugeordneten Majcenschen (MK) Komplexes. Alle diese Strahlen des (MK) Komplexes sind parallel, bilden also mit dem Strahl t denselben Winkel, der mit γ bezeichnet sei. Diejenigen derartigen, einem unendlich fernen Raumpunkt zugeordneten Strahlen des (MK) Komplexes, die auf diese Weise den ihnen zugeordneten Strahl t des (TK) Komplexes rechtwinklig schneiden, können als »unrichtige« Strahlen des diesem Polarraumbüschel (Π_n) zugeordneten (RK) Komplexes betrachtet werden, weil sie der bekannten Definition des (RK) Komplexes entsprechen, in der die einem Raumpunkt zugeordneten Strahlen des (TK) Komplexes und des (RK) Komplexes sich rechtwinklig schneiden.

Die den unendlich fernen Punkten P_n zugeordneten Strahlen t^n in der Bisekantenkongruenz der kubischen Raummittelpunktkurve k^3 schneiden die unendlich ferne Ebene in einer quadratischen Punktmenge P^n , die mit der ersten Punktmenge (P_n) in dieser unendlich fernen Ebene eine quadratische Transformation bilden.⁶ Diejenigen zugeordneten Punktpaare in diesen zwei kollokalen Punktfeldern, die auch bezüglich des absoluten Kegelschnittes konjugiert zugeordnet sind, sind solche zugeordnete Punktpaare, bei denen die ihnen zugeordneten beschriebenen Strahlen des (MK) Komplexes den ihnen zugeordneten Strahl t im (TK) Komplex senkrecht schneiden. Diese Strahlen können also als »richtige« Strahlen des (MK) Komplexes und als »unrichtige« Strahlen des (RK) Komplexes, resp. als Strahlen der (MR) Kongruenz, betrachtet werden.

Wie bekannt, liegen alle Strahlen des (MK) Komplexes in ∞^2 singulären β Ebenen, und bilden in jeder dieser Ebene ein Büschel paralleler Strahlen. Die diesen Strahlen durch den (MK) Komplex zugeordneten Mittelpunkte liegen in jeder dieser Ebene auf einem Strahl des (TK) Komplexes, der eine Bisekante t^n der kubischen Mittelpunktkurve k^3 ist [4]. Diese Bisekante t^n ist als Strahl des (TK) Komplexes dem unendlich fernen Scheitel T^n des erwähnten Büschels paralleler Strahlen des (MK) Komplexes zugeordnet.

Da wir auf diese Weise alle Strahlen der (MR) Kongruenz in unseren Betrachtungen umfasst haben, folgt auf Grund aller dieser Betrachtungen und Schlüsse auch folgender Satz:

⁶ Siehe [1] S. 20.

Diejenigen Strahlen des (MK) Komplexes, die in den singulären Ebenen dieses Komplexes so parallel liegen, dass sie die Gerade t der Mittelpunkte dieser Strahlen rechtwinklig schneiden, so dass man sie auch als Strahlen des (RK) Komplexes betrachten darf, können höchstens eine Strahlkongruenz 4. Ordnung 2. Klasse bilden.

Da die Strahlen des (MK) Komplexes und des (RK) Komplexes die Inzidenzflächen φ_n zweimal berühren, so wie auch alle andere Geraden des Raumes, müssen, wenn zwei derartige Strahlen zusammenfallen, auch die beiden dieser Berührungspunkte auf derartigen zusammenfallenden Strahlen dieselben sein. Oder mit anderen Worten: Die den Strahlen der (MR) Kongruenz durch den (MK) und durch den (RK) Komplex zugeordneten Punkte sind dieselben zwei Punkte. Die zwei durch derartige Punkte auf den Strahlen der (MR) Kongruenz gebildeten Flächen sind identisch. Also, die Fläche F_{MR}^M und die Fläche F_{MR}^R sind eine und dieselbe Fläche.

In unseren Ausführungen sahen wir, dass die Kongruenz (MR) 9. Ordnung und 5. Klasse ist, und dass sie in eine Kongruenz (MR)¹ 5. Ordnung 3. Klasse und in eine Kongruenz (MR)² 4. Ordnung 2. Klasse zerfällt. Die den Strahlen des (MR)¹ Kongruenzteiles durch den (MK) Komplex zugeordneten Mittelpunkte, bilden, wie wir sahen, die kubische Mittelpunktkurve k^3 .

Man nehme auch hier beliebig im Raum eine Ebene τ an. Die den Punkten dieser Ebene im (MK) Komplex zugeordneten Strahlen bilden, wie bekannt, höchstens eine Kongruenz 4. Ordnung 2. Klasse. Die gemeinsamen Strahlen dieser Kongruenz und des kubischen (RK) Komplexes bilden also eine Regelfläche $3(4 + 2) = 18$. Grades, deren Erzeugende die Strahlen der (MR) Kongruenz sind. Einige Erzeugende dieser Regelfläche gehören als Strahlen zum Kongruenzteil (MR)¹ und die anderen dem Kongruenzteil (MR)². Die allen Strahlen des (MR)¹ Teiles durch den (MK) Komplex zugeordneten Punkte sind nur die Mittelpunkte der Inzidenzflächen φ_n , also, wie schon erwähnt, die Punkte der bekannten kubischen Mittelpunktkurve k^3 . Die jedem Punkt dieser kubischen Raumkurve zugeordnete Strahlen des (MK) Komplexes bilden, wie gezeigt, ein ebenes Strahlbüschel.

Die Ebene τ schneide die kubische Raumkurve k^3 in den Punkten P^1, P^2, P^3 . Das Strahlenbüschel der (MK) Komplexstrahlen, in jedem dieser Punkte schneidet die Ebene τ in einem Strahl, der ein Strahl des (MR)¹ Kongruenzteiles ist. Da die Ebene τ nur drei Punkte der Raumkurve k^3 enthält, befinden sich also in dieser Ebene nur drei Strahlen

des $(MR)^1$ Kongruenzteiles, die Erzeugende der erwähnten Regelfläche 18. Grades sind. Die jedem der drei Schnittpunkte P^1, P^2, P^3 zugeordneten Strahlen der (MR) Kongruenz bilden, wie gezeigt, ein Strahlenbüschel 1. Ordnung, also die Strahlen dieser drei Büschel sind auch Erzeugenden der Regelfläche 18. Grades. Diese Regelfläche zerfällt also in diese drei Strahlbüschel und in eine Regelfläche 15. Grades. Innerhalb des $(MR)^2$ Kongruenzteiles befinden sich also in der Ebene τ noch zwei seiner Strahlen, die den ihnen durch den (MK) Komplex zugeordneten Punkt in dieser Ebene haben, also auch Erzeugende dieser Regelfläche 15. Grades sind. Alle Erzeugenden dieser Regelfläche, die nicht in der Ebene τ liegen, gehören also als Strahlen dem $(MR)^2$ Kongruenzteil an. Da diese Regelfläche 15. Grades in der Ebene τ fünf ihrer Erzeugenden hat, schneidet sie diese Ebene in diesen Erzeugenden und in einer Kurve 10. Ordnung. Die den Punkten dieser Kurve zugeordneten Strahlen (die »richtigen« im (MK) und die »unrichtigen« im (RK) Komplex), sind diejenigen Strahlen des $(MR)^2$ Kongruenzteiles, die die erwähnte Regelfläche bilden. Da dies für jede Ebene τ des Raumes gilt, sehen wir, dass die den Strahlen der (MR) Kongruenz durch den (MK) Komplex zugeordneten Punkte eine Fläche $F_{MR}^M = F_{MR}^R$ 10. Ordnung bilden.

Wir sahen vorhin, dass die einen unendlich fernen Punkt enthaltenden Strahlen der $(MR)^1$, resp. der $(MR)^2$ Kongruenz, als parallele Strahlenbüschel in ∞^1 Ebenen liegen, deren durch den (MK) Komplex zugeordnete Punkte auf den Bisekanten t_n der kubischen Mittelpunktkurve k^3 liegen, und dass die parallelen Strahlen jedes dieser Büschel seine Bisekante rechtwinklig schneiden. Es folgt also, dass die Fläche $F_{MR}^M \equiv F_{MR}^R$ eine Regelfläche ist, die auch die kubische Mittelpunktraumkurve k^3 enthält.

Alle diese die Erzeugenden t^n dieser Regelfläche 10. Grades enthaltenden β Singulärebenen des (MK) Komplexes bilden ein Ebenengewinde höherer Ordnung, mit der wir uns aber hier nicht befassen wollen, da sonst der Umfang dieser Arbeit zu sehr anwachsen würde.

V. Die gemeinsame Kongruenz (NR) des (NK) Komplexes und des (RK) Komplexes eines Polarraumbüschels. Da der (NK) Komplex vom 8. Grade ist, und der (RK) Komplex den Grad 3 hat, müsste offenbar die gemeinsame Kongruenz (NR) dieser zwei Komplexe im allgemeinen den Grad 24 haben. Innerhalb dieser Kongruenz befinden sich aber

einige schon erwähnte Teile, in die diese Kongruenz zerfällt, und die ausser Betracht gelassen werden können. Z. B. alle Strahlen der Hauptpunkte eines Polarraumbüschels, resp. seines tetraedralen Basiskomplexes, sind Strahlen des diesem Polarraumbüschel zugeordneten Normalenkomplexes (NK), und des ihm zugeordneten (RK) Komplexes, gehören also als Strahlen auch zur gemeinsamen (NR) Kongruenz. Die Ordnung der (NR) Kongruenz muss also auf 20 vermindert werden.

Jede Normale der Grundkurve c^4 des Inzidenzflächenbüschels ist, wie bekannt, eine Normale einer Inzidenzfläche, der ihr Punkt auf dieser Grundkurve als Fusspunkt zugeordnet ist. Der diesem Fusspunkt zugeordnete Strahl im (TK) und im (MK) Komplex dieses Polarraumbüschels ist die Berührungsgerade der Grundkurve c^4 in diesem Fusspunkt. Da der einem Raumpunkt zugeordnete Strahl des (RK) Komplexes den diesem Punkt zugeordneten Strahl im (MK) Komplex, und den diesem Punkt zugeordneten Strahl im (NK) Komplex rechtwinklig schneidet, ist dieser einem Punkt der Grundkurve c^4 im (RK) Komplex zugeordnete Strahl auch eine Normale dieser Grundkurve. Also die Kongruenz der Normalen der Grundkurve c^4 ist auch ein Teil der gemeinsamen Kongruenz (NR). Auch diesen Teil der (NR) Kongruenz werden wir ausserhalb unserer Betrachtungen lassen. Da die Kongruenz der Normalen einer Raumkurve 4. Ordnung 1. Art von der Ordnung 12 und von der Klasse 4 ist, vermindert sich weiterhin die Ordnung der (NR) Kongruenz auf 8, während die Klasse auf 20 fällt.

In der Einleitung dieser Arbeit sahen wir, dass jede unendlich ferne Gerade ein zweideutiger Strahl eines jeden (RK) Komplexes, und ein dreideutiger Strahl eines jeden (NK) Komplexes ist. Also jede unendlich ferne Gerade gehört der gemeinsamen Kongruenz (NR) als sechsdeutiger Strahl an. In jeder Ebene des Raumes befinden sich also ausser diesem sechsdeutigen uneigentlichen Strahl und ausser den vier erwähnten Normalen der Grundkurve c^4 , nur noch 14 weitere Strahlen der (NR) Kongruenz, die keine Normalen der Raumkurve c^4 sind, oder unendlich fern liegen. Es gilt also auch folgender Satz:

Die gemeinsame Kongruenz (NR) des Komplexes (NK) und des Komplexes (RK) eines Polarraumbüschels ist 8. Ordnung und 14. Klasse.

Es kann dieser Satz auch folgenderweise ausgedrückt werden:

Alle kürzesten Tangentialwege zwischen den Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades, die eine Fläche dieses Büschels senkrecht durchsetzen, bilden eine Kongruenz 8. Ordnung 14. Klasse.

Man nehme auch hier eine Ebene τ beliebig im Raum an. Die den Punkten dieser Ebene in dem (NK) Komplex zugeordneten Strahlen bilden, wie bekannt, eine Kongruenz 9. Ordnung 3. Klasse. Die gemeinsamen Strahlen dieser Kongruenz und des (RK) Komplexes, der 3. Grades ist, bilden also eine Regelfläche $3(9 + 3) = 36$. Grades, die die Ebene τ in einer Kurve 36. Ordnung schneidet. Auch hier sind die Erzeugenden dieser Regelfläche, selbstverständlich, Strahlen der (NR) Kongruenz, die 14. Klasse ist. Da die den 14 in der Ebene τ liegenden Strahlen der (NR) Kongruenz durch den (NK) Komplex zugeordneten Punkte in dieser Ebene τ liegen, also auch Erzeugende der erwähnten Regelfläche 36. Grades sind, zerfällt die Schnittkurve der Ebene τ und dieser Regelfläche 36. Ordnung in diese 14 Erzeugenden, und in eine Kurve 22. Ordnung. In allen bisherigen Ausführungen sind die unendlich fernen Punkte der Ebene τ und die diesen Punkten zugeordneten Strahlen im (NK) und im (RK) Komplex weggelassen, und werden deswegen auch hier nicht berücksichtigt. Die den Erzeugenden dieser Regelfläche, als den Strahlen der (NR) Kongruenz durch den (NK) Komplex zugeordneten Punkte, bilden also eine Kurve 22. Ordnung, und daher gilt auch folgender Satz:

Die den Strahlen der (NR) Kongruenz eines Polarraumbüschels durch den (NK) Komplex dieses Polarraumbüschels zugeordneten Punkte (Fusspunkte) bilden eine Fläche 22. Ordnung.

Diese Fläche kann mit F_{NR}^N bezeichnet werden. Die den Punkten der Ebene τ im (RK) Komplex zugeordneten Strahlen bilden, wie bekannt, eine Kongruenz 7. Ordnung und 5. Klasse. Die gemeinsamen Strahlen dieser Kongruenz und des (NK) Komplexes bilden eine Regelfläche $8(7 + 5) = 96$. Grades, deren Erzeugende auch Strahlen der (NR) Kongruenz sind. Die 14 Strahlen der (NR) Kongruenz in der Ebene τ sind auch hier Erzeugende dieser Regelfläche, da die diesen Strahlen der (NR) Kongruenz durch den (RK) Komplex zugeordneten Punkte auch in der Ebene τ liegen. Die Schnittkurve der Ebene τ und dieser Regelfläche 96. Grades zerfällt also in 14 Gerade und eine Kurve 82. Ordnung. Jedem Punkt dieser Kurve ist durch den (RK) Komplex ein Strahl der (NR) Kongruenz zugeordnet, und das sind alle Punkte

dieser Ebene (im Raum ganz beliebig angenommen), für welche die durch den (RK) Komplex zugeordneten Strahlen, Strahlen der (NR) Kongruenz sind. Es gilt also auch folgender Satz:

Die den Strahlen der (NR) Kongruenz eines Polarraumbüschels durch den (RK) Komplex dieses Polarraumbüschels zugeordneten Punkte bilden eine Fläche 82. Ordnung.

Analog wie die vorher ausgeführten Flächen soll diese mit F_{NR}^R bezeichnet werden. Da ein Strahl des (NK) Komplexes in seinem Fusspunkt eine Inzidenzfläche senkrecht schneidet, kann dieser Strahl in diesem Punkt keine andere dieser Inzidenzflächen berühren. Also auch hier können die Flächen F_{NR}^N, F_{NR}^R keinen gemeinsamen reellen Punkt haben, ausser den Punkten der Grundkurve c^4 .

Auf jedem Strahl des (RK) Komplexes befinden sich zwei diesem Strahl zugeordnete Punkte. Das sind die zwei Endpunkte des Tangentialkurzweges auf diesem Strahl, die, wie bekannt, involutorisch zugeordnet sind. Durch diese involutorische Zuordnung ist auch hier die bekannte Raumtransformation 5. Ordnung bestimmt. Es folgt also, dass auch die Punkte der F_{NR}^R Fläche in Paaren eineindeutig involutorisch zugeordnet sind, wobei die zugeordneten Punktpaare auf den Strahlen der (NR) Kongruenz liegen. In jeder Ebene des Raumes liegen 14 derartige Strahlen, also auf jeder ebenen Schnittkurve der Fläche F_{NR}^R befinden sich in dieser involutorischen Flächenpunktzuordnung der Fläche F_{NR}^N 14 zugeordnete Punktpaare.

Die den Punkten eines Ebenenschnittes der Fläche F_{NR}^R auf die erwähnte Weise involutorisch zugeordneten Punkte bilden, auf Grund der bekannten Raumtransformation 5. Ordnung, eine Raumkurve 410. Ordnung, die diese ebene Schnittkurve der Fläche F_{NR}^R in $2 \cdot 14 = 28$ Punkten schneidet u. s. w.

Alle diese Betrachtungen über die gemeinsamen Kongruenzen der vier betrachteten Komplexe eines Polarraumbüschels, könnten jetzt auch auf diese Komplexe und ihre gemeinsamen Kongruenzen bei speziellen Polarraumbüscheln, z. B. homothetischen, konzentrischen oder coaxialen, übertragen werden. Da aber dadurch der vorgesehene Umfang dieser Arbeit zu sehr vergrössert würde, werden hier die Kongruenzen derartiger Komplexe nicht betrachtet.

LITERATUR

- [1] *Th. Reye*: Die Geometrie der Lage, Abt. III, (1910), S. 37.
- [2] *U. Niže*: Über die kürzesten Tangentialwege zwischen den Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades. Rad Jug. akad., knj. 331 (1965), S. 147.
- [3] *U. Niže*: Normalenkomplex der Flächen eines Flächenbüschels 2. Grades. Glasnik mat. fiz. i astr. T. 18, (1963), No. 4. S. 262.
- [4] *U. Niže*: Ergänzende Beiträge zum Majcenschen kubischen Strahlenkomplex. Rad Jug. akad., knj. 325 (1962), S. 117–118.

*Institut für Mathematik der Universität
in Zagreb*

Angenommen zur Veröffentlichung am 23. XII. 1966. in der Abteilung für mathematische, physikalische und technische Wissenschaften der Jugoslawischen Akademie in Zagreb.

ZAJEDNIČKE KONGRUENCIJE ČETIRIJU KOMPLEKSA PRAMENA POLARNIH PROSTORA

Uvod: Pramenu polarnih prostora pridružena su, kao što je poznato, četiri kompleksa, koji su tim pramenom i određeni. To su: 1. bazični kvadratni tetraedralni kompleks, 2. kubični Majcenov kompleks, 3. kompleks normala incidentnih ploha polarnih prostora u tom pramenu, koji je osmog stupnja i 4. kompleks najkraćih dirnih putova među ploham pramena incidentnih ploha 2. stupnja. Pramen polarnih prostora označimo s (Π_n) , a njegove incidentne plohe čine pramen Π_n .

Svakoj tački prostora pridružena je po jedna zraka svakog tog kompleksa i svakoj zraci po jedna tačka osim četvrtog po redu, gdje su svakoj zraci pridružene po dvije tačke. Ove ćemo komplekse označiti s (TK) , (MK) , (NK) i (RK) . U bazičnom tetraedralnom kompleksu tačke pridružene njegovim zrakama nalaze se izvan tih zraka, a u ostala tri kompleksa one leže na sebi pridruženim zrakama.

Po dva od tih četiriju kompleksa imaju zajedničku kongruenciju, dakle takvih šest, koje ćemo označiti s (TM) , (TN) , (TR) , (MN) , (MR) i (NR) . Neprekinutom kvadratnom skupu zraka svake ove kongruencije pridružen je neprekinuti kvadratni skup tačaka preko svakog kompleksa takve kongruencije, dakle dvije plohe. U radnji »Neke nove osobine pramena i svežnja polarnih prostora« istražene su takve plohe u kongruenciji (TM) , tj. u zajedničkoj kongruenciji bazičnog tetraedralnog kompleksa i Majcenova kompleksa, gdje te dvije plohe padaju skupa u jednu plohu 6. reda. Preostalih pet kongruencija i na opisani način njima pridružene plohe bit će istražene u ovoj radnji.

Prije razmatranja o takvim ploham treba razmotriti neizmjereno daleke zrake ovakvih četiriju kompleksa. Tu je konstatirano da neizmjereno daleke zrake (TK) kompleksa omataju krivulju 2. razreda, a njima pridružene tačke u tom kompleksu su središta incidentnih ploha φ_n , dakle

leže na poznatoj prostornoj krivulji 3. reda. Također je tu zaključeno da su pravci neizmjereno daleke ravnine dvoznačne singularne zrake (MK) Majcenova kompleksa, troznačne zrake kompleksa (NK) normala incidentnih ploha i obične jednoznačne zrake kompleksa (RK) najkraćih dirnih putova.

I. Zbog stepena dva kompleksa (TK) i stepena osam kompleksa normala (NK), zajednička bi kongruencija (TN) tih dvaju kompleksa morala imati stepen šesnaest. Budući da su, međutim, pravci vrhova zajedničkog autopolarnog tetraedra svih polarnih prostora pramena (Π_n) zrake i bazičnog tetraedrnog kompleksa (TK), kao i kompleksa (NK) normala, to i ova četiri snopa pravaca pripadaju kongruenciji (TN). Ovaj raspadnuti dio mi međutim ne uzimamo u razmatranje, tako da je kongruenciji (TN) ostao red 12 i razred 16.

Zrake (NK) kompleksa pridružene tačkama neke ravnine τ čine kongruenciju 9. reda i 3. razreda. Ova kongruencija i (TK) kompleks, koji je kvadratni, imaju zajedničke zrake, koje čine pravčastu plohu $2(9+3) = 24$. stupnja, a kojoj su izvodnice zrake (TN) kongruencije. U ravnini τ nalazi se 16 zraka te kongruencije, kojima preko (NK) kompleksa pridružene tačke leže također u toj ravnini (svaka na svojoj zraci), dakle su i ovih 16 zraka izvodnice spomenute pravčaste plohe 24. stupnja. Ravnina τ siječe prema tome ovu plohu u tih 16 pravaca i jednoj krivulji 8. reda. Ovakve tačke pridružene zrakama (TN) kongruencije, koje smo promatrali u po volji odabranoj ravnini τ , čine prema tome krivulju 8. reda. Oдавle dalje izlazi da tačke pridružene zrakama (TN) kongruencije preko (NK) kompleksa čine opću plohu 8. reda.

Uzmemo li sada kongruenciju zraka (TK) kompleksa koje su pridružene tačkama ravnine τ , te na isti način promotrimo zajedničku pravčastu plohu ove kongruencije i (NK) kompleksa, koja se u ovom slučaju raspada u neke plohe nižeg stupnja koje u našim razmatranjima ne dolaze u obzir, dolazimo do zaključka da zrakama kongruencije (TN) pridružene tačke preko (TK) kompleksa čine opću plohu 12. reda.

II. Zajednička kongruencija kompleksa (TK) i (RK), koju smo označili s (TR), morala bi zbog stupnja dva (TK) kompleksa i stupnja tri (RK) kompleksa biti 6. stupnja. Budući da su, međutim, pravci vrhova zajedničkog polarnog tetraedra pramena Π_n incidentnih ploha φ_n zrake ovih dvaju kompleksa, dobiva kongruencija (TR) red dva i razred šest. Analogno kao u tački I, zaključuje se i ovdje da po volji odabrana ravnina τ siječe plohu tačaka pridruženih zrakama (TR) kongruencije preko kompleksa (RK) u krivulji 18. reda, dakle je ta ploha 18. reda.

Istim postupkom zaključeno je da zrakama (TR) kongruencije pridružene tačke preko (TK) kompleksa čine pravčastu plohu 2. stupnja. U vezi s ovakvim razmatranjima dobiven je ovaj stavak:

Unutar kompleksa (RK) najkraćih dirnih putova među plohama jednog pramena ploha 2. stupnja postoji kongruencija 2. reda 6. razreda, na čijim zrakama početna i završna tačka takvog dirnog puta leže u istoj dirnoj ravnini dviju odgovarajućih ploha u tom pramenu. Početne i završne tačke ovakvih najkraćih dirnih putova čine opću plohu 18. reda.

III. Zajednička kongruencija (MN) Majcenova kubičnog kompleksa (MK) i kompleksa (NK) normala, koji je 8. stupnja, morala bi biti 24. stupnja. Budući da su, međutim, ovdje neizmerno daleki pravci dvoznačne zrake Majcenova (MK) kompleksa i troznačne zrake (NK) kompleksa, dobiva kongruencija (MN) red 24. i razred 18. Zrake ove kongruencije 24. reda i 18. razreda su one normale incidentnih ploha φ_n koje neke od tih ploha diraju neizmerno daleko.

Na jednak način kao prije dobiva se i ovdje činjenica da zrakama (MN) kongruencije pridružene tačke preko (NK) kompleksa čine opću plohu 18. reda. Tim istim zrakama pridružene tačke preko (MK) kompleksa čine opću plohu 30. reda.

IV. Kongruencija (MR) zajedničkih zraka Majcenova kubičnog kompleksa i kubičnog kompleksa najkraćih dirnih putova među incidentnim plohama φ_n morala bi imati stupanj devet. Ova se kongruencija, međutim, također raspada u neke dijelove koji ne ulaze u naša razmatranja, tako da njen ostatak dobiva red 9. i razred 5. Međutim, i ova se kongruencija 9. reda i 5. razreda, koju čitavu razmatramo, raspada u jednu kongruenciju 5. reda 3. razreda i jednu 4. reda i 2. razreda. Zrakama prvog dijela kongruencije (MR) pridružene tačke preko (MK) kompleksa nalaze se na kubnoj prostornoj krivulji središta incidentnih ploha φ_n , tako da takve zrake jedne tačke te krivulje čine pramen pravaca, a ravnine tih pramenova čine jednu osobitu omotaljku. Tačke pridružene preko istog kompleksa zrakama drugog dijela kongruencije (MR) čine opću plohu 10. reda. Ova je ploha identična s plohom tačaka pridruženih zrakama (MR) kongruencije preko (RK) kompleksa. I ova je ploha pravčasta.

V. Zajednička kongruencija (NR) kompleksa (NK) i kompleksa (RK) morala bi zbog njihovih stupanja 8 i 3, biti 24. stupnja. Međutim, pravci vrhova zajedničkog polarnog tetraedra incidentnih ploha φ_n su zrake i (NK) i (RK) kompleksa, dakle se red kongruencije (NR) već

smanjuje za četiri. Međutim, i sve normale temeljne prostorne krivulje 4. reda I vrste pramena Π_n incidentnih ploha φ_n su zrake i (NK) i (RK) kompleksa. Kongruencija normala ovakve prostorne krivulje je 12. reda i 4. razreda, pa se za toliko i dalje smanjuje red i razred kongruencije (NK) . Osim toga je u početku spomenuto da su neizmjereno daleki pravci dvoznačni pravci kompleksa (RK) i troznačni pravci kompleksa (NK) . Prema tome su ti pravci šesteroznačni pravci naše kongruencije (NR) , koje ćemo također ostaviti izvan naših razmatranja. Kongruencija (NR) ima, dakle, red 8 i razred 14. Ova se činjenica može izreći i ovako:

Svi oni najkraći dirni putovi između ploha jednog pramena ploha 2. stupnja, koji jednu plohu tog pramena probadaju okomito, čine kongruenciju 8. reda i 14. razreda.

Analogno kao i dosad mogu se dobiti ove osobine ove kongruencije:

- a) Tačke pridružene zrakama kongruencije (NR) preko kompleksa (NK) čine opću plohu 22. reda.
- b) Tačke pridružene zrakama kongruencije (NR) preko kompleksa (RK) čine opću plohu 82. reda.

Osim tačaka temeljne prostorne krivulje 4. reda I vrste pramena Π_n incidentnih ploha φ_n ne mogu te dvije plohe imati nijednu drugu realnu zajedničku tačku.

*Institut za matematiku Sveučilišta
u Zagrebu*

Primljeno za publikaciju 23. prosinca 1966. u Odjelu za matematičke, fizičke i tehničke nauke Jugoslavenske akademije u Zagrebu

OSMOZA, OTAPANJE I PRENOS TOPLINE KAO SIMULTANI PROCES

I

IZVOD POTREBNIH IZRAZA I RELACIJA

U prikazu ireverzibilnog procesa simultane osmoze, otapanja i prenosa topline najviše informacija u okviru termodinamike ireverzibilnih procesa može dati Onsagerova teorija »recipročnih relacija« [1]. Zbog složenosti te teorije u njenoj primjeni na taj proces najbolje je postupiti sukcesivno pa redom definirati njene osnovne pojmove. To su 1. fluksovi, 2. linearni koeficijenti, 3. termodinamičke sile ili afiniteti, 4. kreacija, stvaranje entropije kao proces koji se razvija u vremenu. Među tim veličinama vladaju određene osnovne relacije, pa je najzgodnije i njih sukcesivno prikazati.

Fenomeni transporta energije, transporta mase i njene kemijske promjene obuhvaćeni su u klasičnoj teoriji zakonima Fouriera, Ficka i diferencijalnim jednadžbama kemijske kinetike. Za ovaj rad je međutim važan i jednostavan odnos proporcionalnosti oblika Hookeova zakona, prema kojemu je odgovor na prisilu proporcionalan s prisilom. U našem slučaju ćemo prisilu shvatiti kao termodinamičku silu, a odgovor na prisilu kao fluks, tok energije ili mase, zbog kojega se s porastom vremena smanjuje termodinamička sila. Kako su fluksovi diferencijalni kvocijenti ekstenzivnih varijabla po vremenu (u našem slučaju su to molovi otapala n_1 , molovi otopljene tvari n_2 i količina topline Q), onda će među fluksovima kao odgovorima i termodinamičkim silama kao prisilama (odgovor = strain, prisila = stress) vladati jednostavan odnos [2]

$$\frac{\text{strain}}{\text{stress}} = L = \text{konst}$$

ili ako je J = fluks = strain = odgovor, x = termod.

sila = stress = prisila, L = konst

$$J = Lx \quad (1)$$

Mi ovdje ne promatramo samo jedan fluks koji bi faktorom proporcionalnosti L bio povezan s termodinamičkom silom x , već promatramo

fluks toplinske energije $\frac{dQ}{dt}$ i dva fluksa mase $\frac{dn_1}{dt}$ i $\frac{dn_2}{dt}$. n_1 je broj mo-

lova komponente 1, otapala, n_2 je broj molova jedine otopljene komponente. Toplinska energija, odnosno njezin fluks sastoji se iz dva dijela: iz toplinske energije koja se iz toplijeg prostora I dovodi u hladniji prostor II i iz topline koja se u prostoru II troši zbog otapanja čvrste komponente 2 u prostoru II.

U skladu s prikazanim linearnim odnosom između fluksova i termodinamičkih sila Onsagerova teorija može se u prisutnosti triju fluksova i triju termodinamičkih sila prikazati trostupačnom trorednom Onsagerovom simetričnom matricom [3]:

$$J_1 = L_{11}x_1 + L_{12}x_2 + L_{13}x_3 \quad (2-1)$$

$$J_2 = L_{21}x_1 + L_{22}x_2 + L_{23}x_3 \quad (2-2)$$

$$J_3 = L_{31}x_1 + L_{32}x_2 + L_{33}x_3 \quad (2-3)$$

ili

$$J_i = \sum L_{ik}x_k \quad (3)$$

Prema tom izrazu fluksovi linearno zavise o simetričnim fenomenološkim koeficijentima L . Ti koeficijenti mogu se podijeliti na dijagonalne »koeficijente L_{ii} i na nedijagonalne« (Off) koeficijente L_{ik} ($i \neq k$).

Težište Onsagerove teorije i njena najveća vrijednost sastoji se u postulatu o simetričnim koeficijentima, koji primijenjen na gornju matricu glasi:

$$L_{12} = L_{21}; L_{13} = L_{31}; L_{23} = L_{32} \quad (4)$$

Relacije (4) imaju značajnu heurističku vrijednost, jer svojim aksiomatskim karakterom omogućuju davanje numeričkih vrijednosti nedijagonalnim koeficijentima.

Fluksovi prikazani jednađbama (2—1), (2—2), (2—3) predstavljeni su s po tri člana, parcijalna fluksa, od kojih je svaki produkt linearnog koeficijenta i afiniteta, termodinamičke sile. Može se napisati matrica parcijalnih fluksova.

$$J_1 = J_{11} + J_{12} + J_{13} \quad (4-1)$$

$$J_2 = J_{21} + J_{22} + J_{23} \quad (4-2)$$

$$J_3 = J_{31} + J_{32} + J_{33} \quad (4-3)$$

Ova matrica, dakako, nije simetrična jer $J_{12} \neq J_{21}$; $J_{13} \neq J_{31}$; $J_{23} \neq J_{32}$. Simetrički koeficijent $L_{ik} = L_{ki}$ su doduše međusobno jednaki, ali fluksovi predstavljaju produkte tih koeficijenata s nejednakim afinitetima, pa simetrija iščezava. U izrazu (1) i u simetričnoj matrici nezavisne varijable x_1, x_2, x_3 , afiniteti ili termodinamičke sile nisu sile u smislu mehanike, nego mogu imati različite dimenzije u ovisnosti o našem izboru. Onsagerova teorija dopušta širok izbor termodinamičkih sila, ali je taj izbor uvijek ograničen uvjetom prema kome mora suma produkata fluksova s odgovarajućim silama biti jednaka stvaranju, kreaciji entropije $\frac{d_i S}{dt}$. $d_i S$ definiran je izrazom [4]

$$dS = d_e S + d_i S \quad (5-1)$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d_e S}{dt} + \frac{d_i S}{dt} \quad (5-2)$$

Relacija (5) odnosi se na jedinicu volumena. Ovdje dS znači diferencijal ukupne entropije, $d_e S$ je diferencijal entropije koju sistem, prostor II, prima iz okoline, $d_i S$ je entropija koja se stvara unutar sistema, tj. u prostoru II. Zahtjev je drugog stavka termodinamike da uvijek vrijedi za stvaranje entropije unutar sistema

$$\frac{d_i S}{dt} \geq 0 \quad (6)$$

Naprotiv, prolaz entropije kroz sistem iz okoline u okolicu $\frac{d_e S}{dt}$ ne mora biti uvijek veći od nule, već je dovoljno da diferencija

$$\left(\frac{dS}{dt} - \frac{d_e S}{dt} \right) = \frac{d_i S}{dt} \geq 0 \quad (7)$$

bude uvijek veća od nule.

Potrebno je izvesti izraz za kreaciju entropije u našem sistemu, u kojem su tri fluksa funkcije triju termodinamičkih sila. To se može izvesti ovako:

Promatramo sistem, koji je kao cjelina zatvoren, ali koji se sastoji od četiri otvorena podsistema, prostora I, II, III i IV. Prostori su tako raspoređeni da se lijevo od promatrača kao prvi nalazi prostor I. Desno od njega, odijeljen idealno polupropusnom membranom, nalazi se prostor II, a na njega se adiabatičnom stijenkom naslanja prostor III. Ta je stijenka osim toga potpuno nepropusna za materijalne fluksove. Na vrhu prostora II prema prostoru III nalazi se otvor, izljev, kroz koji tekućina iz prostora II prelazi u prostor III. Na taj način volumen tekućine u prostoru II ostaje konstantan. Na dnu prostora II kao posebni prostor IV nalazi se čvrsta faza koja se sastoji iz čiste čvrste komponente 2, tvari koja je otopljena u komponenti 1 kao otapalu. Prema tome prostor IV svojom čvrstom površinom graniči samo s prostorom II, jer se nalazi na njegovu dnu. Na površini čvrste faze II kao granica između prostora IV i II nalazi se lamelica zasićene otopine komponente 2 u komponenti 1.

Kako se razabire, prostori I, II, III i IV karakterizirani su ekstenzivnim varijablama n_1 i n_2 , brojevima *molekula otapala* i *jedine otopljene tvari*. Prostor I zamišljamo neizmjerljivo velikim, pa je njegov sastav nezavisan o vremenu. Nezavisan o vremenu je i sastav prostora IV, koji se sastoji iz čiste kristalizirane tvari 2, koja s otapalom ulazi samo u proces otapanja i time napušta prostor IV. U prostorima II i III su n_1 i n_2 varijable. Zbog navedenih uvjeta vrijede relacije:

$$\delta (n_1 + n_2)^{\text{II}} + \delta (n_1 + n_2)^{\text{III}} = 0 \quad (8)$$

Termodinamičku silu s dimenzijom parcijalne molarne entropije definiramo izrazom

$$x_i = \left(\frac{\partial_i S}{\partial n_i} \right) = \left(\frac{\partial_i S}{\partial n_1} \right)^{\text{II}} + \left(\frac{\partial_i S}{\partial n_2} \right)^{\text{II}} - \left(\frac{\partial_i S}{\partial n_1} \right)^{\text{III}} - \left(\frac{\partial_i S}{\partial n_2} \right)^{\text{III}} \quad (9)$$

ili

$$x_i = x_i^{\text{II}} - x_i^{\text{III}}$$

U termodinamičkoj ravnoteži je diferencija na desnoj strani jednaka nuli, pa je u tom slučaju i termodinamička sila x_i jednaka nuli.

Porast entropije u vremenu prikazuje se prema tome identitetom [5]

$$\frac{d_i S}{dt} = \sum_i \frac{\delta_i S}{\delta n_i} \cdot \frac{dn_i}{dt} = \sum_i x_i J_i \quad (10)$$

U našem slučaju povoljnije je postupiti u skladu s većinom autora koji su obrađivali probleme ovog područja (Denbigh, De Groot, Prigogine), pa u (10) uvesti novu varijablu odnosom [6]:

$$x_i = \frac{X_i}{T} \quad (11)$$

Na taj način termodinamička sila X_i u materijalnim fluksovima dobiva dimenziju parcijalne molarne slobodne energije, termodinamičkog potencijala μ_i . Vrijedi identitet:

$$\mu_i = \left(\frac{\partial G_i}{\partial n_i} \right)_{n_j, p, T}$$

G je slobodna enthalpija. Kad (11) stavimo u (10), dobivamo

$$T \frac{d_i S}{dt} = \sum_i J_i X_i = J_2 X_2 + J_3 X_3 \quad (12)$$

Izraz (12) vrijedi za sumu materijalnih fluksova u našem sistemu $\frac{dn_1}{dt}$ i $\frac{dn_2}{dt}$. Za fluks toplinske energije $\frac{dQ}{dt}$ je odgovarajuća termodinamička sila X_1 relativna promjena temperature $\frac{dT}{T}$. Tako dobivamo za produkt apsolutne temperature s kreacijom entropije izraz

$$T \frac{d_i S}{dt} = J_1 X_1 + J_2 X_2 + J_3 X_3 \quad (13)$$

Kad u (13) stavimo za fluksove vrijednosti (2—1), (2—2), (2—3), dobivamo (uz uvjet $L_{12} = L_{21}$, $L_{13} = L_{31}$, $L_{23} = L_{32}$) za kreaciju entropije izraz

$$\begin{aligned} T \frac{d_i S}{dt} = & L_{11} X_1^2 + L_{22} X_2^2 + L_{33} X_3^2 + \\ & + 2 L_{12} X_1 X_2 + 2 L_{13} X_1 X_3 + 2 L_{23} X_2 X_3 \end{aligned} \quad (14)$$

Jednadžba (14) parcijalno diferencirana po termodinamičkoj sili X_2 daje dvostruki fluks otapala

$$\left[\delta \left(T \frac{d_i S}{dt} \right) \right]_{X_1, X_3} = 2L_{21}X_1 + 2L_{22}X_2 + 2L_{23}X_3 = 2J_2 = 2 \frac{dn_1}{dt} \quad (15)$$

U stacionarnom stanju materijalni fluks J_2 iščezava, $J_2 = 0$. Jednadžba (14) parcijalno diferencirana po termodinamičkoj sili X_3 daje dvostruki fluks otopljene komponente II.

$$\left[\delta \left(T \frac{d_i S}{dt} \right) \right]_{X_1, X_2} = 2L_{31}X_1 + 2L_{32}X_2 + 2L_{33}X_3 = 2J_3 = 2 \frac{dn_1}{dt} \quad (16)$$

U stacionarnom stanju je fluks otopljene komponente $J_3 = 0$. Uz uvjete $J_2 = 0$, $J_3 = 0$, (15) ponovno parcijalno diferencirano po X_2 i (16) ponovno parcijalno diferencirano po X_3 daju

$$\left[\frac{\delta^2 \left(T \frac{d_i S}{dt} \right)}{\delta X_2^2} \right]_{X_1, X_3} = 2L_{22} > 0; \quad (17)$$

odnosno

$$\left[\frac{\delta^2 \left(T \frac{d_i S}{dt} \right)}{\delta X_3^2} \right]_{X_1, X_2} = 2L_{33} > 0. \quad (18)$$

Iz (17) i (18) slijedi da je u stacionarnom stanju produkcija entropije za oba materijalna fluksa minimum.

Primjenom relacija (4) slijede iz (14), (15) i (16) definicije linearnih koeficijenata, tj. slijedeće jednakosti:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial J_1}{\partial X_2} \right)_{X_1, X_3} &= \left(\frac{\partial J_2}{\partial X_1} \right)_{X_2, X_3} = L_{12} = L_{21} \\
 \left(\frac{\partial J_1}{\partial X_3} \right)_{X_1, X_2} &= \left(\frac{\partial J_3}{\partial X_1} \right)_{X_2, X_1} = L_{13} = L_{31} \\
 \left(\frac{\partial J_2}{\partial X_3} \right)_{X_1, X_2} &= \left(\frac{\partial J_3}{\partial X_2} \right)_{X_1, X_3} = L_{23} = L_{32}
 \end{aligned} \quad (19)$$

U problematici koja se obrađuje u ovom radu ključno je pitanje položaja termodinamičke i stacionarne ravnoteže. Da bi se ta pitanja što jednostavnije riješila, potrebno je uvesti nezavisne varijable, diferencije broja molova i termodinamičke sile u obliku diferencija koje iščezavaju u termodinamičkoj ravnoteži. U skladu s postupkom kojim se služi Prigogine, De Groot i Denbigh uvodimo novu varijablu definicijama:

$$\begin{aligned}
 y_1 &\equiv \left(n_1^{\text{II}} - n_{01}^{\text{I}} \right); \\
 y_2 &\equiv \left(n_2^{\text{II}} - n_{02}^{\text{I}} \right)
 \end{aligned} \quad (20)$$

n_1^{II} je broj molova otapala u prostoru II dok proces teče prema termodinamičkoj ravnoteži, n_{01}^{I} je broj molova otapala u prostoru I u termodinamičkoj ravnoteži, s otopinom u prostoru II kod izotermnog procesa. U termodinamičkoj ravnoteži je $y_1 = 0$. Analogno vrijedi za jedinu otoplenu komponentu (simbolima n_{01}^{I} , n_{01}^{II} , n_{02}^{I} , n_{02}^{II} označene su vrijednosti varijabla u termodinamičkoj ravnoteži).

$$y_2 = n_2^{\text{II}} - n_{02}^{\text{II}} \quad (21)$$

n_{02}^{II} znači broj molova otopljene komponente u termodinamičkoj ravnoteži u konstantnom volumenu V prostora II. Prostor II graniči s čvrstom fazom komponente 2 u prostoru IV, zbog toga zasićena otopina komponente 2 u prostoru II predstavlja ravnotežnu koncentraciju:

$$n_{02}^{\text{II}} = n_2^{\text{II}} \text{ zas.}$$

Potrebno je umjesto diferencije broja molova otapala

$$n_1^{\text{I}} - n_1^{\text{II}} = -y_1 \quad (22)$$

u prostorima I i II supstituirati diferenciju kemijskih potencijala $(\mu_{01}^I - \mu_1^{II})$, ona je dana termodinamičkim izrazom

$$\left(\mu_{01}^I - \mu_1^{II}\right) = RT \ln \frac{a_{01}^I}{a_1^{II}} \doteq RT \ln \frac{n_{01}^I}{n_1^{II}} \quad (23)$$

U (23) varijabla a_i znači aktivitet komponente i . (23) se može pisati u blizini termodinamičke ravnoteže gdje je

$$\ln \left(1 + \frac{y_1}{n_{01}^I} \right) \doteq \frac{y_1}{n_{01}^I}$$

$$\left(\mu_1^{II} - \mu_{01}^I\right) = RT \ln \left(1 + \frac{y_1}{n_{01}^I} \right) \doteq RT \frac{y_1}{n_{01}^I}$$

odnosno

$$y_1 = \left(n_1^{II} - n_{01}^I\right) = \frac{n_{01}^I (\mu_1^{II} - \mu_{01}^I)}{RT} \quad (24)$$

Analogan izraz treba izvesti i za jedinu otopljenu komponentu. Tu ipak treba učiniti važnu napomenu. Za našu svrhu je zgodno od dvije konvencije za definiciju koeficijenta aktiviteta odlučiti se za onu za koju vrijede uvjeti [7]

$$y_2 \rightarrow 1 \text{ kad } N_2 = \frac{n_2}{n_1 + n_2} \rightarrow 0 \quad (25)$$

Ta definicija odgovara našem slučaju, jer mi promatramo razrijeđenu otopinu čvrste komponente 2 u tekućoj komponenti 1. U tom slučaju s pravom uzimamo da se koeficijent aktiviteta otopljene komponente približava vrijednosti 1 kad se njena koncentracija približava vrijednosti 0. (25) dozvoljava da odmah napišemo odnos

$$y_2 = \left(n_2^{II} - n_{02}^{II}\right) = \frac{n_{02}^{II} (\mu_2 - \mu_{02}^{II})}{RT} \quad (26)$$

n_{02}^{II} je broj molova komponente 2 u jednoj litri njene zasićene otopine u prostoru II. n_2^{II} je koncentracija iste komponente u času t . U prostoru I je otopina razrijeđenija, pa je $y_1 < 0$, $\mu_1^{II} < \mu_{01}^I$, kemijski

potencijal otapala u prostoru I je veći od njegove vrijednosti u prostoru II, jer je $n_{O_2}^{II} > n_2^{II}$, pa slijedi da je i $\mu_{O_2}^{II} > \mu_2^{II}$, kemijski potencijal komponente 2 u zasićenoj otopini je veći od potencijala u razrijeđenoj otopini, osmoza i otapanje su spontani procesi.

II

IZBOR LINEARNIH KOEFICIJENATA I TERMODINAMICKIH SILA

Primjena izvedenih izraza na naš sistem

Svrha je ovoga rada da na temelju već poznatih činjenica omogući primjenu Onsagerove teorije i sasvim općenito primjenu relacija termodinamike ireverzibilnih procesa na proces simultanog odvijanja prenosa topline, osmoze i otapanja. Specijalno je svrha ovoga rada da u Onsagerovoj matrici dade konkretne vrijednosti i dijagonalnim i nedijagonalnim fenomenološkim linearnim koeficijentima i termodinamičkim silama, da bi se dobila što potpunija informacija o procesima u otvorenom sistemu koji se ovdje prikazuje.

Već su mnogo ranije Osterhout i Longworth [8] prikazali simultani proces difuzije otapala kroz polupropusnu membranu i kemijsku reakciju koja se zbiva u prostorima koji su odijeljeni tom membranom. Ta se dva procesa odigravaju simultano, ali se pri tom mijenja volumen tako da koncentracija tvari a time i osmotski tlak raste u jednom od prostora. Na taj način dolazi do kontinuiranog procesa osmoze. Tu se uspostavlja – izvan termodinamičke ravnoteže – stacionarno, nepromijenjeno stanje. Bitna je karakteristika Osterhoutova sistema da u jednom njegovu prostoru raste osmotski tlak i da kontinuirano teče proces osmoze. Longworth je dao matematičku interpretaciju tog procesa, koji je, dakako, analogan s ovdje opisanim procesom prolaska otapala kroz polupropusnu membranu. Oznake se nešto razlikuju jer se u našem slučaju polazi od drugih uvjeta. Osim toga u sistemu koji je opisao Osterhout nema ni procesa otapanja ni procesa prenosa topline, nego se u sistem izvana uvodi plinoviti CO_2 , koji u jednostavnoj kemijskoj reakciji dovodi do promjene koncentracije, odnosno broja molekula u prostoru koji graniči s polupropusnom membranom. Longworth se u svojoj teoriji ne

služi metodom i terminima suvremene termodinamike ireverzibilnih procesa kako su je osnovali npr. Prigogine, de Groot i Denbigh, na čije se osnovne postavke nadovezuje ovaj rad.

U sistemu koji opisujemo je prenos toplinske energije posljedica fluksa topline od toplijeg prostora I prema hladnijem prostoru II i apsorpcije topline pri otapanju čvrste komponente 2. Promatrani proces je zamišljen kao proces u otvorenom sistemu (uz konstantan volumen otopine u podsistemu, tj. u prostoru II), dok broj molova obiju komponenata varira sve dok se ne postigne stacionarno stanje. Ovdje se pretpostavlja da postoje tri bitna uvjeta pod kojima se odvija proces. Prvi uvjet je idealno polupropusna membrana među prostorima I i II za proces osmoze otapala. Drugi uvjet je idealno miješanje u prostoru II, a treći je uvjet idealni proces difuzije otopljene komponente 2 i otapala komponente 1, pri kojem se pad koncentracije u smislu Fickova zakona ograničuje samo na sloj debljine d polupropusne membrane kod osmoze i na debljinu δ lamele zasićene otopine na površini čvrste faze u procesu otapanja. Sastav otopine u prostoru I je konstantan. Dakako da je konstantan i sastav prostora IV, koji se sastoji od kristala čvrste komponente 2.

U sistemu ostvarena je termodinamička ravnoteža kad se u prostorima I, II nalazi zasićena otopina komponente 2 pri istoj temperaturi. Tu ravnotežu možemo poremetiti na dva načina. Prvo tako da u prostor I pri istoj konstantnoj temperaturi umjesto zasićene otopine komponente 2 stavimo otopinu konstantnog sastava ali razrjeđeniju. Da bismo stvar pojednostavnili, zamišljamo da je prostor I neizmjerljivo velik i da se idealno miješa. Posljedica tih uvjeta će biti osmoza otapala iz prostora I u prostor II, ali se zbog naših pretpostavaka može uzeti da se sastav otopine u prostoru I pošto u njemu zasićenu otopinu komponente 2 zamijenimo razrjeđenijom više ne mijenja u vremenu, da ostaje kroz čitavo vrijeme procesa konstantan. Zbog osmoze otapala u prostor II u njemu se otopina razrjeđuje i zbog toga počinje otapanje čvrste komponente 2, koja se nalazi u prostoru IV, koji je u kontaktu s prostorom II. Ovdje se, međutim, ne smije smetnuti s uma činjenica da proces osmoze razrjeđivanjem otopine u prostoru II samim tim smanjuje brzinu procesa osmoze. S druge strane, otapanje komponente 2, koja potječe iz prostora IV, povećava koncentraciju otopljene tvari. Prema tome su proces osmoze i proces otapanja dva suprotna procesa. Proces osmoze otežava postizavanje termodinamičke ravnoteže u procesu otapanja, a proces otapanja otežava postizanje termodina-

mičke ravnoteže u procesu osmoze. Proces otapanja djeluje suprotno od procesa osmoze i time proces otapanja »produžava život« procesu osmoze. Isto tako proces osmoze djeluje suprotno procesu otapanja, proces osmoze »produžuje život« procesu otapanja. Kad se oba utjecaja u svojem efektu izjednače, doći će do stacionarne ravnoteže kad će se u dn_1 molova otapala koje osmozom u sekundi prođe kroz membranu otopiti dn_2 molova komponente 2 u sekundi, a da se pri tom neće mijenjati sastav otopine u prostoru 2, čime će se postići o vremenu neovisno stacionarno stanje, u kojem kroz izljev iz prostora II u prostor III otiče otopina konstantnog o vremenu neovisnog sastava.

Termodinamička ravnoteža u našem sistemu može se poremetiti i na drugi način. Može se u prostoru I ostaviti zasićena otopina tako da su prostori I i II pri konstantnoj temperaturi u termodinamičkoj ravnoteži. Ako sada otopini u prostoru I povišimo temperaturu, poremetit će se termodinamička ravnoteža, početak će proces osmoze otapala kroz polupropusnu membranu. Ono će pod utjecajem temperaturne razlike kroz polupropusnu membranu prelaziti iz prostora I u prostor II. Tako će se ostvariti proces termoosmoze [16].

Tri procesa koji istodobno teku u našem sistemu prikazat ćemo pomoću fluksova u formi Onsagerove matrice (2—1), (2—2), (2—3). Od ta tri procesa prvi je predstavljen fluksovima toplinske energije kroz lamelicu zasićene otopine na površini čvrste faze u smjeru od prostora II prema prostoru IV i apsorpcijom topline kroz polupropusnu membranu od prostora I prema prostoru II. Proces prenošenja topline je zamišljen tako da bude apsorpcija topline zbog otapanja premašena prenosom topline iz I u II, tako da se zbog idealnog miješanja u prostorima II i I održava konstantna razlika u temperaturama ΔT tih prostora. Drugi proces je proces osmoze, tj. prodiranje molekula komponente 1 kroz polupropusnu membranu od prostora I u prostor II. Treći proces je proces difuzije otopljenog tvari komponente 2 kroz lamelicu zasićene otopine na površini čvrste faze komponente 2, tj. od prostora IV prema prostoru II.

U prvom procesu vođenja topline kroz polupropusnu membranu debljine d fluks topline J_{11} dan je izrazom

$$J_{11} = \frac{dQ}{dt} = \frac{Kq}{d} \cdot \frac{\Delta T}{T} \quad (27)$$

dQ je količina topline koja je u vremenu dt prenesena kroz prosjek q . ΔT je diferencija temperatura na dva različita mjesta koja se nalaze u

udaljenosti d , tj. na prednjoj stijenci polupropusne membrane koja je okrenuta prema prostoru I s temperaturom $(T + \Delta T)$ i na stražnjoj stijenci koja je u udaljenosti d okrenuta prema prostoru II s nižom temperaturom T . Konstanta K je koeficijent vodljivosti topline s dimenzijom

$$[K] = [\text{cal}^1 \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{stupanj}^{-1} \cdot \text{sek}^{-1}]$$

U našem je slučaju $\frac{dQ}{dt} > 0$ jer je $\Delta T > 0$.

Za izvod egzaktnog termodinamičkog izraza za osmotski tlak potrebno je poznavanje parnih tlakova otapala i otopine. Takvi termodinamički izrazi vrijede strogo kada se proces odvija izotermno. Međutim, ima slučajeva kada pod utjecajem temperaturnih razlika dođe do takvih promjena procesa osmoze koje premašuju promjene do kojih dolazi zbog razlike u koncentracijama. Neka bude npr. ista otopina polupropusnom membranom podijeljena u dva prostora i neka prostori imaju različite temperature [16]. Tada se doduše u skladu s Van t'Hoffovim izrazom toplijem prostoru poveća osmotski tlak, ali parni tlak toplije otopine ne pada, kako bi se očekivalo prema termodinamičkoj formuli, već naprotiv zbog povećanja temperature raste i zbog toga teče proces osmoze između jednako koncentriranih otopina od mjesta s višom temperaturom prema mjestu s nižom temperaturom, odnosno od otopine s višim parnim tlakom prema otopini s nižim parnim tlakom. Drugim riječima rečeno, proces osmoze teče od toplijeg prostora prema hladnijem bez obzira na to što su koncentracije u prostorima jednake, a može se dogoditi da se proces osmoze u takvom slučaju vrši i od otopine s većom koncentracijom prema otopini s manjom koncentracijom. To je suština pojave procesa termoosmoze. Po Netteru ima npr. čista voda kod 40°C parni tlak 45,32 mm Hg, 10%-tna otopina saharoze, koja je gotovo izotonična s krvnim serumom, ima parni tlak koji je samo za 0,33 mm stupca žive niži od parnog tlaka čiste vode. Povišenje temperature za samo jedan stupanj povisuje parni tlak vode za 3,02 mm Hg. Prema tome će fluks molekula otapala kroz polupropusnu membranu teći od toplijeg prostora prema hladnijem, premda je topliji prostor onaj u kojem se nalazi otopina šećera. Tekućina će strujati od šećerne otopine kroz polupropusnu membranu prema čistoj vodi, što je direktno suprotno procesu koji teče kad oba prostora imaju istu temperaturu. Ako u prostoru koji nije odijeljen polupropusnom mem-

branom postoje u određenoj udaljenosti mjesta koja imaju različitu temperaturu, dolazi do pojave termodifuzije. Računi koje je proveo Netter pokazuju da 0,1^o toplija otopina drži osmotsku ravnotežu s otopinom koja je za 0,302 mola po litri koncentriranija.

Prolaz otapala kroz polupropusnu membranu u izotermnom procesu osmoze može se prikazati diferencijalnom jednačbom [9]

$$\frac{dn_1^{\text{II}}}{dt} = \frac{D_1}{U} \frac{q}{d} (n_{01}^{\text{I}} - n_1^{\text{II}}) \quad (28)$$

D_1 je koeficijent samodifuzije vode, q je površina polupropusne membrane, U je konstantni volumen otopine, d je debljina membrane

$$n_{01}^{\text{I}} > n_1^{\text{II}}.$$

Proces fizikalnog otapanja prikazan je diferencijalnom jednačbom koju su još 1897. postavili A. A. Noyes i W. R. Whitney [10]

$$\frac{dn_2^{\text{II}}}{dt} = \frac{D_2}{U} \frac{F}{\delta} (n_{02}^{\text{II}} - n_2^{\text{II}}) \quad n_{02}^{\text{II}} > n_2^{\text{II}} \quad (29)$$

Ovdje je D_2 difuzni koeficijent komponente 2. F je površina lamelice zasićene otopine na čvrstoj komponenti 2. δ je debljina lamelice na površini čvrste faze – komponente 2. n_{01}^{I} i n_1^{II} znače brojeve molova otapala u prostorima I i II, n_2^{II} i n_{02}^{II} su molovi otopljenе komponente u prostoru II u času t i u zasićenoj otopini, tj. u termodinamičkoj ravnoteži.

U našem slučaju, dakle, na proces osmoze, na njegovo odvijanje u vremenu, djeluju tri termodinamičke sile:

$$\frac{\Delta T}{T}, (\mu_{01}^{\text{I}} - \mu_1^{\text{II}}) \text{ i } (\mu_{02}^{\text{II}} - \mu_2^{\text{II}}).$$

O toj činjenici vodi računa Onsagerova matrica (45), koju ćemo postaviti. U jednačbi (29) kvocijent $\frac{\Delta T}{T}$ već predstavlja termodinamičku silu u izrazu za fluks topline, dok se u izrazima (30) i (31) diferencije $(n_1^{\text{I}} - n_1^{\text{II}})$ i $(n_{02}^{\text{II}} - n_2^{\text{II}})$ moraju zamijeniti termodinamičkim potencijalima pomoću izraza (24) i (26). Tako ćemo dobiti, uz već navedeni fluks toplinske energije,

$$J_{11} = \frac{Kq}{d} \cdot \frac{\Delta T}{T} \quad (27)$$

($\frac{\Delta T}{T}$ je jednodimenzionalni relat. pad temperature unutar polupropusne membrane debljine d i površine q , K je koeficijent vodljivosti topline), dva parcijalna materijalna fluksa J_{22} i J_{33} . U skladu s našim postupkom fluks J_{22} dobiva oblik

$$J_{22} = \frac{D_1 q}{Ud} \frac{n_{01}^I}{RT} (\mu_1^{II} - \mu_{01}^I) \quad (30)$$

D_1 je koeficijent samodifuzije otapala, U je konstantan volumen otopine, n_1^0 je broj molova otapala u čistom otapalu, T je temperatura u prostoru II, μ_1^{II} i μ_{01}^I je kemijski potencijal otapala u oba prostora.

J_{33} je dijagonalni parcijalni fluks jedine otopljene komponente n_2 kroz lamelicu zasićene otopine debljine δ na kristalu tvari koja se otapa

$$J_{33} = \frac{D_2 F}{U\delta} \frac{n_{02}}{RT} (\mu_{02}^{II} - \mu_2^{II}) \quad (31)$$

F je površina lamelice na kristalu, n_{02} je broj molova komponente 2 u konstantnom volumenu U prostora II (= 1 litra) zasićene otopine, D_2 je difuzijski koeficijent komponente 2 u otapalu 1, μ_{02}^{II} je kemijski potencijal zasićene otopine, μ_2^{II} je kemijski potencijal komponente 2 u prostoru II u času t .

Da bismo mogli postaviti izraze za preostalih šest nedijagonalnih fluksova, moramo odrediti vrijednost triju nedijagonalnih linearnih koeficijenata, jer se šest nelinearnih koeficijenata naše matrice – zbog izraza (4) – reducira na tri: L_{12} , L_{13} i L_{23} .

Prenos topline (u našem sistemu ne dolazi do hidrostatskog pretlaka) ulazi u jednadžbu kojom se veže promjena tlaka zbog promjena temperatura na dva različita mjesta:

$$\frac{dp}{dT} = - \frac{Q^*}{UT} \quad (32)$$

Ovdje je Q^* toplina prenosa (Überführungswärme, heat of transport), U je parcijalni molarni volumen otapala. Detaljna istraživanja su pokazala da vrijede relacije [11]

$$\frac{L_{21}}{L_{22}} = H_1 \quad ; \quad L_{21} = L_{12} = \tilde{H}_1 L_{22} \quad (33)$$

$\tilde{H}_1$ je molska toplotina razređivanja otopine otapalom. Analogno vrijedi

$$\frac{L_{31}}{L_{33}} = \tilde{H}_2 \quad ; \quad L_{31} = L_{13} = L_{33} \tilde{H}_2 \quad (34)$$

$\tilde{H}_2$ je molska toplotina otapala jedine otopljene komponente. Toplina prenosa $Q =$ identična je s diferencijom

$$Q^\mp = Q - \tilde{H}$$

$Q^\pm$ je srednja energija koja je transportirana po molu molekula otapala. Ona je za veličinu molske enthalpije $\tilde{H}$ manja od ukupno prenesene količine topline Q .

Još preostaje da se navedu vrijednosti koeficijenata $L_{23} = L_{32}$. Taj je koeficijent jednak produktu niže temperature T u prostoru II i Sorettova koeficijenta s . Kad se radi o smjesi od samo dvije komponente (otapalu i jedinoj otopljenoj komponenti), onda je Soretov koeficijent definiran izrazom:

$$s = \frac{Q_1^\mp - Q_2^\mp}{RT^2} \quad (35)$$

Ako se u toku procesa može zanemariti varijacija tlaka, onda je s predstavljen varijacijom sastava otopine duž temperaturnog gradijenta, pa je prema tome funkcija topline prenosa svake komponente. Za otopine Soretov efekt dobiva oblik (35). Prema tome vrijedi odnos

$$\frac{Q_1^\mp - Q_2^\mp}{RT} = s T = L_{23} = L_{32} \quad (36)$$

Tako smo razvili sve linearne nedijagonalne koeficijente i termodinamičke sile, pa je moguće napisati Onsagerove matrice i oblika (2—1), (2—2), (2—3) i oblika (4—1), (4—2) (4—3). Mogu se napisati konkretne vrijednosti svih nedijagonalnih parcijalnih fluksova.

J_{12} je parcijalni nedijagonalni fluks topline zbog termodinamičke sile X_2 , razlike kemijskog potencijala otapala u prostorima I i II

$$J_{12} = \frac{\tilde{H}_1}{RT} \cdot \frac{D_1}{\bar{v}d} \frac{q}{n_{01}} (\mu_1^{\text{II}} - \mu_1^{\text{I}}) \quad (37)$$

Parcijalni fluks J_{12} predstavlja Dufourov efekt komponente 1 zbog razlike kemijskih potencijala, tj. fluks topline, zbog razlike kemijskih potencijala komponente 1 u oba prostora. $\tilde{H}_1$ je molska enthalpija komponente 1 u prostoru I.

J_{21} je parcijalni nedijagonalni fluks komponente 1 do kojega dolazi zbog razlike u temperaturi prostora I i II. To je, dakle, Soretov efekt otapala, komponente 1.

$$J_{21} = \frac{\tilde{H}_1}{RT} \cdot \frac{D_1}{U\delta} \cdot \frac{q}{n_1^0} \cdot \frac{\Delta T}{T} \quad (38)$$

J_{13} je parcijalni nedijagonalni fluks topline zbog termodinamičke sile X_3 razlike kemijskih potencijala komponente 2. To je Dufourov efekt komponente 2.

$$J_{13} = - \frac{D_2 F n_{02}^{II}}{U\delta} \cdot \frac{Q_1^{\mp} - Q_2^{\mp}}{RT} (\mu_{02}^{II} - \mu_2^{II}) \quad (39)$$

J_{31} je parcijalni dijagonalni fluks komponente 2 zbog razlike u temperaturi prostora I i II. To je Soretov efekt

$$J_{31} = - \frac{D_2 F n_{02}^{II}}{U\delta} \cdot \frac{Q_1^{\mp} - Q_2^{\mp}}{RT} \cdot \frac{\Delta T}{T} \quad (40)$$

J_{23} je parcijalni nedijagonalni fluks otapala, komponente 1, zbog razlike kemijskih potencijala, otopljene komponente 2 u prostorima I i II.

$$J_{23} = - \frac{\tilde{H}_2 D_2 F n_{02}^{II}}{U\delta (RT)^2} (\mu_{02}^{II} - \mu_2^{II}) \quad (41)$$

Taj fluks možemo nazvati konjugirani fluks komponente 1 zbog razlike kemijskih potencijala komponente 2 u prostorima I i II. J_{32} je parcijalni nedijagonalni fluks otopljene komponente, 2, koji nastaje zbog razlike kemijskih potencijala komponente 1 u prostorima I i II

$$J_{32} = - \frac{\tilde{H}_2 D_2 F n_{02}^{II}}{U\delta (RT)^2} (\mu_1^{II} - \mu_1^I) \quad (42)$$

Svi ovdje navedeni parcijalni fluksovi dozvoljavaju da se naš sistem razvije kompletna Onsagerova matrica u skladu sa shemom (32).

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{dQ}{dt} = \frac{K q T_1}{d} \cdot \frac{\Delta T}{T} + \frac{\tilde{H}_1}{RT} \cdot \frac{D_1 q n_{01}^I}{U d} (\mu_1^{II} - \mu_1^I) - \\
&\quad - \frac{D_2 F n_{02}^{II} (Q_1^\pm - Q_2^\pm)}{U \delta RT} (\mu_{02}^{II} - \mu_2^{II}) \\
I_2 &= \frac{dn_1}{dt} = \frac{\tilde{H}_1 q n_{01}^I}{RT U d} \cdot \frac{\Delta T}{T} + \frac{D_1 q n_{01}^I}{RT U d} (\mu_1^{II} - \mu_1^I) - \\
&\quad - \frac{\tilde{H}_2 D_2 F n_{02}^{II}}{(RT)^2 U d} (\mu_{02}^{II} - \mu_2^{II}) \\
I_3 &= \frac{dn_2}{dt} = \frac{D_2 F n_{02}^I (Q_1^\mp - Q_2^\pm)}{U \delta RT} \cdot \frac{\Delta T}{T} - \\
&\quad - \frac{\tilde{H}_2 D_2 F n_{02}^{II}}{(RT)^2 U \delta} (\mu_1^{II} - \mu_1^I) + \frac{D_2 F n_{02}^{II}}{RT U \delta} (\mu_{02}^{II} - \mu_2^{II})
\end{aligned} \tag{43}$$

Gornji izrazi predstavljaju fluksove mase i energije u njihovu toku prema termodinamičkoj ravnoteži, kad se, dakle, sistem ne nalazi ni u termodinamičkoj ravnoteži, ni u stacionarnom nepromijenjenom stanju. Nastaje pitanje kad će se u našem sistemu ostvariti stacionarno stanje. Odgovor je na to pitanje teoretski jednostavan i lako ga je kemijskom analizom provjeriti.

Stacionarno stanje će u našem sistemu nastati onog časa kad će konstantan broj molova otapala $n_1 = a$, koji u sekundi iz prostora I uđe u prostor II, s konstantnim brojem molova $n_2 = b$ komponente 2, koji će se u istom vremenu otopiti, stvoriti otopinu istog sastava koji već ima otopina u prostoru II. To znači da od tog časa sastav otopine postaje nezavisan o vremenu, pa na izljev u prostoru II otiče u prostor III kao u okolinu otopina konstantnog sastava.

Konstantan sastav našeg sistema u prostoru II u stacionarnom stanju ne može se dakako kvantitativno teoretski unaprijed izračunati, bez eksperimentalnih podataka, jer su numeričke vrijednosti fluksova, li-nearnih koeficijenata i afiniteta ovisne s jedne strane o veličini polupropusne membrane, a s druge strane o površini kristala koji se otapa. U eksperimentalnom radu treba prema tome dulje vremena pratiti sastav tekućine u prostoru II da bi se eksperimentalno odredio njen o vremenu neovisan sastav. U tom slučaju postignuto je stacionarno stanje. To je teoretski jasno, ali se u praksi pojavljuje teško premostiva poteškoća u tome što membrane nisu idealno polupropusne. Prema tome

u račun treba pomoću posebnih diferencijalnih jednačbi uzeti u obzir neidealnost membrane, tj. njenu propusnost i za molekule otopljene tvari, a ne samo za molekule otapala.

Ovim problemom opširno su se pozabavili Schulz i Kuhn [12], koji su u tri radnje tretirali problem određivanja molekularne težine makromolekulama metodom osmotskoga tlaka uz uvjet da membrana nije idealno polupropusna. U tom slučaju treba prema tim autorima uvesti posebne membranske i ozmometarske konstante. Njihove jednačbe za izračunavanje osmotskog tlaka u tom slučaju znatno se kompliciraju. Autori su proveli niz određivanja, pa u preglednim tabelama daju rezultate svojih ispitivanja. Zbog svih tih razloga autor ove rasprave nije se upuštao u eksperimentalno provjeravanje ovdje navedenih izraza, jer su oni izvedeni pod bitnim uvjetom da je membrana osmometra idealno polupropusna.

Drugo je pitanje što o tom kaže termodinamika ireverzibilnih procesa. U uvodnom izlaganju već je jednačbama (14) do (18) dan općenit prikaz produkcije entropije za bilo koji otvoren sistem. Kad bi se u (14) stavile u ovom radu razvijene vrijednosti za sve linearne koeficijente i termodinamičke sile, dobila bi se numerička vrijednost za kreaciju entropije u našem sistemu.

Ovdje se, međutim, javlja jedno novo interesantnije pitanje, koje po mojem uvjerenju još nije bilo dovoljno tretirano u nauci. Bertalanffy je jedan od prvih autora koji je – na temelju eksperimentalnih radova Burtona – istaknuo razliku između zatvorenih i otvorenih sistema s obzirom na njihovo ponašanje prema katalizatorima. U zatvorenom sistemu katalizator ne može promijeniti položaj ravnoteže, koncentraciju tvari u ravnoteži, nego može mijenjati samo brzinu kojom se uspostavlja ravnoteža. To je jedan od osnovnih zahtjeva termostatike, jer bi se u obrnutom slučaju stavljanjem katalizatora u reakcionu smjesu i njegovim uklanjanjem iz smjese mogao ostvariti perpetuum mobile. Sasvim je drugačija situacija u otvorenom sistemu. Sastav stacionarnog stanja može se promijeniti dodavanjem ili oduzimanjem katalizatora, jer u izraze kojima se prikazuje stacionarno stanje ulaze konstantne brzine reakcije, a one se mijenjaju pod utjecajem katalizatora. Prije nekoliko godina u jednom sam članku [14] upozorio na analogiju između katalizatora u kemijskoj reakciji i polupropusne membrane u procesu osmoze. Mijenjanjem polupropusnih membrana kao kakvim katalizatorima ili inhibitorima povećamo ili smanjujemo brzinu kojom teče proces osmoze i kojom se uspostavlja osmotska ravnoteža. Na koncu

procesa polupropusna membrana postaje (praktički) kao i katalizator nepromijenjena. Mijenjanje veličine određene polupropusne membrane suštinski je jednako promjeni membrane. Veličina i debljina polupropusne membrane bitno utječe na tačku u kojoj se uspostavlja stacionarno stanje, pa je zbog toga sastav sistema u stacionarnom stanju funkcija veličine i svojstava polupropusne membrane. Ovdje je prilika da uočimo još jednu bitnu karakteristiku membrane, koja dozvoljava da se analogija između polupropusne membrane i katalizatora još jače podvuče i naglasi. Djelovanje polupropusne membrane bitno je vezano uz pojam permeabilnosti i uz pojam koeficijenta permeabilnosti. U već ranije razvijenoj jednadžbi (30) umjesto kvocijenta $\frac{D_1}{d}$ može se pisati identično P , faktor permeabilnosti $P = \frac{D_1}{d}$. Uzme li se u obzir dimenzija koeficijenta difuzije razabire se interesantna činjenica da koeficijent permeabilnosti ima dimenziju brzine [$\text{cm}^1 \text{sek}^{-1}$].

Upravo ta činjenica čini shvatljivim uvođenje pojma energije aktivacije i pojma slobodne enthalpije aktivacije u problematiku difuzije i viskoziteta. H. Eyring [15] u svojoj teoriji prelaznog stanja daje izraz za energiju aktivacije difuzije, iz kojeg slijedi da kod istoga fluksa molekula, odnosno kod iste brzine difuzije veći faktor permeabilnosti odgovara manjoj energiji aktivacije difuzije. Prema tome, analogija između polupropusne membrane i katalizatora obuhvaća i njegovo najvažnije karakteristično svojstvo da smanjuje energiju aktivacije. Kad bismo pokušali efikasnost nekog katalizatora izraziti nekim koeficijentom, onda bi on bio potpuno analogan koeficijentu permeabilnosti kod polupropusne membrane. Jasno je da možemo samovoljno uzeti veličinu površine polupropusne membrane da bismo pomoću tako fiksnog uvjeta dobili numeričke vrijednosti odgovarajućih linearnih koeficijenata. U našem se slučaju zapravo radi o Diofantovim jednadžbama. Iz izraza koji su izvedeni u ovoj radnji razabire se, naime, da su Onsagerovi linearni koeficijenti funkcija kako veličine površine polupropusne membrane, tako i njene debljine u procesu osmoze, odnosno debljine lamele zasićene otopine na površini kristala i veličine te površine u procesu otapanja. Stoga mi se čini da su neosnovani prigovori metodi termodinamike otvorenih sistema zbog samovoljnosti u odabiranju numeričkih vrijednosti tih bitnih faktora koji ulaze u linearne koeficijente. Tako npr. kaže Partington »termodinamika ireverzibilnih procesa je potpuno kvalitativna i od malog interesa za fizikalnu kemiju« [17].

Treba uzeti u obzir da tri parcijalna procesa koji sačinjavaju simultani proces koji je proučen u ovoj radnji, kad se prikaže pomoću Onsagerovih shema i njegovih linearnih koeficijenata, bitno zavisi o veličini površine, bilo membrane, bilo tvari koja se otapa.

Ova razmatranja provedena su uz mnoge simplifikacije, pa je ipak i tako simplificirani prikaz još uvijek kompliciran prema procesima osmoze, otapanja i prenosa topline kad se oni uzmu sami za sebe. Treba shvatiti da se u živim organizmima specijalno u ljudskom organizmu simultano i na istom mjestu odigrava upravo nepregledno mnoštvo procesa – kemijskih reakcija. Jasno se vidi kako još veliki i teški zadaci čekaju termodinamiku ireverzibilnih procesa u njenu pokušaju da ogromnu kompleksnost simultanih procesa u organizmu teoretski prikaže, objasni i eksperimentalno dokaže razvijene teoretske postavke.

LITERATURA

- [1] *Onsager*, L. Phys. Rev. **37**, 405, (1931); Phys. Rev. **38**, 2265 (1931); Ann. N. Y. Acad. Sci. **46**, 241 (1945).
- [2] *Herbert B. Callen*, Thermodynamics, New York 1960, pag. 284–285.
- [3] *K. O. Denbigh*, The Thermodynamics of the steady state, London 1958, pag. 27.
- [4] *I. Prigogine and R. Defay*, Chemical Thermodynamics, London 1954, pag. 35.
- [5] *H. B. Callen*, Thermodynamics, New York 1960, pag. 285.
- [6] *K. G. Denbigh*, The Thermod. of the steady state, pag. 29.
- [7] *F. Daniels and R. A. Alberty*, Physical Chemistry, second Ed., New York 1961, pag. 157.
- [8] *G. G. Longworth*, Cold Spring Harbor Symp. Quant. Biol. **2**, 213 (1933).
- [9] *H. Netter*, Theoretische Biochemie, Berlin 1959, S. 672.
- [10] *A. A. Noyes und W. R. Whitney*, Ztschr. phys. Chem. **23**, 689 (1897).
- [11] *K. G. Denbigh*, The Thermod. of the steady state, pag. 71–79.
- [12] *G. U. Schulz und W. H. Kuhn*, Makromolekulare Chemie. I **29**, 220 (1959), II **50**, 37 (1961); III, **50**, 52 (1961).
- [13] *L. von Bertalanffy*, Biophysik des Fließgleichgewichtes, S. 21.
- [14] *T. Pinter*, Priroda **49** 118 (1962).
- [15] *S. Glasstone, K. J. Laidler and H. Eyring*, The Theory of rate Processes, New York 1942, Pag. 523.
- [16] *H. Netter*, Theoretische Biochemie, Berlin 1959, S. 92.
- [17] *J. R. Partington*, An Advanced Treatise on Physical Chemistry, vol. I, London 1949, pag. 193.
- [18] *E. Ernst und L. Homola*, Acta physiol. hung. **3**, 487 (1952).
- [19] *F. Vető*, Acta Biochim. et Biophys. Acad. Sci. Hung. **1**, 203–210 (1966).
- [20] *F. Vető*, Acta Biochim. et Biophys. Acad. Sci. Hung. **2** (1), 95–101 (1967).
- [21] *F. Vető*, Acta phys. Acad. Sci. Hung. **24**, 119 (1963).

Primljeno za publikaciju 5. svibnja 1967. u Odjelu za matematičke, fizičke i tehničke nauke Jugoslavenske akademije u Zagrebu.

OSMOSE, AUFLÖSUNG UND WÄRMETRANSPORT ALS SIMULTANER PROZESS*

Anhand der Onsagerschen Theorie der reziproken Relationen können theoretisch die gegenseitigen Einflüsse der simultan ablaufenden Prozesse der Osmose, der Auflösung und des Wärmetransports behandelt werden. Die Grundvorstellung dieser Theorie kann man einfach mit dem Gesetze von Hooke verbinden, indem man die Fluxe und die thermodynamischen Kräfte der Onsagerschen Theorie als Antworten und Zwänge auffasst. Es gilt dann ganz allgemein die Beziehung

$$\text{strain} = L \cdot \text{stress},$$

Hier ist strain = Flux = Antwort; stress = Zwang; L = konst. Dann gilt die einfache lineare Beziehung für nicht zu grosse Kräfte

$$J = Lx \quad (1)$$

Wir betrachten den Flux der Wärme-Energie $\frac{dQ}{dt}$ und zwei Fluxe der

Massen $\frac{dn_1}{dt} \cdot \frac{dn_2}{dt}$. n_1 ist die Molenzahl der Komponente 1, des Lösungsmittels, n_2 ist die Molenzahl der einzigen gelösten Komponente 2. Der Flux der Wärme-Energie besteht aus zwei Teilen: aus der Wärme-Energie, welche aus dem wärmeren Raum I in den kälteren Raum II übergeht, und aus der Wärme, welche in dem Raum II für die Auflösung der festen Komponente 2 verbraucht wird.

Bei Vorhandensein der drei Fluxe und der drei thermodynamischen Kräfte wird die Onsagersche Theorie durch die symmetrische Matrize aus drei Reihen und drei Kolonnen dargestellt: (2—1), (2—2), (2—3).

* Originalüberschrift dieser Arbeit: *Osmoza, otapanje i prenos toplote kao simultani proces.*

L_{ii} sind die diagonalen Koeffizienten und die L_{ik} sind die nicht diagonalen »offl« Koeffizienten. Die Onsagersche Theorie gipfelt in dem Postulat über die Gleichheit der symmetrischen Koeffizienten.

$$L_{12} = L_{21}, L_{13} = L_{31}, L_{23} = L_{32} \quad (4)$$

Die Relationen (4) haben einen bedeutenden Wert, weil sie mit ihrem axiomatischen Charakter die numerischen Werte den nicht diagonalen Koeffizienten zuzuordnen gestatten.

Durch die Gleichungen (2—1), (2—2), (2—3) werden die Fluxe durch je drei Glieder, partielle Fluxe, dargestellt. Jeder dieser Fluxe ist ein Produkt aus dem linearen Koeffizienten und der Affinität d. i. der thermodynamischen Kraft. Es kann die folgende Matrize der partiellen Fluxe niedergeschrieben werden:

$$J_1 = J_{11} + J_{12} + J_{13} \quad (4-1)$$

$$J_2 = J_{21} + J_{22} + J_{23} \quad (4-2)$$

$$J_3 = J_{31} + J_{32} + J_{33} \quad (4-3)$$

Diese Matrize ist unsymmetrisch, weil $J_{12} \neq J_{21}$; $J_{13} \neq J_{31}$, $J_{23} \neq J_{32}$. In der Gleichung (1) und in der symmetrischen Matrize sind die Affinitäten als unabhängige Variablen x_1 , x_2 , x_3 keine Kräfte im Sinne der Mechanik, sie können verschiedene Dimensionen bekommen in Abhängigkeit von unserer Wahl. Die Onsagersche Theorie gestattet eine breite Auswahl der thermodynamischen Kräfte, aber sie ist durch die Bedingung, dass die Summe der Produkte der Fluxe mit entsprechenden Kräften immer gleich der Erzeugung der Entropie $\frac{d_i S}{dt}$ sein muss, beschränkt. $d_i S$ ist durch den Ausdruck

$$dS = d_e S + d_i S \quad (5-1)$$

definiert. Die Relation (5—1) bezieht sich auf die Volumeneinheit. Hier ist dS das Differential der Gesamt-Entropie, $d_e S$ ist das Differential der Entropie, welche das System, der Raum II, aus der Umgebung aufnimmt und in die Umgebung abgibt. $d_i S$ ist die Entropie, welche innerhalb des Systems im Raume II produziert wird. Es gilt immer die Beziehung

$$\frac{d_i S}{dt} \geq 0 \quad (6)$$

Das bedeutet, dass es genügt, dass die Differenz

$$\left(\frac{dS}{dt} - \frac{d_e S}{dt} \right) = \frac{d_i S}{dt} \geq 0 \quad (7)$$

immer grösser als Null wird. $\frac{d_e S}{dt}$ kann somit gelegentlich auch negative Werte annehmen.

Unser System ist in seiner Gänze betrachtet geschlossen. Es besteht aber aus vier offenen Räumen, Subsystemen I, II, III, IV. Diese Räume sind durch die extensiven Variablen n_1, n_2 , die Molenzahlen der Komponenten, charakterisiert. Wir nehmen an, dass der Raum I sehr gross ist, so dass seine Zusammensetzung unabhängig von der Zeit wird. Von der Zeit unabhängig ist auch der Raum IV, welcher aus reiner kristallisierter Komponente 2 besteht, sie geht mit dem Lösungsmittel nur in den Prozess der Auflösung ein und dadurch verlässt sie den Raum IV. Wegen der angeführten Bedingungen gilt die Relation(8).

Die thermodynamische Kraft x_i mit der Dimension einer partiellen molaren Entropie wird durch die Gleichung (9) definiert. Demnach gilt die Beziehung

$$x_i = x_i^{\text{II}} - x_i^{\text{III}} \quad (9)$$

Im thermodynamischen Gleichgewicht ist die Differenz auf der rechten Seite gleich Null und deshalb ist in diesem Falle die thermodynamische Kraft x_i auch gleich Null. Wir sehen, dass die partielle molare Entropie x_i gleich der Differenz dieser Grössen in den Räumen II und III ist.

Die Entropie-Erzeugung in der Zeit wird durch die Identität

$$\frac{d_i S}{dt} = \sum_i \frac{\delta_i S}{\delta n_i} \cdot \frac{dn_i}{dt} = \sum_i x_i J_i \quad (10)$$

dargestellt. Es ist ratsam, hier die neue Variable durch die Beziehung

$$x_i = \frac{X_i}{T} \quad (11)$$

einzuführen. Auf diese Weise bekommt die thermodynamische Kraft X , die Dimension einer partiellen molaren freien Energie, des thermodynamischen Potentials μ_i . Wenn man (11) in (10) einsetzt, bekommen wir

$$T \frac{\delta_i S}{dt} = J_1 X_1 + J_2 X_2 + J_3 X_3 \quad (13)$$

Für den Flux der Wärme-Energie ist hier die entsprechende thermodynamische Kraft X_1 die relative Temperaturverminderung $\frac{\Delta T}{T}$. Für das Produkt der Entropie-Erzeugung mit der absoluten Temperatur bekommen wir so die grundlegende Beziehung (13). Mit Hilfe der Beziehung (4) und (2—1), (2—2), (2—3) bekommen wir für die Entropie-Erzeugung in unserem System die Beziehung (14). Wenn man (14) nach der thermodynamischen Kraft X_2 differenziert, bekommen wir (15). Ebenso wenn man (14) nach der thermodynamischen Kraft X_3 differenziert, bekommen wir (16). Im stationären, mit der Zeit unveränderlichen Zustand, sind $J_2 = 0$ und $J_3 = 0$ (15). Wenn man (15) nach X_2 und (16) nach X_3 von neuem differenziert, bekommen wir (17) und (18), welche Beziehungen die Bedingungen für die Minimumwerte der Entropie-Erzeugung darstellen. Weiter folgen aus unseren Beziehungen die Relationen (19).

In dieser Problematik ist wichtig, die Stellung des thermodynamischen und des stationären (Fließ) Gleichgewichtes zu bestimmen. Das wird durch Einführung der neuen Variablen entsprechend der Gleichung (20) erreicht, wo n_{01}^I die Molenzahl des Lösungsmittels im Raume I ist wenn sich der Prozess im thermodynamischen Gleichgewicht befindet, n_1^{II} ist die Molenzahl des Lösungsmittels im Raume II in der Zeit t . Die Gleichung (21) bezieht sich auf die gelöste Komponente 2 n_{02}^{II} bedeutet die Molenzahl der Komponente 2 im Raume II im thermodynamischen Gleichgewicht mit der ungelösten Komponente 2 im Raume IV.

Durch bekannte thermodynamische Beziehungen (24) und (26) bekommen wir die wichtigen Beziehungen zwischen der Molenzahldifferenz und der Differenz der thermodynamischen Potentiale.

In den hier theoretisch beschriebenen System hat der Wärmetransport eine zweifache Ursache, erstens ist der Wärmeflux eine Folge des Wär-

metransportes aus dem wärmeren Raum I in den kälteren Raum II* und zweitens, kommt er durch die Auflösung der festen Komponente 2 und die dadurch bedingte Wärme-Absorption zustande. Unser Prozess spielt sich als ein Prozess im offenen System (mit Volumen $\mathcal{V} = \text{konst.}$) ab. Die Molenzahlen der beiden Komponenten variieren so lange, bis der stationäre Zustand (das Fließgleichgewicht) erreicht wird. Hier setzen wir drei wichtige Bedingungen voraus: erstens, eine ideal halbdurchlässige Membran, welche die Räume I und II trennt. Die zweite Bedingung ist eine ideale Durchmischung der Komponenten im Raume I und II und drittens, wir setzen einen idealen Fick'schen Diffusionsprozess voraus, bei welchem die Konzentrationsgefälle nur auf die Dicke der Schicht der gesättigten Lösung auf der Kristalloberfläche von der Dicke δ bei dem Auflösungsprozess, und auf die Dicke d der Membrane bei dem Prozess der Osmose beschränkt ist. Die Zusammensetzung der Lösung im Raum I ist konstant. Ebenso konstant ist die Zusammensetzung im Raum IV, welche aus kristallisierter reiner Phase der Komponente 2 besteht.

Unser System befindet sich im thermodynamischen Gleichgewicht, wenn in den Räumen I und II die gesättigte Lösung der Komponente 2 bei derselben Temperatur vorhanden ist. Dieses Gleichgewicht kann auf zweifache Weise gestört werden, entweder dadurch, dass wir im Raum I bei derselben konstanten Temperatur anstelle der gesättigten Lösung der Komponente 2 eine verdünntere Lösung konstanter Zusammensetzung geben, oder dadurch, dass wir im Raum I die Temperatur etwas erhöhen. Im ersteren Falle nehmen wir der Einfachheit halber an, dass der Raum I (bzw. die Lösung im Raum I) sehr gross und mit einer geeigneten Apparatur versehen ist, welche gestattet, die Konzentrationen der Komponenten sowie im Raum I einerseits, als im Raum II anderseits (in einem bestimmten Zeitpunkt t) homogen gleich zu erhalten. Als Folge dieser Bedingungen verdünnt sich die Lösung im Raum II und so kann gleich die Auflösung der festen Komponente 2 beginnen. Es ist wichtig, hier zu bemerken, dass durch den Prozess der Auflösung die Flüssigkeit in diesem Raum sich konzentriert, und deshalb wird die osmoierte Menge des Lösungsmittels in der Zeiteinheit

* Als das Manuskript dieser Arbeit unserer Akademie zur Aufnahme in den RAD schon übergeben wurde, bekam ich von Prof. E. Ernst und seinen Mitarbeitern aus dem Biophysikalischen Institut der Medizinischen Universität in Pécs eine Reihe von Arbeiten, die das Problem der Thermoosmose behandeln [18], [19], [20] i [21], wofür ich den Autoren bestens danke.

vermehrt. Der Prozess der Osmose und der Prozess der Auflösung stellen zwei entgegengesetzte Prozesse dar. Der Prozess der Osmose erschwert die Erreichung des thermodynamischen Gleichgewichtes beim Prozess der Auflösung und der Prozess der Auflösung erschwert die Erreichung des thermodynamischen Gleichgewichtes bei dem Prozess der Osmose. Der Prozess der Auflösung wirkt dem Prozess der Osmose entgegen und dadurch »verlängert er das Leben« dem Prozesse der Osmose. Ebenso wirkt der Prozess der Osmose dem Prozesse der Auflösung entgegen. der Prozess der Osmose »verlängert das Leben« dem Prozesse der Auflösung. Wenn sich beide Wirkungen in ihrem Effekt ausgleichen, tritt der stationäre Zustand ein. In diesem Zustande werden in dn_1 Mole des Lösungsmittels, welche in der Sekunde infolge der Osmose durch die Membrane hindurchgehen, so viel (d. i. dn_2) Mole der Komponente 2 aufgelöst, dass dadurch im stationären Zustand die Lösung im Raume II keine Veränderung erleiden kann, sie behält ihre Konstante, d. i. ihre von der Zeit unabhängige stationäre Zusammensetzung. Infolgedessen verlässt den Raum II durch die Senke die Lösung konstanter Zusammensetzung. Es wird dann natürlich

$$\frac{dn_1}{dt} = 0 \text{ und } \frac{dn_2}{dt} = 0$$

Wie wir schon oben bemerkten, können wir das Gleichgewicht auch durch die Temperaturerhöhung der Lösung im Raume I stören. In diesem Falle tritt das Phänomen der Thermo-Osmose in Erscheinung. An einem Beispiel aus Netter [16] wird das Wesen der Thermo-Osmose in unserem System erörtert.

Die drei Prozesse, welche simultan in unserem System ablaufen, werden als Fluxes in Form der Onsagerschen Matrize (2—1), (2—2), (2—3) dargestellt. Von diesen drei Prozessen besteht der Erste in der Tat aus zwei separaten Fluxes. Der eine von diesen transportiert die Wärme-Energie durch die Lamelle der gesättigten Lösung an der Oberfläche der festen Phase der Komponente 2 infolge der Wärme-Absorption von dem Raume II in den Raum IV. Der zweite Flux transportiert die Wärme aus dem wärmeren Raum I durch die halbdurchlässige Membrane in den kälteren Raum II. Wir setzen voraus, dass die Wärmemenge,

welche durch die halbdurchlässige Membrane in den Raum II übergeht, grösser ist als die Wärmemenge, die durch die Lamelle der gesättigten Lösung infolge der Wärme-Absorption den Raum II verlässt.

In den Prozessen der Osmose, der Auflösung und des Wärmetransportes, welche in unserem System ablaufen, ist der Überschuss des Wärmetransportes durch die Gleichung (27) dargestellt. In dieser Gleichung ist K die Wärmeleitzahl der Komponente 1, q ist der Querschnitt der halbdurchlässigen Membrane, d ist ihre Dicke, ΔT ist die Temperaturdifferenz zwischen den Räumen II und I. In Übereinstimmung mit der Matrice (4-1), (4-2), (4-3) ist J_{11} der partielle diagonale Flux der Wärme.

Durch die Gleichung (28) [9] ist die Osmose des Lösungsmittels durch die halbdurchlässige Membrane dargestellt. D_1 ist der Koeffizient der Selbstdiffusion des Wassers, U ist das konstante Volumen eines Liters der Lösung im Raum II. Der diagonale partielle materielle Flux des Lösungsmittels ist durch die Gleichung (30) und der diagonale partielle Flux der einzigen gelösten Komponente 2 ist durch die Gleichung (31) dargestellt. Hier ist F die Oberfläche der Kristalle im Raum IV. δ ist die Dicke der Lamelle der gesättigten Lösung auf der festen Oberfläche der sich auflösenden Komponente 2. Die nicht diagonalen Koeffiziente wurden anhand der Ableitungen, die durch die Ausdrücke (32) bis (36) gegeben wurden, durch entsprechende Gleichungen gegeben und zwar der partielle Flux J_{12} durch (37), der partielle Flux J_{21} durch (38), der partielle Flux J_{13} durch (39), der partielle Flux J_{31} durch (40) und schliesslich die partiellen Flux J_{23} und J_{32} durch die Gleichungen (41) und (42). Die Bedeutungen aller Grössen, die in diesen Gleichungen vorkommen, wurden schon oben erläutert.

Anhand aller dieser Gleichungen kann man in die Matrice (4-1), (4-2), (4-3) die Werte aller partiellen Fluxes hinschreiben. So bekommen wir schliesslich die Bedeutungen aller Grössen, die in der Onsagerschen Matrice vorkommen. Die Onsagersche Matrice, durch welche der Prozess in unserem System beschrieben wird, ist durch die Gleichung (43) gegeben.

Man könnte versuchen, die oben theoretisch gegebenen Bedingungen für den Eintritt des stationären Zustandes einer experimentellen Prüfung zu unterziehen. Doch muss man bedenken, dass eine solche experimentelle Prüfung unserer Gleichungen schwer durchgeführt werden

kann, weil alle hier abgeleiteten Gleichungen nur unter der Bedingung des Vorhandenseins erstens, einer ideal halbdurchlässigen Membrane und zweitens, unter der Bedingung einer idealen Mischung der Lösung im Raume II gegeben wurden.

Die komplizierten Ausdrücke von Schulz und Kuhn [12], welche man bei einer realen Membrane berücksichtigen müsste, würden die Übersichtlichkeit unserer Ergebnisse sehr erschweren, wenn nicht überhaupt unmöglich machen. Deshalb wurden in dieser Arbeit keine Experimente zur Bestätigung unserer Ausdrücke ausgeführt.

Unsere schon gegebene Ausdrücke für alle Fluxe, linearen Koeffizienten und thermodynamischen Kräfte, in die Gleichung (14) eingesetzt, würden theoretisch den Wert der gesamten Entropie-Erzeugung in unserem System geben.

In engen Zusammenhänge mit den Werten, die hier für die Onsager-schen linearen Koeffiziente gegeben wurden, ergibt sich eine spezifische Fragestellung, die bisher in der Literatur keine genügende Beachtung fand. Es handelt sich um die Analogie zwischen einem Katalysator und einer halbdurchlässigen Membrane.

Bertalanffy [13] war wahrscheinlich der erste Autor, der auf Grund der Arbeiten von Burton auf die Verschiedenheit der geschlossenen und offenen Systeme in Bezug auf ihr Verhalten gegen den Einfluss der Katalysatoren hinwies. In einem geschlossenen System kann der Katalysator die Lage des Gleichgewichtes nicht verändern. Er kann nicht die Werte der Konzentrationen der im Prozess beteiligten Stoffe im thermodynamischen Gleichgewicht beeinflussen. Könnte er das bewerkstelligen, so hätten wir sogleich ein Perpetuum mobile in der Hand. Ganz anders liegt die Sache in einem offenen System. Die Zusammensetzung des Systems im stationären Zustand kann durch verschiedene Katalysatoren verschieden beeinflusst werden. Die Lage des stationären Zustandes in einem offenen System ist eine Funktion der individuellen Eigenschaften und der Menge des zugesetzten Katalysators. In einem früheren Artikel [14] habe ich schon auf die grosse Ähnlichkeit zwischen einem Katalysator und einer geeigneten halbdurchlässigen Membrane aufmerksam gemacht. Durch verschiedene halbdurchlässige Membranen kann man genau so wie mit den Katalysatoren oder Inhibitoren die Geschwindigkeit, mit welcher der Prozess der Osmose gegen das thermodynamische Gleichgewicht abläuft, stark beeinflussen. Wir können

namentlich die Geschwindigkeit, mit welcher sich das osmotische Gleichgewicht einstellt, verändern. Am Ende des Prozesses bleibt die Membrane ganz wie ein Katalysator unverändert. Die Veränderung der Querschnittsgrösse der Membrane ist analog der grösseren oder der kleineren Katalysatormenge im Prozess. Ebenso ist die Veränderung der Grösse der halbdurchlässigen Membrane einer Veränderung der Membran selbst wesentlich analog. Die Grösse und die Dicke der halbdurchlässigen Membran beeinflusst und verschiebt den Punkt, in welchem sich der stationäre Zustand einstellt. Eben deshalb ist die Zusammensetzung des Systems im stationären Zustand eine Funktion der Grösse und der Eigenschaften der Membrane. Es ergibt sich aber auch eine weitere Charakteristik der Membrane, welche gestattet, die Analogie zwischen ihr und dem Katalysator noch weiter zu entwickeln. Die Wirkung einer halbdurchlässigen Membrane ist an den Begriff der Permeabilität und des Permeabilitäts-Koeffizienten gebunden. In der Gleichung (30) können wir anstatt des Quotienten $\frac{D_1}{d}$ identisch den Faktor der Permeabilität P setzen. Bedenken wir, dass der Permeabilitäts-Koeffizient die Dimension einer Geschwindigkeit [$\text{cm}^1 \text{ sek}^{-1}$] hat, so ist nicht verwunderlich, dass Eyring [15] in seiner Übergangszustands-Theorie die Aktivitätsenergie der Diffusion (oder der Permeabilität) zu berechnen versuchte. Es ergab sich, dass die Membrane eine Verminderung der Aktivitätsenergie verursacht, womit die erwähnte Analogie zwischen einem Katalysator und einer halbdurchlässigen Membrane in einem wesentlichen Punkt vertieft wird. Bei einem Versuch, die Leistungsfähigkeit eines Katalysators durch einen Koeffizienten darzustellen, würden wir diesem Koeffizienten die Dimension eines Permeabilitäts-Koeffizienten geben.

Wir müssen noch die Frage der willkürlichen Auswahl der Membranengrössen bei unseren linearen Koeffizienten kurz erörtern. Die Freiheit bei der Wahl der numerischen Grössen der linearen Koeffizienten veranlasste bei manchen Autoren eine etwas reservierte und skeptische Haltung gegenüber der Theorie der irreversiblen Prozesse. So z. B. äussert sich Partington [17]: »die Thermodynamik der irreversiblen Prozesse ist vollkommen qualitativ und von geringem Interesse für die physikalische Chemie«. Gerade anhand der vorliegenden Arbeit glaubt der Verfasser, dass der Prozess, welcher hier betrachtet wurde,

notwendig von der Grösse der Oberfläche der halbdurchlässigen Membrane einerseits, und von der Grösse der Oberfläche der sich auflösenden Komponente 2 anderseits, abhängt. In diesem Zusammenhange muss man hervorheben, dass sich in einem Organismus eine fast unübersehbare Menge simultaner Prozesse abspielt und dass die experimentelle Prüfung der theoretischen Ausdrücke für ein solches System ohne entsprechende Vereinfachungen eine recht schwer realisierbare Aufgabe darstellt.

Angenommen zur Veröffentlichung am 5. V. 1967. in der Abteilung für mathematische, physikalische und technische Wissenschaften der Jugoslawischen Akademie in Zagreb.

CONTRIBUTION TO A STATISTICAL
THEORY OF CROATO-SERBIAN

This paper is a continuation of the paper »Mathematical Theory of the Syllabic Structure of Croato-Serbian« by Vranić and Matković which was published in Rad. 1965, Vol. 331. In this certain statistical characteristics based on samples of 40167 words taken from various literary works and newspaper articles were under observation. The material was non-homogenous¹, the results based on it were discussed in the above mentioned paper.

The question that then arose was: are the results obtained valid for every Croato-Serbian text? The problem was so stimulating that we continued with our investigations and for this purpose the texts *Na rubu pameti* (On the Edge of Reason) by Krleža and *Djeca božja* (God's Children) by Šegedin were taken into consideration.

Statistical investigations were carried out in the Telecommunications Department, Faculty of Electrical Engineering, Zagreb University. A special kind of electronic analyser was designed and used for obtaining the necessary data.

The tested samples of the texts were punched on the tape. In this way the information received from the texts was stored in the perforated tape. In order to elaborate the information further by means of the electronic analyser, it was necessary to convert this information into adequate electrical form. This conversion took place in a part of

¹ We consider a homogenous text to be the one taken from a single literary work only, while a non-homogenous text is compiled from various sources (literary works, newspaper articles etc.).

the analyser called a photoreader. It reads the information contained in the tape at the rate of 830 signs per second and converts it into adequate form for further elaboration. At its outlet it registers uniquely determined information concerning the number of signs and syllables for every word that was tested by means of electronic counters.

The analyser consists of elements that are made of semiconducting material. Its operation is influenced by many factors such as random noise, ambient temperature, voltage stability etc. whose effects on the accuracy of the results cannot be completely avoided. To construct an analyser providing maximum accuracy a far greater number of elements with some additional safety measures would have to be provided. Owing to this, it is well to remember while using the results of the analysis that they were obtained by means of an analyser which itself was not absolutely accurate but whose error, however, does not exceed 1%. It can be stated that this error is of no importance for our conclusions having in view the character of the results which were obtained from the statistical investigations.

The results of the statistical investigations are the following:

a) Krlęža: 18078 words were under investigation.

The distribution of the number of syllables is as follows:

Number of syllables	Number of words	Relative frequency p_i
1	6115	0.3383
2	5257	0.2908
3	3829	0.2118
4	2064	0.1142
5	604	0.0334
6	156	0.0086
7	32	0.0018
8	21	0.0011
	18078	1.0000

Table 1

b) Šegedin: 16350 words were under investigation.

The distribution of the number of syllables is as follows:

Number of syllables	Number of words	Relative frequency p_i
1	6124	0,3746
2	5339	0,3265
3	3128	0,1913
4	1377	0,0842
5	309	0,0189
6	55	0,0034
7	13	0,0008
8	5	0,0003
	16350	1,0000

Table 2

Mean value of distribution in:

Non-homogenous material	2,20	entropy	$H = -2,1$
Krleža	2,25	entropy	$H = -2,1$
Šegedin	2,06	entropy	$H = -2,0$

By analogy with the earlier paper, we have now tried to find a possibility of representing the obtained distributions by using the superposition of 4 Poisson distributions.

The corresponding formula is:

$$v_i = a_1 p_i + a_2 p_{i-1} + a_3 p_{i-2} + a_4 p_{i-3} \quad (1)$$

where p_i stands for the corresponding values of Poisson distribution.

In the Krleža text the probability for one syllabic words is 0,3383. This corresponds to the Poisson distribution for $\bar{i} = 2,1$. In the Šegedin text the probability for one syllabic words is 0,3746, which corresponds $\bar{i} = 2,0$. Therefore we started in the Krleža text with the following distribution:

$$p_i = \frac{(i-1)^{i-1} e^{-(i-1)}}{(i-1)!} = \frac{1,1^{i-1} \cdot e^{-1,1}}{(i-1)!}$$

or with the following

Table 3

$p_1 = 0,3329$	$p_5 = 0,0203$
$p_2 = 0,3662$	$p_6 = 0,0045$
$p_3 = 0,2014$	$p_7 = 0,0008$
$p_4 = 0,0738$	$p_8 = 0,0001$

Thus we obtain from (1):

$$\begin{aligned}
 v_1 &= a_1 p_1 \\
 v_2 &= a_1 p_2 + a_2 p_1 \\
 v_3 &= a_1 p_3 + a_2 p_2 + a_3 p_1 \\
 v_4 &= a_1 p_4 + a_2 p_3 + a_3 p_2 + a_4 p_1 \\
 v_5 &= a_1 p_5 + a_2 p_4 + a_3 p_3 + a_4 p_2 \\
 v_6 &= a_1 p_6 + a_2 p_5 + a_3 p_4 + a_4 p_3 \\
 v_7 &= a_1 p_7 + a_2 p_6 + a_3 p_5 + a_4 p_4 \\
 v_8 &= a_1 p_8 + a_2 p_7 + a_3 p_6 + a_4 p_5
 \end{aligned}$$

where $p_1, p_2, \dots, p_8$ are the above mentioned probabilities.

Our task is to find a_1, a_2, a_3 and a_4 so that the values of $v_1, v_2, \dots, v_8$ will approach the empirical p'_i as much as possible.

a_1, a_2, a_3 and a_4 can be found by the method of least squares, i. e. to find the minimum of

$$\sum_i (p'_i - v_i)^2$$

under condition that

$$\sum_i v_i = 1$$

i. e. the minimum of the function

$$F(a_1, a_2, a_3, a_4) = \sum_i (p'_i - v_i)^2 - 2\lambda \sum_i v_i$$

The following equations are thus obtained:

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & \sum p_i p_i - a_1 \sum p_i^2 - a_2 \sum p_i p_{i-1} - a_3 \sum p_i p_{i-2} - \\
 & - a_4 \sum p_i p_{i-3} + \lambda \sum p_i = 0 \\
 (b) \quad & \sum p'_i p_{i-1} - a_1 \sum p_i p_{i-1} - a_2 \sum p_i^2 - a_3 \sum p_{i-1} p_{i-2} - \\
 & - a_4 \sum p_{i-1} p_{i-3} + \lambda \sum p_{i-1} = 0 \\
 (c) \quad & \sum p'_i p_{i-2} - a_1 \sum p_i p_{i-2} - a_2 \sum p_{i-1} p_{i-2} - a_3 \sum p_{i-2}^2 - \\
 & - a_4 \sum p_{i-2} p_{i-3} + \lambda \sum p_{i-2} = 0 \\
 (d) \quad & \sum p'_i p_{i-3} - a_1 \sum p_i p_{i-3} - a_2 \sum p_{i-1} p_{i-3} - a_3 \sum p_{i-2} p_{i-3} - \\
 & - a_4 \sum p_{i-3}^2 + \lambda \sum p_{i-3} = 0 \\
 (e) \quad & a_1 \sum p_i + a_2 \sum p_{i-1} + a_3 \sum p_{i-2} + a_4 \sum p_{i-3} = 1
 \end{aligned} \tag{2}$$

respectively, if the corresponding values are inserted, the equations will be the following:

$$\begin{aligned}
 & \text{(a) } 0,2914 \alpha_1 + 0,2121 \alpha_2 + 0,0985 \alpha_3 + 0,0330 \alpha_4 - \lambda = 0,2709 \\
 & \text{(b) } 0,2121 \alpha_1 + 0,2914 \alpha_2 + 0,2121 \alpha_3 + 0,0985 \alpha_4 - \\
 & \quad - 0,9999 \lambda = 0,2000 \\
 & \text{(c) } 0,0985 \alpha_1 + 0,2121 \alpha_2 + 0,2914 \alpha_3 + 0,2120 \alpha_4 - \\
 & \quad - 0,9991 \lambda = 0,1197 \quad (3) \\
 & \text{(d) } 0,0330 \alpha_1 + 0,0985 \alpha_2 + 0,2120 \alpha_3 + 0,2913 \alpha_4 - \\
 & \quad - 0,9946 \lambda = 0,0521 \\
 & \text{(e) } \alpha_1 + 0,9999 \alpha_2 + 0,9991 \alpha_3 + 0,9946 \alpha_4 = 1
 \end{aligned}$$

These 5 equations will yield the following results:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= 1,017159 & \alpha_2 &= -0,246214 \\
 \alpha_3 &= 0,297044 & \alpha_4 &= -0,068253
 \end{aligned}$$

respectively

$$v_i = 1,017159 p_i - 0,246214 p_{i-1} + 0,297044 p_{i-2} - 0,068258 p_{i-3}$$

When insertig into the formula the corresponding values for p_i we obtain:

	Number of words
$v_1 = 0,33866$	6122
$v_2 = 0,29057$	5253
$v_3 = 0,21361$	3862
$v_4 = 0,11154$	2016
$v_5 = 0,03731$	674
$v_6 = 0,00775$	140
$v_7 = 0,00056$	11
1,00000	18078

Table 4

v_8 turned out to be negative. As it is impossible to operate with negative probabilities and a negative number of words, the negative results were added to the probability v_7 . Thus v_7 shows in fact the probability values for $i \geq 7$.

With the Šegedin text we start from the Poisson distribution which corresponds to $\bar{i} = 2,0$ i. e. from the formula:

$$p_i = \frac{1^{i-1} \cdot e^{-1}}{(i-1)!}$$

or the table is:

$$\begin{array}{ll} p_1 = 0,3679 & p_5 = 0,0153 \\ p_2 = 0,3679 & p_6 = 0,0031 \\ p_3 = 0,1839 & p_7 = 0,0005 \\ p_4 = 0,0613 & p_8 = 0,0001 \end{array}$$

Table 5

By analogy with the Krlcža text, the following equations are obtained:

$$\begin{aligned} 0,3085 a_1 + 0,2153 a_2 + 0,0932 a_3 + 0,0288 a_4 - \lambda &= 0,2986 \\ 0,2153 a_1 + 0,3085 a_2 + 0,2153 a_3 + 0,0932 a_4 - 0,9999 \lambda &= 0,2072 \\ 0,0932 a_1 + 0,2153 a_2 + 0,3085 a_3 + 0,2153 a_4 - 0,9991 \lambda &= 0,1051 \quad (4) \\ 0,0288 a_1 + 0,0932 a_2 + 0,2153 a_3 + 0,3085 a_4 - 0,9946 \lambda &= 0,0386 \\ a_1 + 0,9999 a_2 + 0,9991 a_3 + 0,9946 a_4 &= 1,0000 \end{aligned}$$

These equations have yielded the following results:

$$\begin{array}{ll} a_1 = 1,019156 & a_3 = 0,149979 \\ a_2 = -0,134546 & a_4 = -0,034300 \end{array}$$

respectively

$v_i = 1,019156 p_i - 0,134546 p_{i-1} + 0,149979 p_{i-2} - 0,034300 p_{i-3}$
Thus we obtain:

	Number of words
$v_1 = 0,37482$	6129
$v_2 = 0,32534$	5319
$v_3 = 0,19303$	3136
$v_4 = 0,08026$	1312
$v_5 = 0,02230$	365
$v_6 = 0,00399$	65
$v_7 = 0,00026$	4
1,00000	16350

Table 6

The same holds good for v_8 as in the case of the Krleža text.

When comparing the empirical and theoretical distributions we obtain:

a) Krleža

Number of syllables	Number of words empirically	Number of words theoretically	Difference
1	6115	6122	— 7
2	5257	5253	4
3	3829	3862	— 33
4	2064	2016	48
5	604	674	— 70
6	156	140	16
7	53	11	42
	18078	18078	0

Table 7

b) Šegedin

Number of syllables	Number of words empirically	Number of words theoretically	Difference
1	6124	6129	— 5
2	5339	5319	20
3	3128	3156	— 28
4	1377	1312	65
5	309	365	— 54
6	55	65	— 10
7	18	4	14
	16350	16350	0

Table 8

The results of the empirical and theoretical data conform to a certain degree, especially in the first 5 lines of the column. However, in the view of chisquare test the differences are too great. They mainly appear in the five-, six- and seven-syllabic words, the number of words tested being too small and the deviations relatively high. This, however, does not imply that our hypothesis should be rejected. That is linguistic laws should not be compared to biological, population laws etc., which even while under statistical observation, still subject to the laws of nature, while the phenomenon of word formation is of a quite different character. In order to show that in this case laws also exist, we shall observe the subgroups of a thousand words taken from the above mentioned groups and determine the number of one-, two-, etc. syllabic words in the subgroup in relations to the number represented in the basic group.

Thus, we obtain:

a) Krleža

Number of syllables	Number of words empirically	Number of words theoretically	Difference
1	338	339	— 1
2	291	291	0
3	212	214	— 2
4	114	111	3
5	33	37	— 4
6	12	8	4
	1000	1000	0

Table 9

From these results we obtain $\chi^2 = 2,535$.

In this case there are 4 degrees of liberty as the distribution was determined in advance by the sum of the members as well as by the arithmetical mean. According to the chisquare table the probability in the four degrees of liberty, when $\chi^2 = 2,535$ may even exceed is 64%. This probability is so high that there is no reason for rejecting the hypothesis, i. e. the formula obtained by superimposing of 4 Poisson distributions.

b) Šegedin

Number of syllables	Number of words empirically	Number of words theoretically	Difference
1	375	376	— 1
2	327	325	2
3	191	193	— 2
4	84	80	4
5	19	22	— 3
6	4	4	0
	1000	1000	0

Table 10

The same method was applied to the Šegedin data as to the Krleža data, i. e. we have contracted the table to 6 lines as the chisquare test cannot be applied to a smaller number of elements. From the foregoing table $\chi^2 = 0,945$ is worked out.

The probability in the four degrees of liberty that the chisquare being exceeded, is 90%. This probability proves even more than in the case of Krleža that our hypothesis is correctly postulated.

The tests referring to the homogenous text show that actually there is no difference in the syllabic structure of Croato-Serbian between a non-homogenous and a homogenous text. We may assume, therefore, that the formula found for the syllabic structure of Croato-Serbian is as follows:

for the non-homogenous text:

$$v_i = 1,0287 p_i - 0,2305 p_{i-1} + 0,2875 p_{i-2} - 0,0859 p_{i-3}$$

Krleža:

$$v_i = 1,017159 p_i - 0,246214 p_{i-1} + 0,297044 p_{i-2} - 0,068253 p_{i-3}$$

Šegedin:

$$v_i = 1,019156 p_i - 0,134546 p_{i-1} + 0,149979 p_{i-2} - 0,034300 p_{i-3}$$

Thus a complete analogy can be drawn between the Krleža text and the non-homogenous one, while certain deviations can be observed in the Šegedin data. Furthermore, we can observe the fact that

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 > 0 & \alpha_3 > 0 \\ \alpha_2 < 0 & \alpha_4 < 0 \end{array}$$

The question arises: if the fact, that the $\alpha_2 < 0$ respectively $\alpha_4 < 0$ we due to a chance or it must be so. Our assumption being correct, we can show it in the following way:

We start from the assumptions arising out of experiments:

$$1. p'_1 > p'_2 > \dots > p'_7 > p'_8 \quad (5)$$

2. As the theoretical probabilities should approach as close as possible to the empirical probabilities, we must assume that:

$$v_1 > v_2 > \dots > v_7 > v_8 \quad (6)$$

3. As the study of syllabic structure has shown that words having more than 9 syllables do not exist in the Croato-Serbian language, we have the right to assume that the probability of ten syllabic words will equal zero, or that the computations may even result in negative probabilities, as it was clearly shown in the examples mentioned before. Thus we assume that:

$$v_{10} \leq 0 \quad (7)$$

and as

$$v_{10} = a_1 p_{19} + a_2 p_9 + a_3 p_8 + a_4 p_7$$

and

$$p_9 = 0 \quad p_{10} = 0$$

we obtain

$$v_{10} = a_3 p_8 + a_4 p_7 \leq 0 \quad (8)$$

4. As we look for in the Poisson distribution which approaches most p'_1 , we can assume that it will be approximately

$$p'_1 = p_1 = v_1$$

and as

$$v_1 = a_1 p_1$$

it is approximately

$$a_1 = 1 \quad (9)$$

5. From (3) we have

$$\alpha_1 + 0,9999 \alpha_2 + 0,9991 \alpha_3 + 0,9946 \alpha_4 = 1$$

respectively approximately

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 \quad (10)$$

respectively approximately while $a_1 \doteq 1$

$$a_2 + a_3 + a_4 = 0. \quad (11)$$

Although the relations are only approximately, the inaccuracy is so small that, it can be neglected.

6. From the Poisson table for $\bar{i} = 1$ or $i = 1,1$ it is visible that

$$p_1 \leq p_2$$

It follows from (6)

$$v_1 > v_2$$

$$a_1 p_1 > a_1 p_2 + a_2 p_1$$

$$a_1 (p_1 - p_2) > a_2 p_1.$$

And as

$$p_1 \leq p_2$$

it follows that

$$a_2 p_1 < 0$$

respectively

$$a_2 < 0 \quad (12)$$

From (11)

$$a_2 + a_3 + a_4 = 0$$

follows that

$$a_3 + a_4 = -a_2$$

respectively

$$a_3 + a_4 > 0 \quad (13)$$

because

$$a_2 < 0.$$

From (8)

$$v_{10} = a_3 p_8 + a_4 p_7 \leq 0$$

follows that

$$a_4 \leq -\frac{p_8}{p_7} a_3 \quad (14)$$

and as

$$p_8 < p_7$$

it follows from (14) that

$$|\alpha_4| < |\alpha_3| \quad (15)$$

As we have from (13)

$$\alpha_3 + \alpha_4 > 0.$$

so it cannot be because of (15)

$$\alpha_3 < 0.$$

So we have

$$\alpha_3 > 0$$

and because of (14) while $\alpha_3 > 0$ must be

$$\alpha_4 < 0.$$

The previous assumptions and results can be numerically verified on the basis of obtained results. We have:

$$(a) \quad v_{10} = \alpha_3 p_8 + \alpha_4 p_7 = -0,000025 \quad \text{Krlježa}$$

$$(b) \quad v_{10} = \alpha_3 p_8 + \alpha_4 p_7 = -0,000002 \quad \text{Šegedin}$$

Krlježa

$$(a) \quad \alpha_4 \leq -\frac{p_8}{p_7} \alpha_3 = -0,037 \quad \text{Really we have } -0,068 < -0,037$$

Šegedin

$$(b) \quad \alpha_4 \leq -\frac{p_8}{p_7} \alpha_3 = -0,030 \quad \text{Really we have } -0,034 < -0,030$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0,999736 \div 1 \quad \text{Krlježa}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1,000289 \div 1 \quad \text{Šegedin}$$

Although the results are obtained from relations that are only approximately valid, the errors in them are so small that they may be neglected in our conclusions. It is essential, however, that through our investigations we have achieved results which enable us to use the following formula while studying the syllabic structure of the Croato-Serbian language.

$$v_i = \alpha_1 p_i + \alpha_2 p_{i-1} + \alpha_3 p_{i-2} + \alpha_4 p_{i-3}.$$

This formula has proved to be very adaptable to the empirical text, which was clearly shown in the investigations of the non-homogenous text described in our earlier paper, as well as of the homogenous text given in this paper.

The meaning of the formula is the following: Although the distribution of the words according to syllables cannot be represented by the Poisson distribution, it is possible to represent it by means of algebraic superposition from 4 Poisson distributions (2 or 3 Poisson distributions are insufficient and do not yield acceptable results!).

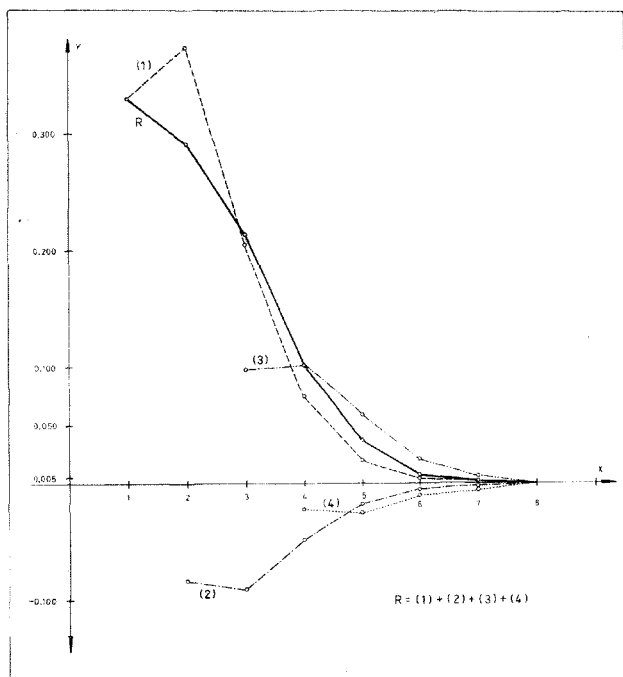


Fig. 1

The meaning of this superposition can be seen in the figure (1) where the 4 Poisson distributions and the results of algebraic superposition are shown for the Krleža text. The 4 Poisson distributions are displaced one from the other in phase 1. In this superposition the first and the third Poisson distributions are added and multiplied by a given factor, while the second and fourth are subtracted as they are multiplied by negative factors. This is the reason why this superposition is called algebraic.

There were also some other investigations that were under consideration, i. e. the correlation between the length of the words and the number of syllables of individual words. As it was anticipated a very strong correlation was found, which in the Krleža text was 0,928, while in the Segedin text was 0,912.

The contributors to this work are Vjekoslav Sinković, m. sc. and Željko Pauše, m. sc. Vjekoslav Sinković did the necessary counting by means of the electronic analyser that was constructed in the Department for Telecommunications, while Željko Pauše collaborated in the computation of some data.

REFERENCES

- Mathković*: Primjena teorije komunikacija na određivanje entropije hrvatskog jezika. Disertacija, Zagreb, 1957.
- Uranić-Mathković*: Mathematical Theory of the Syllabic Structure of Croato-Serbian. Rad Jug. akademije, knj. 331, Zagreb.
- Uranić*: Statistical Research of the Croato-Serbian language. 35th Session of the International Statistical Institute, Beograd 1965.
- Uranić*: Statističko istraživanje hrvatsko- srpskog jezika. Statistička revija god. XV. broj 2-3. Beograd 1965.

*Centre for numerical research of the Yugoslav Academy
of Sciences and Arts, Zagreb*

Institute of Mathematics, University Zagreb

*Electrical Engineering Faculty, Department
for Telecommunications, University Zagreb*

Accepted for publication on April 7, 1967, in the Section for mathematical, physical and technical sciences, Yugoslav Academy in Zagreb.

PRILOG STATISTIČKOJ TEORIJI
HRVATSKOSRPSKOG JEZIKA

Ovaj rad nastavak je rada Vladimira Vranića i Vladimira Matkovića koji je izašao u 331. knjizi »Rada« 1965.* Tada smo promatrali neke statističke osobine hrvatskosrpskog jezika na osnovi uzorka od 40167 riječi dobivenih iz raznih literarnih djela i iz novinskih članaka. Taj »nehomogeni« materijal dao je rezultat diskutiran u navedenoj radnji.

Postavlja se, međutim, pitanje, da li taj rezultat vrijedi za svaki tekst hrvatskosrpskog jezika. U tu svrhu uzet je u razmatranje jedan tekst M. Krleže i jedan tekst P. Šegedina. Od Krleže smo uzeli knjigu »Na rubu pameti«, a od Šegedina »Djeca božja«. Statističko promatranje izvedeno je u Zavodu za telekomunikacije Elektrotehničkog fakulteta. Za dobivanje traženih podataka bio je konstruiran i upotrijebljen elektronski uređaj.

Ispitivani uzorci tekstova ispisani su na perforiranoj traci. Na taj je način informacija, sadržana u tekstovima, uskladištena pomoću perforirane trake, i s nje se informacija pretvara u adekvatan električki oblik. Pretvorbu vrši »fotočitač« brzinom od 830 znakova u sekundi i pretvara ih u pogodan oblik za dalju obradu. Informacija se nakon toga predaje analizatoru, koji daje na svom izlazu jednoznačnu informaciju o broju znakova i broju slogova za svaku riječ u ispitivanom tekstu. Registracija rezultata analize provodi se pomoću elektronskih brojača.

Čitav uređaj izveden je sa poluvodičkim elementima. Na njegov rad utječe niz faktora (slučajni šumovi, temperatura okoline, stabilnost napona itd.), koje se nije moglo u potpunosti izbjeći. Za uređaje s krajnjom tačnošću trebalo bi upotrijebiti mnogo više elemenata i provesti

* Vranić-Matković: Mathematical theory of the syllabic structure of Croato-Serbian, 331. knjiga »Rada«, Zagreb, 1965.

dodatne mjere sigurnosti. Radi toga je potrebno imati na umu da su dobiveni rezultati analize pomoću uređaja koji nisu krajnje tačni, ali pogreška ne prelazi 1%. No ta greška za zaključivanja u ovom radu nije od važnosti upravo s obzirom na karakter rezultata dobivenih na osnovi statističkih istraživanja.

Rezultat tog statističkog promatranja je ovaj:

a) Krleža: Promatrano je 18078 riječi. Razdioba po broju slogova sadržana je u tabeli 1.

b) Šegedin: Promatrano je 16350 riječi. Razdioba po broju slogova sadržana je u tabeli 2.

Nehomogeni tekst dao je prosjek	2,20	entropija	$H = -2,1$
Prosjek kod Krleže je	2,25	„	$H = -2,1$
Prosjek kod Šegedina je	2,06	„	$H = -2,0$

Potražili smo sada mogućnost da se dobivene razdiobe predoče superpozicijom od 4 Poissonove razdiobe na način kako je to rađeno u ranijem radu.

Pripadna formula glasi:

$$v_i = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_{i-1} + \alpha_3 p_{i-2} + \alpha_4 p_{i-3} \quad (1)$$

gdje su p_i pripadne vrijednosti Poissonove razdiobe.

Kod Krleže je vjerojatnost za jednosložne riječi 0,3383, a to odgovara Poissonovoj razdiobi za $i = 2,1$. Kod Šegedina imamo 0,3746, što odgovara $i = 2,0$. Poradi toga polazimo kod Krleže od ove razdiobe:

$$p_i = \frac{(i-1)^{i-1} \cdot e^{-(i-1)}}{(i-1)!} = \frac{1,1^{i-1} \cdot e^{-1,1}}{(i-1)!}$$

odnosno tabele 3:

$p_1 =$	0,3329
$p_2 =$	0,3662
$p_3 =$	0,2014
$p_4 =$	0,0738
$p_5 =$	0,0203
$p_6 =$	0,0045
$p_7 =$	0,0008
$p_8 =$	0,0001

Imamo dakle iz (1):

$$\begin{aligned}v_1 &= a_1 p_1 \\v_2 &= a_1 p_2 + a_2 p_1 \\v_3 &= a_1 p_3 + a_2 p_2 + a_3 p_1 \\v_4 &= a_1 p_4 + a_2 p_3 + a_3 p_2 + a_4 p_1 \\v_5 &= a_1 p_5 + a_2 p_4 + a_3 p_3 + a_4 p_2 \\v_6 &= a_1 p_6 + a_2 p_5 + a_3 p_4 + a_4 p_3 \\v_7 &= a_1 p_7 + a_2 p_6 + a_3 p_5 + a_4 p_4 \\v_8 &= a_1 p_8 + a_2 p_7 + a_3 p_6 + a_4 p_5\end{aligned}$$

gdje su $p_1, p_2, \dots, p_n$ gore navedene vrijednosti.

Zadatak je da nađemo a_1, a_2, a_3 i a_4 tako da se vrijednosti $v_1, v_2, \dots, v_8$ što više približe empirijskim vrijednostima p'_i .

a_1, a_2, a_3 i a_4 nalaze se uz pomoć metode najmanjih kvadrata, tj. da se potraži minimum od

$$\sum_i (p'_i - v_i)^2$$

uz uvjet

$$\sum_i v_i = 1$$

tj. minimum funkcije

$$F(a_1, a_2, a_3, a_4) = \sum_i (p'_i - v_i)^2 - 2\lambda \sum_i v_i$$

Tako dobivamo jednadžbe (2)

odnosno, ako uvrstimo pripadne vrijednosti, jednadžbe (3).

Tih 5 jednadžbi daje ovaj rezultat:

$$\begin{aligned}a_1 &= 1,017159 & a_2 &= -0,246214 \\a_3 &= 0,297044 & a_4 &= -0,068253\end{aligned}$$

odnosno:

$$v_i = 1,017159 p_i - 0,246214 p_{i-1} + 0,297044 p_{i-2} - 0,068253 p_{i-3}.$$

Ako uvrstimo u ovu formulu pripadne vrijednosti za p_i dobivamo:

	Broj riječi
$v_1 = 0,33866$	6122
$v_2 = 0,29057$	5253
$v_3 = 0,21361$	3862
$v_4 = 0,11154$	2016
$v_5 = 0,03731$	674
$v_6 = 0,00775$	140
$v_7 = 0,00056$	11
1,00000	18078

Tabela 4

v_8 je ispao negativan, pa kako ne možemo operirati sa negativnim vjerojatnostima i negativnim brojem riječi, mi smo taj negativni rezultat pribrojili vjerojatnosti v_7 . Prema tome v_7 znači zapravo vrijednosti vjerojatnosti za $i \geq 7$.

Kod Šegedina polazimo od Poissonove razdiobe, koja odgovara $i = 2,0$ tj. od formule:

$$p_i = \frac{1^{i-1} \cdot e^{-1}}{(i-1)!}$$

odnosno tablice 6.

Tako dobivamo analogno kao i kod Krležina teksta jednadžbe (4).

Te jednadžbe daju ova rješenja:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 1,019156 \\ \alpha_2 &= -0,134546 \\ \alpha_3 &= 0,149979 \\ \alpha_4 &= -0,034300 \end{aligned}$$

odnosno:

$$v_i = 1,019156 p_i - 0,134546 p_{i-1} + 0,149979 p_{i-2} - 0,034300 p_{i-3}$$

Oдавде dobivamo:

	Broj riječi
$v_1 = 0,37482$	6129
$v_2 = 0,32534$	5319
$v_3 = 0,19303$	3136
$v_4 = 0,08026$	1312
$v_5 = 0,02230$	365
$v_6 = 0,00399$	65
$v_7 = 0,00026$	4
1,00000	16350

Tabela 6

Za v_n vrijedi isto što smo spomenuli kod Krleže. Ako usporedimo empirijsku i teoretsku razdiobu, dobivamo kod Krleže tabelu 7, a kod Segedina tabelu 8.

Ovi rezultati pokazuju prilično slaganje empirijskih i teoretskih podataka i to naročito u prvih 5 redaka. Ipak u smislu hkvadrat – testa te su razlike prevelike. Te su razlike nastale uglavnom kod peterosložnih, šesterosložnih i sedmerosložnih riječi, kojih ima premalo, pa je uslijed toga relativna devijacija dosta velika. To, međutim, ne znači da moramo našu hipotezu odbaciti. Ne smijemo, naime, jezične zakonitosti mjeriti istim mjerilom kao biološke, populacione i druge zakonitosti koje su i onda kad se služimo statističkim promatranjem još uvijek podvrgnute prirodnim zakonima, dok je tvorba riječi ipak sasvim drugog karaktera. Da i ovdje postoji zakonitost može se pokazati na taj način (vidi raniji rad) da promatramo podskupove od tisuću riječi uzetih iz gore navedenih skupova time da odredimo broj jednosložnih, dvosložnih itd. riječi u podskupu u razmjeru prema broju u osnovnom skupu. Tako dobivamo tabelu 9.

Iz ovih podataka dobivamo $\chi^2 = 2,535$.

U ovom slučaju imamo četiri stepena slobode, budući da je razdioba bila unaprijed određena zbrojem članova i aritmetičkom sredinom. U smislu tablice hkvadrata, vjerojatnost da kod četiri stepena slobode dobiveni $\chi^2 = 2,535$ još može biti premašen, je 64%. To je tako velika vjerojatnost da nemamo razloga odbiti hipotezu, tj. da je naša formula dobivena superpozicijom od 4 Poissonove razdiobe.

Kako kod Krleže tako smo i kod Šegedina stegnuli tablicu na 6 redaka. Tako se postupa budući da se hkvadrat-test ne primjenjuje kod premalo elemenata. Iz tablice 9 izračuna se $\chi^2 = 0,945$.

Vjerojatnost kod četiri stepena slobode da ovaj hkvadrat još može biti premašen je 90%. Ta vjerojatnost, još više nego u Krležinu tekstu, potvrđuje našu hipotezu.

Navedeni pokusi koji se tiču homogenih tekstova pokazuju da zapravo nema razlike između nehomogenog i homogenog teksta slogovne strukture hrvatskosrpskog jezika. Prema tome možemo smatrati da je za slogovnu strukturu hrvatskosrpskog jezika nađena formula, koja glasi:

za *nehomogeni tekst*:

$$v_i = 1,0287 p_i - 0,2305 p_{i-1} + 0,2875 p_{i-2} - 0,0859 p_{i-3}$$

Krleža:

$$v_i = 1,017159 p_i - 0,246214 p_{i-1} + 0,297044 p_{i-2} - 0,068253 p_{i-3}$$

Šegedin:

$$v_i = 1,019156 p_i - 0,134546 p_{i-1} + 0,149979 p_{i-2} - 0,034300 p_{i-3}$$

Vidimo, dakle kod Krležina teksta potpunu analogiju s nehomogenim, a izvjesnu devijaciju kod Šegedina. Opažamo nadalje činjenicu da je

$$\begin{aligned} \alpha_1 &> 0 \\ \alpha_2 &< 0 \\ \alpha_3 &> 0 \\ \alpha_4 &< 0 \end{aligned}$$

Nastaje pitanje da li to mora biti, naročito da su $\alpha_2 < 0$, odnosno $\alpha_4 < 0$. Da to mora biti tako u mogućnosti smo pokazati na ovaj način:

Polazimo od pretpostavaka do kojih smo došli na osnovi eksperimentata:

$$1. p'_1 > p'_2 > \dots > p'_7 > p'_8 \quad (5)$$

2. Budući da tražimo da se teoretske vjerojatnosti što više priljube empirijskim, to moramo pretpostaviti:

$$v_1 > v_2 > \dots > v_7 > v_8 \quad (6)$$

3. Kako je studij slogovne strukture pokazao da u hrvatskosrpskom jeziku nema riječi s više od 9 slogova, imamo pravo pretpostaviti da će vjerojatnost za deseterosložne riječi biti jednaka nuli, odnosno da će se računski možda doći i do negativnih vjerojatnosti, kao što smo to vidjeli u naprijed navedenim primjerima. Stoga imamo pravo pretpostaviti:

$$v_{10} \leq 0. \quad (7)$$

Kako je

$$v_{10} = a_1 p_{10} + a_2 p_9 + a_3 p_8 + a_4 p_7$$

i kako je

$$p_9 = 0 \quad p_{10} = 0$$

to imamo:

$$v_{10} = a_3 p_8 + a_4 p_7 \leq 0. \quad (8)$$

4. Budući da tražimo u Poissonovoj razdiobi ono p_1 koje je najbliže p_1' to imamo pravo pretpostaviti da će biti približno

$$p_1' = p_1 = v_1$$

a kako je

$$v_1 = a_1 p_1$$

to je približno

$$a_1 = 1. \quad (9)$$

5. Mora biti

$$a_1 + 0,9999 a_2 + 0,9991 a_3 + 0,9946 a_4 = 1$$

odnosno približno

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 \quad (10)$$

odnosno približno

$$a_2 + a_3 + a_4 = 0. \quad (11)$$

Iako su sve te relacije približne, netačnost je tako mala da ju smijemo zanemariti.

6. Iz Poissonove tablice za $\bar{i} = 1$ i $\bar{i} = 1,1$ vidi se da je

$$p_1 \leq p_2.$$

Iz (6) slijedi:

$$\begin{aligned} v_1 &> v_2 \\ a_1 p_1 &> a_1 p_2 + a_2 p_1 \\ a_1 (p_1 - p_2) &> a_2 p_1. \end{aligned}$$

Kako je

$$p_1 \leq p_2$$

to je

$$a_2 p_1 < 0$$

odnosno

$$a_2 < 0. \quad (12)$$

Iz (11)

$$a_2 + a_3 + a_4 = 0$$

slijedi da je

$$a_3 + a_4 = -a_2$$

odnosno

$$a_3 + a_4 > 0 \quad (13)$$

jer je

$$a_2 < 0.$$

Iz (8)

$$v_{10} = a_3 p_8 + a_4 p_7 \leq 0$$

slijedi

$$a_4 \leq -\frac{p_8}{p_7} a_3. \quad (14)$$

Kako je

$$p_8 < p_7$$

to iz (14) slijedi da je

$$|a_4| < |a_3|. \quad (15)$$

Kako slijedi iz (13)

$$a_3 + a_4 > 0$$

ne može zbog (15) biti

$$a_3 < 0.$$

Kako je prema tome

$$a_3 > 0$$

mora zbog (14) biti

$$a_4 < 0.$$

Prednje pretpostavke i rezultate možemo i numerički verificirati na osnovi dobivenih rezultata. Imamo:

$$(a) \ v_{10} = a_3 p_8 + a_4 p_7 = -0,000025 \quad \text{Krlęža}$$

$$(b) \ v_{10} = a_3 p_8 + a_4 p_7 = -0,000002 \quad \text{ęegedin}$$

Krlęža:

$$(a) \ a_4 \leq -\frac{p_8}{p_7} a_3 = -0,037 \quad \text{Stvarno je } -0,068 < -0,037$$

ęegedin:

$$(b) \ a_4 \leq -\frac{p_8}{p_7} a_3 = -0,030 \quad \text{Stvarno je } -0,034 < -0,030$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 0,999736 \div 1 \quad \text{Krlęža}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1,000289 \div 1 \quad \text{ęegedin}$$

Iako se do tih rezultata doęlo iz relacija koje samo priblięno vrijede, greęke u tim relacijama tako su male da u samom zakljućivanju ne dolaze do izraęaja. Bitno je da smo ovim ispitivanjem doęli do rezultata da kod promatranja slogovne strukture hrvatskosrpskog jezika možemo poći od formule:

$$v_i = a_1 p_1 + a_2 p_{i-1} + a_3 p_{i-2} + a_4 p_{i-3}.$$

Za tu formulu pokazali smo i u ranijem radu kod istraęivanja nehomogenog teksta, kao i u sadaęnjoj radnji homogenog teksta, da se ta formula vrlo dobro prilagođuje empirijskom tekstu. Znaćenje te formule je ovo:

Iako se razdioba rijeći po slogovima ne može predoćiti Poissonovom razdiobom, moguće je tu razdiobu predoćiti algebarskom superpozicijom od ćetiri Poissonove razdiobe (s dvije ili tri Poissonove razdiobe ne dolazi se do prihvatljivog rezultata!).

Značenje te superpozicije vidi se na slici (1), gdje su prikazane četiri Poissonove razdiobe i rezultat algebarske superpozicije za Krležin tekst. Kod toga su te četiri Poissonove razdiobe pomaknute jedna od druge u fazi 1. Kod te superpozicije pribrajaju se prva i treća Poissonova razdioba pomnožene s određenim faktorom, dok se odbija druga i četvrta, koje su pomnožene negativnim faktorima. Zbog toga zovemo tu superpoziciju algebarskom.

Osim navedenih ispitivanja promatrali smo i korelaciju između dužine riječi i broja slogova pojedinih riječi. Kao što smo očekivali dobili smo vrlo jaku korelaciju koja u Krležinu tekstu iznosi 0,928, a u Šegedinovu 0,912.

U ovom radu saradivali su i mr ing. Vjekoslav Sinković i mr ing. Željko Pauše. Sinković je vršio potrebna brojanja uz pomoć stroja konstruiranog u Zavodu za telekomunikacije, a Pauše je sudjelovao u izračunavanju nekih podataka.

*Centar za numerička istraživanja
Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti,
Zagreb*

*Institut za matematiku Sveučilišta,
Zagreb*

*Elektrotehnički fakultet, Odjel za telekomunikacije,
Sveučilište Zagreb*

Primljeno za publikaciju 7. travnja 1967. u Odjelu za matematičke, fizičke i tehničke nauke Jugoslavenske akademiju u Zagrebu.

JOSIP BOŽIČEVIĆ

NOVI JUGOSLAVENSKI BETONSKI PRAGOV Z. 1 i Z. 2

U V O D

Za izmjenu dotrajalih drvenih pragova JŽ moraju nabavljati na godinu oko 1.600.000 komada novih pragova. Domaća drvna industrija ne može dati više od 900.000 pragova na godinu, pa prema tome godišnji manjak iznosi oko 700.000 komada pragova. Takvo stanje dovodi do stalnog porasta već i ovako velikog postotka dotrajalih pragova u prugama.

Od ukupnog broja od 20,5 milijuna ugrađenih pragova ima oko 3,7 milijuna dotrajalih, što iznosi 18% od ukupnog broja ugrađenih. Stanje je zabrinjavajuće i ugrožava sigurnost prometa.

Budući da naša drvna industrija ne može davati veću količinu pragova od one koju smo spomenuli, potrebno je manjak nadomjestiti odgovarajućim brojem betonskih pragova, kojih je trajanje, kako se može prosječno procijeniti, znatno duže od trajanja drvenih pragova.

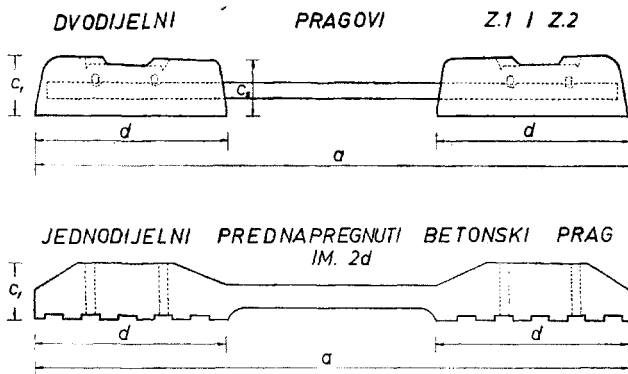
No i između betonskih pragova postoje znatne razlike, kako u konstrukciji, tako i u proizvodnji, što u znatnoj mjeri utječe na njihov kvalitet. Iz tih razloga potrebno je pri odabiranju novog tipa praga voditi računa o tome da bude što otporniji, a prema tome i trajniji, da proizvodnja bude jednostavnija, da budu po mogućnosti jeftiniji i sam prag i način pričvršćivanja tračnice, a da se ne smanjuje efikasnost veze.

Ako bi proizvodnja novog tipa pragova bila lakša od dosadašnje i time se omogućila proizvodnja veće količine pragova (nego što je to moguće sa sadašnjim proizvodnim kapacitetima), smanjio bi se pritisak na naš šumski fond, te bi se istodobno mogao postepeno smanjivati postotak dotrajalih pragova u prugama.

U usporedbi sa sadašnjim jednodijelnim betonskim pragom IM-2d s prednapregnutom armaturom novi dvodijelni betonski pragovi Z. 1 i Z. 2 imaju neke prednosti, koje su prevagnule pri odabiranju novih tipova naših betonskih pragova. Nakon izvršenih opsežnih proučavanja postojećih tipova kod raznih naprednijih željezničkih uprava, spomenute prednosti treba posebno razmotriti s obzirom:

- na prag kao takav i
- na pričvršćivanje tračnice na prag.

Na slici 1 dat je opći izgled sadašnjih i novih betonskih pragova, a u tabeli I njihove dimenzije.



Slika 1. Opći izgled novih betonskih pragova Z. 1 i Z. 2, te sadašnjeg tipa IM. 2d

Dimenzije pragova

Tabela I

Prag	Mjera u mm					Ležajna površina cm ²	Težina u kg
	a	b	c ₁	c ₂	d		
Z. 1	2260	290	207	189	760	4408	197
Z. 2	2160	290	200	183	660	3828	165
IM. 2d	2300	248	190	190	793	4124	208

Opaska: Oznaka «b» znači širinu donje ležajne površine praga.

Treba imati na umu da se, koristeći se nekim postojećim oprobanim tipom praga, ne mora nužno prihvatiti i način pričvršćivanja tračnice koji se na tom pragu upotrebljava kod dotične željezničke uprave, već se može prihvatiti ono pričvršćivanje tračnice koje odgovara našim prilikama. Isto se tako može prema potrebama u toku vremena na postojećem betonskom pragu mijenjati način pričvršćivanja tračnica.

U ovoj će se studiji razmotriti osobine kolosijeka s tračnicama 49 uz običnu i pojačanu zastornu prizmu, za slučajeve podbijanja i suflaža, za drveni i tri navedena tipa betonskih pragova alternativno s topolo-
vim i gumenim ulošcima ispod noge tračnice.

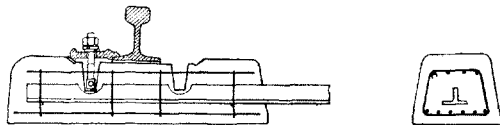
U tim razmatranjima obradit će se za sve spomenute slučajeve:

- uzdužni i bočni otpor kolosijeka
- krutost kolosiječne rešetke
- najveći razmak između krajeva tračnica koji može nastati u slučaju preloma tračnice kod ekstremno niskih temperatura
- veličina kritične sile koja može uzrokovati izvijanje (izbacivanje) kolosijeka pri visokim temperaturama.

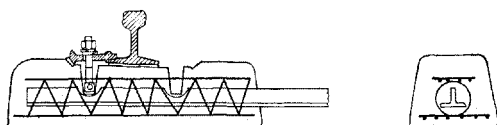
I. KONSTRUKTIVNE OSOBINE PRAGOVA Z. 1 i Z. 2

Pragovi Z. 1 i Z. 2 sastoje se od dva bloka od običnog vibriranog betona s armaturom od običnog betonskog čelika Φ 6 i 8 mm, koji su međusobno spojeni motkom od čelika za tračnice, koja je samo nešto kraća od praga.

Na slikama 2 i 3 prikazani su presjeci polovine betonskih pragova Z. 1 i Z. 2 s alternativnim načinom armiranja. Gornja i donja glavna armatura sastoji se od četiri, odnosno šest šipki, a sekundarna u prvom slučaju (slika 2) sastoji se iz uobičajenih viljušaka, a u drugom (slika 3) iz kontinuirane rastegnute spirale.



Slika 2. Presjeci pragova Z. 1 i Z. 2 sa sekundarnom armaturom od viljušaka



Slika 3. Presjeci pragova Z. 1 i Z. 2 sa spiralnom sekundarnom armaturom

Da se donese odluka o tome koje od ovih armatura treba prihvatiti pri izradi prvih serija pragova što će se izrađivati u pokusne svrhe, bila su izvršena ispitivanja statičkim opterećivanjem 18 komada prvih pragova Z. 1 i Z. 2, izrađenih u tvornici »Jugobeton« u Zagrebu.

Ispitivanja su bila izvršena u laboratoriju tvornice u toku X mjeseca 1966. godine, i to 30 dana nakon betoniranja. Razmak oslonca pri statičkom opterećenju iznosio je 40 cm. Opterećivanje je bilo vršeno u normalnom (+) položaju praga, tj. s pozitivnim momentom savijanja, i u preokrenutom (—) položaju, tj. s negativnim momentom savijanja.

Karakteristike ispitanih pragova Z. 1 i Z. 2

Tabela II

Pragovi Tip	Vrsta armature				Oznaka armature
	kom.	gornja	donja	sekundarna	
Z. 1 (osovinski pritisak 20 t)	3	4 ϕ 8	6 ϕ 8	4 ϕ 6	I
	3	4 ϕ 8	6 ϕ 10	4 ϕ 6	II
	3	4 ϕ 8	6 ϕ 8	spirala ϕ 6	III
Z. 2 (osovinski pritisak 18 t)	3	4 ϕ 8	6 ϕ 8	4 ϕ 6	I
	3	4 ϕ 8	6 ϕ 10	4 ϕ 6	II
	3	4 ϕ 8	6 ϕ 8	spirala ϕ 6	III

Prva faza ispitivanja

Svih 18 komada pragova bilo je opterećeno u normalnom položaju (+ M) sa silom od 0 do 23 t, a zatim u obrnutom položaju (— M) sa silom od nula do 13 t.

Svi su pragovi izdržali ovo opterećenje bez pojava naprslina.

Druga faza ispitivanja

Pošto je prva faza ispitivanja pokazala da svi ispitani pragovi zadovoljavaju zahtjevima, ali nije omogućila da se utvrdi koja vrsta armature kod jednog i kod drugog tipa praga daje bolje rezultate uz ekonomičnost, uzet je iz svake grupe pragova po jedan i ispitivan je na sličan način kao u prvoj fazi ispitivanja, ali ovog puta do pojave pukotina a zatim do loma. Rezultati ispitivanja vide se u tabeli III.

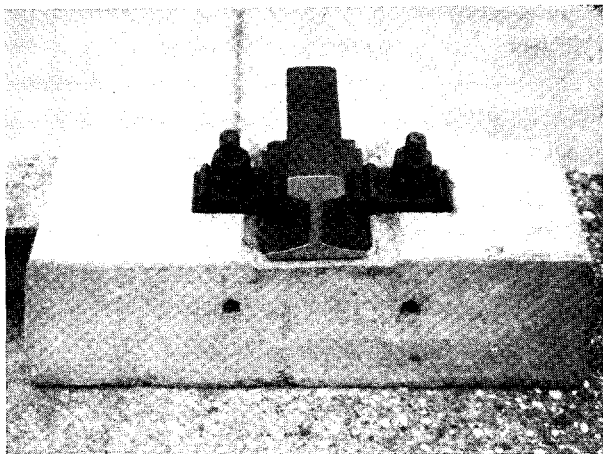
Tabela III

Pragovi tipa	Oznaka armature	Opterećenje u tonama			
		+		-	
		pukotina	lom	pukotina	lom
Z. 1	I	25	44	15	40
	II	28	50	21	49
	III	26	48	22	45
Z. 2	I	23	40	13	38
	II	24	42	18	41
	III	23	45	20	43

Uzimajući u obzir težinu potrebne armature, a prema tome i ekonomičnost i prednost lake izvedbe spiralne sekundarne armature koja se može izrađivati »na tekućoj vrpici«, odlučeno je da se kod pragova Z. 1 i Z. 2 primijeni armatura označena u tabeli II oznakom III.

Pragovi Z. 1 predviđeni su za osovinski pritisak od 20 tona, a pragovi Z.2 odgovaraju za osovinski pritisak od 18 tona. U prvo vrijeme upotrebljavat će se za spojne motke stare tračnice predviđene za slanje u željezaru kao staro gvožđe. Tračnice težine veće od 20 kg/m rezat će se po dužini kroz sredinu vrata, tako da će i glava i noga s pripadajućim dijelom vrata sačinjavati presjek spojne motke. Tračnice uzanih pruga teške 10–12 kg/m upotrebljavat će se u čitavom svom presjeku.

Na ove pragove ugrađivat će se tračnice bez čeličnih podložnih ploča, a između noge tračnice i betona ulagat će se samo topolova ili gumena podložna pločica, standardnih oblika i dimenzija. U ovom slučaju gumene pločice neće imati dva suprotna udebljanja ruba. Za pričvršćivanje tračnice upotrebljavat će se standardne »krute« pričvršne pločice tipa Xa (DŽ 51 i 52), koje se neće izravno oslanjati na odgo-



Slika 4. Način pričvrščivanja račnice na pragovina Z. 1 i Z. 2



Slika 5. Izgled pragova Z. 1 i Z. 2 i ispitivanje
bočnog otpora kolosijeka s tim pragovima

rajuću kosu plohu betona, nego će se između njih i betona ulagati čelične (kod topolovih pločica), odnosno gumene pločice (u slučaju gumenih podložaka ispod noge tračnica) veličine 65/25/5 mm kod čelika, odnosno 65/25/7 kod gume.

Stojeći vijak usidren je na taj način da se odozgo uvlači u rupu okomitu na osnovicu praga i uglavljuje se pomoću poprečne šipke od betonskog čelika Φ 14 mm, koja se umeće u poprečni otvor u pragu i prolazi kroz rupu u glavi vijka.

Način pričvršćivanja tračnice na pragovima Z. 1 i Z. 2 vidi se na slici 4, a njihov izgled na slici 5, na kojoj se vidi i ispitivanje bočnog otpora kolosijeka na stanici Zagreb Gl. kolodvor.

II. USPOREĐENJE PRAGOVA IM.2d S PRAGOVIMA Z.1 i Z.2

Usporedit ćemo posebno same betonske pragove i posebno način pričvršćivanja tračnica na pragove.

A. BETONSKI PRAG

Jednodijelni betonski pragovi s prednapregnutom armaturom imaju pored pozitivnih karakteristika i neke negativne.

1. Kod naših pragova IM.2d skidaju se kalupi tek 24 sata nakon vibriranja, što će reći da jedan kalup daje za 24 sata 1 prag. Pragovi Z. 1 i Z. 2 vade se iz kalupa odmah nakon vibriranja, pa tako jedan kalup daje za 8 sati oko 150 pragova, odnosno u usporedbi s prethodnim u roku od 24 sata (rad u 3 smjene) 450 komada pragova. To dovoljno govori o investicionom ulaganju u prilično skupe kalupe.

Osim toga, nakon skidanja kalupa s pragova IM.2d čitava »staza« ostaje zauzeta tim pragovima u dužini od oko 100 m još 3 do 6 dana, do potrebnog stvrdnjavanja betona, i ne može se za to vrijeme iskorištavati za betoniranje iduće skupine od oko 40 pragova. Ovo govori samo za sebe o investicionim troškovima za potrebne hale.

2. Za pragove IM.2d za armaturu je potrebna žica promjera 3 mm od specijalnog čelika čvrstoće cca 19.000 kg/cm², koji se uvozi i ne može se nabaviti bez poteškoća.

Za pragove Z. 1 i Z. 2 upotrebljava se obični betonski čelik Φ 6—8 mm.

3. Kratko vrijeme koje je proteklo od početka proizvodnje pragova IM. 2d nije još dovoljno da se utvrdi neće li doći do eventualnog »skupljanja« armature, tj. smanjivanja prednaprezanja, što ovisi o stvarnoj prionljivosti betona u svakoj seriji pragova. To može pokazati samo budućnost.

Pragovi Z. 1 i Z. 2 su od običnog vibriranog betona, čija čvrstoća može biti za 100 kg/cm^2 manja nego kod prednapetih pragova i imaju armaturu od običnog betonskog čelika.

4. Prag IM. 2d, kao svaki jednodijelni betonski prag, osjetljiv je na negativne momente savijanja, koji se pojavljuju u srednjem dijelu praga i do kojih može doći u toku ugrađivanja ili kasnije u kolosijeku ako zastor dospije ispod srednjeg dijela praga. Iz tih razloga armatura se pojačava, a time i poskupljuje, jer se ta mogućnost mora predvidjeti, ali iz ekonomskih razloga ona se ipak ne pojačava do te mjere da bi se prag mogao oduprijeti i negativnim momentima.

Kod pragova Z. 1 i Z. 2 eventualne negativne momente savijanja u sredini praga lako preuzima u granicama elastičnosti čelična spojna motka, a u betonskim blokovima uopće ne može doći do negativnih momenata savijanja.

5. Na temelju stečenog iskustva i prakse dviju najjačih evropskih željezničkih uprava (D. B i S. N. C. F.) došlo je do toga da je proizvodnja pragova iste koncepcije kao IM. 2d već odavno stagnirala, pa je težište bačeno na proizvodnju pragova prema drugim koncepcijama:

- kod D. B. izrađuju se jednodijelni betonski pragovi s armaturom $\Phi 7-10 \text{ mm}$ i betonom marke najmanje 600 kg/cm^2 ;

- kod S. N. C. F. težište je bačeno na proizvodnju dvodijelnih pragova S. N. C. F. – R. S. s čeličnom spojnom motkom (izvađenom od starih tračnica ili profiliranog željeza), armaturom od običnog betonskog čelika i s markom betona za oko 100 kg/cm^2 manjom nego kod D. B. Godine 1964. bilo je u devet evropskih zemalja ugrađeno preko 10 mil. takvih pragova, a osim toga u prekomorskim zemljama oko 3 milijuna.

B. PRIČVRŠČIVANJE TRACNICE NA BETONSKI PRAG

Od načina pričvršćivanja tračnica na svaki prag, a naročito na betonski, traži se:

1. Takva trajnost veze koja nikada ne dopušta da se na dodirima »noga tračnice – podložna ploča – prag« pojavljuju praznine koje bi utjecaj promjenljivog prometnog opterećenja pretvarale u snažne dinamičke udarce, koji dovode do prijevremenog razaranja praga.

2. Da pričvršćenje daje jak otpor klizanju i zaokretanju tračnice na pragu, što je od naročite važnosti kod dugih trakova tračnica.

3. Uz navedene kvalitetne odlike veze traži se što manja njezina težina, a prema tome i niža cijena pričvrstnog pribora.

Razmotrit ćemo razlike u načinu pričvršćivanja tračnica na sadašnje betonske pragove IM. 2d i nove Z. 1 i Z. 2. Ovdje valja napomenuti da kod Z. 1 i Z. 2 razmatramo sadašnje »poluelastično« pričvršćivanje s našim standardnim »krutim« pričvrstnim pločicama DŽ. 51 i 52 (JUS. P. B. 1. 171), jer tek predstoji studija mogućnosti domaće proizvodnje »elastičnih« pričvrstnih pločica koje bi došle na pragove Z. 1 i Z. 2.

a) Valoviti drveni čepovi u pragovima IM. 2d u koje su uvrnuti tirfoni moraju se u toku trajanja praga zamjenjivati novima u samoj pruzi jer su izloženi truljenju (unatoč impregniranju) i mehaničkom razaranju. Pragovi Z. 1 i Z. 2 nemaju drvenih čepova, a usidrivanje stojećih vijaka, koje je bilo prije opisano, upotrebljava se također na engleskim betonskim pragovima »Permal Limited« i otklanja negativnu stranu drvenih uložaka. Kombinacija guma ispod noge tračnice te između pričvrstne pločice i betona i dvostruki groverov prsten ispod matice stojećeg vijka mogli bi se već smatrati »poluelastičnim pričvršćenjem«.

b) Rezultati mjerenja otpora protiv klizanja i zaokretanja tračnice na ova tri tipa praga, koja su bila izvršena u Zagrebu, daju se odvojeno na kraju.

c) Usporedni podaci o težini čeličnog pribora i cijeni cjelokupnog pričvrstnog pribora, uključujući topolove, čelične i gumene pločice kod praga IM. 2d, Z. 1 i Z. 2, dati su u tabeli IV.

Tabela IV

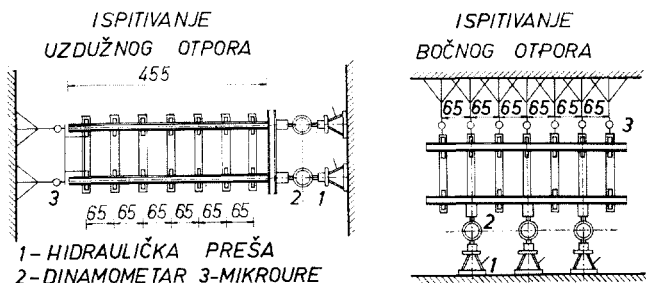
Pragovi	Težina u kg			Cijena n. din.		
	1 prag	1 km kolosij. = 1500 praga	‰	1 prag	1 km kolosij. = 1500 praga	‰
Drveni	24,77	37155	100‰	69,58	104.370	100‰
IM. 2d	20,50	30750	82,7‰	63,60	95.400	91,4‰
Z. 1 : Z. 2	8,38	12570	33,8‰	38,51	57.765	55,3‰

Kako se iz prednje tabele vidi, pričvršćivanje tračnica na pragove Z. 1 i Z. 2 traži za 1 km kolosijeka (1500 pragova) za cca 18,2 tone manje čelika i jeftinije je za oko 37.635.— n. dinara nego u slučaju pragova IM. 2d. Tome treba dodati uštedu na barem jednoj do dvije izmjene drvenih čepova. Uz sadašnju približnu cijenu izmjena jednog čepa od oko 2,40.— n. dinara košta jednokratna izmjena po 1 km (6.000 pragova) 14.400.— n. dinara, a dvokratna 28.800.— n. dinara.

Time bi se na pričvršćivanju kod pragova Z. 1 i Z. 2 u odnosu na IM. 2d postigla ušteda od 52.035.— n. dinara po jednom kilometru kolosijeka.

III. ISPITIVANJE OTPORA ZASTORA PROTIV UZDUŽNOG I BOČNOG POMICANJA KOLOSIJEAČNE REŠETKE

Pomicanju kolosiječne rešetke u uzdužnom i bočnom smjeru suprotstavlja se otpor zastora. Određivanje otpora zastora vrši se tako da se kolosiječna rešetka sa sedam pragova (ili pet pragova), dužine 4,55 m, horizontalno opteretiti hidrauličkim prešama, čiji se pritisak prenosi na tračnice. Na slici 6 data je shema uređaja za ispitivanje uzdužnog i bočnog otpora kolosijeka na stanici Zagreb Glav. kolodvor, a na prethodnoj 5. slici vidi se fotografski snimak učinjen u toku ispitivanja.



Slika 6. Shema uređaja za ispitivanje uzdužnog i bočnog otpora kolosijeka

Pritisak hidrauličkih preša na tračnice prenosi se preko pričvršćivanja tračnica na pragove, koji su normalno položeni u zastor. Veličine sila mjere se pomoću dinamometara, koji se nalaze na svakoj preši. Na

drugom kraju kolosiječne rešetke postavljene su mikroure, koje registri-
striraju pomak pragova.

Opetovana opterećivanja vrše se svaki put od nule do određene ve-
ličine i zatim se odmah svaki put vrši rasterećivanje do nule. Kod sva-
kog opterećivanja i rasterećivanja mjeri se odgovarajuće pomicanje.
Tako dobijemo ovisnost između uzdužnog odnosno bočnog otpora i
odgovarajućeg pomaka.

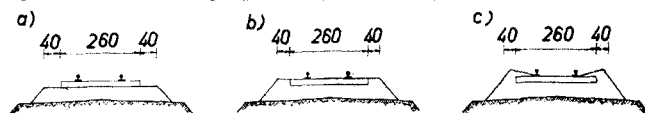
U godini 1966. bio je mjeran uzdužni i bočni otpor zastora kod ko-
losijeka na drvenim i betonskim IM. 2d, Z. 1 i Z. 2 pragovima polo-
ženim s razmakom od 65 cm. Otpor je ispitivan kod kolosijeka u kojem
pragovi nisu bili zastrti, nego su samo ležali na zastoru, te kod obične
i pojačane zastorne prizme, i to za slučaj održavanja kolosijeka pod-
bijanjem i podsipavanjem (suflažem).

Otpor zastora bio je ispitivan na pokusnom kolosijeku, koji u cije-
losti odgovara tek položenom kolosijeku kod remonta, i to prije pro-
laza vlaka, to jest u još nestabiliziranom kolosijeku. Takav tek polo-
ženi kolosijek ima najmanji uzdužni i bočni otpor zastora, i prema tome
je mjerodavan za određivanje veličine dilatacije u slučaju preloma
tračnice zimi i veličine kritične sile pri kojoj mora doći do izvijanja
kolosijeka. Da bi se dobili tačni rezultati, bio je svaki pokus ponovljen
šest puta. Srednje vrijednosti rezultata su prikazane u dijagramima.
Oznake »a«, »b« i »c« u dijagramima znače:

- a – nezastrti kolosijek, koji samo leži na zastoru,
- b – kolosijek s običnom zastornom prizmom,
- c – kolosijek s pojačanom zastornom prizmom.

A. KOLOSIIJEK NA DRVENIM PRAGOVIMA

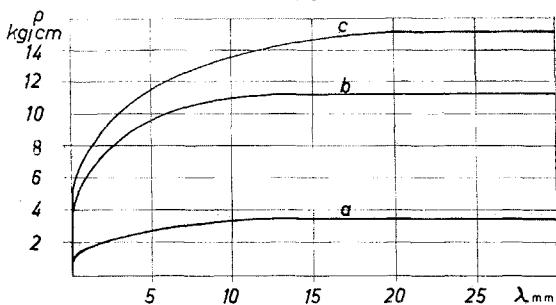
Na slici 2 dati su poprečni presjeci ispitivane zastorne prizme s ko-
losijekom na drvenim pragovima (2,60—16/25).



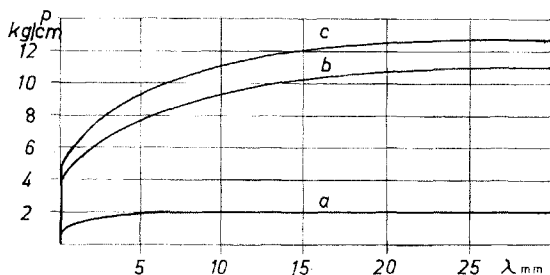
Slika 7. Poprečni presjeci ispitivane zastorne prizme kod kolosijeka
na drvenim pragovima s razmakom od 65 cm

Na svakom od dijagrama na slikama 8 do 11 date su vrijednosti
otpora za slučaj zastornih prizama označenih slovima »a«, »b« i »c«.

a. *Otpor zastora protiv uzdužnog pomicanja kolosijeka*

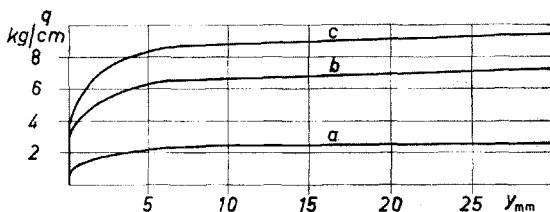


Slika 8. Dijagrami uzdužnih otpora kolosijeka na drvenim podbijenim pragovima kod raznih tipova zastorne prizme

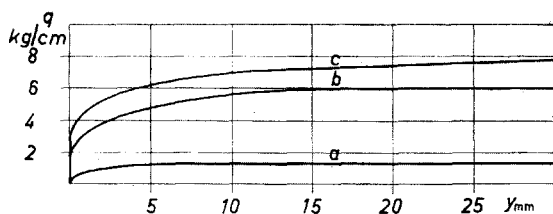


Slika 9. Dijagrami uzdužnih otpora kolosijeka na drvenim pragovima koji leže na podsipanom grusu kod raznih tipova zastorne prizme

b. *Otpor zastora protiv bočnog pomicanja kolosijeka*



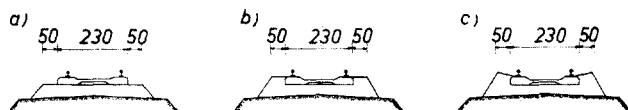
Slika 10. Dijagram bočnog otpora kolosijeka na drvenim podbijenim pragovima



Slika 11. Dijagram bočnog otpora zastora na drvenim pragovima koji leže na podsipanom grusu

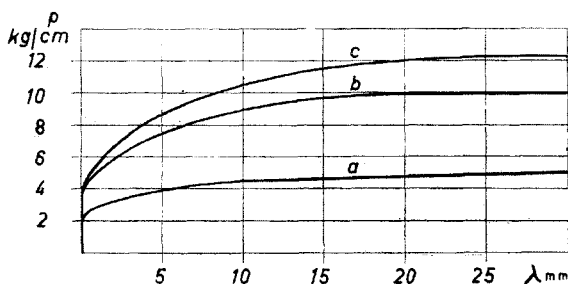
B. KOLOSIJEK NA BETONSKIM PRAGOVIMA IM. 2d

Na slici 12 dati su poprečni presjeci ispitivane zastorne prizme s kolosijekom na betonskim pragovima IM. 2d.

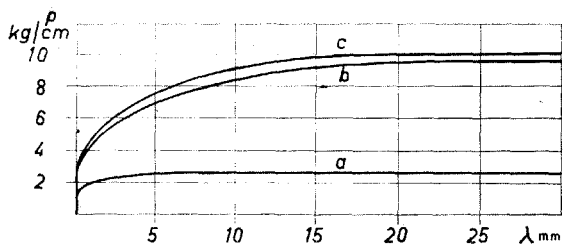


Slika 12. Poprečni presjeci ispitivane zastorne prizme kod kolosijeka na betonskim pragovima IM. 2d s razmakom od 65 cm

a. Otpor zastora protiv uzdužnog pomicanja kolosijeka

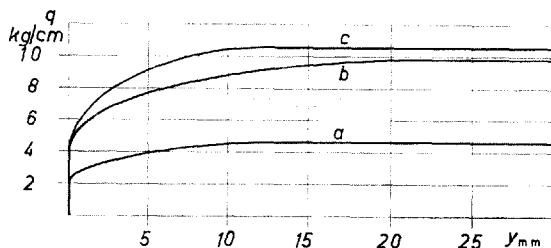


Slika 13. Dijagrami uzdužnog otpora kolosijeka na betonskim podbijenim pragovima IM. 2d kod raznih tipova zastorne prizme

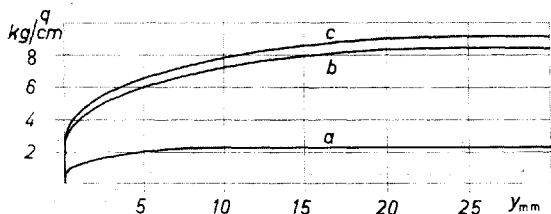


Slika 14. Dijagrami uzdužnog otpora kolosijeka na betonskim pragovima IM. koji leže na podsipanom grusu kod raznih tipova zastorne prizade

b. Otpor zastora protiv bočnog pomicanja kolosijeka



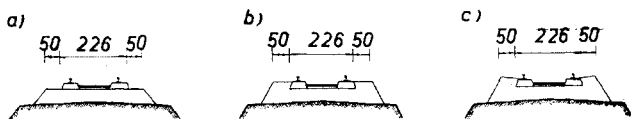
Slika 15. Dijagram bočnog otpora kolosijeka na betonskim IM. 2d podbijenim pragovima



Slika 16. Dijagram bočnog otpora zastora na betonskim IM. 2d pragovima koji leže na podsipanom grusu

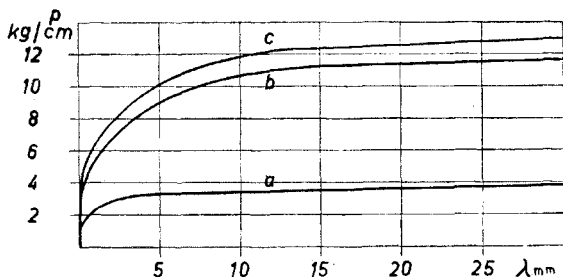
C. KOLOSIJEK NA BETONSKIM PRAGOVIMA Z. 1

Na slici 17 dati su poprečni presjeci ispitivane zastorne prizme s kolosijekom na betonskim pragovima Z. 1.

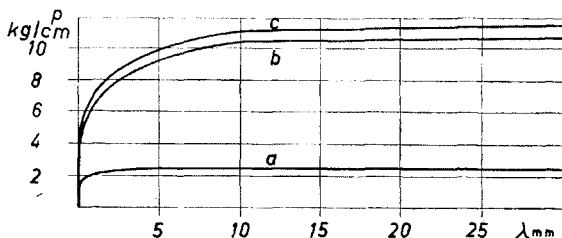


Slika 17. Poprečni presjeci ispitivane zastorne prizme kod kolosijeka na betonskim pragovima Z. 1 s razmakom od 65 cm

a. Otpor zastora protiv uzdužnog pomicanja kolosijeka

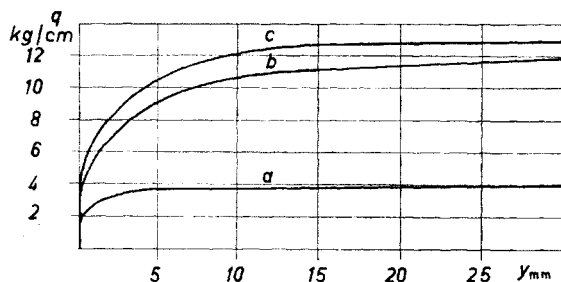


Slika 18. Dijagrami uzdužnog otpora kolosijeka na betonskim podbijenim pragovima Z. 1 kod raznih tipova zastorne prizme

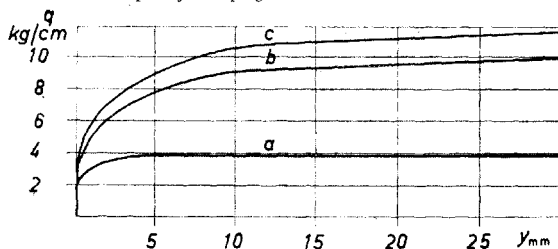


Slika 19. Dijagrami uzdužnog otpora kolosijeka na betonskim pragovima Z. 1 koji leže na podsipanom grusu kod raznih tipova zastorne prizme

b. Otpor zastora protiv bočnog pomicanja kolosijeka



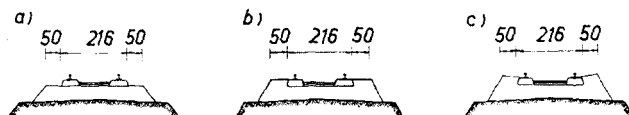
Slika 20. Dijagram bočnog otpora kolosijeka na betonskim podbijenim pragovima Z. 1



Slika 21. Dijagram bočnog otpora zastora na betonskim pragovima Z. 1 koji leže na podsipanom grusu

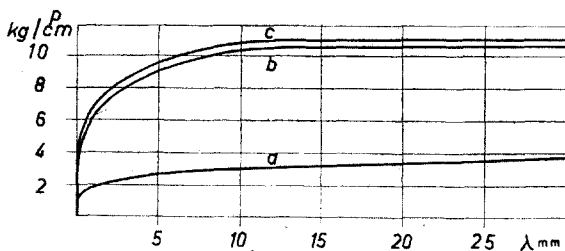
D. KOLOSIJEK NA BETONSKIM PRAGOVIMA Z. 2

Na slici 22 dati su poprečni presjeci ispitivane zastorne prizme s kolosijekom na betonskim pragovima Z. 2.

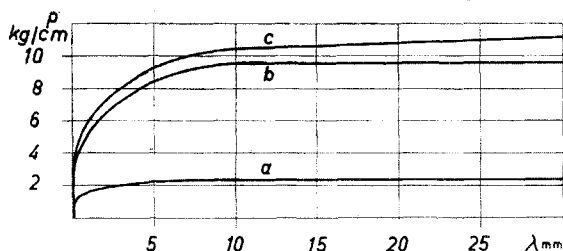


Slika 22. Poprečni presjeci ispitivane zastorne prizme kod kolosijeka na betonskim pragovima Z. 2 s razmakom od 65 cm

a. Otpor zastora protiv uzdužnog pomicanja kolosijeka

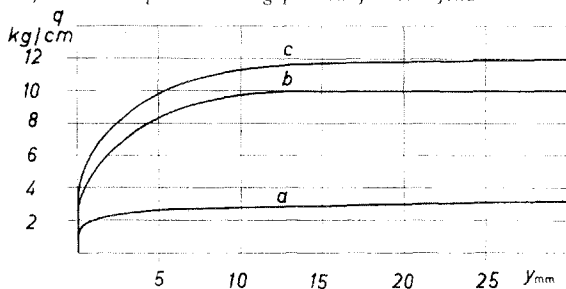


Slika 23. Dijagrami uzdužnog otpora kolosijeka na betonskim podbijenim pragovima Z. 2 kod raznih tipova zastorne prizme

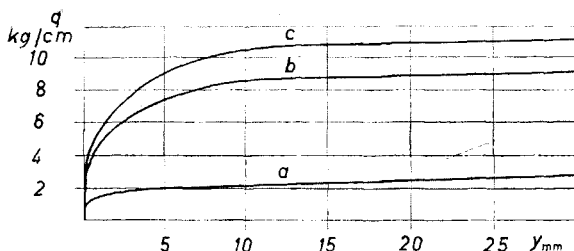


Slika 24. Dijagrami uzdužnih otpora kolosijeka na betonskim pragovima Z. 2 koji leže na podsipanom grusu kod raznih tipova zastorne prizme

b. Otpor zastora protiv bočnog pomicanja kolosijeka



Slika 25. Dijagrami bočnog otpora kolosijeka na betonskim podbijenim pragovima Z. 2



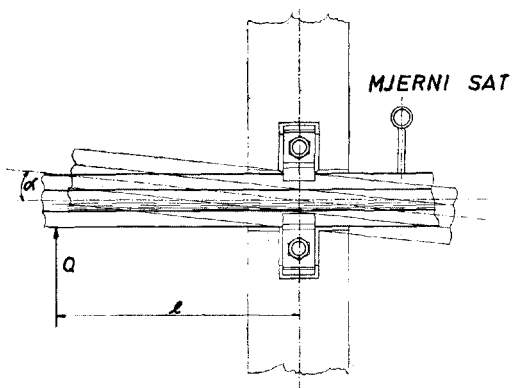
Slika 26. Dijagrami bočnog otpora zastora na betonskim pragovima Z. 2 koji leže na podsipanom grusu

IV. ISPITIVANJE OTPORA KOJI SE SUPROTSTAVLJA ZAKRETANJU TRAČNICE U ČVOROVIMA KOLOSIJEČNE REŠETKE

Kolosiječnu rešetku sačinjavaju tračnice, koje su pomoću pričvršćivanja tračnica spojene za pragove i s njima čine jednu cjelinu. U ovom poglavlju ćemo posebno razmatrati utjecaj koji pričvršćivanje tračnica za pragove ima na krutost kolosiječne rešetke. Krutost samih tračnica uzet ćemo u obzir tek kod proračuna kritične sile koja izaziva izvijanja kolosijeka.

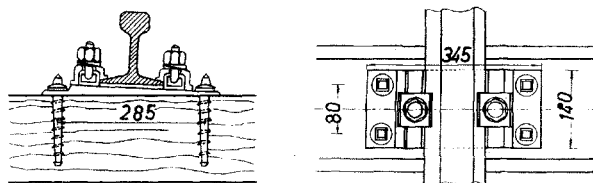
Pri deformaciji kolosiječne rešetke uslijed pričvršćivanja tračnice za pragove nastaju okretni momenti, koji se suprotstavljaju zakretanju tračnica u čvorovima kolosiječne rešetke. Otpor pričvršćivanja u čvorovima kolosiječne rešetke protiv zakretanja tračnica na pragu nije konstanta i proporcionalan je kutu zaokreta tračnice. Odnos između okretnog momenta koji proizvodi tračnica uslijed svojeg pričvršćivanja na pragove i pripadajućeg kuta zakretanja » α «, koji predstavlja promjenu kuta što ga zatvara os tračnice s osi praga, može se utvrditi na ovaj način:

Tračnica pričvršćena na pragove opterećuje se na slobodnom kraju silom » Q «, koja u čvoru kolosiječne rešetke proizvodi okretni moment $M = Q \cdot l$ (slika 27), a pomoću mikroura mjere se na drugom kraju tračnice odgovarajuće veličine kuta zakretanja.

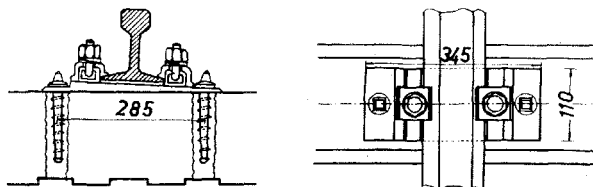


Slika 27. Shema pokusa

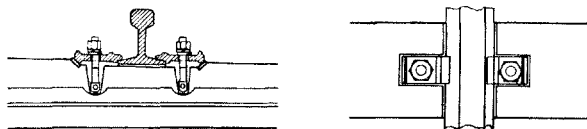
Na temelju izvršenih pokusa dobiveni su dijagrami zavisnosti između kuta zakretanja » α « i okretnog momenta » M «. Na slikama 28, 29 i 30 prikazani su načini pričvršćivanja tračnice na drvene pragove i na betonske tipova IM. 2d, Z. 1 i Z. 2, a na slikama 31 do 35 odgovarajući dijagrami dobivene ovisnosti.



Slika 28. Način pričvršćivanja tračnice na drveni prag



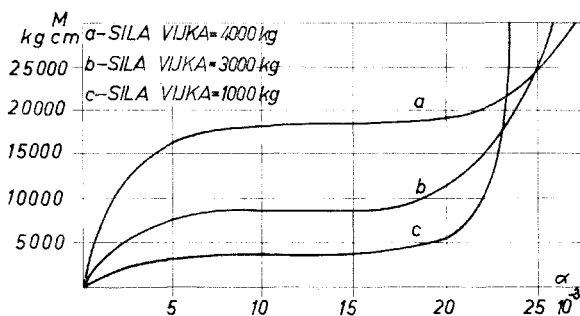
Slika 29. Način pričvršćivanja tračnice na betonski prag IM. 2d



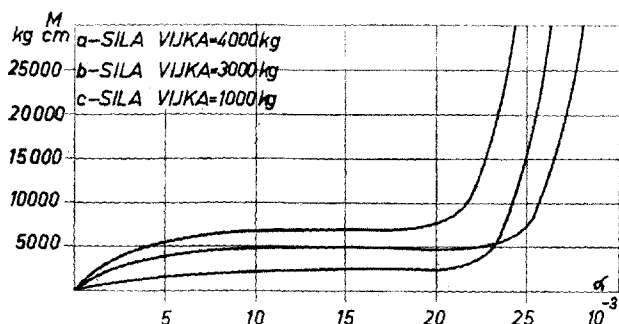
Slika 30. Način pričvršćivanja tračnice na betonski prag Z. 1 i Z. 2

Godine 1964 u Zavodu za ispitivanje materijala i konstrukcija Građevinskog fakulteta u Zagrebu i 1966. godine na Pokusnom odsjeku u Zagrebu ispitivan je okretni moment » M «, koji se suprotstavlja zakretanju tračnice na mjestu pričvršćivanja na prag.

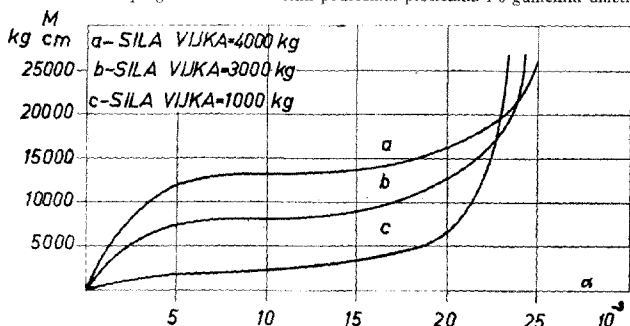
Pokusi su izvršeni na drvenim pragovima i na betonskim tipovima IM. 2d, Z. 1 i Z. 2. Ovisnost između kuta » α « i momenta predložena je u dijagramima, i to: za slučaj jako, normalno i slabo pritegnutih matice na pričvršnim vijcima. Pod jako pritegnutim stojećim vijcima podrazumijevamo stanje kada vlačna sila vijka iznosi 4.000 kg, pri normalno pritegnutima 3.000 kg, a pri labavo pritegnutima 1.000 kg. Za svaku vrstu praga i za svaki stepen pričvršćivanja tračnice na prag izvršena su po tri ispitivanja, a srednji rezultati prikazani su na dijagramima. Na slikama 31 do 35 prikazane su srednje vrijednosti otpornog momenta » M « u čvoru kao funkcije kuta zaokreta tračnice na pragu.



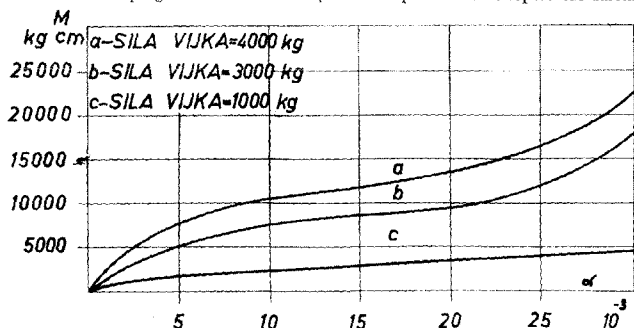
Slika 31. Drveni prag s rebastim podlošnim pločicama i s topolovim umetkom



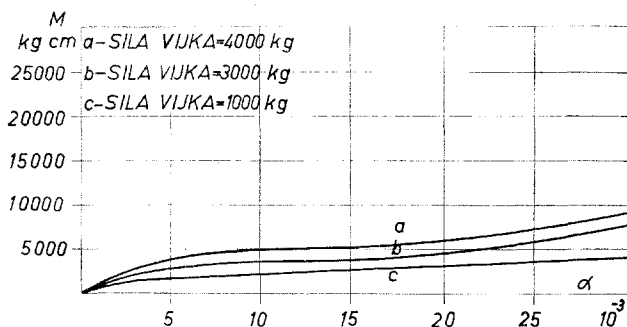
Slika 32. Betonski prag IM. 2d s rebrastim podložnim pločicama i s gumenim umetkom



Slika 33. Betonski prag IM. 2d s rebrastim podložnim pločicama i s topolovim umetkom



Slika 34. Betonski pragovi Z. 1 i Z. 2 bez podložnih pločica s topolovim umetkom ispod noge tračnice i čeličnim pločicama između pričvrštnih pločica i betona



Slika 35. Betonski pragovi Z. 1 i Z. 2 bez podložnih pločica s gumenim umecima ispod noge tračnice i između pričvrstnih pločica i betona

V. PRORAČUN MAKSIMALNE VELIČINE DILATACIONOG OTVORA KOJI NASTAJE NA MJESTU PRELOMA TRAČNICE U NEPREKINUTOM KOLOSIJEKU

Do preloma tračnica dolazi zbog nehomogenosti čelika tračnice ili tvorničke greške u samoj tračnici. Niske temperature pospješuju pucanje tračnica, vlačne sile koje u njima djeluju izazivaju pojavu dilatacionog otvora na mjestu preloma tračnice, a tome se u isto vrijeme suprotstavlja otpor kolosijeka (pod kojim se podrazumijeva otpor protiv pomicanja tračnice na pragovima ili otpor pragova u zastoru, odnosno onaj koji je od njih dvaju manji). Zbog toga će se otvaranje lomne dilatacije vršiti do onog momenta dok ne nastane ravnoteža između vlačnih sila u tračnicama i aktiviranog otpora kolosijeka, odnosno zastora.

Pri temperaturama ispod tačke smrzavanja otpor zastora se uvijek povećava. Ako je prije pada temperature zastor bio mokar, on će se smrznuti. Isti će slučaj biti i onda ako je prije smrzavanja padao mokar snijeg. U slučaju ako je padao suh snijeg, on će uslijed vibracija kolosijeka prodirati u zastor i ispunjavati postojeće praznine. Na taj način povezat će se jače sastavni dijelovi zastora i uslijed toga povećati njegov otpor protiv pomicanja pragova.

Prema našim dosadašnjim opažanjima smrzavanje zastora nastupa pri temperaturi od -5°C i zastor ostaje u tom stanju dok traju temperature ispod tačke smrzavanja, odnosno dok konačno ne odmrzne. Godine 1962. na pruzi Novska-Zagreb bilo je izvršeno ispitivanje otpora smrznutog zastora od tučenca na pruzi na kojoj je prethodne godine bio izvršen remont gornjeg stroja. U dugom traku koji je bio »oslobođen unutarnjih naprezanja« pri temperaturi tračnice od $+20^{\circ}\text{C}$ bile su pri temperaturi tračnice od -13°C na četiri razna mjesta prerezane tračnice. Pri tome su na mjestima prereza nastali otvori od prosječno 13 mm. Proračun na temelju tih podataka slaže se s ispitivanjima koja su izvršena u inozemstvu, te se može uzeti da otpor smrznutog zastora iznosi 25 do 30 kg/cm po metru kolosijeka.

Od odnosa koji će u raznim prilikama postojati između otpora zastora koji se suprotstavlja pomicanju pragova u smjeru osi kolosijeka i načina pričvršćivanja tračnica na pragove, koji sprečava klizanje noge tračnice na pragovima, ovisit će koji će od ta dva elementa biti mjerodavan za veličinu otvora na mjestu preloma tračnice.

Praksa sa sadašnjim pričvršćivanjem tračnica 45 i 49 na rebraste podložne pločice s topolovim umetkom pokazala je da pri temperaturi tračnice ispod -5°C otpor zastora nadmašuje otpor pričvršćivanja tračnice. U takvom slučaju prije će doći do klizanja tračnice po pragovima nego do pomicanja pragova u zastoru. Pri temperaturi iznad -5°C situacija je suprotna i ne dolazi do klizanja tračnice na pragovima, već se pragovi pomiču u zastoru. Ova činjenica zahtijeva da se rezultati mjerenja otpora zastora koji su izneseni u III poglavlju dopune podacima o mjerenju otpora raznih tipova pričvršćivanja tračnica, kako s rebrastim podložnim pločicama (slika 28 i 29), tako i uz izravno polaganje tračnica s pričvršnim pločicama (DŽ 51 i 52) na pragove Z. 1 i Z. 2 (slika 30). Kod pragova Z. 1 i Z. 2 tračnice se polažu izravno na betonski prag uz podmetanje standardnih topolovih ili gumenih žljebastih umetaka ispod noge tračnice.

U Zavodu za ispitivanje materijala i konstrukcija Građevinskog fakulteta u Zagrebu izmjeren je otpor trenja protiv klizanja nožice tračnice na rebrastim podložnim pločicama. Nakon izrade dvodijelnih betonskih pragova Z. 1 i Z. 2 bio je na njima ispitan taj otpor na Pokusnom odsjeku Željezničkog transportnog poduzeća Zagreb. U ovim ispitivanjima bili su dobiveni uz normalno pritegnute stojeće vijke, tj. zazor na dvostrukim groverovim prstenovima od 1,2 mm, ovi rezultati:

Tabela V

Tip praga	Način pričvršćivanja	Otpor protiv klizanja tračnice na pragovima u kg	
		Na jednom pragu	Po tekućem m kolosijeka
Drveni ili betonski IM. 2d	Rebrasta podložna pločica s topolovim umetkom	1400	2154
Dvodijelni betonski pragovi Z. 1 i Z. 2	S topolovim umetkom ispod noge tračnice i s čeličnim pločicama između betona i pričvrstne pločice	4800	7350
	Ispod noge tračnice i između pričvrstnih pločica i betona gumeni umeci	2000	3070

Veličina otpora po tekućem metru kolosijeka data je za obje tračnice uz razmak pragova od 65 cm.

Nakon preloma tračnice pojavljuje se na tom mjestu razmak među krajevima tračnica, koji se povećava dok ne dođe do ravnoteže sila. Uzmemo li da se tračnica sa svake strane loma skraćuje na dužini » x_p « a van toga područja ostaje postojeća ravnoteža između vlačne sile u tračnici i otpora kolosijeka, u tom slučaju ostali dio kolosijeka može se smatrati kao upet. Pri tome ćemo uzeti da otpor zastora » p « na obje strane od lomne dilatacije ima istu vrijednost.

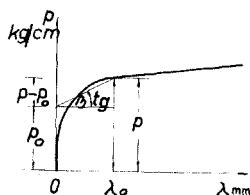
a) Slučaj nesmrznutog zastora

Ako zastor nije smrznut, može se uzeti da se odnos između veličine pomaka i vrijednosti otpora zastora mijenja po zakonu:

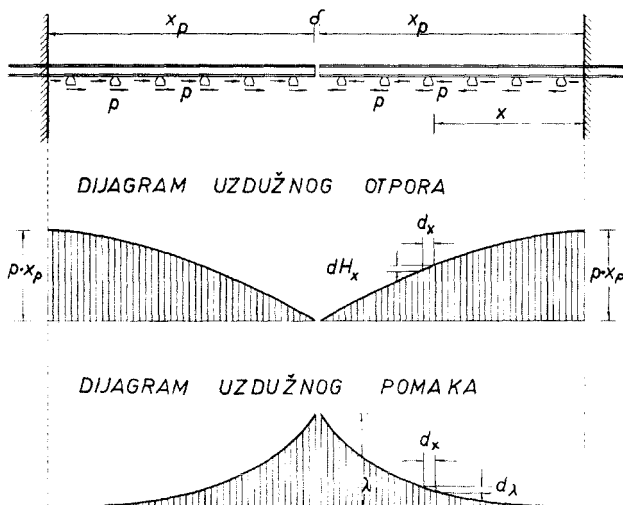
$$p(\lambda) = p_0 + K\lambda. \quad (1)$$

Vrijednost koeficijenta » K « mora se pažljivo odabrati i na temelju dijagrama (slika 36) izraziti jednadžbom:

$$K = \operatorname{tg} \beta = \frac{p - p_0}{\lambda_0}.$$



Slika 36. Dijagram uzdužnog otpora kolosijeka



Slika 37. Dijagrami uzdužnih sila i pomaka na mjestu preloma tračnice u neprekinutom kolosijeku

Veličina uzdužnog otpora kolosijeka i uzdužnog pomaka krajeva tračnice bit će simetrična s obzirom na mjesto preloma tračnice, kako se to vidi na slici 37. Usljed te simetričnosti maksimalna veličina lomne dilatacije bit će jednaka sumi pomaka oba kraja tračnica na mjestu preloma, pa prema tome postoji odnos:

$$\delta = 2 \lambda, \quad (2)$$

gdje su:

δ = maksimalni otvor dilatacije kod preloma

λ = pomak jednog kraja tračnice.

Pomak jednog kraja tračnice » λ « može se izračunati superpozicijom rezultata djelovanja unutarnje vlačne sile u tračnici, koja nastoji povećati razmak krajeva tračnice i djelovanja otpora zastora, koji se tome suprotstavlja. Uslijed djelovanja uzdužne vlačne sile » H «, ako ne bi bilo otpora kolosijeka » p «, pomaknuo bi se kraj tračnice za » λ_t «, a djelovanje otpora kolosijeka moglo bi se prikazati kao pomak kraja tračnice u obratnom smjeru za » λ_p «. Ovo uzajamno djelovanje na elementu dužine » dx « može se predočiti jednadžbom:

$$d\lambda = d\lambda_t - d\lambda_p, \quad (3)$$

gdje je:

$$d\lambda_t = \alpha \cdot \Delta t \, dx$$

$$d\lambda_p = \frac{H_x \cdot dx}{EF}.$$

Kod toga su:

α = koeficijent linearnog istezanja čelika od promjene temperature

Δt = razlika u grd (gradi, stupnjevi) između temperature pri kojoj je dugi trak »oslobođen unutarnjih naprežanja« i temperature pri kojoj je došlo do preloma tračnice

E = modul elastičnosti čelika

F = poprečni presjek tračnice.

Iz uvjeta ravnoteže elementarne dužine » dx « slijedi:

$$dH_x = p(\lambda) \, dx.$$

Integrirajmo ovu diferencijalnu jednadžbu:

$$H_x = \int_x^{x_p} p(\lambda) \, dx.$$

Uvrstivši vrijednost » H_x « u jednadžbu za » $d\lambda p$ «, imamo:

$$d\lambda_p = \frac{dx}{EF} \int_x^{x_p} p(\lambda) dx.$$

Dobivenu vrijednost uvrstimo u jednadžbu (3) i podijelimo sa dx .

$$\frac{d\lambda}{dx} = a \cdot \Delta t - \frac{1}{EF} \int_x^{x_p} p(\lambda) dx. \quad (4)$$

Ako tu jednadžbu deriviramo po » x «, dobivamo:

$$\frac{d^2\lambda}{dx^2} = \frac{p(\lambda)}{EF}. \quad (5)$$

U diferencijalnu jednadžbu (5) uvedimo supstituciju:

$$\frac{d\lambda}{dx} = t; \quad \frac{d^2\lambda}{dx^2} = t \frac{dt}{d\lambda}; \quad t \frac{dt}{d\lambda} = \frac{p(\lambda)}{EF}.$$

Uzimajući u obzir da je za:

$$x = 0; \quad \lambda = 0; \quad \frac{d\lambda}{dx} = t = 0, \quad (6)$$

dobivamo:

$$t = \sqrt{\frac{2}{EF} \int_0^\lambda p(\lambda) \cdot d\lambda},$$

tj.

$$\frac{d\lambda}{dx} = \sqrt{\frac{2}{EF} \int_0^\lambda p(\lambda) \cdot d\lambda}. \quad (7)$$

Riješimo li jednadžbu (7) po dx :

$$dx = \frac{d\lambda}{\sqrt{\frac{2}{EF} \int_0^\lambda p(\lambda) \cdot d\lambda}}$$

ili nakon integracije, uzevši u obzir početne uvjete (6), dobijemo:

$$x = \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{\frac{2}{EF} \int_0^\lambda p(\lambda) \cdot d\lambda}}. \quad (8)$$

Ako u jednadžbu (8) uvrstimo jednadžbu (1) uzdužnog otpora kolo-sijeka, dobijemo:

$$x = \int_0^\lambda \frac{d\lambda}{\sqrt{\frac{1}{EF} (K\lambda^2 + 2p_0\lambda)}}. \quad (8a)$$

Transformirajmo kvadratnu funkciju od λ :

$$K\lambda^2 + 2p_0\lambda = K \left(\lambda^2 + \frac{2p_0}{K}\lambda \right) = K \left[\left(\lambda + \frac{p_0}{K} \right)^2 - \frac{p_0^2}{K^2} \right],$$

tj.

$$K\lambda^2 + 2p_0\lambda = \frac{(K\lambda + p_0)^2}{K} - \frac{p_0^2}{K}$$

i uvedimo supstituciju u jednadžbu (8a):

$$\begin{aligned} K\lambda + p_0 &= p_0 z; \quad d\lambda = \frac{p_0}{K} dz; \quad \lambda = 0; \quad z = 1; \quad \lambda = \lambda; \\ z &= \frac{K\lambda + p_0}{p_0}. \end{aligned}$$

Tada je:

$$x = \sqrt{EF} \int_1^{\frac{K\lambda + p_0}{p_0}} \frac{\frac{p_0}{K} dz}{\sqrt{\frac{p_0^2}{K} z^2 - \frac{p_0^2}{K}}} = \sqrt{\frac{EF}{K}} \int_1^{\frac{K\lambda + p_0}{p_0}} \frac{dz}{\sqrt{z^2 - 1}},$$

tj.

$$x = \sqrt{\frac{EF}{K}} \cdot \operatorname{arch} z \Big|_1^{\frac{K\lambda + p_0}{p_0}}$$

ili

$$z = \sqrt{\frac{EF}{K}} \cdot \operatorname{arch} \frac{K\lambda + p_0}{p_0}. \quad (9)$$

Iz ove jednadžbe je:

$$\frac{K\lambda + p_0}{p_0} = \operatorname{ch} \left(\sqrt{\frac{K}{EF}} \cdot x \right)$$

ili

$$\lambda = \frac{p_0}{K} \left(\operatorname{ch} \sqrt{\frac{K}{EF}} \cdot x - 1 \right). \quad (10)$$

Dužina pomičnog dijela » x_p « na mjestu preloma neprekinutog kolosijeka odredit ćemo iz uvjeta ravnoteže temperaturne sile H , koja izaziva pomak kraja dugog traka i sile otpora kolosijeka:

$$H = \alpha \cdot EF \Delta t = \int_0^{x_p} p(\lambda) dx = \int_0^{x_p} (p_0 + K\lambda) dx.$$

Uvrštavanjem izraza za » λ « iz jednadžbe (10) imamo:

$$\alpha EF \Delta t = p_0 \int_0^{x_p} \left(\operatorname{ch} \sqrt{\frac{K}{EF}} x \right) dx,$$

tj.

$$\sqrt{\frac{EF}{K}} p_0 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{K}{EF}} x_p = \alpha EF \Delta t.$$

Iz ove jednadžbe izračunat ćemo dužinu » x_p « na mjestu preloma tračnice u neprekinutom kolosijeku:

$$x_p = \sqrt{\frac{EF}{K}} \operatorname{arsh} \frac{\alpha EF \Delta t}{p_0} \sqrt{\frac{K}{EF}}. \quad (11)$$

Uvrstimo li u jednadžbu (10) $x = x_p$, dobijemo:

$$\lambda = \frac{p_0}{K} \left[\operatorname{ch} \operatorname{arsh} \frac{\alpha EF \Delta t}{p_0} \sqrt{\frac{K}{EF}} - 1 \right].$$

Kako je:

$$\operatorname{ch} (\operatorname{arch} z) = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 (\operatorname{arsh} z)} = \sqrt{1 + z^2},$$

promjena dužine krajeva neprekinutog kolosijeka na mjestu preloma » λ « jednaka je:

$$\lambda = \frac{p_0}{K} \left[\sqrt{1 + \frac{K}{p_0^2} \alpha^2 EF \Delta t^2} - 1 \right], \quad (12)$$

odnosno maksimalna dilatacija » δ « u slučaju nesmrznutog zastora jednaka je:

$$\delta = \frac{2 p_0}{K} \left[\sqrt{1 + \frac{K}{p_0^2} \alpha^2 EF \Delta t^2} - 1 \right]. \quad (13)$$

b) Slučaj smrznutog zastora

U ovom slučaju mjerodavan je otpor protiv klizanja tračnice na pragovima, koji ima konstantnu vrijednost za sve vrijeme klizanja, kako su to pokazala izvršena ispitivanja. Uslijed toga jednadžba (1) dobiva oblik:

$$p(\lambda) = p. \quad (14)$$

Proračun u ovom slučaju vrši se na isti način kao kod nesmrznutog zastora, s tom razlikom da u jednadžbu (8) uvrstimo otpor zastora po jednadžbi (14), te dobijemo:

$$x = \int_0^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{\frac{2}{EF} p}} = \sqrt{\frac{EF}{2}} \int_0^{\lambda} \frac{d\lambda}{\sqrt{p\lambda}} = \sqrt{\frac{EF}{2p}} \cdot 2 \int_0^{\lambda} \frac{d\lambda}{2\sqrt{\lambda}}$$

odnosno:

$$x = \sqrt{\frac{2EF}{p}} \sqrt{\lambda} \quad (15)$$

ili

$$\lambda = \frac{p}{2EF} x^2. \quad (16)$$

Dužinu pomičnog dijela » x_p « na mjestu preloma neprekinutog kolosijeka odredit ćemo iz uvjeta ravnoteže temperaturne sile » H «, koja izaziva pomak kraja dugog traka i sile otpora kolosijeka:

$$H = \alpha EF \Delta t = \int_0^{x_p} p dx = p x_p.$$

Iz ove jednadžbe izračunat ćemo dužinu pomičnog dijela neprekinutog kolosijeka » x_p « na mjestu pucanja tračnice:

$$x_p = \frac{\alpha EF \Delta t}{p}. \quad (17)$$

Uvrstimo li u jednadžbu (16) $x = x_p$, dobijemo promjenu dužine kraja neprekinutog kolosijeka » λ « na mjestu preloma tračnice:

$$\lambda = \frac{\alpha^2 EF \Delta t^2}{2p}, \quad (18)$$

odnosno maksimalna dilatacija » δ « u slučaju smrznutog zastora jednaka je:

$$\delta = \frac{\alpha^2 EF \Delta t^2}{p}. \quad (19)$$

VI. PRORAČUN KRITIČNE SILE KOJA UZROKUJE IZVIJANJE NEPREKINUTOG KOLOSIJEKA

Proračun kritične sile kod koje će se kolosijek izbaciti pri visokoj temperaturi većina autora (Meier, Raab, Nemesdy, Numata, Engel i dr.) temelji na primjeni metode potencijalne energije, s time da na određenoj dužini deformiranog kolosijeka postavi jednakost energije i mehaničkog rada. Druga grupa autora (Sackmauer, Levi, Martinet i dr.) izračunava vrijednost kritične sile pomoću diferencijalne jednadžbe elastične linije. Iako ima izvjesnih nedostataka, kao što je samovoljno pretpostavljanje oblika deformacije po kojoj će se izbaciti kolosijek, metoda potencijalne energije pokazala se kao najprihvatljivija za proračun kritične sile. Izbacivanje kolosijeka pojavljuje se uvijek na onom dijelu gdje postoji najnepovoljnija deformacija smjera.

A. VRIJEDNOST ELASTICNOG POTENCIJALA U PROCESU IZBACIVANJA KOLOSIJEKA

Pri porastu temperature u neprekinutom kolosijeku javljaju se u tračnicama tlačne sile »H«, koje nastoje izazvati izvijanje kolosijeka. Izvijanju se suprotstavlja otpor prema savijanju obiju tračnica, bočni otpor kolosijeka koji pruža zastor i krutost kolosiječne rešetke.

Vrijednost ukupnog elastičnog potencijala » Φ « dana je izrazom:

$$\Phi = R_s + R_q + R_u - R_h, \quad (20)$$

gdje je:

R_s = radnja savijanja tračnica

R_q = radnja svladavanja otpora zastora

R_u = radnja okretnog momenta pri deformaciji kolosiječne rešetke

R_h = radnja tlačne sile »H«.

a) Radnja sile pritiska

Deformacija kolosijeka uzrokuje povećanje njegove dužine na mjestu greške smjera, te uslijed toga dolazi do negativnog mehaničkog rada

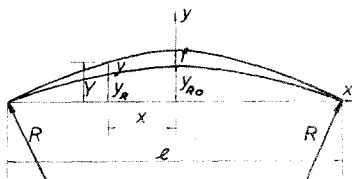
dužini » Δl « u oba tračnička traka, gdje je » Δl « razlika između dužine iskrivljenosti na mjestu deformacije smjera i odgovarajuće tetive.

$$R_h = -H \Delta l = -H \frac{1}{2} \int_0^l y'^2 dx. \quad (21)$$

Kod kolosijeka u luku taj rad tlačne sile dan je jednadžbom:

$$R_{h_R} = -H \Delta l_R,$$

gdje je » Δl_R « razlika između dužine kolosijeka u luku prije pojave deformacije smjera i one kod koje je nastupila deformacija smjera (slika 38).



Slika 38. Dio luka na kojem se nalazi deformacija kolosijeka

$$\Delta l_R = \frac{1}{2} \int_0^l Y'^2 dx - \frac{1}{2} \int_0^l y_R'^2 dx.$$

Prikažemo li kružni luk približno jednadžbom parabole:

$$y_R = \frac{l^2}{4} - x^2,$$

odnosno prema slici 38

$$Y = y_R + y.$$

Nakon sređivanja gornjih jednažbi vrijednost radnje tlačne sile iznosi kod kolosijeka u luku:

$$R_h = -\frac{H}{2} \int_0^l y'^2 dx + H \frac{x}{R} \int_0^l y' dx. \quad (22)$$

Vrijednost integrala u izrazu (21) i (22) može se prikazati za zadani oblik krivulje kao funkcija strelice » f « i dužine » l «, te dobijemo:

$$R_h = -H a_1 \frac{f^2}{l} \quad (21 a)$$

$$R_{hR} = -H a_1 \frac{f^2}{l} - H a_6 \frac{fl}{R}, \quad (22 a)$$

gdje koeficijenti a_1 i a_6 ovise samo o obliku krivulje.

b) Radnja savijanja tračnica

Radnja savijanja tračnica može se izraziti kao potencijalna energija savijanja, te je njena vrijednost data izrazom:

$$R_s = \frac{EJ}{2} \int_0^l y''^2 dx, \quad (23)$$

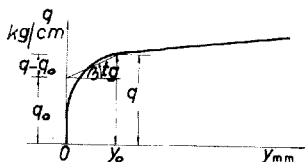
odnosno za zadani oblik deformacije kolosijeka:

$$R_s = EJ a_2 \frac{f^2}{l^3}, \quad (23 a)$$

gdje a_2 ovisi samo o obliku krivulje.

c) Radnja svladavanja otpora zastora

Bočni otpor zastora je ovisan o pomaku » y «, tj. o veličini deformacije smjera kolosijeka. Na slici 39 dat je dijagram bočnog otpora zastora u ovisnosti o pomaku.



Slika 39. Dijagram bočnog otpora kolosijeka

Veličinu bočnog otpora prema slici 39 možemo aproksimirati linearnom funkcijom oblika:

$$q(y) = q_0 + B y.$$

Vrijednost koeficijenta »B« dobije se iz dijagrama i iznosi

$$B = \operatorname{tg} \beta = \frac{q - q_0}{y_0}.$$

Radnja koja otpada na jedan kolosiječni elemenat deformiranog dijela kolosijeka dužine »dx« iznosi:

$$dR_q = dx \int_0^y q(y) dy = dx \int_0^y (q_0 + By) dy.$$

Ukupna radnja na čitavom dijelu deformacije smjera kolosijeka iznosi:

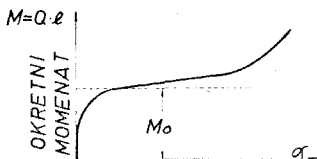
$$R_q = \int_0^l \int_0^y (q_0 + By) dx dy = q_0 \int_0^l y dx + \frac{B}{2} \int_0^l y^2 dx, \quad (24)$$

odnosno za zadani oblik deformacije kolosijeka

$$R_q = q_0 a_3 fl + B a_4 f^2 l, \quad (24 a)$$

gdje a_3 i a_4 ovise samo o obliku krivulje.

Radnju koja se vrši pri deformaciji kolosiječne rešetke uslijed privrščivanja tračnice za pragove odredit ćemo pomoću okretnog momenta » M «. Na slici 40. dat je dijagram ovisnosti okretnog momenta o promjeni kuta zakretanja.



Slika 40. Dijagram ovisnosti okretnog momenta o promjeni kuta zakretanja

Uzmemo li vrijednost okretnog momenta kao konstantu » M_0 «, u tom slučaju na kolosiječnu rešetku s razmakom pragova » i « djeluju dva momenta » M_0 «, te imamo:

$$m = \frac{2 M_0}{i}.$$

Elementarna radnja koja otpada na jedan kolosiječni elemenat deformiranog dijela kolosijeka dužine » dx « iznosi:

$$d R_m = dx \int_0^a \frac{2 M_0}{i} d\alpha.$$

U praksi gdje imamo veće deformacije smjera može se uzeti da je kut zakretanja » α « jednak prvoj derivaciji deformacije smjera, tj. $\alpha \approx y'$. Prema tome, ukupna radnja na čitavom dijelu deformacije smjera iznosi:

$$R_m = \int_0^l \int_0^{y'} \frac{2 M_0}{i} dx dy' = \frac{2 M_0}{i} \int_0^l y' dx, \quad (25)$$

odnosno za zadani oblik deformacije kolosijeka

$$R_m = \frac{2 M_0}{i} a_s f, \quad (25 a)$$

gdje a_s ovisi samo o obliku krivulje.

Veličinu kritične sile » H_{kr} « odredit ćemo metodom energije tako da ćemo promatrati dio kolosijeka dužine » l «, čiji je smjer deformiran. Kritična sila bit će jednaka parcijalnoj derivaciji ukupnog elastičnog potencijala po strelici deformacije smjera » f «. Granično stanje ravnoteže pojavljuje se kod one sile pritiska » H_{kr} « kod koje mala promjena strelice » f « ne utječe na veličinu energije.

a) Kritična sila kod kolosijeka u pravcu

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial f} &= 2 EI a_2 \frac{f}{l^3} + q_0 a_3 l + 2 B a_4 l f + \\ &+ \frac{2 M_0}{i} a_5 - 2 H a_1 \frac{f}{l} = 0. \end{aligned}$$

Iz te jednadžbe dobijemo vrijednost kritične sile kod kolosijeka u pravcu, koja iznosi:

$$H_{kr} = \frac{EI}{l^2} \frac{a_2}{a_1} + q_0 \frac{a_3}{2 a_1} \frac{l^2}{f} + B l^2 \frac{a_4}{a_1} + \frac{M_0}{i} \frac{a_5}{a_1} \frac{l}{f}. \quad (26)$$

b) Kritična sila kod kolosijeka u luku

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_R}{\partial f} &= 2 EI a_2 \frac{f}{l^3} + q_0 a_3 l + 2 B a_4 f l + \\ &+ \frac{2 M_0}{i a_5} - 2 H a_1 \frac{f}{l} - H a_6 \frac{l}{R} = 0. \end{aligned}$$

Iz te jednadžbe dobijemo vrijednost kritične sile kod kolosijeka u luku, koja iznosi:

$$H_{kr_R} = \frac{\frac{EI}{l^2} \frac{a_2}{a_1} + q_0 \frac{a_3}{2 a_1} \frac{l^2}{f} + B l^2 \frac{a_4}{a_1} + \frac{M_0}{i} \frac{a_5}{a_1} \frac{l}{f}}{1 + \frac{a_6}{2 a_1} \cdot \frac{l^2}{R f}}. \quad (27)$$

VII. PRIMJERI PRORAČUNA MAKSIMALNOG RAZMAKA KOJI NASTAJE NA MJESTU PRELOMA TRAČNICE U NEPREKINUTOM KOLOSIJEKU

Veličinu maksimalne dilatacije koja nastaje na mjestu preloma tračnice 49 u neprekinutom kolosijeku na drvenim i betonskim pragovima tipova IM. 2d, Z. 1 i Z. 2 položenim s razmakom od 65 cm izračunat ćemo pomoću jednadžbi (13) i (19).

Pri tome ćemo pretpostaviti da je neprekinuti tračnički trak »oslobođen unutarnjih naprezanja« kod tako zvane »potrebne« temperature, koja se obično uzima sa $+20^{\circ}\text{C}$, i da je do preloma tračnica došlo kod nesmrznutog zastora pri temperaturi tračnice od -5°C , a kod smrznutog zastora pri temperaturi tračnice od -30°C .

Pod »oslobađanjem unutarnjih naprezanja« podrazumijeva se oslobađanje tračnica dugog traka od vlačnih i tlačnih naprezanja koja u njima postoje zbog toga što nije bilo »potrebne« temperature pri ugrađivanju i svarivanju tračničkih trakova. To se postiže oslobađanjem tračničkog traka veze s pragovima i omogućivanjem da se tračnica pri određenoj »potrebnoj« temperaturi može potpuno produžiti, odnosno skratiti.

Veličine » p_0 « i » K « iz jednadžbe (13) dobit ćemo iz dijagrama uzdužnog otpora zastora datih u III poglavlju s time da će se uzdužni otpor koji je dobiven po metru kolosijeka za oba tračnička traka svesti na jedan tračnički trak i kao takav uzeti u proračun. Za veličine otpora kolosijeka » p_0 « u jednadžbi (19) uzet ćemo kao mjeroдавne ove vrijednosti:

- kod pričvršćivanja pomoću rebrastih podložnih pločica otpor trenja između noge tračnice i podložne pločice (2154 kg/m);
- kod praga Z. 1 i Z. 2 otpor smrznutog zastora (2500 kg/m).

U oba slučaja važe ove ostale vrijednosti:

$$\alpha = 0,0000115; \quad E = 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2; \quad F = 62,48 \text{ cm}^2.$$

Ako polazimo od temperature tračnice od $+20^{\circ}\text{C}$ u toku »oslobađanja« temperature smrzavanja zastora od -5°C i ekstremno niske temperature od -30°C , bit će:

za slučaj nesmrznutog zastora $\Delta t = 25^{\circ}$,

za slučaj smrznutog zastora $\Delta t = 50^{\circ}$.

Uvrstimo li gornje vrijednosti u jednadžbe (13) i (19), dobit ćemo konačne jednadžbe (13a i 19a) za proračun veličine » δ «.

a) Za slučaj nesmrznutog zastora važi jednačnja:

$$\delta = \frac{2 p_0}{K} \left[\sqrt{1 + \frac{K}{p_0^2} 10,329} - 1 \right] \quad (13a)$$

Odgovarajuće izračunate vrijednosti » δ « date su u tabeli:

*Veličine dilatacije u slučaju preloma tračnice pri temperaturi -5°C
kod nesmrznutog zastora*

Tabela VI

Oblik zastorne prizme	Veličina maksimalne dilatacije u mm			
	Drveni prag	Betonski IM. 2d	Betonski Z. 1	Betonski Z. 2
Obična prizma, podbijena	22,3	26,6	21,9	23,1
Pojačana prizma podbijena	17,9	24,7	20,3	22,3
Obična prizma, suflaž	26,3	29,3	22,6	25,4
Pojačana prizma, suflaž	21,8	28,7	21,6	22,6

b) Za slučaj smrznutog zastora:

Kod betonskih pragova IM. 2d i drvenih dolazi do klizanja tračnice po pragu, a kod pragova Z. 1 i Z. 2 pričvršćivanje ne dopušta klizanje tračnice, nego popušta zastor.

$$\delta = \frac{41,315}{p} \quad (19a)$$

Vrijednosti » δ « izračunate pomoću jednačnje (19a) date su u tabeli:

*Veličine dilatacije u slučaju preloma tračnice pri temperaturi -30°C
kod smrznutog zastora*

Tabela VII

Vrsta praga	Dilatacija u mm	Popušta
Drveni prag	38,3	otpor pričvršćivanja
Betonski IM. 2d	38,3	
Betonski Z. 1	33,1	otpor zastora
Betonski Z. 2	33,1	

Ako se promatraju rezultati prikazani u tabelama VI i VII, mogu se izvesti ovi zaključci:

1. Da su kod smrznutog i nesmrznutog zastora u kolosijeku s pragovima Z. 1 i Z. 2 dilatacije na mjestu preloma tračnice manje nego kod pragova IM. 2d za oko 15–20%
2. Kod nesmrznutog zastora najprije dolazi u svim slučajevima do klizanja pragova u zastoru, pa stoga presudnu ulogu ima oblik praga i zastorna prizma, te način stabilizacije pragova (podbija-nje ili suflaž). Usljed toga imamo veliku raznolikost u vrijednostima » δ «.
3. Kod smrznutog zastora imamo manju raznolikost rezultata, tako da:
 - kod drvenih i IM. 2d pragova koji imaju rebrastu podložnu pločicu (slika 28 i 29) popušta pričvršćenje i dolazi do klizanja tračnice. Budući da je pričvršćenje isto, imamo i iste vrijednosti dilatacije » δ «.
 - pričvršćenje na pragovima Z. 1 i Z. 2 (slika 30) ne dopušta klizanje tračnice na pragovima, i dolazi do klizanja pragova u zastoru. Veličina » δ « kod oba praga je ista, jer je zbog jednostavnosti zanemarena mala razlika u dimenzijama ovih pragova, pa je uzeta i manja vrijednost otpora zastora od 2500 kg/m.

VIII. PRIMJERI PRORAČUNA KRITIČNE SILE PRI KOJOJ DOLAZI DO IZVIJANJA NEPREKINUTOG KOLOSIJERA

Veličinu kritične sile pri kojoj dolazi do izvijanja neprekinutog kolosijeka na drvenim i betonskim IM. 2d, Z. 1 i Z. 2 pragovima s razmakom od 65 cm izračunat ćemo pomoću jednadžbe (26) za kolosijek u pravcu, a po jednadžbi (27) za kolosijek u krivinama $R = 600$ i $R = 300$ m.

Veličine » q_0 « i » B « izračunat ćemo na temelju dijagrama bočnog otpora zastora datih u III. poglavlju. Koeficijent » k_0 « izračunat ćemo na temelju dijagrama zavisnosti okretnog momenta o promjeni kuta zakretanja datih u IV poglavlju.

Za proračun kritične sile pretpostavit ćemo da je kod kolosijeka došlo do prethodne greške smjera u obliku sinusnog poluvala na dužini $l = 6,0$ m s veličinom strelice $f = 2$ cm. Jednadžba oblika deformacije osi kolosijeka data je izrazom:

$$y = f \sin \frac{\pi x}{l}$$

Vrijednost pojedinih koeficijenata a_1 , a_2 , a_3 , a_4 i a_6 koji se nalaze jednačbama (26) i (27) za deformaciju u obliku sinusnog poluvala računat ćemo na ovaj način:

$$\frac{1}{2} \int_0^l y''^2 dx = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\pi^2 f^2}{l^2} \cos^2 \frac{\pi x}{l} dx = 2,4674 \frac{f^2}{l} = a_1 \frac{f^2}{l}$$

$$a_1 = \underline{2,4674}$$

$$\frac{1}{2} \int_0^l y''^2 dx = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{\pi^4 f^2}{l^4} \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx = 24,3523 \frac{f^2}{l^3} = a_2 \frac{f^2}{l^3}$$

$$a_2 = \underline{24,3523}$$

$$\int_0^l y dx = f \int_0^{\frac{l}{2}} \sin \frac{\pi x}{l} dx = 0,6375 fl = a_3 fl$$

$$a_3 = \underline{0,6375}$$

$$\frac{1}{2} \int_0^l y^2 dx = \int_0^{\frac{l}{2}} f^2 \sin^2 \frac{\pi x}{l} dx = 0,25 f^2 l = a_4 f^2 l$$

$$a_4 = \underline{0,25}$$

$$\int_0^l |y'| dx = \frac{\pi f}{l} \int_0^{\frac{l}{2}} \cos \frac{\pi x}{l} dx = 2 f = a_5 f$$

$$a_5 = \underline{2}$$

$$\frac{x}{R} \int_0^l y' dx = \frac{f\pi}{Rl} \int_0^{\frac{l}{2}} x \cos \frac{\pi x}{l} dx = 0,637 \frac{fl}{R} = a_6 \frac{fl}{R}$$

$$a_6 = \underline{0,637}$$

U proračun ćemo uzeti kolosijek s tračnicama 49, čiji je aksijalni moment tromosti s obzirom na njihovu vertikalnu os $I = 319 \text{ cm}^4$, a razmak pragova $i = 65 \text{ cm}$.

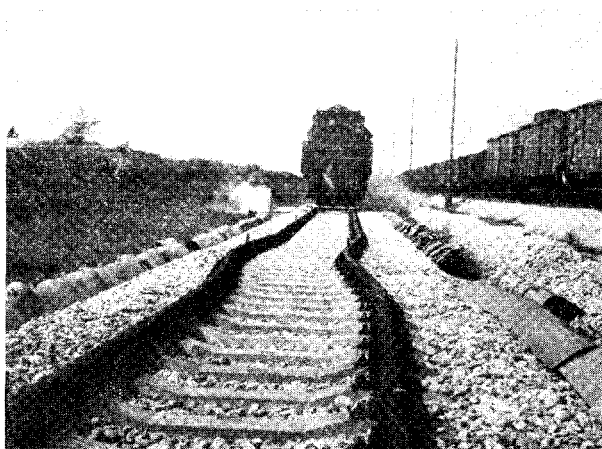
Uvrstimo li gornje vrijednosti u jednadžbe (26) i (27), dobit ćemo:

Za slučaj kolosijeka u pravcu:

$$H_{kr} = 34988 + 23200 q_0 + 36476 B + 3,744 M_0$$

Za slučaj kolosijeka u luku:

$$H_{kr_R} = \frac{34988 + 23200 q_0 + 36476 B + 3,744 M_0}{1 + \frac{23200}{R}}$$



Slika 41. Pokusno »izbacivanje« kolosijeka na betonskim pragovima uz umjetno zagrijavanje tračnica parom iz lokomotive na stanici Zagreb-Borongaj

Proračun kritične sile za četiri spomenuta tipa pragova kod kolosijeka u pravcu i u krivinama $R = 600 \text{ m}$ i $R = 300 \text{ m}$ izvršen je za četiri vrste zastorne prizme po jednadžbama (26a) i (27a).

Dobiveni rezultati prikazani su u tabelama. Podstupci u tabelama za betonske pragove s oznakama: »topol.« i »guma« znače:

- kod IM. 2d samo vrstu uložka ispod noge tračnice
- kod Z. 1 i Z. 2 »topol.« znači topolov uložak ispod noge tračnice

i čelične pločice između pričvrstnih pločica i betona, odnosno »guma« – gumeni ulošci ispod noge tračnice i između podložnih pločica i betona.

Velicina kritične sile kod kolosijeka u pravcu

Tabela VIII

Oblik zastorne prizme	Velicina kritične sile u kg						
	Drveni prag	Betonski IM. 2d		Betonski Z. 1		Betonski Z. 2	
		topol.	guma	topol.	guma	topol.	guma
Obična prizma, podbijena	210024	269929	258694	296790	288179	271431	262820
Pojačana prizma, podbijena	264712	327937	316707	334902	326291	311702	303091
Obična prizma, suflač	188487	234134	222902	259831	251220	253367	244756
Pojačana prizma, suflač	229255	255349	244117	303750	295139	297782	289171

Velicina kritične sile kod kolosijeka u krivini $R = 600$ m

Tabela IX

Oblik zastorne prizme	Velicina kritične sile u kg						
	Drveni prag	Betonski IM. 2d		Betonski Z. 1		Betonski Z. 2	
		topol.	guma	topol.	guma	topol.	guma
Obična prizma, podbijena	151467	194670	186567	214041	207831	195753	189543
Pojačana prizma, podbijena	190907	236504	228405	241527	235317	224796	218586
Obična prizma, suflač	135935	168855	160754	187887	181177	182725	176515
Pojačana prizma, suflač	165336	184155	176117	219061	212851	214757	208547

Veličina kritične sile kod kolosijeka u krivini $R = 300$ m Tabela X

Oblik zastorne prizme	Veličina kritične sile u kg						
	Drveni prag	Betonski IM. 2d		Betonski Z. 1		Betonski Z. 2	
		topol.	guma	topol.	guma	topol.	guma
Obična prizma, podbijena	118437	152218	145883	167366	162510	153065	148209
Pojačana prizma, podbijena	149276	184930	178597	188858	184002	175775	170919
Obična prizma, suflač	106292	132033	125699	146524	141668	142879	138023
Pojačana prizma, suflač	129281	143996	137662	171291	166435	167925	163069

Veličinu porasta temperature tračnice »At« iznad one pri kojoj je duži trak bio »oslobođen unutarnjih naprezanja« do one pri kojoj će doći do izvijanja kolosijeka možemo izračunati pomoću jednadžbe:

$$\Delta t = \frac{H_{kr}}{2\alpha \cdot EF} = \frac{H_{kr}}{2874,08} \quad (28)$$

Vrijednosti »At«, za naše primjere izračunate po jednadžbi (28) date su u idućim tabelama:

Razlika temperature »At« između »kritične« i one pri »oslobađanju« kod kolosijeka u pravcu Tabela XI

Oblik zastorne prizme	Veličina promjene temperature Δt						
	Drveni prag	Betonski IM. 2d		Betonski Z. 1		Betonski Z. 2	
		topol.	guma	topol.	guma	topol.	guma
Obična prizma, podbijena	73,07	93,92	90,01	103,26	100,27	94,44	91,44
Pojačana prizma, podbijena	92,10	114,10	110,19	116,52	113,53	108,45	105,46
Obična prizma, suflač	65,58	81,46	77,55	90,40	87,41	88,15	85,16
Pojačana prizma, suflač	79,77	88,84	84,94	105,69	102,69	103,61	100,61

kod kolosijeka u luku R = 600 m

Tabela XII

Oblik zastorne prizme	Veličina promjene temperature Δt						
	Drveni prag	Betonski	IM. 2d	Betonski Z. 1		Betonski Z. 2	
		topol.	guma	topol.	guma	topol.	guma
Obična prizma, podbijena	52,70	67,73	64,91	74,47	72,31	68,11	65,95
Pojačana prizma, podbijena	66,42	82,29	79,47	84,04	81,87	78,21	76,05
Obična prizma, suflač	47,30	58,75	55,93	65,20	63,04	63,57	61,42
Pojačana prizma, suflač	57,53	64,07	61,28	76,22	74,06	74,72	72,56

*Razlika temperature » Δt « između »kritične« i one pri »oslobođanju«
kod kolosijeka u luku R = 300 m*

Tabela XIII

Oblik zastorne prizme	Veličina promjene temperature Δt						
	Drveni prag	Betonski	IM. 2d	Betonski Z. 1		Betonski Z. 2	
		topol.	guma	topol.	guma	topol.	guma
Obična prizma, podbijena	41,21	52,95	50,76	58,23	56,54	53,26	51,57
Pojačana prizma, podbijena	51,94	64,34	62,14	65,71	64,02	61,16	59,47
Obična prizma, suflač	36,98	45,94	43,73	50,98	49,29	49,71	48,02
Pojačana prizma, suflač	44,98	50,10	47,90	59,60	57,91	58,43	56,74

Opaska: Sve vrijednosti za kolosijeke u krivinama $R = 600$ m i
 $R = 300$ m odnose se na kolosijek bez »zaštitnih kapa«.

U idućoj tabeli sažeti su rezultati triju prethodnih tabela na taj način da su vrijednosti » Δt « kod svih betonskih pragova za sve vrste zastornih prizmi i načine održavanja stabilnosti kolosijeka izražene u postocima u odnosu na drveni prag.

Tabelarni prikaz odnosa u % između » Δt « kao rekapitulacija triju prethodnih tabela

Tabela XIV

Oblik zastorne prizme	Δt u % u odnosu na drvene pragove						
	Drveni prag	Betonski IM. 2d		Betonski Z. 1		Betonski Z. 2	
		topol.	guma	topol.	guma	topol.	guma
Obična prizma, podbijena	100	129	123	141	137	130	125
Pojačana prizma, podbijena	100	124	119	126	123	119	114
Obična prizma, suflaž	100	124	118	137	133	135	129
Pojačana prizma, suflaž	100	111	106	131	128	129	125

Promatrajući ovu tabelu, može se zaključiti da je stabilnost kolosijeka sa sva tri tipa betonskih pragova veća nego kod drvenih a da je kod pragova Z. 1 i Z. 2 općenito veća nego kod IM. 2d. Jedinu iznimku predstavlja slučaj pojačane zastorne prizme s podbijenim pragovima, gdje je stabilnost kod pragova Z. 2 za 5% manja nego kod pragova IM. 2d, ali je za 14 do 19% veća nego kod drvenih pragova. To povećanje stabilnosti, koja je izražena u potrebnom porastu » Δt «, iznosi u odnosu na drveni prag:

- kod IM. 2d s topolovim umetkom 11 — 29 %
- kod IM. 2d s gumenim umetkom 6 — 23 %
- kod Z. 1 s topolovim umetkom 31 — 41 %
- kod Z. 1 s gumenim umetkom 28 — 37 %
- kod Z. 2 s topolovim umetkom 29 — 30 %
- kod Z. 2 s gumenim umetkom 25 — 29 %

Prema tome, uz sve ostale iste uvjete kolosijek s pragovima Z. 1 i Z. 2 ima veću stabilnost nego s drvenim i betonskim IM. 2d pragovima (iznimku čine jedino pragovi Z. 2 u odnosu na pragove IM. 2d kod pojačane podbijene prizme).

Općenito veća stabilnost kolosijeka s pragovima Z. 1 i Z. 2 objašnjava se time da je otpor zastora kod tih pragova u svim prilikama veći, premda je krutost u čvorovima kolosiječne rešetke nešto manja. Ako analiziramo rezultate proračuna prema jednadžbama (26) i (27) vrijednosti dobivenih po tim jednadžbama, koje su predložene u tabellama, može se zaključiti da je u ukupnom otporu kolosijeka prema izvijanju učešće pojedinih komponenata ovo:

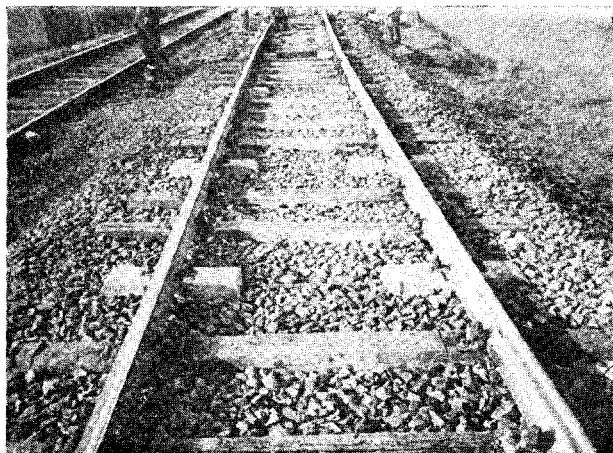
– otpor tračnice prema svijanju	10 — 20 %
– otpor zastora	65 — 85 %
– otpor kolosiječne rešetke	3 — 18 %

Budući da utjecaj otpora zastora općenito prevladava kod svih pragova, a otpor zastora kod pragova Z. 1 i Z. 2 također je općenito veći nego kod IM. 2d i uvijek veći nego kod drvenih pragova, time se objašnjava da je i u konačnom rezultatu stabilnost kolosijeka s pragovima Z. 1 i Z. 2 općenito veća.

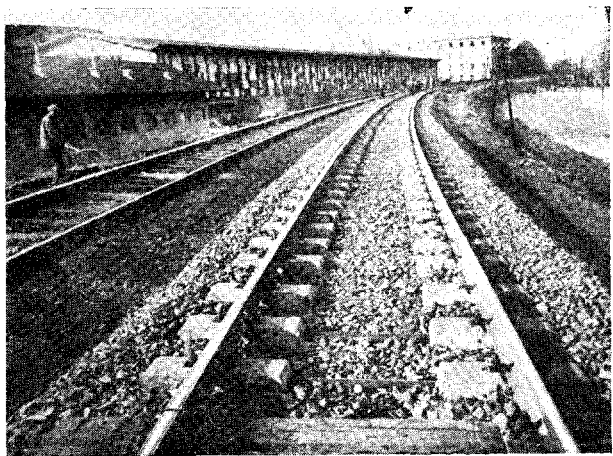
Ova činjenica je značajna jer može dovesti do znatnih ušteda na težini i vrijednosti pričvrsnog pribora na pragovima Z. 1 i Z. 2, kako sadašnjeg, tako i dvostrukog elastičnog pričvršćivanja, koje se proučava.

ZAKLJUČAK

Dvodijelni betonski pragovi Z. 1 i Z. 2 imaju znatne prednosti pred pragovima IM. 2d i drvenima jer su jeftiniji, lakše se proizvode, traže manju težinu pričvrsnog pribora, daju općenito veću stabilnost kolosijeka protiv izbacivanja, te dopuštaju manji otvor na mjestu pucanja tračnice u dugim trakovima. Budući da je i otpor protiv uzdužnog klizanja tračnice veći, nije potrebno ugrađivanje sprava protiv putovanja tračnica. Kako je i bočni otpor zastora veći, potreban je manji broj »zaštitnih kapa« u ostrim lukovima. Premda prednost sadašnjeg načina pričvršćivanja pomoću pričvrtnih pločica DŽ. 51 i 52 (Xa) daje uštedu na težini i cijeni čeličnog sitnog kolosiječnog materijala, ne smije se na tome stati, nego je potrebno nastaviti proučavanje mogućnosti domaće proizvodnje elastičnih pričvrtnih pločica. Prednost »dvostrukog elastič-



Slika 42. Pojedinačno ugrađeni pragovi Z. 1 i Z. 2 na mjestu dotrajalih drvenih pragova na pruzi Zagreb Gl. kol.-Zagreb Zap. kol



Slika 43. Pragovi Z. 1 (u prvom planu) i Z. 2 (u nastavku) u luku $R = 500$ m na pruzi Zagreb Gl. kol. - Zagreb Zap. kol.

nog» pričvršćivanja nije samo ekonomske prirode već i tehničke, jer osigurava nepopustljivu vezu tračnice s pragom i efikasno prigušuje vibracije tračnica i pragova pri prolazu vlakova.

Vodeći računa o kritičnoj situaciji u pogledu nabavke drvenih pragova za pojedinačnu zamjenu dotrajalih pragova u prugama, o kojoj je bilo govora na početku ove studije, izvršena je pojedinačna zamjena dotrajalih drvenih pragova na desnom kolosijeku pruge Zagreb Gl. kol. - Zagreb Zap. kol., i to pragovima Z. 1 i Z. 2 (slika 42). Pruga je na tom mjestu u luku $R = 500$ m s nadvišenjem $h = 100$ mm.

Posebno treba spomenuti korisne upute i sugestije koje su dali autoru prof. inž. Milko Sinković i prof. inž. Julij Gspan i time znatno olakšali izradu ove studije.

LITERATURA

- [1] Božičević, J.: Dilatacije na spojevima šina za vrijeme polaganja kolosijeka i u toku njegove eksploatacije, »Željeznice«, br. 7 i 8, 1961.
- [2] Božičević, J.: Kompleks faktora koji kod horizontalne deformacije kolosječne rešetke utječu na njezinu krutost, »Željeznice«, br. 4, 1966.
- [3] Božičević, J.: Proračun kritične sile koja prouzrokuje izvijanje (izbacivanje) neprekinutog kolosijeka u pravcu, »Građevinar«, br. 6, 1966.
- [4] Božičević, J.: Dugi trakovi šina (knjiga), Zagreb, februar 1962.
- [5] Božičević, J.: Suvremeni gornji stroj (knjiga), Zagreb, novembar 1966.
- [6] Casse, M.: L'influence de divers systemes d'attache rail traverse sur la rigidite transversale du châssis de voie, »Revue Generale des Chemins de fer« br. 9, 1958.
- [7] Engel, E.: Die Lagersicherheit lückenloser Eisenbahngleise, »Verein Deutscher Ingenieure«, Zeitschrift, April 1960.
- [8] Dermiane, G.: La voie moderne, Uzès (Gard), Novembar 1964.
- [9] Kogan, A.: Grafoanalitički metod opredelenija prodolnih sil i deformacij v bestykovom puti, Vestnik V. N. - I. I. Ž. T., broj 3, 1961.
- [10] Kogan, A.: Prodolnye sily i peremeščenija bestykovogo puti, Avtoreferat disertacii na soiskanie učenoj stepeni kandidata tehničkih nauk. Novosibirsk, 1963.
- [11] Kompanejev, N.: Kako racionalno iskoristiti zalihe pričvrtnih pločica tipa 35 (DŽ. 51 i 52) i spasiti ih od prodaje po cijeni starog željeza?, »Željeznički Vjesnik ZTP Zagreb«, broj 5-6, 1966.
- [12] Levi, R.: Elastične veze i duge zavarene šine, Prijevod prof. inž. M. Crvčanina, »Željeznice« 5-6, 1960.
- [13] Meier, R.: Ein vereinfachtes Verfahren zur theoretischen Untersuchung der Gleisverwerfung, »Organ für die Fortschritte des Eisenbahnwesens«, sv.20, 1937.

- [14] *Nemesdy, E.*: Berechnung waagerechter Gleisverwerfungen nach neuen ungarischen Versuchen, »Eisenbahntechnische Rundschau«, Decembar 1960.
- [15] *Peršin, S.*: Metod račeta reljsvoj kolei na ustojčivost, V. N. – I. I. Ž. T., broj 3, 1956.
- [16] *Peršin, S.*: Opredelenie smeščenij koncevogo učastka bestykovogo puti, Vestnik V. N. – I. I. Ž. T., broj 6, 1960.
- [17] *Sonneville, R.*: Contribution a la modernisation des voies ferrees, S. T. E., – D. E. F., Paris (XVI), predavanje na konferenciji u Bruxellesu, 19. 4. 1951.
- [18] *Sonneville, R.*: Traverses en beton et Chemin de Fer moderne, Conference faite le 5 Novembre 1952.
- [19] *Sonneville, R.*: La modernizacion de la via, durmiente de concreto o durmiente de madera?, Buenos Aires.
- [20] L'attache de rails A. D. pour traverses en beton, Bulletin AICCF, br. 1, 1961. Prema: »The Railway Gazette«, 27. 3. 1959.
- [21] Societe d'etudes ferroviaires: L'assemblage doublement elastique des rails sur les traverses en beton, Paris, 1. 10. 1963.

Primljeno za publikaciju 23. prosinca 1966. u Odjelu za matematičke, fizičke i tehničke nauke Jugoslavenske akademije u Zagrebu.

JOSIP BOŽIČEVIĆ

NEUE JUGOSLAWISCHE BETONSCHELLEN Z. 1 UND Z. 2*

EINLEITUNG

Um die schadhafte Holzschwellen zu ersetzen muss die jugoslawische Eisenbahnverwaltung jährlich ungefähr 1,600.000 Stück neuer Schwellen anschaffen. Die einheimische Holzindustrie kann jedoch jährlich nicht mehr als 900.000 Stück Schwellen zur Verfügung stellen, also beträgt der jährliche Ausfall ungefähr 700.000 Stück. Diese Umstände verursachen ein stetes Anwachsen des schon sowieso hohen Prozentes schadhafter Schwellen in den Eisenbahngleisen.

Von der Gesamtzahl von 20,5 Millionen eingebauter Schwellen sind ungefähr 3,7 Millionen schadhaft was 18% der Gesamtzahl der eingebauten Schwellen ausmacht. Solche Zustände sind besorgniserregend und beeinträchtigen die Sicherheit des Verkehrs.

Unsere Holzindustrie ist nicht im Stande eine grössere Menge von Holzschwellen als von der oben erwähnten Zahl zu liefern. Aus diesem Grunde muss man den Fehlbetrag mit entsprechender Zahl von Betonschwellen ersetzen, deren durchschnittliche Lebensdauer wir ziemlich höher ansetzen können als derjenigen der Holzschwellen.

Unter den Betonschwellen besteht jedoch ein ziemlicher Unterschied, sowie in der Art der Konstruktion, als auch in den Erzeugungsmethoden der Schwellen, was alles auf ihre Qualität bedeutenden Einfluss ausübt. Darum ist es notwendig bei der Auswahl der neuen Type der Schwelle Rechnung zu tragen, dass die Schwelle widerstandsfähiger, in folgedessen dauerhafter, dass die Erzeugung einfacher und in folgedessen nach Möglichkeit billiger sein soll. Ebenso soll die Befestigungsart der Schiene auf der Schwelle einfach sein ohne dass dadurch die Güte der Befestigung beeinträchtigt wäre.

* Originalüberschrift dieser Arbeit: *Novi jugoslavenski betonski pragovi Z. 1 i Z. 2.*

Wenn die Erzeugung der neuen Typen der Schwellen einfacher von der jetzigen wäre und dadurch die Erzeugung einer grösseren Menge von Schwellen möglich wäre, als das der Fall ist mit den heutigen Erzeugungsmöglichkeiten, würde dadurch der Druck auf unsere Waldbestände verringert und dadurch ermöglicht, das Prozent der schadhafte Schwellen stufenweise zu verringern.

Im Vergleich mit den jetzigen einteiligen Betonschwellen IM. 2d mit einer vorgespannten Armatur haben die neuen zweiteiligen Betonschwellen Z. 1 und Z. 2 gewisse Vorteile, die bei der Wahl neuerer Typen unserer Betonschwellen massgebend waren. Nach umfangreicher Erforschung bestehender Typen bei verschiedenen fortschrittlicheren Eisenbahnverwaltungen muss man die genannten Vorteile besonders betrachten:

- in Bezug auf die Schwelle vorzugsweise und
- in Bezug auf die Befestigung der Schiene auf der Schwelle.

In Abb. 1 können wir die allgemeine Ansicht der jetzigen und der neuen Betonschwellen betrachten.

Wenn wir eine erprobte Type der Betonschwelle benutzen wollen ist es nicht unbedingt notwendig, dass wir auch dieselbe Art der Befestigung der Schiene, die bei dieser Eisenbahnverwaltung angewendet wird, benutzen. Im Gegenteil, wir können diejenige Art der Befestigung der Schienen benutzen, die am meisten unseren Verhältnissen entspricht. Ebenso können wir im Laufe der Zeit, wenn notwendig, auf der bestehenden Betonschwelle die Art der Befestigung der Schienen ändern.

In dieser Abhandlung werden die Eigenschaften des Gleises mit Schienen 49 mit dem gewöhnlichen und verstärkten Querschnitt des Bettungskörpers, dann das Verhalten des Gleises beim einfachen Unterstopfen oder bei der Soufflage der Schwellen, besonders für die Holzschwelle und die erwähnten Typen der Betonschwellen, ausserdem noch in der Alternative mit den Einlagen unter dem Schienenfuss aus Pappeholz oder Hartgummi betrachtet werden.

In diesen Auslegungen werden für alle erwähnten Fälle betrachtet:

- der Längs- und Seitenwiderstand des Gleises,
- die Ramensteifigkeit des Gleisrostes,
- der grösste Abstand zwischen den Schienenenden, der beim Schienenbruch bei extremen tiefen Temperaturen eintreten kann,
- die Grösse der kritischen Kraft, welche bei hohen Temperaturen die Verwerfung des Gleises verursachen kann.

1. DIE KONSTRUKTIVEN EIGENHEITEN DER SCHWELLE

Z. 1 UND Z. 2

Die Schwellen Z. 1 und Z. 2 bestehen aus zwei Betonklötzen aus einfachem vibrierten Beton mit einer Armatur vom Standardbetonstahl $\varnothing$ 6 und $\varnothing$ 8 mm, welche miteinander durch einen Stab aus Schienenstahl verbunden sind, welcher nur etwas kürzer ist als die Schwelle.

In Abb. 2 und 3 sind die Querschnitte der Hälften der Betonschwellen Z. 1 und Z. 2 mit der alternativen Art der Armierung dargestellt. Die obere und die untere Hauptarmatur besteht aus vier, beziehungsweise sechs Stäben, die sekundäre Armatur besteht im ersten Fall (Abb. 2) aus gewöhnlichen gabelförmigen Stäben, im zweiten Fall (Abb. 3) aus einer ununterbrochenen ausgedehnten Spirale.

Die Schwellen Z. 1 sind für einen Achsdruck von 20 Tonen bestimmt, die Schwellen Z. 2 entsprechen einem Achsdruck von 18 Tonen. In der ersten Zeit sind als Verbindungsstäbe alte Schienen aus dem Abfall vorgesehen. Schienen von grösserem Gewicht als 20 kg/m werden der Länge nach in der Mitte des Schienensteiges so geschnitten, dass der Schienenkopf und der Schienenfuss mit dem zugehörigen Teil des Schienensteiges den Querschnitt des Verbindungsstabes bilden. Schienen von Schmalspurbahnen vom Gewicht 10–12 kg/m werden mit ihrem vollen Querschnitt ausgenützt.

Auf diesen Schwellen werden Schienen ohne Stahlunterlagsplatten eingebaut, während zwischen dem Schienenfuss und der Betonoberfläche Unterlagsplatten aus Pappelholz oder Hartgummi eingelegt werden, die nach festgelegten Formen und Dimensionen gefertigt werden. In diesen Fällen werden die Platten aus Hartgummi nicht mit gegenüberliegenden verstärkten Rändern versehen. Zur Befestigung der Schiene auf der Schwelle werden die normalisierten »starken« Befestigungsplättchen Type Xa (DZ 51 und 52) verwendet. Diese werden sich nicht direkt an die entsprechende schiefe Ebene des Betons anlehnen, sondern es werden zwischen den Plättchen und dem Beton Stahlplatten gelegt (bei Platten aus Pappelholz), beziehungsweise Platten aus Hartgummi (im Falle der Unterlagsplatten aus Hartgummi unter dem Schienenfuss) in der Grösse 65/25/5 bei Stahl, beziehungsweise 65/25/7 bei Hartgummi.

Die Art der Schienenbefestigung auf den Schwellen Z. 1 und Z. 2 ersieht man aus der Abb. 4, ihr Aussehen aus der Abb. 5, aus welcher gleichzeitig die Versuchsarbeiten zum Feststellen des Seitendurcks des Gleises im Zagreber Hauptbahnhof ersichtlich sind.

II. VERGLEICHUNG DER SCHWELLEN IM. 2d MIT SCHWELLEN Z. 1 UND Z. 2

Die Vergleichung wollen wir abgesondert für die Betonschwellen vorzugsweise und abgesondert für die Art der Schienenbefestigung auf den Schwellen durchführen.

A. Betonschwelle, vorzugsweise

Einteilige Betonschwellen mit vorgespannter Armatur haben neben positiven Eigenschaften auch gewisse negative.

1. Bei unseren Schwellen IM. 2d werden die Formen 24 Stunden nach Beendigung des Vibrierens abgenommen, mit anderen Worten, eine Form erzeugt in 24 Stunden eine Schwelle. Den Schwellen Z. 1 und Z. 2 werden gleich nach dem Vibrieren die Formen abgenommen. In dem Falle erzeugt eine Form in 8 Stunden ungefähr 120 Schwellen. Im Vergleich mit den ersten erzeugt also eine Form in 24 Stunden (Arbeit in 3 Schichten) 450 Schwellen. Daraus ersieht man sehr klar die Höhen der Investitionen für die teuren Formen.

Ausserdem bleibt nach der Entnahme der Formen von den Schwellen IM. 2d die »Laufbahn« mit diesen Schwellen in der Länge von ungefähr 100 m noch durch 3 bis 6 Tage besetzt bis zum völligen Abbinden des Betons und die »Bahn« kann während dieser Zeit nicht benützt werden zum Betonieren der folgenden Gruppe von ungefähr 40 Schwellen. Daraus ersieht man auch die Höhen der Investitionen für die Arbeitshallen.

2. Bei den Schwellen IM. 2d ist für die Armatur ein Draht ϕ 3 mm aus Spezialdraht von der Festigkeit cca 19.000 kg/cm² notwendig. Die Anschaffung dieses Drahtes kann man ohne Schwierigkeiten nicht durchführen, sie ist auch von der Einfuhr abhängig.

Für die Schwellen Z. 1 und Z. 2 wird gewöhnlicher Stahldraht für die Betonarmatur von ϕ 6 — 8 mm verwendet.

3. Die kurze Zeit seit dem Beginne der Erzeugung von Schwellen IM. 2d ist noch nicht hinreichend um feststellen zu können, ob nicht

eine eventuelle »Schrumpfung« der Armatur eintreten wird, d. h. ob zu einer Verminderung der Vorspannung kommen wird, was von der Haftspannung des Betons in den einzelnen Serien der produzierten Schwellen abhängig ist. Das alles kann nur die Zukunft zeigen.

Die Schwellen Z. 1 und Z. 2 aus gewöhnlichem vibrierten Beton, deren Festigkeit bis zu 100 kg/cm^2 niedriger sein kann von jenen mit vorgespannter Armatur, haben eine Armatur vom gewöhnlichen Betonstahl.

4. Die Schwelle IM. 2d ist gleich allen einteiligen Betonschwellen empfindlich auf negative Biegemomente, die sich im mittleren Teile der Schwelle offenbaren und die im Gleis im Laufe des Einbaues oder später erscheinen können, wenn sich das Bettungsmaterial unter dem mittleren Teil der Schwelle ausbreitet. Aus diesen Gründen wird die Armatur verstärkt, womit auch die Auslagen wachsen. Diese Möglichkeit muss man voraussehen, doch aus ökonomischen Rücksichten nicht bis zu dem Masse, dass die Schwelle auch den negativen Biegemomenten widerstehen könnte.

Bei den Schwellen Z. 1 und Z. 2 übernimmt die eventuellen negativen Biegemomente in der Mitte der Schwelle in den Elastizitätsgrenzen leicht der Verbindungsstab aus Stahl, in den Betonklötzen können die negativen Biegemomente überhaupt nicht auftreten.

5. Auf Grund der erworbenen Erfahrung und der Praxis zweier grössten europäischen Eisenbahnverwaltungen (D. B. und S. N. C. F.) hat sich die Erzeugung von Schwellen derselben Konstruktion wie IM 2d schon längst einem Stillstand genähert, dagegen ist der Schwerpunkt auf die Erzeugung von Betonschwellen nach anderen Gesichtspunkten übergegangen,

- bei der D. B. werden einteilige Betonschwellen mit einer Armatur von $\varnothing 7\text{--}10 \text{ mm}$ und mit einem Beton mit der Marke wenigstens 600 kg/cm^2 erzeugt,

- bei S. N. C. F. ist der Schwerpunkt übergegangen auf die Erzeugung von zweiteiligen Schwellen S. N. C. F. — R. S. mit einem Stahlverbindungsstabe (verfertigt aus alten Schienen oder Profileisen) mit einer Armatur von normierten Betonstahl mit der Marke des Betons für cca 100 kg/cm^2 niedriger wie bei der D. B. Im Jahre 1964 waren in 9 europäischen Staaten über 10 Millionen solcher Schwellen eingebaut, in den überseeischen Ländern cca 3 Millionen Schwellen.

B. Befestigung der Schiene auf der Betonschwelle

Es wird von der Art der Befestigung der Schienen auf jeder Schwelle, besonders auf einer Betonschwelle, verlangt:

1. Eine solche Dauerhaftigkeit, die niemals erlaubt, dass an der Berührungsflächen »Schienenfuss — Unterlagsplatte — Schwelle« Leerräume entstehen können, die den Einfluss der wechselnden Verkehrsbelastung in kräftige dynamische Schläge verwandeln können, was zur vorzeitigen Zerstörung der Schwelle führen würde.

2. Die Befestigung muss einen überlegenen Widerstand dem Gleiten und Verdrehen der Schiene auf der Schwelle bieten, was besonders wichtig bei Langschienengleisen ist.

3. Neben diesen Qualitätserscheinungen der Verbindung wird ein möglichst kleines Gewicht verlangt und somit niedrige Auslagen für das Befestigungsmaterial.

Wir werden die Unterschiede in der Art der Schienenbefestigung auf den jetzigen Betonschwellen IM. 2d und den neuen Z. 1 und Z. 2 erwägen. Hier muss man bemerken, dass wir bei Z. 1 und Z. 2 die jetzige »halb-elastische« Befestigung mit unseren normierten »starken« Befestigungsplättchen DZ. 51 und 52 (JUS P. B. 1.171) betrachten. Es wird zuerst an einer Studie über die Möglichkeit einheimischer Erzeugung »elastischer« Befestigungsplättchen gearbeitet, welche man auf denselben Schwellen Z. 1 und Z. 2 verwenden können wird.

a) Hartholzdübeln mit Schraubengewinde in den Schwellen IM. 2d, in welche die Tirefonds eingeschraubt sind, müssen während des Dauerns der Schwelle ausgewechselt werden mit neuen während des Verkehrs, da sie der Fäulnis (trotz der Impregnierung) und der mechanischen Abnützung unterliegen. Die Schwellen Z. 1 und Z. 2 haben keine Holzdübeln und die Verankerung stehender Schrauben, wird wie schon oben beschrieben, auch auf englischen Betonschwellen »Permali Limited« ausgeführt. Damit werden die negativen Erscheinungen bei Verwendung der Holzdübeln vermieden. Die Kombination von Hartgummi unter dem Schienenfuss und zwischen den Befestigungsplättchen und Beton, sowie auch doppelte Federringe unter der Schraubenmutter unter der stehenden Schraube kann man schon als »halb-elastische Befestigung« ansehen.

b) Die Ergebnisse der Messungen des Widerstandes gegen das Gleiten und Verdrehen der Schiene für die drei Typen von Schwellen, die in Zagreb durchgeführt wurden, werden gesondert am Ende dieser Studie angegeben.

c) Vergleichende Angaben über das Gewicht des Stahlbestecks (Stahlkleinmaterials) und über die Kosten des gesamten Befestigungsmaterials einschliesslich der Einlagsplatten von Pappelholz, von Stahl und von Hartgummi bei Schwellen IM. 2d, Z. 1 und Z. 2 sind in der Tabelle IV angegeben.

Die Befestigung der Schienen auf den Betonschwellen Z. 1 und Z. 2 benötigt für ein Gleiskilometer (1500 Schwellen) cca 18.2 Tonen Stahl weniger und ist ungefähr um 37.635,— N. Din. billiger als im Falle mit Betonschwellen IM. 2d. Dieser Ersparnis muss man noch hinzufügen die Ersparnis an der wenigstens ein- bis zweimaligen Auswechslung der Holzdübeln. Bei heutigen ungefähren Kosten der Auswechslung eines Holzdübeln mit cca 2.40 N. Din würde die einmalige Auswechslung von 1 km Gleislänge (6000 Schwellen) 14.400.— N. Din, die zweimalige Auswechslung 28.800,— N. Din. kosten.

Damit wäre bei der Befestigung der Schiene auf der Schwelle Z. 1 und Z. 2 im Vergleich auf jene mit IM. 2d eine Ersparnis von 52.035 N. Din per Kilometer Gleis erreicht.

III. UNTERSUCHUNG DES WIDERSTANDES DER BETTUNG GEGEN DIE LÄNGS- UND SEITENVERSCHIEBUNG DES GLEISROSTES

Der Verschiebung des Gleisrostes in der Längs- und Seitenrichtung wirkt der Widerstand der Bettung entgegen. Der Bettungswiderstand wird so ermittelt, dass ein Gleisrost von sieben (oder fünf) Schwellen in der Länge von 4,55 m mittels hydraulischer Presse horizontal belastet wird und der Druck auf Schienen übertragen wird. In Abb. 6 ist das Schema des Gerätes zur Untersuchung des Längs- und Seitenwiderstandes des Gleises im Zagreber Hauptbahnhof dargestellt. In Abb. 5 ist die photographische Aufnahme des Vorganges während des Versuches wiedergegeben.

Der Druck der hydraulischen Pressen wird mittels der Schienenbefestigung auf die Schwellen übertragen, welche sich in normaler Lage in der Bettung befinden. Die Grössen der Kräfte werden mittels der Dynamometer gemessen, die sich auf jeder Presse befinden. Am anderen Ende des Gleisrostes sind Mikrouhren, um die Verschiebung der Schwellen aufzuzeichnen, aufgestellt.

Wiederholte Belastungen werden jedesmal vom Nullpunkt bis zur bestimmten Grösse durchgeführt, dann folgt jedesmal die Entlastung bis zum Nullpunkt. Bei jeder Belastung und jeder Entlastung wird die entsprechende Verschiebung gemessen. Auf diese Weise bekommt man die Abhängigkeit zwischen den Längs- beziehungsweise Seitenwiderstand und die entsprechende Verschiebung.

Im Jahre 1966 wurde der Längs- und Seitenwiderstand der Bettung bei Gleisen auf Holz-, Beton-IM. 2d, Z. 1 und Z. 2 Schwellen mit einem Abstand von 65 cm gemessen. Der Widerstand ist beim Gleis untersucht worden, bei dem die Schwellen nicht mit dem Bettungsmaterial zugedeckt, sondern nur lose gelegt auf die Bettung waren. Das wurde bei der Bettung mit normalem Querschnitt sowie beim verstärktem Bettungsquerschnitt durchgeführt, und zwar im Falle der Unterhaltung des Gleises mittels gewöhnlichem Unterstopfens der Schwelle und im Falle des Unterstreuens (Soufflage) des Bettungsmaterials unter der Schwelle.

Der Widerstand der Bettung wurde auf einem Probegleis untersucht, welches im Ganzen dem gelegten Gleis bei Gleiserneuerung entspricht und zwar vor der Durchfahrt des ersten Zuges, d. i. auf einem noch nicht stabilisierten Gleis. Ein solches Gleis hat den kleinsten Längs- und Seitenwiderstand der Bettung und ist infolgedessen massgebend zur Bestimmung der Grösse der Dilatation im Falle eines Schienenbruchs im Winter. Dasselbe gilt auch für die Grösse der kritischen Kraft, die die Verwerfung des Gleises verursacht. Um genaue Resultate zu bekommen wurde jeder Versuch 6 Mal wiederholt. Die mittleren Werte der Resultate sind in Diagrammen dargestellt. Die Bezeichnungen »a«, »b« und »c« in den Diagrammen bedeuten:

- a – nicht zugedecktes Gleis, nur gelegt auf der Bettung,
- b – Gleis mit gewöhnlichem Querschnitt der Bettung und
- c – Gleis mit verstärktem Querschnitt der Bettung.

In den Abb. 7, 12, 17 und 22 sind die untersuchten Querprofile der Bettung auf Holz-, Beton-IM. 2d, Z. 1 und Z. 2 Schwellen dargestellt. Der Widerstand gegen die Längsverschiebung ist dargestellt in den Diagrammen in Abb. 8 und 9 für die Holzschwelle, in Abb. 13 und 14 auf der Betonschwelle IM. 2d, in Abb. 18 und 19 auf der Betonschwelle Z. 1 und in Abb. 23 und 24 auf der Betonschwelle Z. 2. Der Widerstand der Bettung gegen die Seitenverschiebung des Gleises ist dargestellt in den Diagrammen Abb. 10 und 11 für die Holzschwelle, Abb. 15 und 16 für die Betonschwelle IM. 2d, Abb. 20 und 21 für die Betonschwelle Z. 1 und Abb. 25 und 26 für die Betonschwelle Z. 2.

IV. UNTERSUCHUNG DES WIDERSTANDES GEGEN VERDREHUNG DER SCHIENEN IN DEN KNOTENPUNKTEN DES GLEISROSTES

Den Gleisrost bilden die Schienen, die mittels der Schienenbefestigung mit den Schwellen verbunden sind und somit mit diesen ein Ganzes bilden. Im diesen Kapitel wird besonders der Einfluss betrachtet, welchen die Schienenbefestigung auf den Schwellen auf die Ramensteifigkeit des Gleisrostes ausübt. Die Steifigkeit der Schienen wird erst in Betracht bezogen bei der Berechnung der kritischen Kraft, die die Verwerfung des Gleises verursacht.

Bei der Deformierung des Gleisrostes wegen der Schienenbefestigung auf den Schwellen bilden sich Drehmomente, die sich dem Verdrehen der Schienen in den Knotenpunkten des Gleisrostes widersetzen. Der Widerstand der Schienenbefestigung in den Knotenpunkten des Gleisrostes gegen das Verdrehen ist nicht eine konstante Grösse, sondern proportional dem Drehwinkel der Schienen. Das Verhältnis zwischen dem Drehmoment, welchen die Schiene mittels ihrer Befestigung auf den Schwellen verursacht und dem zugehörigen Drehwinkel α , welcher die Änderung des Winkels, den die Achse der Schiene mit der Achse der Schwelle bildet kann man folgenderweise bestimmen:

Auf die Schwellen befestigte Schiene wird auf ihrem freien Ende mit der Kraft Q belastet, die im Knotenpunkt des Gleisrostes das Drehmoment $M = Q \cdot l$ erzeugt (Abb. 27). Mittels Mikrouhren werden auf dem anderen Ende der Schiene die entsprechenden Grössen der Drehwinkel gemessen.

Auf Grund der durchgeführten Versuche haben wir die Diagramme der Abhängigkeit zwischen dem Drehwinkel α und dem Drehmomente M gewonnen. In Abb. 28, 29 und 30 sind die Arten der Schienenbefestigung auf Holzschwellen, dann auf Betonschwellen IM. 2d, Z. 1 und Z. 2 dargestellt. In Abb. 31 und 35 sind entsprechende Diagramme der gewonnenen Abhängigkeit aufgezeichnet.

Im Jahre 1964 sind im »Forschungsinstitut zur Prüfung des Materials und der Konstruktionen an der Fakultät für das Bauwesen in Zagreb« Forschungen, ebenso im Jahre 1966 im Versuchsabschnitt in Zagreb Versuche durchgeführt worden über das Drehmoment M , mit dem sich die Schiene der Verdrehung an der Stelle der Befestigung auf der Schwelle widersetzt.

Die Versuche wurden auf Holzschwellen, dann auf Betonschwellen IM. 2d, Z. 1 und Z. 2 durchgeführt. Die Abhängigkeit zwischen dem Winkel α und dem Momente M ist in den Diagrammen dargestellt, und zwar: für die Fälle, dass die Schraubenmutter stark, normal oder schwach an den Befestigungsschrauben angezogen waren. Bei stark angezogenen stehenden Schrauben beträgt die Zugkraft der Schraube 4000 kg, bei normal angezogenen 3000 kg und bei schwach angezogenen 1000 kg.

Für jede Art der Schwelle und für jeden Grad der Befestigung der Schiene auf der Schwelle sind je 3 Versuche durchgeführt worden. Die mittleren Resultate sind in Diagrammen dargestellt. In Abb. 31 bis 35 sind die mittleren Werte des Widerstandsmomentes M im Knotenpunkt des Gleisrostes als Funktion des Drehwinkels der Schiene veranschaulicht.

Der Wert des Drehmomentes als Funktion des Drehwinkels für die Holzschwelle ist in Abb. 31, für die Betonschwelle IM. 2d mit Hartgummieinlage in Abb. 32, mit der Pappelholzeinlage in Abb. 33, für die Schwelle Z. 1 in Abb. 34 und für die Schwelle Z. 2 in Abb. 35 dargestellt. Die Bezeichnung a bedeutet die Zugkraft der Schrauben von 4000 kg, b von 3000 kg und c von 1000 kg.

V. BERECHNUNG DER MAXIMALEN GRÖSSE DES DILATATIONSABSTANDES AN DER STELLE DES SCHIENENBRUCHS IM LÜCKENLOSEN LANGSCHIENENGLEIS

Der Schienenbruch wird verursacht durch den nichthomogenen Stahl der Schiene oder durch einen Produktionsfehler in der Schiene. Tiefe Temperaturen beschleunigen Schienenbrüche. Die Zugkräfte, welche in ihnen wirken, verursachen an der Stelle des Schienenbruchs das Erscheinen einer Dilatationsöffnung. Gleichzeitig setzt sich dieser Erscheinung der Widerstand des Gleises entgegen. Unter diesem verstehen wir den Widerstand gegen das Verschieben der Schiene auf den Schwellen oder den Widerstand der Schwellen in der Bettung, beziehungsweise jenen der beiden Widerstände, der kleiner ist. Deswegen wird das Öffnen der Bruchdilatation solange andauern bis das Gleichgewicht zwischen den Zugkräften in der Schiene und dem hervorgerufenen Widerstand des Gleises, beziehungsweise der Bettung nicht eintreft.

Bei Temperaturen unter dem Gefrierpunkt wächst der Widerstand der Bettung ständig. Wenn die Bettung vor dem Senken der Temperatur nass war, wird sie zufrieren. Derselbe Fall wird eintreten, wenn vor dem Zufrieren nasser Schnee gefallen ist. Im Falle, wenn ein trockener Schnee gefallen ist, wird er infolge des Vibrierens des Gleises in die Bettung eindringen und die leeren Räume ausfüllen. Auf diese Weise werden die Bestandteile der Bettung mehr untereinander verbunden und dadurch wird der Widerstand gegen die Verschiebung von Schwellen wachsen.

Nach unseren bisherigen Beobachtungen beginnt das Zufrieren der Bettung bei einer Temperatur von -5°C . Die Bettung bleibt in diesen Zustand bis die Temperatur unter dem Gefrierpunkt bleibt, respektive bis die Bettung entfriert. Im Jahre 1962 war auf der Strecke Novska-Zagreb die Erforschung des Widerstandes der gefrorenen Bettung vom Schlagschotter durchgeführt, also auf einem Streckenabschnitt, auf dem im Vorjahr die Erneuerungsarbeiten des Oberbaues durchgeführt wurden. Im Langschienenstrang, welcher von den »inneren Spannungen« befreit war bei der Temperatur von $+20^{\circ}\text{C}$, waren bei der Schienentemperatur -13°C die Schienen an 4 verschiedenen Stellen durchgeschnitten. Bei diesem Vorgang sind an den Stellen der Schnitte Öffnungen von durchschnittlicher Länge von 13 mm entstanden. Die Berechnung auf Grund dieser Tatsachen stimmt mit den Forschungsergebnissen überein, die im Ausland gewonnen wurden. Auf Grund dieser Ergebnisse kann man annehmen, dass der Widerstand der gefrorenen Bettung 25 bis 30 kg/cm per Längenmeter des Gleises beträgt.

Vom Verhältnis, welches unter verschiedenen Umständen bestehen wird zwischen dem Widerstand der Bettung, der sich der Bewegung der Schwellen in der Richtung der Achse des Gleises widersetzt und der Art der Befestigung der Schienen auf den Schwellen, welche das Gleiten des Schienenfusses auf den Schwellen verhindert, wird es abhängen, welches von diesen zwei Elementen für die Grösse der Öffnung an der Stelle des Schienenbruchs massgebend sein wird.

Die Erfahrungen mit der jetzigen Befestigung der Schienen 45 und 49 auf Rippenunterlagsplatten mit Einlagen von Pappelholz haben gezeigt, dass der Widerstand der Bettung bei einer Schienentemperatur unter -5°C den Widerstand der Schienenbefestigung übertrifft. Im solchen Fall kommt es früher zum Gleiten der Schienen auf den Schwellen als zur Bewegung der Schwellen in der Bettung. Bei der Temperatur oberhalb -5°C ist die Lage umgekehrt. In diesen Falle gleiten nicht

die Schienen auf den Schwellen, sondern die Schwellen bewegen sich in der Bettung. Diese Tatsache verlangt, dass die Ergebnisse der Messungen des Widerstandes der Bettung, die im Kapitel III dargelegt sind, mit den Ergebnissen der Messung der Widerstände verschiedener Arten der Schienenbefestigung, wie z. B. mit Rippenunterlagsplatten (Abb. 28 und 29) als auch durch das direkte Legen von Schienen mit Befestigungsplättchen (DŽ 51 und 52) auf Betonschwellen Z. 1 und Z. 2 (Abb. 30) ergänzt werden. Bei den Betonschwellen Z. 1 und Z. 2 werden die Schienen direkt auf die Betonschwelle mittels normierter Einlagen von Pappelholz oder mittels rinnenförmigen Einlagen von Hartgummi unter dem Schienenfuss gelegt.

Im Forschungsinstitut zur Prüfung des Materials und der Konstruktionen an der Fakultät für das Bauwesen in Zagreb ist der Reibungswiderstand während des Gleitens des Schienenfusses an den Rippenunterlagsplatten gemessen worden.

a) Der Fall mit nichtgefrorener Bettung

Wenn die Bettung nicht gefroren ist, kann man annehmen, dass sich das Verhältnis zwischen der Grösse der Verschiebung und dem Werte des Bettungswiderstandes ändert nach dem Gesetz:

$$p(\lambda) = p_0 + K\lambda. \quad (1)$$

Den Wert des Koeffizienten »K« muss man sorgfältig wählen auf Grund des Diagrammes (Abb. 36).

Die Grösse des Längswiderstandes des Gleises und der Längsverschiebung der Schienenenden wird in Bezug auf die Stelle des Schienenbruchs symmetrisch sein wie man das aus Abb. 37 ersieht. Wegen dieser Symmetrie wird die maximale Grösse der Bruchdilatation der Summe der Verschiebung beider Schienenenden auf der Stelle des Schienenbruchs gleich sein, also besteht das Verhältnis:

$$\delta = 2\lambda \quad (2)$$

Hier bedeutet:

δ = die maximale Öffnung der Bruchdilatation,

λ = die Verschiebung eines Schienenendes.

Die Verschiebung eines Schienenendes » λ « kann man mittels der Superposition der Ergebnisse aus der Wirkung der inneren Zugkraft in der Schiene berechnen, welche bestrebt ist den Abstand der Schienenenden zu vergrössern und dem Wirken des Bettungswiderstandes, der sich dem

widersetzt. Wegen des Wirkens der Längszugkraft » H «, wenn der Gleiswiderstand » p « nicht bestünde, würde sich das Schienenende um » λ_t « verschieben, während man die Wirkung des Gleiswiderstandes als Verschiebung des Schienenendes in der umgekehrten Richtung um » λ_p « darstellen könnte. Dieses gemeinsame Wirken auf das Längselement » dx « kann man mit der Gleichung veranschaulichen:

$$d\lambda = d\lambda_t - d\lambda_p, \quad (3)$$

Dabei ist:

$$d\lambda_t = \alpha \cdot \Delta t \, dx$$

$$d\lambda_p = \frac{H_x \cdot dx}{EF}.$$

Hier sind:

α – Koeffizient der linearen Ausdehnung des Stahls bei Temperaturveränderung.

Δt – die Differenz zwischen der Temperatur, bei welcher ein Langschienenstrang »von den inneren Spannungen befreit« und der Temperatur, bei der der Schienenbruch erfolgt ist,

E – Elastizitätsziffer des Stahles,

F – Querschnitt der Schiene.

Nach dem Ordnen der Gleichung (3) erhalten wir die Gleichung:

$$\frac{d^2\lambda}{dx^2} = \frac{p(\lambda)}{EF}. \quad (5)$$

Nach der Lösung der Gleichung (5) mit Hilfe der Gleichungen (6) – (9) erhalten wir:

$$\lambda = \frac{p_0}{K} \left(\operatorname{ch} \sqrt{\frac{K}{EF}} \cdot x - 1 \right). \quad (10)$$

Die Länge des verschiebbaren Teiles » x_p « an der Stelle des Schienenbruchs des lückenlosen Gleises bestimmen wir aus der Gleichgewichtsbedingung der Temperaturkraft H , welche die Verschiebung des Endes des Langschienenstranges und der Widerstandskraft des Gleises:

$$H = \alpha \cdot EF \Delta t = \int_0^{x_p} p(\lambda) \, dx = \int_0^{x_p} (p_0 + K\lambda) \, dx.$$

Aus dieser Gleichung bekommen wir durch weitere Umarbeitung die maximale Dilatation » δ « im Falle der nicht gefrorenen Bettung:

$$\delta = \frac{2p_0}{K} \left[\sqrt{1 + \frac{K}{p_0^2} \cdot a^2 \cdot E \cdot F \cdot \Delta t^2} - 1 \right] \quad (13)$$

b) Der Fall mit gefrorener Bettung

In dem Falle ist der Widerstand gegen das Gleiten der Schiene auf den Schwellen massgebend, welcher einen konstanten Wert hat für die ganze Zeit des Gleitens, was die durchgeführten Versuche beweisen. Deswegen nimmt die Gleichung (1) die Form an: $p(l) = p \dots \dots (14)$

Die Berechnung im diesen Fall wird auf dieselbe Weise durchgeführt wie bei der nicht gefrorenen Bettung mit dem Unterschied, dass wir in die Gleichung (8) den Widerstand nach Gleichung (14) einreihen.

Die Grösse der maximalen Dilatation » δ « im Falle der gefrorenen Bettung ist:

$$\delta = \frac{a^2 E F \Delta t^2}{p} \quad (19)$$

VI. BERECHNUNG DER KRITISCHEN KRAFT, DIE DIE VERWERFUNG DES LÜCKENLOSEN LANGSCHIENENGLEISES VERURSACHT

Die Berechnung der kritischen Kraft, die die Verwerfung des Gleises bei hoher Temperatur verursacht, führt die Mehrzahl der Autoren (Meier, Raab, Nemesdy, Numata, Engel u. a.) unter Anwendung der Methode der potentiellen Energie durch, und zwar auf diese Weise, dass diese Energie auf einer bestimmten Länge des deformierten Gleises der mechanischen Arbeit gleichgesetzt wird.

Eine andere Gruppe von Autoren (Sackmauer, Levi, Martinet u. a.) berechnet den Wert der kritischen Kraft mit Hilfe der Differenzialgleichung der elastischen Linie. Wenn auch die Methode der potentiellen Energie gewisse Mängel aufweist, z. B. die eigenmächtige Voraussetzung der Form der Deformationslinie nach der sich das Gleis deformieren sollte hat sie sich doch für die Berechnung der kritischen Kraft am annehmbarsten erwiesen. Die Verwerfung des Gleises erscheint immer im jenen seinen Teil, wo die ungünstigste Deformation der Richtung besteht.

VII. BEISPIELE DER BERECHNUNG DES MAXIMALEN ABSTANDES, DER AN DER STELLE DES SCHIENENBRUCHS IM LÜCKENLOSEN GLEIS ENTSTEHT

Die Grösse der maximalen Dilatation, die an der Stelle des Schienenbruchs der Schiene 49 auf Holzschwellen im lückenlosen Gleis entsteht, dann auf Betonschwellen der Typen IM. 2d, Z. 1 und Z. 2 verlegt mit dem Abstand von 65 cm, werden wir mittels der Gleichungen (13) und (19) berechnen.

Dabei wollen wir annehmen, dass der lückenlose Schienenstrang »befreit ist von den inneren Spannungen« bei der sogenannten »nötigen« Temperatur, welche gewöhnlich mit -20°C angenommen wird und das der Schienenbruch bei nicht gefrorenen Bettung und der Schienentemperatur von -5°C erfolgte, während es dazu gekommen ist bei einer gefrorenen Bettung mit der Schienentemperatur von -30°C .

Unter der »Befreiung von den inneren Spannungen« versteht man die Befreiung des Langschienenstranges von Zug- und Druckspannungen, welche in ihm bestehen, weil beim Einbau und der Schweiessung im Schienenstrange nicht die »nötige« Temperatur vorhanden war. Das erreicht man durch Befreiung des Schienenstranges vom Verbande mit den Schwellen womit man der Schiene die Möglichkeit gibt, dass sie sich bei bestimmter »nötigen« Temperatur vollkommen frei ausdehnen kann.

Die Grössen » p_0 « und » K « aus der Gleichung (13) erhalten wir aus den Diagrammen des Längswiderstandes der Bettung aus Kapitel III auf die Weise, dass man den Längswiderstand per Meter Gleis für beide Schienenstränge auf einen Schienenstrang reduziert und als solchen in die Rechnung einführt. Für die Grössen des Gleiswiderstandes » p « in der Gleichung (19) nehmen wir an als massgebend folgende Werte:

- bei der Befestigung mittels Rippenunterlagsplatten den Reibungswiderstand zwischen dem Schienenfuss und der Unterlagsplatte (2154 kg/m);
- bei der Schwelle Z. 1 u. Z. 2 der Widerstand der gefrorenen Bettung (2500 kg/m). In beiden Fällen sind folgende übrigen Werte gültig:

$$\begin{aligned}\alpha &= 0,0000115; \\ E &= 2.10^6 \text{ kg/cm}^2; \\ F &= 62,48 \text{ cm}^2.\end{aligned}$$

Von der Schienentemperatur von -20°C ausgehend, im Laufe »des Befreiens« der Gefriertemperatur der Bettung von -5°C und mit den extremen tiefen Temperaturen von -30°C folgt:

für den Fall der nichtgefrorenen Bettung $\Delta t = 25^{\circ}$,

für den Fall der gefrorenen Bettung $\Delta t = 50^{\circ}$.

Die Grösse der Dilatation beim Schienenbruch bei der Temperatur von -5°C bei nichtgefrorener Bettung Tabelle VI

Querschnitt der Bettung	Grösse der maximalen Dilatation in mm			
	Holzschwelle	Betonchwelle IM. 2d	Betonchwelle Z. 1	Betonchwelle Z. 2
Gewöhnlicher Quersch. unterstopft	22,3	26,6	21,9	23,1
Verstärkter Quersch. unterstopft	17,9	24,7	20,3	22,3
Gewöhnlicher Quersch. Soufflage	26,3	29,3	22,6	25,4
Verstärkter Quersch. Soufflage	21,8	28,7	21,6	22,6

Die Grösse der Dilatation beim Schienenbruch bei der Temperatur von -30°C und gefrorener Bettung Tabelle VII

Schwelle	Dilatation in mm	Es gibt nach
Holzschwelle	38,3	der Widerstand
Betonchwelle IM. 2d	38,3	der Befestigung
Betonchwelle Z. 1	33,1	der Widerstand
Betonchwelle Z. 2	33,1	der Bettung

Wenn wir die Ergebnisse dargestellt in den Tabellen VI und VII betrachten können wir folgende Schlüsse ziehen:

1. Dass bei gefrorener und nichtgefrorener Bettung im Gleis mit Schwellen Z. 1 und Z. 2 die Dilatationen an der Stelle des Schienenbruchs um cca 15–20% kleiner sind als bei Betonsschwellen IM. 2d.
2. Bei nichtgefrorener Bettung beginnen in allen Fällen die Schwellen in der Bettung zu gleiten. Deswegen hat die entscheidende Rolle die Form der Schwelle und der Querschnitt der Bet-

tung, dann die Art der Stabilisierung der Schwellen (Unterstopfung oder Soufflage). Darum haben wir eine grosse Verschiedenheit in den Werten » δ «.

3. Bei gefrorener Bettung ist die Verschiedenheit der Ergebnisse kleiner so dass
 - bei den Holzschwellen und den Betonschwellen IM. 2d, welche mit der Rippenunterlagsplatte versehen sind (Abb. 28 und 29) die Befestigung nachgibt und die Schiene zu gleiten beginnt. Da die Befestigung die gleiche ist, bekommen wir auch dieselben Werte der Dilatation » δ «.
 - die Befestigung auf den Betonschwellen Z. 1 und Z. 2 (Abb. 30) das Gleiten der Schiene auf den Schwellen nicht zulässt sondern es erfolgt das Gleiten der Schwellen in der Bettung. Die Grösse » δ « ist bei beiden Schwellen dieselbe weil wegen der Einfachheit die Differenz in den Dimensionen dieser Schwellen vernachlässigt wurde, deshalb wurde auch der kleine Wert des Bettungswiderstandes von 2500 kg/m angenommen.

VIII. BEISPIELE DER BERECHNUNG DER KRITISCHEN KRAFT BEI WELCHER IM LÜCKENLOSEN GLEIS DIE VERWERFUNG EINTRITT

Die Grösse der kritischen Kraft, bei welcher im lückenlosen Gleis die Verwerfung eintritt auf Holzschwellen, auf Betonschwellen IM. 2d, Z. 1 und Z. 2 mit dem Abstand von 65 cm werden wir mittels der Gleichung (26) berechnen für das Gleis in der Geraden und mittels der Gleichung (27) für das Gleis in der Krümmung mit $R = 600$ m und $R = 300$ m.

Es bedeuten:

- J – Trägheitsmoment in Bezug auf die vertikale Achse der Schiene,
- l – Länge der Richtungsdeformation,
- f – Scheitelhöhe der Richtungsdeformation,
- q_0, B – Grössen aus den Diagrammen des Seitenwiderstandes der Bettung,
- M_0 – Grösse aus dem Diagramm des Widerstandmomentes » M « im Knotenpunkt des Gleisrostes,
- i – Entfernung der Schwellen,
- R – Halbmesser der Gleiskrümmung,
- α_1 bis α_6 – Koeffizienten abhängig von der Form der Richtungsdeformation.

Für die Berechnung der kritischen Kraft werden wir voraussetzen, dass im Gleis ein vorläufiger Fehler eingetreten ist in der Form einer halben Sinuswelle in der Länge $l = 6,0$ m mit der Scheitelhöhe $f = 2$ cm. Die Gleichung der Form der Deformation der Achse des Gleises ist dann mit der Relation gegeben:

$$y = f \cdot \sin \frac{\pi \cdot x}{l}.$$

Die gewonnenen Ergebnisse sind in den Tabellen VIII, IX u. X dargestellt.

Die Grösse des Temperaturzuwachses der Schiene » Δt « oberhalb derjenigen Temperatur, bei welcher der lückenlose Schienenstrang »befreit von den inneren Spannungen« bis zur derjenigen, bei welcher die Verwerfung des Gleises erfolgen wird, kann man mit Hilfe der Gleichung (28) berechnen. Diese sind auch in den Tabellen XI, XII und XIII festgestellt.

Beim Betrachten dieser Tabellen kann man folgern, dass die Stabilität des Gleises mit allen drei Typen von Betonschwellen grösser ist als bei hölzernen, dann dass sie allgemein grösser ist bei den Betonschwellen Z. 1 und Z. 2 als bei IM. 2d. Die einzige Ausnahme besteht bei dem Fall des verstärkten Bettungsquerschnittes mit unterstopften Schwellen, wo die Stabilität bei den Schwellen Z. 2 um 5% geringer ist als bei den Schwellen IM. 2d, aber doch um 14 bis 19% höher als bei den Holzschnellen. Diese Vergrösserung der Stabilität, welche ausgedrückt ist in der nötigen Erhöhung » Δt « beträgt in Beziehung auf die Holzschwelle:

- bei IM. 2d mit der Einlage von Pappelholz 11—29%
- bei IM. 2d mit der Einlage von Hartgummi 6—23%
- bei Z. 1 mit der Einlage von Pappelholz 31—41%
- bei Z. 1 mit der Einlage von Hartgummi 28—37%
- bei Z. 2 mit der Einlage von Pappelholz 29—30%
- bei Z. 2 mit der Einlage von Hartgummi 25—29%.

Also bei allen übrigen gleichen Bedingungen hat das Gleis auf Betonschwellen Z. 1 und Z. 2 eine grössere Stabilität als auf Holz-

schwellen und Betonschwellen IM. 2d. Eine Ausnahme bilden nur Betonschwellen Z. 2 im Vergleich mit den Betonschwellen IM. 2d bei dem verstärkten unterstopften Querschnitt der Bettung.

Im allgemeinen kann man sich die grössere Stabilität des Gleises mit Betonschwellen Z. 1 und Z. 2 damit erklären, dass bei diesen Schwellen der Widerstand der Bettung in allen Fällen grösser ist obgleich die Ramensteifigkeit in den Knotenpunkten des Gleisrostes etwas kleiner ausfällt. Wenn wir die Ergebnisse der Berechnungen, nach Gleichungen (26) und (27) gewonnenen Werte, die in den Tabellen vorgeführt sind analysieren, können wir den Schluss ziehen, dass im Gesamtwiderstand des Gleises gegen Verwerfung folgende Beteiligung einzelner Komponenten besteht:

- der Widerstand der Schiene gegen Knickung 10—20%,
- der Widerstand der Bettung 65—85%,
- der Widerstand der Gleisrostes 3—18%.

Dass der Einfluss des Widerstandes der Bettung allgemein bei allen Arten von Schwellen vorherrscht, der Widerstand der Bettung bei Betonschwellen Z. 1 und Z. 2 auch allgemein grösser ist als bei IM. 2d und immer noch grösser ist als bei Holzschwellen, kann man sich damit erklären, dass auch im Endergebnis die Stabilität des Gleises auf Betonschwellen Z. 1 und Z. 2 allgemein grösser ist.

Diese Tatsache ist charakteristisch weil sie zu bedeutenden Ersparnissen an Gewicht und Wert des Befestigungsmaterials auf Betonschwellen Z. 1 und Z. 2 führen kann, sowie bei der jetzigen als auch bei doppelter elastischen Befestigung, die sich erst im Stadium der Forschung befindet.

FOLGERUNG

Zweiteilige Betonschwellen Z. 1 und Z. 2 haben bedeutende Vorteile vor den Betonschwellen IM. 2d und vor den Holzschwellen, weil sie bedeutend billiger sind, ihre Erzeugung einfacher, sie brauchen ein geringes Gewicht des Befestigungsmaterials, geben eine grössere Stabilität des Gleises gegen Verwerfung und erzeugen eine geringere Lücke and der Stelle des Schienenbruchs in Langschienensträngen. Da auch der Widerstand gegen das Gleiten der Schiene in der Längsrichtung grösser ist, ist der Einbau von Apparaten gegen das Wandern

der Schienen überflüssig. Weil auch der Seitenwiderstand der Bettung grösser ist, ist auch in grösseren Krümmungen eine geringere Anzahl von »Schutzschildern« notwendig. Wenn auch die heute gebräuchliche Art der Befestigung der Schiene mittels Befestigungsplättchen DŽ 51 und 52 (Xa) eine Ersparung an Gewicht und Kosten des Gleisstahlkleinmaterials bedeutet, ist das noch nicht genug, sondern man muss mit der Forschung einer Möglichkeit der Produktion einheimischer elastischer Befestigungsplättchen fortsetzen. Die Vorteile der »doppelten elastischen« Befestigung hat nicht nur eine wirtschaftliche Bedeutung, sondern auch eine technische, weil sie eine unnachgiebige Verbindung der Schiene mit der Schwelle sichert und wirkungsvoll das Vibrieren der Schienen und der Schwellen gelegentlich der Durchfahrt der Züge dämpft.

In Betracht auf die kritische Situation bezüglich der Anschaffung von Holzschwellen für die Auswechslung einzelner schadhafter Holzschwellen in den Gleisen, wovon schon am Anfang dieser Abhandlung die Rede war, ist die einzelweise Auswechslung schadhafter Holzschwellen im rechten Gleis der Strecke Zagreb, Gl. kol. – Zagreb, Zap. kol. durchgeführt worden und zwar sowie mit den Betonschwellen Type Z. 1 als auch mit Z. 2 (Abb. 42 und 43). Das Gleis befindet sich in diesen Abschnitt in der Krümmung von $R = 500$ m mit einer Überhöhung der äusseren Schiene von $h = 100$ mm.

Angenommen zur Veröffentlichung am 23. XII. 1966, in der Abteilung für mathematische, physikalische und technische Wissenschaften der Jugoslawischen Akademie in Zagreb.

SADRŽAJ CONTENTS

<i>Riko Rosman</i>	
Zidovi oslabljeni nizovima otvora izloženi utjecajima potresa i vjetra	1
Analysis of shear walls subject to wind and earthquake loads	73
<i>Uilim Niče</i>	
Homothetische polare Räume	81
Homotetični polarni prostori	111
<i>Ibrahim Aganović</i>	
Geometric properties of primitive analyticity domains of perturbation theory amplitudes	119
Geometrijska svojstva primitivnih područja analitičnosti amplituda u računu smetnje	181
<i>Branko Borčić</i>	
Spor Bošković–Rochon povodom Boškovićeve rasprave »Mémoire sur un nouveau micromètre et mégamètre«	135
Dispute Bošković–Rochon on the occasion of the Bošković treatise »Mémoire sur un nouveau micromètre et mégamètre«	177
<i>Uilim Niče</i>	
Die gemeinsamen Kongruenzen der vier Strahlkomplexe eines Polarraum-büscheis	193
Zajedničke kongruencije četiriju kompleksa pramena polarnih prostora	217
<i>Tomislav Pinter</i>	
Osmoza, otapanje i prenos topline kao simultani proces	221
Osmose, Auflösung und Wärmetransport als simultaner Prozess	241
<i>Uladimir Uranić i Uladimir Matković</i>	
Contribution to a statistical theory of Croato-Serbian	251
Prilog statističkoj teoriji hrvatskosrpskog jezika	265
<i>Josip Božičević</i>	
Novi jugoslavenski betonski pragovi Z.1 i Z.2	275
Neue jugoslawische Betonschwellen Z.1 und Z.2	325

