

BLANUŠINI DOPRINOSI TEORIJI RELATIVNOSTI

Zavod za primijenjenu fiziku, Fakultet elektrotehnike i računarstva, Zagreb

1. UVOD

Blanušini doprinosi matematici i fizici imaju značajne odjeke u znanstvenoj javnosti. U fizici su oni povezani s teorijom relativnosti, prije svega specijalnom u pogledu njezine primjene u fenomenološkoj termodinamici pri relativističkoj transformaciji termodinamičkih veličina količine topline i temperature. U matematici je Blanuša dao značajne doprinose u teoriji specijalnih funkcija (Besselove funkcije), u izometričkim smještenjima hiperboličkih u euklidske prostore (diferencijalna geometrija), te u teoriji grafova slavnim Blanušinim grafom.

U pripremanju ovog rada, pored ostalih izvora, najviše sam koristio pet knjiga: Paulijevu o teoriji relativnosti¹, Bornovu o Einsteinovoj teoriji relativnosti², Blanušinu o teoriji relativnosti³, Straumannovu o općoj relativnosti i relativističkoj astrofizici⁴ te McGlinnov⁵ uvod u relativnost. Uz to, dragocjenim povijesno-znanstvenim izvorom bilo mi je izvorno Blanušino pismo iz 1948. godine, upućeno

* e-mail: tomislav.petkovic@fer.hr

¹ W. Pauli, "Relativitätstheorie", in *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften*, Vol. 5, Part 2, B.G. Teubner, Leipzig, 1921, pp. 539-775.

"Supplementary Notes by the Author", in *Theory of Relativity*, Pergamon Press, Inc., New York, 1958, pp. 207-232.

W. Pauli, *Theory of Relativity*, Translated from German by G. Field, Dover Publications, Inc., New York, 1958.

² Max Born, *Einsteinova teorija relativnosti i njezini fizički osnovi*, prema trećem izdanju preveo, dodatkom i bilješkama nadopunio D. Blanuša, znanstvena djela Hrvatskog prirodoslovnog društva, Knjiga I, "Tipografija" grafičko-nakladni zavod, Zagreb, 1948.

³ Danilo Blanuša, *Teorija relativnosti*, Mala biblioteka za matematiku, fiziku i kemiju br. 7, Školska knjiga, Zagreb, 1955.

⁴ Norbert Straumann, *General Relativity and Relativistic Astrophysics*, with 81 Figures, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, Second Printing, 1991. *Title of the German edition: Allgemeine Relativitätstheorie und relativistische Astrophysik*; 2. Auflage (Lecture Notes in Physics, Vol. 150).

⁵ William D. McGlinn, *Introduction to Relativity*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, 2003.

W. Pauliju u Zürichu te Blanušino pismo njegovu dobrom prijatelju P. Urbanu u Grazu⁶. Dobrom početnicom bila mi je i *Spomenica* posvećena Danilu Blanuši u izdanju JAZU⁷, naročito V. Devidéov prilog u njoj koji je i njezinim urednikom. Prve dvije je glavnim knjigama o relativnosti smatrao i Blanuša, a Blanušinu knjigu i danas traže napredni gimnazijalci kad dobiju maturalnu radnju iz teorije relativnosti. Straumannova knjiga jest svjetski udžbenik, dok petu W. D. McGlinnovu knjigu tiskanu 2003. godine navodim kao pravi dokaz kako tradicionalni tenzorski stil, što ga je Blanuša koristio u tumačenju i svojim napisima o teoriji reletivnosti, živi i u suvremenim prikazima teorije relativnosti.

Blanuša nam, na žalost, nije ostavio svoje sabrane autobiografske zabilješke poput A. Einsteina, čijim se znanstvenim djelom zanosio. U novije vrijeme porastao je znanstveni interes za Einsteinovim autobiografskim zabilješkama (*Autobiographisches*) koje je on napisao 1946. u svojoj 67. godini života, da bi tri godine kasnije bile prevedene (*Autobiographical Notes*) i objavljene u slavnoj knjizi "Albert Einstein: Philosopher–Scientist", urednika P. A. Schilpa. Japanskim povjesničarima fizike, u što se autor ovog prikaza uvjerio na 21. međunarodnom kongresu povijesti znanosti u México Cityju održanom od 8. do 14. srpnja 2001. (*XXI International Congress of History of Science*, México City, 8-14 July, 2001.), naročito zanimljivim čine se ispravke unesene u 2. i 3. izdanje Einsteinovih autobiografskih zabilješki, a tiču se velikih teorija fizike termodinamike i elektrodinamike⁸. Japanskim je povjesničarima isto tako zanimljiv odnos Einsteina i Macha, čije su ideje bile odlučujuće za opću teoriju relativnosti. Mach je duboko proučavao specijalnu teoriju relativnosti, povezujući je i studirajući zajedno s Maxwelllovim jednadžbama elektromagnetizma. Ipak, nove ideje Einsteinove teorije Mach nije prihvatio, uz Einsteinove opaske da je tome razlog Machova ostarjelost i nemogućnost razumijevanja. Blanuša je isto proučavao elektromagnetizam, poput Macha, povezujući

⁶ Blanušino pismo poštovanom Profesoru W. Pauliju, nadnevka 15. 03. 1948., poslano iz Tehničkog fakulteta u Kačićevoju 26, tipkani tekst na pisačem stroju s Blanušinim ispravkama.

Blanušino pismo Paulu Urbanu u Grazu, Univerzitätsplatz 5, nadnevka 1. 06. 1948. Koncept napisan Blanušinom rukom iz kojeg se vidi da je dopisivanje bilo višestruko, uključujući Urbanove odgovore, te da je Blanuša Urbanu slao separate svojih radova.

⁷ *DANILO BLANUŠA 1903 – 1987*, Spomenica preminulim akademikima, Svezak 50, Razred za mat., fiz., kem. i tehničke znanosti, urednik izv. član V. Devidé, JAZU, Zagreb, 1989.

⁸ Vidi u: Tomislav Petković, 21. međunarodni kongres povijesti znanosti. "Reafirmacija znanosti u perspektivi kulturne različitosti i u zaustavljanju dehumanizacije čovječanstva u 21. stoljeću", *Filozofska istraživanja* 83, God. 21, Sv. 4 (2001) 830 – 835.

ga s teorijom relativnosti, ali je učinio još više: uključivao je i termodinamiku, kao veliku teoriju fizike, te dao neka izvorna rješenja u povezivanju specijalne teorije i termodinamike.

Blanuša je jedan od najvećih hrvatskih matematičara i fizičara 20. stoljeća koji je živio i stvarao u svojoj domovini. Hrvatski znanstvenici i povjesničari znanosti trebaju još dosta raditi na širenju informacija o Blanušinim znanstvenim doprinosima i njegovu nastavničkomu radu. Na tome tragu, neka mi ovdje bude dopušteno, spomenuti najvećeg hrvatskog filozofa i znanstvenika R. Boškovića, bez namjere uspoređivanja njegovog djela i života s Blanušinim. Boškovićev sljedbenik i učenik u pogledu temeljnog filozofskog pristupa prirodi jest i slavni američki fizičar R. Feynman, o čemu dokazuje nalazimo u J. Gleickovoj knjizi, kao jednoj od cjelovitih i najljepših znanstvenih portreta R. Feynmana⁹. U toj knjizi je opisana Feynmanova životna staza od MIT-a, Princetona, Los Alamosa, Cornella do Caltecha. U njoj se na zanimljiv način spominje R. Bošković (Boscovich Ruggerio, str. 39). Boškovićev pogled na atome kao točke savršeno jednostavne, nedjeljive i neprotežne, razdvojene jedne od drugih, Feynman je prihvatio kao svoj filozofski i znanstveni *credo* 200 godina poslije. Boškovićevi atomi su, smatrao je Feynman, temeljni ne toliko za tvar (supstanciju) koliko za silu: privlače se na malim udaljenostima, a odbijaju kad ih se želi stisnuti jednog u drugi.

Blanuša se kao matematičar i fizičar, na neki način, može usporediti s Vladimirom Jurkom Glaserom, hrvatskim teorijskim fizičarom koji je najveći dio života (od 1957. do smrti, 22.01.1984.) radio u Teorijskome odjelu u CERN-u. Glaser je poznat po jednoj od prvih modernih knjiga iz kvantne elektrodinamike na hrvatskome jeziku¹⁰, što ju je uredio baš dr. Danilo Blanuša, dopisni član JAZU. Glaser se bavio modelima teorije polja, teorijskim aspektima proton-proton i proton-antiproton sudarima. Glaser je bio duboko zainteresiran izučavanjem Schrodingerove jednadžbe, a svoje radove o njoj ostavio je neobjavljene¹¹. Po tome je Blanuša, donekle, sličan Glaseru: svoje radove iz relativističke termodinamike nije objavio u svjetskim časopisima iz fizike.

Svoja poznata predavanja na ETF-u i PMF-u, Blanuša je ovjekovječio u kapitalnome četverotomnome djelu *Više matematike* (Tehnička knjiga Zagreb, 1963-

⁹ James Gleick, *GENIUS, The Life and Science of Richard Feynman*, Pantheon Books, New York, 1992.

¹⁰ V. Glaser, *Kovarijantna kvantna elektrodinamika*, uredio dr. D. Blanuša, dopisni član, JAZU, Zagreb, 1955.

¹¹ Prema nekrologu V. J. Glaseru u *CERN COURIER*, Vol. 24, No. 2 (1984), p. 67.

1974.). Blanuša je, osim toga, poznat po popularnim javnim predavanjima i prikazima za studente i građanstvo, kojima je više nego itko od njegovih suvremenika otkrivao jednostavnost i harmoniju osnovnih teorija prirode i kompliciranih matematičkih formulacija u njima.

Uspomena na profesora Blanušu u HAZU, FER-u i PMF-u živi ne samo po onom *matematičkom* odnosno *fizičkom*, već i po njegovim svakodnevnim ljudskim postupcima i ponašanju, čime je neizmjereno zračio i postao gotovo legendom još za svog života.

2. BLANUŠINA METODA U RELATIVNOSTI

Blanušin znanstveni put i metoda su konstruktivna interferencija s Einsteinovom teorijom s jedne i Platonovim naukom geometrije s druge strane. Akademik Blanuša je vlastitim znanstvenim djelom i pedagoškim radom u matematici i fizici pokazao da je mnogostruko oplodio najstariji princip Platonove akademije, što ga je i sam dao uklesati iznad vrata Zavoda za primijenjenu matematiku ETF-a (FER-a) u kojem je radio: *ΜΗΔΕΙΣ ΑΓΕΩΜΕΤΡΗΤΟΣ ΕΙΣΙΤΩ* (*NEUK U GEOMETRIJI NEKA NE ULAZI*). Prije Blanuše, u hrvatskoj filozofskoj i znanstvenoj tradiciji, Platonovim natpisom se oduševljavao i Frane Petrić (Cres, 25. 04. 1529. – Rim, 6. 02. 1597.), hrvatski platončki filozof, znanstvenik i polihistor u sutonu renesanse. U 2. knjizi Pancosmije *O matematičkome prostoru* (*De Spacio Mathematico, Liber secundus*) u *Novoj sveopćoj filozofiji* (*Nova de universis philosophia*, Ferrara 1591.), naglašavajući fundamentalnu važnost izučavanja prostora, Petrić se pri kraju druge knjige poziva na slavni natpis pribijen na ulazu u školu božanskog Platona: *GEOMETRIA NESCIUS, INGREDIATUR NEMO*¹². Svojim djelom i životom, profesor Blanuša se dosljedno odzivao tome načelu: samo na osnovu istinskog znanja se može podučavati, i u toj poduci odista biti učiteljem, tek ako se mnogo zna. U matematici napose, jer je ona takvo znanje u kojemu je prvenstveno potrebno mukotržno učenje i rad, a ne samo urođeni talent ili osobna zainteresiranost. Ovakve stručne i moralne maksime trajno je isticao, prenosio studentima i širio među svojim prijateljima, suradnicima i kolegama.

¹² Vidi u: Tomislav Petković, *Filozofija vremena i prostora*, 2. poglavlje u knjizi *Uvod u modernu kozmologiju i filozofiju*, 2. prošireno izdanje, Knjižnica "Faust", Gradska knjižnica "Juraj Šižgorić" Šibenik i Element Zagreb, 2002., str. 15.

Veliki umjetnici, kao i umjetnički krugovi doživljavaju Einsteinove tenzorske jednadžbe polja kao matematički kodirane zapise, jedan usavršeni metajezik najveće misaone snage, ali ipak teško dokučiv običnim ljudima u različitim kulturama i civilizacijama. Stoga, u svim kulturama, treba pronaći adekvatnu metodu približavanja teorije relativnosti studentima, stručnjacima u drugim područjima i najširoj kulturnoj javnosti. Blanuša je stvorio svoju metodu i u tome jest pionir u Hrvatskoj i u bivšoj jugoslavenskoj državi, a u svjetskim relacijama po svojim radovima i međunarodnoj suradnji u fizici relativnosti.

U svijetu su napisane mnoge knjige o teoriji relativnosti, specijalnoj i općoj, iz pera najuglednijih fizičara, matematičara ili filozofa. Između raznih "Uvoda" u ovo temeljno područje fizike, Blanušina je *Teorija relativnosti*¹³, koju je napisao nešto kasnije od svog blistavog prijevoda M. Bornove *Teorije relativnosti*, jedinstvena u svijetu. Generacije gimnazijalaca, napose prirodoslovno-matematičkog usmjerenja, služe se Blanušinom knjigom. Blanušin motiv za takvu vrstu knjige bio je sažeti prikaz teorije relativnosti, kako bi se obični čitatelj uputio u glavne misli teorije relativnosti, uvažavajući najnovije eksperimentalne rezultate tadašnjeg vremena. Drugi je motiv, ne manje važan, bio neobičan uspjeh prijevoda Bornove knjige o teoriji relativnosti (knjiga je brzo rasprodana), u prijevodu i s nadopunama D. Blanuše, a u izdanju Hrvatskog prirodoslovnog društva. Blanušin metodološki *credo* bio je učiniti teoriju što razumljivijom i "po mogućnosti pokazati, kako nas pokusi upravo sile, da teorija bude baš takva, a ne drukčija" (iz *Uvoda* Blanušine knjige). Preko 80% Blanušine knjige posvećeno je specijalnoj, a nešto manje od 20% općoj teoriji relativnosti. Nabrojat ću neke karakteristike i odlike Blanušine knjige, njezinog prvog dijela o specijalnoj teoriji. To su jednostavni matematički i fizikalni prikaz Newtonovih shvaćanja apsolutnog prostora i vremena, inercijalnih sustava, etera i Michelsonovog pokusa. U vezi s tim pokusom, Blanuša analizira hipotezu Lorentzove kontrakcije duljine (gdje uvodi kraticu $\alpha = \sqrt{1 - \beta^2}$ jer će stalno trebati) i dilataciju vremena na bazi pokusa (Dopplerov učinak na svjetlosti što potječe od kanalnih zraka). Potom obrazlaže ovisnost mase o brzini, a naročitu pažnju posvećuje sinkronizaciji svjetlosnih signala (bljeskova) odnosno satova u inercijalnim sustavima. U svojim analizama Blanuša primjenjuje jednostavne geometrijske slike. Lorentzovim

¹³ Danilo Blanuša, *Teorija relativnosti*, Mala biblioteka za matematiku, fiziku i kemiju br. 7, Školska knjiga, Zagreb, 1955.

transformacijama i zakonima gibanja (energije i impulsa) s karakterističnom relativističkom algebrom Blanuša posvećuje značajni dio knjige, kao i transformaciji ukupne energije čestica s karakterističnom relativističkom kinematikom. Nastavlja s teoremom o zbrajanju brzina s geometrijskim prikazom (tumačenjem) toga teorema. Naročito pomno Blanuša tumači Lorentzove invarijante: prostorno-vremenski razmak ili kraće “intervale” kao temeljnu invarijantu Lorentzove transformacije, invarijante energije i impulsa, invarijantnost tlaka. Od matematičkog aparata više analize, Blanuša najčešće koristi razvoj izraza u red, integralni račun kao ilustraciju kako se nešto može kraće napraviti. Poglavlje 22. (princip relativnosti i konstantnost brzine svjetlosti; odbacivanje hipoteze etera; relativnost prostora i vremena) je, po mome mišljenju, glavno u knjizi, s originalnim Blanušinih tumačenjima. Kvantnoj teoriji svjetlosti (fotona) posvećeno je zadnje poglavlje iz dijela knjige o specijalnoj teoriji relativnosti.

Općoj teoriji relativnosti pripada znatno manji dio knjige. Blanuša obrazlaže Machov princip, princip ekvivalencije i opći princip relativnosti, koristeći zgodne primjere. Potom obrađuje velike eksperimentalne potvrde opće teorije: zakrivljenje svjetlosne zrake u gravitacijskome polju i gravitacijski Dopplerov učinak. Osvrće se jednim kratkim poglavljem i na paradoks blizanaca, kod Blanuše paradoks satova. U završetku knjige ukazuje na potrebu prijelaza na Riemannovu geometriju da bi opća teorija mogla biti kozmološka teorija, a završava s otvorenim, najtežim problemom povezivanja teorije relativnosti i kvantne mehanike.

Rigorozni matematičko-fizikalni pristup općoj teoriji relativnosti Blanuša je primijenio u kratkome i matematički elegantnome članku *Gravitacija*, u 6. svesku Tehničke enciklopedije¹⁴.

Članak pokazuje Blanušin pristup i poimanje teorije relativnosti. Najvažniji izvori iz kojih je Blanuša izvodio svoj pristup teoriji relativnosti, uz Einsteinove radove u kojima je ona postavljena, su radovi i knjige najuglednijih fizičara u tome polju: M.v. Laue, W. Pauli, H. Weyl, P.G. Bergmann, M. Born, S. Weinberg. Utjecaj Maxa Borna bio je izgleda najjači, a Blanuša je, kao uostalom i Einstein, naročito cijenio Bornov cjeloviti povijesni pristup razvoju fizike kao najbolji pristup u prikazu i značenju teorije relativnosti u modernoj fizici. Podloga je teoriji relativnosti nesumnjivo fizikalna i matematička. Geometriju i kozmologiju, temeljne zakone klasične mehanike te Newtonov prirodni svjetski sustav, Born uzima za povijesnu, znanstvenu

¹⁴ Danilo Blanuša, *Gravitacija*, Tehnička enciklopedija 6 G-Ka, glavni urednik Hrvoje Požar, Jugoslavenski leksikografski zavod, Zagreb 1979., str. 260–265.

i prirodnofilozofsku podlogu Einsteinovoj teoriji relativnosti. Na takvu podlogu Born smješta temeljne zakone optike i elektrodinamike, da bi iz takve podloge Einsteinovim stvaralačkim duhom izrasla specijalna i opća teorija relativnosti. Takav pristup nije jednostavan, ali jamči razumijevanje i tumačenje teorije relativnosti, njezinih primjena u fizici čestica i kozmologiji, sve do neuspjelih Einsteinovih pokušaja poopćavanja teorije relativnosti tako da bi uz gravitaciju i elektromagnetizam trebao potjecati iz geometrijskih svojstava kontinuuma prostorvremena.

Blanušina metoda pristupa, poimanja i tumačenja teorije relativnosti podudarna je Bornovoj u pogledu povijesnog prikaza fizikalno-matematičke i prirodnofilozofske podloge teorije relativnosti. Ali ona sadrži i izvorne Blanušine elemente koji se naročito tiču eksperimentalnih provjera i potvrda Einsteinove teorije. Blanuša je, kao i Born, bio zadivljen matematičkom ljepotom teorije i jasnoćom njenih postulata i principa, napose diferencijalno-tenzorskom elegancijom opće teorije, smatrajući je matematički savršenom teorijom gravitacije. Blanuši su odlučujući bili eksperimentalni dokazi, tim prije i jače što postoje i suparničke teorije gravitacije drukčije matematičke građe i eksperimentalnih testova od Einsteinove. Blanuša je, ne samo zbog osobnog školovanja i uloge matematičara u Elektro-tehničkom fakultetu, volio temeljne izazove što ih teorija relativnosti postavlja visokim tehnologijama i eksperimentalnoj fizici zbog ekstremno finih i osjetljivih izravnih i neizravnih mjerenja pojava i veličina u njoj. Blanušin je stvaralački duh i način razmišljanja (*cogitatio*) tijekom njegovoga cijelog života bio na tragu novovjekovnog odnosa teorije i eksperimenta, naročito velikih teorija matematike i fizike i velikih pokusa u fizici. U spomenutom članku o gravitaciji u Tehničkoj enciklopediji, zrcali se u kratkome tekstu Blanušina metoda u relativnosti. Blanuša najprije opisuje starija shvaćanja, potom Newtonov zakon i teoriju gravitacije, te daje matematički opis gravitacijskog polja i potencijala. Potom definira i obrazlaže slavne Einsteinove principe – princip ekvivalencije i opće relativnosti, da bi u glavnim crtama pokazao kako se iz njih u okviru opće Riemannove geometrije (*Riemannian manifolds*) i tenzorskog računa izgrađuju Einsteinove jednadžbe gravitacijskog polja. Unatoč zahtjevu skraćenog i elegantnog teksta, Blanuša ne ispušta tumačenja i komentare o razlici pseudoeuklidske metrike (metrike Minkowskog) u specijalnoj teoriji od opće Riemannove u zakrivljenom gravitacijskom polju, preko Einsteinove konvencije (propisa) sumacije¹⁵ i izrazima s indeksima koja se univerzalno primjenjuje

¹⁵ Einsteinova konvencija (pravilo) sumacije za izraze s indeksima: ako se u nekom članu izraza isti indeks pojavljuje dvaput, kao gornji i kao donji indeks, tada taj član u izrazu treba sumirati po svim mogućim

u svim formulama, do Riccijevog odnosno Einsteinovog tenzora. Međutim, skoro polovinu teksta Blanuša je posvetio provjerama Einsteinove teorije gravitacije, razlučujući pokuse i njihove rezultate u četiri grupe: pomak perihela planeta (pomicanje Merkurova perihela), gravitacijski Dopplerov pomak (učinak), otklon svjetlosne zrake u gravitacijskom polju Sunca, potraga za gravitacijskim valovima. Blanuša je bio pristalica Einsteinove teorije, te je s neskrivenim zadovoljstvom u svojim člancima, knjigama i prikazima konstatirao da je teorija relativnosti opažanjima i pokusima izvrsno potvrđena.

Interesantan je i Blanušin pogled na teoriju relativnosti što ga je iznio u Predgovoru popularne knjižice *Što je teorija relativnosti*, slavnih ruskih fizičara L.D. Landaua i J.B. Rumer¹⁶. Blanuša je u Predgovoru napisao da pravi majstori koji poznaju osnovne pojmove i činjenice specijalne teorije relativnosti, ali i njezine najsuptilnije i najsloženije matematičke potankosti, mogu napisati popularnu knjigu bez kompliciranog matematičkog formalizma i približiti je čitaocu. Ova se knjiga ne bavi općom teorijom relativnosti, koju je, kako smatra Blanuša, nemoguće izložiti bez ozbiljnije matematičke pozadine i tako popularizirati. Specijalnu teoriju Blanuša drži neophodnim okvirom u modernoj fizici, jer je potvrđena mnogim fizikalnim iskustvima.

Dodajmo još, na kraju ovog odjeljka, da je D. Blanuša prijevodu M. Bornove knjige *Einsteinova teorija relativnosti* 1948. godine, dodao svoj originalni prilog na kraju knjige. U njemu je na 13 stranica obradio 4 najvažnija aspekta teorije relativnosti: 1. *Eksperimentalne potvrde teorije relativnosti*, 2. *Kozmološka pitanja*, 3. *Jednadžbe gibanja materijalnih čestica*, 4. *Ujedinjene teorije polja*. U pogledu eksperimentalnih potvrda, Blanuša je konstatirao da opća teorija relativnosti, u to doba, još nije tako temeljito eksperimentalno provjerena kao specijalna koju podržavaju mnogi pokusi. Zato je u tome Dodatku više obrađivao eksperimentalne potvrde opće teorije relativnosti, koje ćemo mi na Blanušinu tragu posebno obraditi u ovome odjeljku. Uvažit ćemo, naravno, novi znanstveno-tehnološki razvoj u tome području, suvremene detektore i pokuse kao i pomoću njih stečene spoznaje i rezultate u vremenu nakon Blanušinog života. Spomenimo da je u istome Dodatku vrlo intere-

vrijednostima toga indeksa. Stvarno to znači sumiranje od 1 do dimenzije promatranog prostora. U teoriji relativnosti, metrika je četverodimenzionalna i u specijalnoj (pseudoeuklidska) kao i u općoj teoriji (opća Riemannova metrika). Prema tome, treba sumirati od 1 do 4 u skladu s Einsteinovom konvencijom.

¹⁶ L.D. Landau, J. B. Rumer, *Što je teorija relativnosti*, prijevod O. Vernić, predgovor akademik Danilo Blanuša, III izdanje, Školska knjiga, Zagreb, 1985.

santna Blanušina analiza kozmoloških pitanja, koja korespondira sa suvremenim stanjem u tome području. Tako je posebno obrađen Einsteinov zatvoren kuglin prostor (svemir), koji je konačan ali nema granica, s umetnutom nepoznatom kozmološkom konstantom Λ , koju je Einstein morao pretpostaviti da bi dobio baš takvo rješenje i sliku statičkog zatvorenog svemira. Nasuprot takvome prostoru, Blanuša ističe de Sitterov kuglin prostor čiji se polumjer vremenski mijenja, kao i sve mogućnosti koje on u kozmologiji pruža. Njihovu ujedinjenju u euklidski prostor s neizmjernim rastezanjem, ali s nekom gustoćom materije u njemu i bez ikakve kozmološke konstante ($\Lambda = 0$), Blanuša je posvetio naročitu pažnju. To je slavni Einstein-de Sitterov model svemira, koji je, danas, glavni model u problematici određivanja starosti svemira na osnovu Hubbleove konstante.

3. BLANUŠINI DOPRINOSI RELATIVISTIČKOJ TERMODINAMICI

U svojoj slavnoj knjizi o teoriji relativnosti, W. Pauli¹⁷ je četvrtinu knjige posvetio četverodimenzionalnom prikazu Lorentzovih transformacija i njihovoj primjeni u elektrodinamici (teorija elektrona, gustoća četverostruje, očuvanje energije i količine gibanja EM-polja), zatim vezi energije i mase, transformaciji energije i količine gibanja kad je sustav pod djelovanjem vanjskih sila, do termodinamike i statističke mehanike. Motiv je dokazivanje univerzalnosti teorije relativnosti i njezinoj temeljnosti u fizici. U pogledu termodinamike, Pauli je veliki naglasak postavio na vladanje termodinamičkih veličina pod Lorentzovim transformacijama, uračunavajući i razne specijalne primjene kao što je, na primjer, Jouleova toplota koja nastaje tokom struje kroz vodič.

Osnovicu za transformiranje termodinamičkih veličina pri prijelazu u gibajući koordinatni sustav, Pauli je vidio u temeljnom Planckovu članku iz 1907. godine i Einsteinovu članku iz iste godine, što je zapravo Planck-Einsteinova koncepcija za primjenu specijalne teorije u termodinamici¹⁸. Jedan od osnovnih principa teorije relativnosti jest povezanost energije i mase. Pauli u svojoj knjizi skuplja dokaze (radove) o tome da svakom obliku energije E odgovara masa $m = E / c^2$. To znači

¹⁷ Wolfgang Pauli (Wien, 25. 04. 1900. – Zürich, 15. 12. 1958.), dobitnik Nobelove nagrade za fiziku 1945. godine za slavni Paulijev princip isključenja.

¹⁸ M. Planck, *S.B. Preus. Akad. Wiss.* (1907) 542.

M. Planck, *Zur Dynamik bewegter Systeme, Annalen der Physik*, Leipzig, 76 (1908) 1 – 34.

A. Einstein, *Jb. Radioakt.*, 4 (1907) 440.

da se masa tijela povećava zagrijavanjem, kao i da se prijenos mase može izvršiti zračenjem između tijela koje apsorbira zračenje i tijela koje zračenje emitira. U odjeljku o inerciji energije (41. *The inertia of energy*, str. 121-123) u svojoj knjizi, Pauli pokazuje da svejedno o kojoj se vrsti energije radi (mehaničkoj, toplinskoj, svjetlosnome zračenju) i kojem tipu sustava (sustav jedne čestice, sustav idealnog plina, proizvoljni zatvoreni sustav), uvijek vrijedi relacija $\Delta m = \Delta E/c^2$. Može se, prema tome, reći da princip relativnosti zajedno sa zakonima očuvanja energije i količine gibanja, daje temeljni princip ekvivalencije mase (bilo koje vrste) i energije (bilo koje vrste). Od takvog temeljnog principa polaze i Pauli i Blanuša u svojim izvodima termodinamičkih relacija.

3.1. Blanušine transformacijske formule za količinu topline i temperaturu nasuprot Planckovih (odnosno Paulijevih)

3.1.1. Planckove transformacije za količinu topline i temperaturu

Upotrijebit ćemo simbole i notaciju koja se uveliko podudara i kod Blanuše i kod Paulija¹⁹. Za relativističko promatranje dinamike proizvoljne nabijene čestice (točkastog naboja mase m) Pauli, u suglasju s Planckovim i Einsteinovim radovima i pristupom, definira sljedeći ("najbolji i prirodni") oblik sile:

$$\frac{d}{dt}(m\vec{r}) = \vec{K}, \quad \text{uz} \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad K = (K_x, K_y, K_z) \quad \text{i} \quad \vec{r} = (r_x, r_y, r_z).$$

U relativističkim transformacijama uzima se da je sredstvo na koje sila djeluje u promatranom trenutku u mirovanju u sustavu K' . Jednadžbe gibanja koje vrijede u sustav K , u kojemu se sredstvo (odnosno čitav sustav K') giba brzinom $\vec{u}$ u smjeru pozitivne x -osi, dobivaju se transformacijskim formulama. Uz pretpostavku da sredstvo (npr. neka čestica) na koje sila djeluje, jest u mirovanju u danom trenutku, transformacijske formule za silu glase:

¹⁹ D. Blanuša se služio prvim izdanjem Paulijeve knjige: W. Pauli, "Relativitätstheorie", in *Enzycllopädie der mathematischen Wissenschaften*, Vol. 5, Part 2, B.G. Teubner, Leipzig, 1921, pp. 539-775.

"Supplementary Notes by the Author", in *Theory of Relativity*, Pergamon Press, Inc., New York, 1958, pp. 207-232.

U našim analizama i usporedbama, služili smo se sljedećim izdanjem: W. Pauli, *Theory of Relativity*, Translated from German by G. Field, Dover Publications, Inc., New York, 1958.

$$K_x = K'_x, \quad K_y = K'_y \sqrt{1 - \beta^2}, \quad K_z = K'_z \sqrt{1 - \beta^2}.$$

Kad je riječ o gibanju nabijene "točkaste" čestice (dimenzije čestice male tako da je vanjsko polje homogeno kroz područje što ga čestica ispunjava), sila $\vec{K}$ se definira kao Lorentzova sila u obliku:

$$\vec{K} = e \left[\vec{E} + \frac{1}{c} (\vec{u} \times \vec{H}) \right],$$

gdje je e = naboj čestice, $\vec{E}$ = jakost vanjskog električnog polja, $\vec{u}$ = brzina čestice (sustava K') u smjeru pozitivne x -osi, $\vec{H}$ = jakost magnetskog polja. Za ovakav oblik sile, Pauli rabi naziv *pomično-produljujuće sile* (*ponderomotive force*).

Iz svih ovih jednadžbi vidimo da je oblikom i svojstvima sila $\vec{K}$ Newtonova sila (*Newtonian force* $\vec{K}$). Atribut *Newtonove sile* nosi jer ima tri (prostorne) komponente. Nema četvrte komponente i nije četverovektor!

Jednadžbu sile (gibanja) treba napisati u invarijantnom obliku, tako da se umjesto sile na naboj (sredstvo) promatra sila po jedinici volumena ili tzv. gustoća sile (*force density*; *Kraftdichte*). Gustoća Lorentzove sile jest:

$$\vec{f} = \rho \left[\vec{E} + \frac{1}{c} (\vec{u} \times \vec{H}) \right]$$

Ova se sila sada može povezati s *koso-simetričnim tenzorom* F_{ik} (*skew-symmetric tensor* F_{ik}) i gustoćom četverostruje s^k (*four-current density* s^k). Tenzor F_{ik} uveo je Minkowski kao "površinski" tenzor (*"surface" tensor*), na tragu Lorentza, Poincaréa i Einsteina, stvarajući četverodimenzionalnu kovarijantnu formulaciju Maxwellovih jednadžbi na grupu relativističke transformacije. Minkowski je pokazao da je površinski tenzor F_{ik} , koji odgovara u realnome prostoru polarnome vektoru $\vec{E}$ i aksijalnome vektoru $\vec{H}$, prirodni prikaz ("natural representation") elektromagnetskog polja.

Gustoća sile dobiva se produktom površinskog tenzora F_{ik} i gustoćom četverostruje s^k , $s^k = \frac{1}{c} \rho_0 u^k$, gdje je u_k vektor definiran kao

$$(u^1, u^2, u^3) = \frac{\vec{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad u^4 = \frac{ic}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} :$$

$$f_i = F_{ik} s^k.$$

Vektor f_i ima četiri komponente

$$(f_1, f_2, f_3) = \vec{f}, \quad f_4 = i\rho \left(\frac{\vec{E} \cdot \vec{u}}{c} \right)$$

Sila po jedinici volumena (gustoća sile) stvara tri prostorne komponente četverovektora, čija vremenska komponenta daje rad po jedinici volumena i po jedinici vremena (odnosno snagu po jedinici volumena) podijeljenu s c . Ovu važnu činjenicu prepoznao je najprije Poincaré, a potom Minkowski.

Četverovektor gustoće struje f_i jest okomit na vektor brzine u^i :

$$f_i u^i = 0$$

Sada se jednadžbe gibanja, koje smo prethodno napisali za Newtonovu silu, mogu napisati u invarijantnom obliku. To znači da treba uvesti četverovektor sile K_i čije su komponente:

$$(K_1, K_2, K_3) = \frac{\vec{K}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad K_4 = i \frac{(\vec{K} \cdot \vec{u})/c}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Oblik $\frac{\vec{K}}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ se naziva *silom Minkowskog (the Minkowski force)*, nasuprot

Newtonovoj sili $\vec{K}$.

Jednadžbe gibanja mogu se napisati na dva načina:

$$m_0 \frac{d^2 x^i}{dt^2} = K^i \quad \text{ili} \quad m_0 \frac{du_i}{dt} = K_i.$$

Ako se uvede omjer $\mu_0 = \frac{m_0}{V_0}$, kao omjer mase mirovanja m_0 i volumena V_0 , dobivamo:

$$\mu_0 \frac{d^2 x^i}{dt^2} = f^i, \quad \mu_0 \frac{du_i}{dt} = f_i$$

Paulijeve izraze za Newtonov oblik sile, gustoću sile i silu Minkowskog, koristi i Blanuša u svojim termodinamičkim izvodima.

Minkowski i Planck prvi su prepoznali da se iz površinskog tenzora Minkowskog može izgraditi Maxwellov tenzor naprezanja S , čije komponente nisu samo matematičke veličine već imaju stvarno fizičko značenje. Naime, tenzor S_{ik} jest tenzor EM-polja koji se odnosi na gustoću-energiju tog polja, gdje njegove komponente za $i = 1, 2, 3$, odgovaraju Poyntingovu vektoru odnosno gustoći količine gibanja i struji količine gibanja, kao i njihovu očuvanju. Vremenska komponenta ($i=4$) odgovara gustoći energije, odnosno struji energije i njezinu očuvanju. Želimo naglasiti da su Pauli i Planck (u podrubu, na 86 str. Paulijeve knjige²⁰) istaknuli da su u poopćavanju tumačenja značenja tenzora S_{ik} moguće, premda "neopravdane" ("unduly perturbed"), smetnje paradoksalne naravi. Tako, naprimjer, struja količine gibanja (*momentum current*) može postojati iako njegova gustoća svugdje iščezava, kao što je slučaj kod elektrostatskog polja. Takvih mogućih paradoksa bio je svjestan i Blanuša, pa se baš na njih misaono okomio, ali u polju relativističke termodinamike.

Pogledajmo kako su Pauli i Planck računali termodinamičke veličine pod Lorentzovim transformacijama, te do kojih su relacija došli koje povezuju te veličine u sustavu mirovanja s odgovarajućim veličinama u gibajućem sustavu. Pauli je Planckove izvode²¹, čija je početna osnovica varijacijski princip, kao i Einsteinove²² koje se izravno izvode iz Lorentzovih transformacija, smatrao točnima preuzimajući ih u svoju poznatu knjigu. Pauli, najprije, sakuplja i definira transformacijske relacije za volumen (V i V_0) tlak (p i p_0), količinu gibanja $\bar{G}$ i energiju (E i E_0), uz pretpostavku da su elastična naprezanja samo zbog skalarnog tlaka i da je brzina gibanja sustava $\bar{u}$ u smjeru osi x prema sustavu mirovanja. Te formule glase:

$$V = V_0 \cdot \sqrt{1 - \beta^2}$$

$$p = p_0$$

$$\bar{G} = \frac{\bar{u}}{c^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \cdot (E_0 + p_0 V_0)$$

²⁰ W. Pauli, *Theory of Relativity*, Translated from German by G. Field, Dover Publications, Inc., New York, 1958., p. 86.

²¹ M. Planck, *S. B. Preus. Akad. Wiss.* (1907) 542.

M. Planck, *Zur Dynamik bewegter Systeme*, Annalen der Physik, Leipzig, 76 (1908) 1-34.

²² Einstein, *Jb. Radioakt.*, 4 (1907) 440.

$$E = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot (E_0 + \frac{u^2}{c^2} p_0 V_0).$$

Iz ovih veličina se grade dvije nove veličine, nužne u termodinamici. To su:

$$E + pV = \frac{E_0 + p_0 V_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \text{i} \quad \bar{G} = \frac{\bar{u}}{c^2} (E + pV),$$

pri čemu indeks 0 označava veličine u sustavu mirovanja. Iz posljednje dvije veličine izvode se relacije za količinu topline Q , temperaturu T i entropiju S . Pauli, polazeći od Planckovih i Einsteinovih izvoda, definirajući dQ kao količinu (prijenos) topline koja prelazi na sustav i dA rad što ga vrše vanjske sile na sustavu, definira termodinamičke relacije:

$$dQ = dE - dA$$

$$dA = -pdV + \bar{u} \cdot d\bar{G}.$$

Pomoću njih, pretpostavljajući da je brzina sustava $\bar{u}$ stalna i ugrađujući u njih gornje transformacijske formule za energiju, količinu gibanja, volumen i tlak, Pauli dobiva svoje poznate formule:

$$dQ = \sqrt{1-\beta^2} \cdot dQ_0 \quad \text{i} \quad Q = Q_0 \cdot \sqrt{1-\beta^2},$$

Ova se formula slaže s transformacijskom formulom za Jouleovu toplinu po jedinici vremena i jedinici volumena, koju je Pauli izveo u okviru fenomenološke elektrodinamike na osnovi tenzora S_{ik} u kojemu su sabrane gustoća energije, struja energije, gustoća količine gibanja i komponente tenzora naprezanja T_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$).

Kad (gibajući) sustav ima (dobije) brzinu $\bar{u}$, to se može smatrati adijabatskim procesom. Entropija stoga ostaje nepromijenjenom, pa zato ima istu vrijednost za gibajući kao i za sustav u mirovanju. Entropija je Lorentzova invarijanta:

$$S = S_0$$

Ako prijelaz topline dQ teče vrlo (beskonačno) dugo, vrijedit će:

$$dQ = T dS \quad (\text{iz definicije pojma entropije}).$$

Iz relacija $S = S_0$ i $Q = Q_0 \cdot \sqrt{1 - \beta^2}$, te na osnovu definicije entropije, jednostavno slijedi Planckova transformacijska formula za temperaturu:

$$T = T_0 \cdot \sqrt{1 - \beta^2}$$

D. Blanuša je izveo drukčiji oblik transformacijskih formula za količinu topline i termodinamičku temperaturu. Iz tog razloga, a nadasve zbog osjećaja dužnosti i poštovanja prema W. Pauliju i njegovu djelu i ulozi u fizici, Blanuša je odlučio napisati Pauliju pismo s detaljnim obrazloženjima i argumentima za svoje transformacijske formule u termodinamici. Tako je započelo njihovo znanstveno dopisivanje, jedinstveno u hrvatskoj znanstvenoj povijesti, čemu se ne može pronaći sličan slučaj u čitavoj hrvatskoj kulturnoj i znanstvenoj povijesti. Dodatni je razlog Blanuša, svakako, pronašao u činjenici da je Pauli neposredno prije, 1945. godine, primio Nobelovu nagradu za fiziku za slavni Paulijev princip isključenja.

3.1.2. Blanušina fizikalna slika za transformacijske formule u termodinamici

Blanušino izvođenje transformacijskih formula za toplinu i temperaturu je u metodološkome smislu izvođenje “*Ab initio*”. On započinje od najjednostavnije fizičke situacije, “*iz početka*”, uvodeći postupno složeni relativistički formalizam. Proračuni “*Ab initio*” lakih jezgara i hiperjezgara u polju fizike nekoliko tijela, kad se treba prikladno osloniti samo na neke pouzdane eksperimentalne rezultate, u naše su vrijeme vrlo popularni i dovode do vrlo korisnih teorijskih modela u nuklearnoj i hipernuklearnoj fizici. Pokazat ćemo, u skraćenom obliku, jednostavnu fizikalnu sliku i izvod koju Blanuša upotrebljava da bi dokazao utemeljenost i točnost vlastitih transformacijskih formula nasuprot slavni Planckovih, a koje je Pauli kao neupitne preuzeo u svojoj knjizi. Riječ je o slici i izvodima koje je Blanuša objavio u svoja dva rada: o paradoksima pojma energije²³ na francuskom jeziku, 1947. godine, te o relativističkoj termodinamici²⁴, 1951. godine. Polazeći od te slike i

²³ Danilo Blanuša, *Sur les paradoxes de la notion d'énergie*, Glasnik Mat.–Fiz. i Astr. Ser. II 2 (1947), str. 249 – 250.

²⁴ Danilo Blanuša, *O relativističkoj termodinamici*, Prvi kongres mat. i fiz. FNRJ, Bled 1949, Naučna knjiga, Beograd 1951., str. Str. 235 – 240.

Blanušinih izvoda, dat ćemo svoje komentare i tumačenja iz suvremenog motrišta. Blanuša smatra da Planckove formule iz relativističke termodinamike:

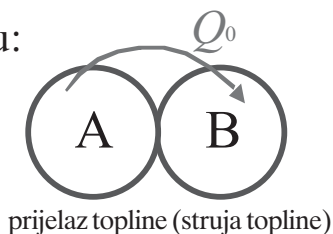
$$Q = Q_0 \cdot \alpha \quad \text{i} \quad T = T_0 \cdot \alpha,$$

nisu ispravne, te da trebaju imati oblik koji proizlazi iz njegovih višekratnih izvoda i misaonih analiza:

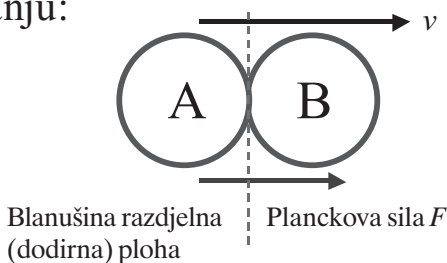
$$Q = \frac{Q_0}{\alpha} \quad \text{i} \quad T = \frac{T_0}{\alpha},$$

pri čemu je, u oba slučaja, kratica $\alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

Tijela u mirovanju:
(sustav S_0)



Tijela u gibanju:
(sustav S)



Slika 1.

Fizička slika za Blanušino izvođenje "*Ab initio*" transformacijskih formula za toplinu i temperaturu.

Blanuša promatra prijelaz topline Q_0 iz tijela A u neko drugo tijelo B . Tijela se nalaze jedno pokraj drugoga, recimo tijelo A lijevo a tijelo B desno od njega. Kad

su tijela u mirovanju, strujom (dotokom) topline Q_0 iz tijela A u tijelo B (vidi Sliku 1.), tijelu B će se toplota (energija) povećati za Q_0 a masa za $\Delta m_B = \frac{Q_0}{c^2}$. Promatramo li ova dva ista tijela u nekom gibajućem sustavu, u kojemu se ona gibaju brzinom v prema naprijed (udesno), tijelu B će se energija (toplina) povećati za iznos $\frac{Q_0}{\alpha}$, prema zakonu za transformaciju energije $E = \frac{E_0}{\alpha} = \frac{m_0 c^2}{\alpha}$. Tome povećanju energije odgovara povećanje mase za $\Delta m_B = \frac{Q_0}{\alpha c^2}$. Budući da je brzina gibanja tijela (sustava) v konstantna, tijelu B se povećao impuls (količina gibanja) za iznos $\Delta p_B = \Delta m_B \cdot v = \frac{Q_0 v}{\alpha c^2}$. Povećanje impulsa je tijelu B trebalo dovesti. To znači da je tijelo A djelovalo na tijelo B u smjeru gibanja silom F . Preneseni impuls u vremenu t , čije trajanje valja uzimati dugim da bi proces bio reverzibilan, jednak je umnošku sile F i vremena t . Vrijedi jednadžba:

$$F \cdot t = \frac{Q_0 v}{\alpha c^2}.$$

S druge, pak, strane je sila izvršila rad na tijelu B jer se ono, pod djelovanjem sile F pomaklo za put vt u smjeru sile. Zakon očuvanje energije nalaže da energija koja je prešla (dotok Q_0/α), mora biti jednaka radu sile (Fvt) na tijelu B a ostatak odgovara prijelazu topline Q na to isto tijelo. To opisujemo jednadžbom:

$$\frac{Q_0}{\alpha} = Fvt + Q.$$

Iz posljednje dvije jednadžbe, za preneseni impuls i očuvanje energije u prijenosu energije, jednostavno slijedi Planckova transformacijska relacija:

$$Q = Q_0 \alpha.$$

Što je Blanuša ovom jednostavnom fizikalnom slikom i ovim izvodom učinio? Dokazao je, na prvi pogled, valjanost Planckove formule! Međutim, dokazujući na oko Planckovu relaciju, Blanuša želi pokazati tehnikom *deductio ad absurdum* pogreške (proturječnosti) koje Planck, a možda i Pauli nije vidio. Naime, iz formule

za očuvanje energije lako se izračuna iznos prenesenog mehaničkog rada, polazeći od Planckove relacije:

$$Rad \equiv Fvt = \frac{Q_0}{\alpha} - Q = \frac{Q_0}{\alpha} - Q_0\alpha = Q_0 \cdot \frac{1-\alpha^2}{\alpha} = Q_0 \frac{\beta^2}{\alpha}.$$

Blanuša, nakon ove formule za rad, iznosi svoju glavnu postavku: u njegovu poimanju i fizikalnoj slici nema razloga za uvođenjem sile F ($F = 0$) niti njezinog rada ($Fvt = 0$), pa se sva energija koja prijelazi, prenosi kao toplina. Ako se takav uvjet ugradi u relaciju očuvanja energije, Blanušina se transformacijska formula izravno dobiva:

$$Q = \frac{Q_0}{\alpha}.$$

U Blanušinome shvaćanju se impuls (količina gibanja) $\frac{Q_0 v}{\alpha c^2}$ prenosi strujanjem (konvekcijski) s energijom $\frac{Q_0}{\alpha}$, kad ona prelazi s tijela A na tijelo B , a ne pomoću sile F kao što je slučaj kod Plancka.

Temeljni Blanušini prigovori Plancku jesu da on u transformacijske formule (njihov izvod) uvodi silu F , čija *narav nije mehanička* u onome smislu u kojemu sam Planck uobičajeno tumači rad sile u termodinamici, napose u formulaciji 2. glavnog zakona. Naime, Planckova sila F u smjeru gibanja sustava (vidi Sliku 1.) ne izaziva deformacije, a njezin rad se ne da protumačiti kao rad dizanja utega, što je osnovno tumačenje sile u termodinamici. Prisjetimo se M. Planckove i Lord Kelvinove izvorne formulacije 2. zakona termodinamike: "Ne postoji prirodni proces (toplinski stroj) gdje bi se periodički crpila toplina (vršio rad) samo iz jednog spremnika, a neki uteg podigao."²⁵ Planckov mehanički rad

$$Fvt = \frac{Q_0}{\alpha} - Q = Q_0 \frac{\beta^2}{\alpha},$$

ne može se protumačiti kao rad dizanja utega jer bi time u duhu Carnotovog procesa bio moguć perpetuum mobile 2. vrste. Blanuša u *Pismu Pauliju* (nadnevka 15. 03.

²⁵ Vidi, na primjer, u: Tomislav Petković, *Uvod u znanost o toplini i termodinamici*, Element, Zagreb, 1997.

1948.) i u svome radu o relativističkoj termodinamici, detaljno analizira narav Planckove sile F u kontekstu Carnotovog ciklusa, dodajući (misaono) tijelima između kojih se događa prijelaz topline odgovarajuće spremnike topline. Tu se vidi i blaga Blanušina ironija prema Plancku jer ispada da bi Planckovim pojmom rada sile, kao rada sile dizanja (njem. "*Hubarbeit*")²⁶, što se onda može protegnuti i na rad sile polja u elektrodinamici, bilo moguće crpsti toplinu iz hladnijeg spremišta odnosno podići uteg (*perpetuum mobile* druge vrste). Planck je silu F uveo samo zato da bi mogao objasniti prirast impulsa što ga tijelo dobiva u promatranju transformacijskih formula, ali upada u pojmovne poteškoće s pojmom rada što ga takva sila vrši. Te Planckove poteškoće Blanuša je prvi otkrio i analizirao briljantnim stilom. Blanuša je svoje transformacijske formule postavio tako da je njihov fizikalni temelj uvidio u tome da se impuls $\frac{Q_0 v}{\alpha c^2}$ (koji mora postojati jer se tijela gibaju) prenosi strujanjem ("konvektivno", Blanušin izraz, op. T.P.) zajedno s toplinom (energijom).

3.1.3. Blanušino Pismo W. Pauliju, 15. ožujka 1948. godine

M. Planck²⁷ je umro 1947. pa mu Blanuša, očigledno, nije mogao pisati o svojim otkrićima i spoznajama u relativističkoj termodinamici do kojih je došao tijekom i nakon 1947. godine. Prirodno je, dakle, Blanušino znanstveno dopisivanje s Paulijem, čija se knjiga temelji na Planckovim i Einsteinovim radovima, a osim toga oni – sva trojica – pripadaju istoj školi njemačko-švicarske fizike.

U Pismu²⁸ se Blanuša zahvaljuje vrlo poštovanom gospodinu profesoru Pauliju na njegovome ljubaznome pismu od 18.02.1948. (*najvjerojatnije*) i na mišljenju iz pera gospodina Schafrotha, te se ispričava što zbog obveza na fakultetu nije odgovorio prije.

²⁶ Njemačko-švicarski nauk klasične fizike, u što se autor imao prilike osobno uvjeriti, definira rad dizanja kao temeljni pojam na jednostavan način: Der Hub ist definiert als eine Translation in Richtung der Schwerkraft (z-Richtung) nach oben: $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot dz$.

²⁷ Max Planck (23. 04. 1858., Kiel – 4. 10. 1947., Göttingen), dobitnik Nobelove nagrade za fiziku 1918. godine za kvantnu teoriju svjetlosti.

²⁸ Blanušino pismo na njemačkom jeziku poštovanom Profesoru W. Pauliju, nadnevka 15. 03. 1948., poslano iz Tehničkog fakulteta u Kačićevoj 26, tipkani tekst na pisačem stroju s Blanušinim ispravkama, ukupno 7 stranica teksta.

Blanuša je poželio odgovoriti na pojedine stvari (točke) Pauliju, i to baš u onima u kojima mu Pauli prigovara. U točki 1 a) Paulijevog teksta se protiv Blanušine transformacijske formule za silu kaže da bi se kao 4. komponentu četverovektora trebala uzeti struja topline, pri čemu onda u gibajućem sustavu proizlazi sila koja je prema Planckovu shvaćanju nužna. Blanuša zato želi precizirati pojam sile kojeg on koristi. S obzirom da se ne radi o gustoći sile (izvorno *Kraftdichte*), nego o zajedničkoj sili kojom jedno tijelo djeluje na drugo trebalo bi četverovektor sile općenito prikazati kao:

$$(F_1, F_2, F_3) = \frac{\vec{K}}{\alpha}; \quad F_4 = \frac{L}{c\alpha},$$

gdje je $\alpha = \sqrt{1 - v^2 / c^2}$, s time da je v brzina u točki dodira ili sudara (*Angriffspunkt*), odnosno u ravnini dodira (*Trennfläche*). Blanuša skreće pozornost Pauliju da je u njegovoj knjizi u formuli (219) u četvrtoj komponenti pogreškom izostavljen faktor $1/\alpha$. U novijim izdanjima Paulijeve knjige ova je pogreška ispravljena, ali se nigdje ne spominje da je Blanuša na nju upozorio. U sustavu mirovanja kad je $v = 0$, dobivaju se komponente $0,0,0, \frac{1}{c} \frac{dQ_0}{dt_0}$ kao komponente traženog četve-

rovektora, čijom se transformacijom i uračunavanjem dilatacije vremena doista dobivaju vrijednosti koje Planck smatra nužnim. U svojim izvodima Blanuša, naravno, upotrebljava ct kao četvrtu koordinatu te dilataciju vremena kao $dt_0 = dt \cdot \alpha$. Blanuša, međutim, stavlja naglasak u Pismu Pauliju na to da uopće

nije uputno četiri veličine $0,0,0, \frac{1}{c} \frac{dQ_0}{dt_0}$ sabrati u četverovektor. To ilustrira i

dokazuje na jednostavnom modelu dva tijela koja se dodiruju, između kojih struji toplina, primjerice s lijevog na desno tijelo. U mirovanju i kad je sila nula, tijela se samo dodiruju. Ovu početnu situaciju, opisat ćemo navodom izvornog Blanušinog opisa (u hrvatskome prijevodu) iz njegova Pisma Pauliju²⁹:

“Dolazi do prijelaza topline, koju možemo smatrati strujom toplinske energije. Koristim sada temeljnu sliku iz teorije relativnosti, a ta je da svaka energija koja

²⁹ Ibidem, str. 2.

struji brzinom v nosi sa sobom odgovarajući impuls $\frac{E}{c^2} \cdot v$. Protok toplinske energije mora dakle sa sobom nositi svoj impuls i stoga istodobno nastaje konvekcijska struja impulsa. Da toplinska struja nosi svoj impuls smatra i Laue, a to isto stoji i kao opći stav za svaku struju energije i u Vašoj knjizi.”

U sustavu u mirovanju S_0 , ako im je dodirna površina jednaka 1, neka struja energije s_0 između dva tijela bude $s_0 = \frac{dQ_0}{dt}$, gustoća impulsa g_0 , gustoća energije

w_0 , te struja impulsa p_0 . Ove veličine Blanuša sastavlja u karakteristični tenzor veličina energije-impulsa (*Energieimpulsgrößen*). Prema našim spoznajama, to je izvorna Blanušina veličina za termodinamičku konvekciju (strujanje), po uzoru na ”površinski” tenzor Minkowskog F_{ik} , što ga je Minkowski uveo za četvero-dimenzionalnu kovarijantnu formulaciju Maxwellovih jednadžbi. Blanušin ”površinski” tenzor u fenomenološkoj termodinamici označavat ćemo kao B_{ik} . Njegov oblik jest (formula (1) u Pismu Pauliju³⁰):

$$B_{ik} = \begin{pmatrix} p_0 & 0 & 0 & cg_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{s_0}{c} & 0 & 0 & w_0 \end{pmatrix}$$

Za Blanušin tenzor B_{ik} vrijedi:

$$cg_0 = \frac{s_0}{c} \text{ (dakle, tenzor je simetričan),}$$

$$V_0 = \frac{s_0}{w_0} = \text{brzina strujanja energije.}$$

Impuls, koji sa strujom energije prolazi u jedinici vremena kroz jedinicu površine, može se napisati kao:

$$p_0 = g_0 V_0 = \frac{s_0^2}{c^2 w_0}.$$

³⁰ Ibidem, str. 2

Svoj tenzor toplinskih veličina energije-impulsa Blanuša transformira u drugi gibajući sustav S , koji se prema S_0 giba brzinom v , recimo nalijevo. Blanuša metodološki privremeno ostavlja po strani pitanje hoće li u novome sustavu čitava energija, ili tek neki njezin dio, biti toplina. Transformacijama se dobivaju nove veličine p , $\frac{S}{c} = cg$ i w u sustavu S . Blanuša sada uvodi interesantno tumačenje i novu transformaciju za strujanje topline i impulsa. Naime, s i p su energija i impuls koji u sustavu S struje kroz jediničnu plohu u jedinici vremena. Da bi dobio odgovarajuće veličine s' i p' u odnosu na razdjelnu (dodirnu) plohu koja se zajedno s tijelima giba, Blanuša jednostavno oduzima energiju i količinu impulsa koja se nakon jedinice vremena nalazi između gibajuće i plohe u mirovanju. Dakle, s' i p' iznose:

$$s' = s - vw$$

$$p' = p - vg$$

koje, kad se u njih uvrste dobiveni izrazi za s i p , postaju:

$$s' = s_0 + c\beta p_0,$$

$$p' = p_0 + \beta \frac{s_0}{c}.$$

Blanuša je Pauliju u Pismu pokazao još jedan dokaz, određujući brzinu strujanja (prijenosa) energije $V = \frac{S}{w}$. On je pokazao da se brzina strujanja energije transformira u skladu s adicionim teoremom za brzine u teoriji relativnosti, što je i bilo za očekivati:

$$V = \frac{V_0 + v}{1 + \frac{V_0 v}{c^2}}.$$

Blanuša, na kraju daje, završni krunski dokaz! On pretpostavlja da samo dio (u Blanušinoj notaciji γ -dio) od struje energije koja prolazi dodirnom površinom bude označen kao toplina. Pri tome će, naravno, i γ -dio struje impulsa p' kao konvekcijski toplinski impuls prolaziti kroz površinu. Ostatak bi se u takvoj slici, prema Blanuši,

morao ostvariti kao mehanički rad i prijenos impulsa pomoću sile. Ali Blanuša pokazuje da faktor γ izlazi jednak jedinici ($\gamma = 1$), iz čega nužno slijedi da su sila, prema tome i rad promjena impulsa zbog sile, jednaki nuli. Blanuša zaključuje i poručuje Pauliju kako je došao do istog rezultata kao i u svome prethodnome pismu. Sljedeći navod iz Blanušinog Pisma Pauliju, pokazuje znanstvenu oštrinu Blanušinih formulacija³¹:

“Unaprijed je, već, pomalo iznenađujuće formirati četverovektor $0,0,0,\frac{S_0}{c}$; jer, što to znači? Od veličina energije-impulsa toplinske struje uzimaju se tri komponente strujanja (a koje bi, u općem slučaju, mogle biti različite od nule), gradi se korijen iz njihove sume kvadrata i onda se takva veličina proglašava četvrtom komponentom nekog četverovektora. Kao prve 3 komponente uzimaju se 3 nule neke nepostojeće sile. Ne uviđam zašto bi to trebalo imati smisla. No ideja o takvoj tvorbi mogla bi potjecati od neke naizgled slične ideje, naime od četverovektora gustoće elektromagnetske sile – snage, kao u slučaju kad se razvija Jouleova toplina”.

3.2. Blanušini izvorni pojmovi i doprinosi relativističkome formalizmu u fenomenološkoj termodinamici

Blanušini doprinosi u fizici povezani su s primjenom specijalne teorije relativnosti u fenomenološkoj termodinamici, pri relativističkoj transformaciji termodinamičkih veličina količine topline i temperature. D. Blanuša je 1947. godine izveo drukčiji oblik transformacijskih formula za količinu topline i termodinamičku temperaturu, od onih koje su izveli Planck (osnovica izvoda varijacijski princip) i Einstein (izravni izvod iz Lorentzovih transformacija) 1907. godine, a koje je Pauli, smatrajući ih točnima, preuzeo u svoju poznatu knjigu o teoriji relativnosti objavlvenu 1921. godine. Budući da je otkrio formule koje su drukčije od Planckovih i Einsteinovih, odnosno Paulijevih u njegovoj knjizi, Blanuša piše pisma Pauliju i svome prijatelju iz studentskih dana Paulu Urbanu u Grazu. Pismo Pauliju smo već obradili, a sad ćemo navesti dva karakteristična ulomka iz Pisma Urbanu koji oslikavaju situaciju u kojoj je Blanuša bio u to vrijeme.

³¹ Ibidem, str. 3 i 4.

U Pismu P. Urbanu³², nadnevka 1. lipnja 1948. godine, Blanuša je napisao:

“A između, ... $\Delta E \alpha^2$ je toplina (po jedinici vremena, mislim), ostatak $\Delta E \beta^2$ je mehanički rad, dakle sila iz $Pv = \Delta E \beta^2$ jest $P = \Delta E \frac{v}{c^2}$, što je istodobno preneseni impuls po jedinici vremena, dakle ukupni impuls prenesene energije. Meni je $\Delta E = \frac{\Delta E_0}{\alpha}$ toplina, Plancku je samo $\Delta E \alpha^2 = \Delta E_0 \alpha$ toplina ...

Vidiš, stvar nije tako naivna, kao što si možda vjerovao?”

Na kraju istog pisma P. Urbanu, Blanuša opisuje Paulijev stav o Planckovim i Blanušinim formulama:

“On (Pauli, op. T. P.) kaže, da je moje shvaćanje doduše ispravno, ali da je Planckovo također ispravno i da je pitanje definicije koje će se prihvatiti. On k tome još navodi razloge svrhovitosti u prilog Planckovu shvaćanju. Ja smatram da je Planckovo shvaćanje krivo i ne prihvaćam ga.”³³

Iz dosadašnjeg našeg prikaza, očigledno proizlazi da je Blanuša izvrsno poznao matematički formalizam teorije relativnosti, te da mu je Paulijeva knjiga bila *masterpiece* u tome području. Svoje transformacijske formule, Blanuša je izveo polazeći od jednostavne fizikalne situacije i Lorentzovih transformacija, ukazujući istovremeno na pojmovne pogreške (proturječnosti) u Planckovu izvodu. Izgleda da je Blanušu pogodila Paulijeva sklonost Planckovu izvodu zbog bolje ukorijenjenosti Planckova izvoda u četverodimenzionalni formalizam i suglasje toga izvoda s radovima Einsteina i Minkowskog. Zbog toga je Blanuša u pismu svoje transformacijske formule dokazao i na taj način, uvodeći u analizu Blanušin tenzor veličina B_{ik} u termodinamičkome strujanju (konvekciji).

³² Navod iz Blanušina pisma, str. 3, njegovu prijatelju Paulu Urbanu u Graz: Pismo Paulu Urbanu u Grazu, Univerzitätsplatz 5, nadnevka 1. 06. 1948. Koncept pisma, napisan Blanušinom rukom iz kojeg se vidi da je dopisivanje bilo višestruko, uključujući Urbanove odgovore, te da je Blanuša Urbanu slao separate svojih radova.

³³ Ibidem, str. 4.

4. SUVREMENI RAZVOJ TEORIJE RELATIVNOSTI

Blanuša je inzistirao na *općim principima* specijalne i opće teorije relativnosti: na oba postulata specijalne teorije, na relaciji $E = mc^2$, na principu ekvivalencije, na Einsteinovom projektu geometrizacije gravitacije (fizike), odnosno zakrivljenosti prostorvremena koju stvara svemirska masa.

Je li moguća poslije-Einsteinova fizika, na novim postulatima i pojmovima različitim od onih u Teoriji relativnosti? Teško je odgovoriti što bi Blanuša zastupao. Možemo nagađati! Blanuša je cjelokupnim životom i radom pokazao privrženost Einsteinovoj teoriji relativnosti. Ali bio je zainteresiran i za druge teorije i nove pojmove u tome području. Sigurno je da bi ih proučavao, te ako bi uvidio njihovu znanstvenu podlogu i cilj prihvaćao bi ih s oprezom. Sigurno jest i da bi ga eksperimentalne potvrde uvjerile da ih prihvati!

Einsteinova teorija relativnosti je u znanosti poput tvrde stijene. Ona je osnovni i sustavni dio moderne kozmologije. Međutim, teorija *velikog praska* (*Big Bang*) nije stabilna: sitna odstupanja od početnih uvjeta mogu dovesti do bitno drukčijih rješenja (evolucija) nego li stvarni i računski izvedljivi fizikalni procesi. To je tzv. opći kozmološki problem, nezadovoljstvo kozmologa terijom velikog praska. Mnogi smatraju da je, recimo, *teorija inflacije* pravi odgovor na te poteškoće jer je efektivno riješila jednu od velikih zagonetki Big Banga: problem "*plosnatosti*" (the "*flatness*" problem). Postavljanjem vrijednosti parametra plosnatosti $\Omega = 1$, u inflaciji se potiskuje zakrivljenost u svemiru u njegovim najranijim trenucima nakon velike eksplozije na račun podešavanja Ω potrebnog u rješavanju plosnatosti. João Magueijo je kozmološkome problemu odgovorio najsmjelijom hipotezom do sada postavljenom u modernoj fizici, a to je znanstvena spekulacija "*brže od svjetlosti*" ("*faster than the speed of light*") kako sam kaže u svojoj popularnoj i kontroverznoj knjizi³⁴. Magueijo je ustvrdio da ono jedino što se u svim dosadašnjim kozmologijama u svemiru od njegovog postanka nije promijenilo – jest brzina svjetlosti c . Rješenje kozmološkog problema on vidi u svojoj novoj temeljnoj fizikalnoj ideji promjenjive brzine svjetlosti: "*Varying Speed of Light*" ili skraćeno *VSL*. Konkretno, Magueijo spekulira da je svjetlost u prošlosti svemira, kad su energije bile u njemu puno veće, putovala brže nego danas. Heretičnost ideje promjenjive brzine svjetlosti nasuprot

³⁴ João Magueijo, *Faster than the speed of light. The story of a scientific speculation*, Perseus Publishing, Cambridge, 2003.

temelnog Einsteinovog postulata, najbolje se vidi u tome kako Magueijo kaže, da su mnogi fizičari tu ideju protumačili kao "*vrlo glupavu*" ("*very silly*") prema njezinu akronimu *VSL* u engleskome jeziku. U svojoj se knjizi J. Magueijo, ipak, smatra velikim štovateljem i privrženikom Einsteinovog djela, ali problemi u himeričnoj teoriji kvantne gravitacije, što nastaju spajanjem teorije relativnosti i kvantne mehanike, nužno ga prisiljavaju na teorijske iskorake poput promjenjivog c . Ako se *VSL* pokaže dobrom i točnom, ne samo da će mnogi kozmološki problemi biti riješeni, nego će se povećati i šanse za Einsteinov neostvoreni san: konačnu ujedinjenu teoriju. Premda J. Magueijo drži Einsteinovu teoriju "silnim intelektualnim potresom" ("a massive intellectual earth-quake")³⁵ i najvećom revolucijom u fizici uopće, samu relativnost u fizici on smatra još nedovršenom.

Specijalna teorija relativnosti je teorija o transformacijskim pravilima koji povezuju opažanja različitih inercijalnih opažača. Einsteinova *STR* počiva na Lorentzovim transformacijama i na jednoj skali neovisnoj od opažača: skali brzine svjetlosti c . Konstantnost brzine svjetlosti i relativnost gibanja čiji se zakoni za različite opažače kovarijantno formuliraju, temeljni su principi teorije relativnosti. U posljednje vrijeme u najinteresantnijem području teorijske fizike najviših energija, pri kojima i gravitacija postaje kvantizirana, sa šansama da sve prirodne sile i čestice budu ujedinjene, formuliraju se specijalne teorije relativnosti s dvije (ili više) skala neovisnih o opažaču, koje se nazivaju teorijama Dvojne Specijalne Relativnosti (*DSR*) (u izvorniku *Doubly Special Relativity*). Dakle, u kvantnoj gravitaciji, kao najizazovnijem području fizike u cjelokupnoj njezinoj povijesti, formuliraju se novi relativistički postulati drukčiji od Einsteinovih, za opis diskretne strukture prostora-vremena i pojava u tome području. To su pojave na najkraćim udaljenostima (karakteriziranim Planckovom duljinom L_p), u najkraćim trajanjima (opisanih Planckovim trajanjem t_p), na najvišim energijama (Planckova energija E_p). Temeljna motivacija u pokušajima drukčijih i novih specijalnih teorija različitih od Einsteinove, tzv. *DSR* teorija, jest pokušaj izgradnje konzistentne teorije kvantne gravitacije na fenomenološkoj razini koja bi uključila i stvarna eksperimentalna opažanja. Nije riječ o neutemeljenom ili slučajnom rušenju paradigme Einsteinove teorije. Autori *DSR*-pokušaja ne žele i ne mogu odbaciti klasičnu gravitaciju (opću relativnost), odnosno prirodu i pojave *ispod* (*below*) Planckovih parametara³⁶ premda se učinci

³⁵ Ibidem, p. 38.

³⁶ Planckove parametre možemo smatrati granicom ili *pragom* (*threshold*) koji razlučuje nove pojave i učinke u području kvantne gravitacije, od područja u kojemu su oni zanemarivi (područje klasične gravitacije).

kvantne gravitacije u svijetu opće relativnosti uopće ne vide. Budući da se relativnost gibanja (*princip relativnosti*) u fenomenološkim DSR-pokušajima nužno mora zadržati, preostaju jedino najmanje ili značajnije preinake specijalne teorije relativnosti. Preinake su u tome da se uvode dvije nove skale³⁷ neovisne o opažaču: skala brzine c , kao u Einsteinovoj teoriji, i skala duljine/mase ($\text{duljina} \times \text{masa}^{-1}$), koja se odnosi na područje "*kvantnog prostor-vremena*" koje se probno prepoznaje (nazire) u Planckovoj duljini L_p . Dakle, Planckova duljina L_p se postulira potpuno temeljnom, od opažača neovisnom veličinom: ona je kinematička (prostor-vrijeme) invarijanta. Brzina c kao "brzina svjetlosti" dolazi iz pokusa i prirodnog svijeta čije su energije drastično manje od Planckove energije, pa na takvim višim energijama ona više nije konstantna kao u Einsteinovoj specijalnoj teoriji. Brzina c postaje energijski ovisnom veličinom, čiju vrijednost inercijalni opažatelj mjeri ovisno o boji (valnoj duljini). Ako brzina svjetlosti više nije konstantna, preostaje, s druge strane, samo princip relativnosti. Nepostojanje od opažača neovisne skale za brzinu, upućuje, naprimjer, na jednostavan Galileijev zakon $v' = v_0 + v$ slaganja brzina, kao najbolju alternativu Einstein-Lorentzovu teoremu za slaganje brzina u klasičnoj relativnosti. Međutim, situacija nije baš tako trivijalna, pa ćemo probati reći ponešto više o novim teorijskim pokušajima u fizici relativnosti.

U literaturi se razlikuju dva pokušaja (prijedloga) izgradnje teorija dvojne specijalne relativnosti, s dvije skale neovisne o promatraču (skala brzine i skala duljine/mase):

1. DSR teorija čiji je autor Giovanni Amelino-Camelia iz Odjela za fiziku, Sveučilišta "La Sapienza" u Rimu³⁸.

Planckovoj energiji $E_p \approx 2 \times 10^{19} \text{ GeV}$ odgovara Planckova masa $M_p \approx 2 \times 10^{19} \text{ GeV}/c^2$. Planckova masa se smatra prirodnom jedinicom mase koja se dobiva povezivanjem Planckove konstante, brzine svjetlosti i Newtonove gravitacijske konstante. Kvantni gravitacijski efekti postaju važni na skali Planckove mase koja se, također, uzima prirodnom skalom teorija supergravitacije. Planckova duljina iznosi $L_p \approx 10^{-35} \text{ m}$, a Planckovo trajanje $t_p \approx 10^{-43} \text{ sekunde}$.

³⁷ To i jest razlog imenu "*dvojne specijalne relativnost*" ("*Doubly Special Relativity*") jer princip relativnosti subiva (koegzistira) s dvije skale neovisne o opažaču, pri čemu je jedna skala duljine (momenta) a druga brzine. U Einsteinovoj teoriji princip relativnosti subiva sa skalom brzine c neovisne o opažaču.

³⁸ G. Amelino-Camelia, gr-qc/0012051, Int. J. Mod. Phys. D11 (2002) 35; G. Amelino-Camelia, D. Benedetti, F. D'andrea, *Comparison of relativity theories with observer-independent scales of both velocity and length/mass*, hep-th/0201245; G. Amelino-Camelia, *Space-time quantum solves three experimental paradoxes*, Phys. Lett. B 528 (2002) 181; G. Amelino-Camelia, hep-th/0012238, Phys. Lett. B 510 (2001) 255; G. Amelino-Camelia, *Status of Relativity with observer-independent length and velocity scales*, gr-qc/0106004.

2. DSR teorija čiji su autori João Magueijo i Lee Smolin iz Imperial Collegea u Londonu³⁹.

Nećemo se detaljno upuštati u filozofiju, strukturu, svojstva i poteškoće ovih dvaju zanimljivih teorijskih pokušaja. Uzet ćemo, ipak, neke formulacije i matematičke relacije kako bismo ukazali na motivaciju i znanstveni stil ovih pokušaja. Amelino-Camelia definira zakone svoje teorije (odgovaraju Einsteinovim postulatima) na sljedeći način:

- *Zakon 1:* Vrijednost na temeljnoj skali brzine c može izmjeriti svaki inercijalni opažatelj kao graničnu brzinu svjetlosti valne duljine λ pod uvjetom $\frac{\lambda}{L_p} \rightarrow \infty$.
- *Zakon 2:* Svaki inercijalni opažatelj može utemeljiti vrijednost $\tilde{L}_p$ (ista vrijednost za sve inercijalne opažatelje) određivanjem disperzijske relacije za fotone u obliku $E^2 = c^2 p^2 + f(E, p; \tilde{L}_p)$, gdje je glavna ovisnost funkcije f o $\tilde{L}_p$ dana izrazom:
 $f(E, p; \tilde{L}_p) \equiv \tilde{L}_p c E p^2$.

Iz ovih formulacija jasno se vidi da se c prema 1. zakonu određuje na nizu podataka o valnoj duljini, ali značenje prvog Einsteinovog postulata nije potpuno odbačeno. Zakon 2. jest primjer novog postulata i novog načina mišljenja o relativnosti, što nastaje na podlozi kvantne gravitacije.

Einsteinova specijalna teorija izvire iz dva neovisna principa: relativnosti gibanja i stalnosti brzine svjetlosti u svim inercijalnim sustavima. Pokušaji drukčijih specijalnih teorija rukovode se načelom najmanjih promjena tako da se relativnost gibanja zadržava, ali na visokim energijama brzina svjetlosti nije više konstantna. Zato se izvede nove transformacijske formule ili pravila što trebaju nadomjestiti klasične Lorentzove transformacije. Nove transformacije, koje ćemo tehnički nazvati *nelinearnim transformacijama*, puno su kompliciranije od Lorentzovih jer uračunavaju, koliko god je to moguće, efekte i specijalne i opće teorije. Prema tim transformacijama, brzina svjetlosti postaje sve većom i većom približavanjem Planckovoj duljini L_p i vremenu t_p . Uzmemo li Planckovu duljinu i vrijeme kao granicu između klasične i kvantne gravitacije, proizlazi da je brzina svjetlosti na toj granici

³⁹ J. Magueijo and L. Smolin, hep-th/0112090; J. Magueijo, *Faster than the speed of light. The story of a scientific speculation*, Perseus Publishing, Cambridge, 2003.

beskonačna. To za posljedicu ima povratak apsolutnog vremena i prostora, doduše ne baš potpuno jer za karakterističnu duljinu i vrijeme L_p i t_p , svi bi se opažači još mogli složiti što pripada području klasične a što području kvantne gravitacije. Pogledajmo ove zanimljive efekte na primjeru najpoznatije Einsteinove formule $E = mc^2$, koja se i danas čini najinteresantnijom i najintrigantnijom formulom u svakodnevnoj recepciji znanosti kao i u znanstvenome području povijesti znanosti⁴⁰. U DSR-formulaciji, što ju predlažu Magueijo i Smolin, Einsteinova formula dobiva novi matematički oblik⁴¹ s novim značenjem:

$$E = \frac{mc^2}{1 + \frac{mc^2}{E_p}}.$$

U ovoj je formuli c približno konstantna brzina svjetlosti koju dobivamo iz mjerenja na niskim energijama. Elementarnom matematičkom analizom pokazuje se da masa neke standardne čestice, na primjer elektrona, prema gornjoj jednadžbi ne može nikada biti veća od Planckove energije E_p , dakle $E \leq E_p$. Još zanimljiviji je, pak, sljedeći rezultat. Zamislimo virtualni akcelerator koji stvara masivne čestice čija je masa jednaka Planckovoj, i to njihov veliki broj tako da se od njih može načiniti bomba. Prema gornjoj formuli, stavimo li $m = m_p$, odnosno

$$mc^2 = m_p c^2 = E_p, \text{ proizlazi da je } E = \frac{1}{2} m_p c^2. \text{ Dakle, bombom napravljenom}$$

iz Planckovih čestica oslobodila bi se točno polovica energije od energije koju bi dala standardna atomska bomba jednake mase. Štoviše, ako bi virtualni akcelerator stvarao čestice dvostruke, trostruke ili višestruko veće mase od Planckove, onda bi energija oslobođena iz bombe načinjene iz takve mase padala obrnuto proporcionalno na $1/3$, $1/4$, ..., od energije koju oslobađa standardna atomska bomba. Netko može pomisliti: *Priroda* sama uzvraća moralnom kočnicom u pogledu atomskog razaranja, doduše još ne apsolutno već relativnim smanjivanjem opasnosti.

⁴⁰ Usporedi i vidi u: David Bodanis, *A Biography of the world's most famous equation $E = mc^2$* , Berkley Books, New York, 2000. Motivacija za ovu knjigu što ju je autor D. Bodanis, povjesničar znanosti iz Oxforda, napisao s užitkom, jest rekonstrukcija američkog uspjeha i njemačkog pokušaja konstrukcije atomske bombe na osnovi slavne Einsteinove relacije $E = mc^2$.

⁴¹ Vidi u J. Magueijo, *Faster than the speed of light. The story of a scientific speculation*, Perseus Publishing, Cambridge, 2003., str. 252.

Vidimo, iz prethodnih jednostavnih razmatranja osnovnih postavki novih teorija

relativnosti da je Planckova duljina $L_P \equiv \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}$ fundamentalna veličina koja se pokazuje kao konstanta (invarijanta) neovisna od opažača. Diskretna struktura prostor-vremena na dužinama reda Planckove duljine je vrlo sićušna, fenomenološki dramatično ispod osjetljivosti suvremenih akceleratorskih pokusa. Razmišljanja, ipak, idu tragom prepoznavanja i izračuna kvantnih deformacija na klasičnom prostor-vremenu, što podrazumijeva delikatne pojmovne i tehničke zadaće izučavanja i opisa nekomutativnog prostor-vremena kvantnih grupa i algebra, u analogiji s klasičnim grupama i algebrama. Prirodno je, naime, pretpostaviti koegzistenciju principa relativnosti sa skalama duljine i brzine neovisnima o opažaču koja bi se izrazila prostorno-vremenskim simetrijama, po uzoru na simetriju (grupu) Lorentzovih transformacija u Einsteinovoj specijalnoj teoriji. Nove simetrije moraju uključiti dodatnu skalu kao i novu fenomenologiju na visokim energijama, te točno reproducirati klasičnu Lorentzovu invarijantnost kad se dodanoj skali postavi određeni uvjet ($L_P \rightarrow 0$). U suvremenim teorijskim pokušajima izgleda da se κ -Poincaré-Hopfova algebra, kao već postojeća izgrađena matematika⁴², može dobro primijeniti u izvođenju transformacijskih pravila za kontrakciju duljine, te kinematiku jedne i dviju čestica (raspršenje i tvorba), pod uvjetima novih postulata dvojne specijalne teorije relativnosti. Generatori *pojačanja i vrtnji* (*generators of boosts and rotations*) koji se konstruiraju pomoću disperzijske relacije (vidi *Zakon 2*) za slučaj gibanja jedne čestice u z -smjeru na invarijantan način (vrijede za sve inercijalne opažače), ispadaju podudarni generatorima κ -Poincaré-Hopfove algebre. Naime, pomoću novih generatora pojačanja i vrtnji, jednostavno se dobivaju infinitezimalne transformacije za energiju i količinu gibanja čestice, a iz njih se konačne transformacije dobivaju dugotrajnom i zamornom integracijom. U pogledu izvođenja novih transformacijskih formula, među teoretičarima vlada optimizam: kao što je uvođenje postulata u Einsteinovoj specijalnoj teoriji bilo plodno povezano s već postojećom matematikom Lorentzove grupe, tako će i novi relativistički postulati biti stvaralački povezani s već postojećom κ -Poincaréovom matematikom. Međutim, unatoč optimizmu, mnoge pojmovne i tehničke poteškoće naviru povezivanjem κ -Poincaréove algebre s novim dvojnim teorijama relativnosti, ako se njima želi

⁴² U tome kontekstu, fizičko-matematički i spoznajno-filozofijski vrlo zanimljivim mi se čini članak: G. Amelino-Camelia, *Status of relativity with observer-independent length and velocity scales*, gr-qc/0106004.

obuhvatiti mikroskopska i makroskopska stvarnost, pojave na niskim kao i visokim energijama, klasičnu i kvantnu gravitaciju.

Što, naposljetku, možemo reći glede novih dvojnih teorija relativnosti, imajući u vidu njihov teorijski cilj i moguće eksperimentalne potvrde? Temeljna teorijska motivacija im je već utemeljena u Einsteinovom snu o ujedinjenju svih prirodnih sila, koja je u ovom slučaju naročito usmjerena na povezivanje klasične relativnosti i gravitacije s kvantnom gravitacijom. Tvorcima novih teorija relativnosti polaze od dosadašnjeg povijesnog razvoja fizike. Zato se, najprije, i pokušava teorijski proboj baš u polju specijalne relativnosti, pokušajima njezinog proširenja na svijet kvantne gravitacije pri najvišim energijama Planckove skale. U pogledu pokusa i potvrda nove teorije, čini nam se uputnim prisjetiti se srednjovjekovne *Occamove oštrice*. U tome, naravno, ne mislimo oštro odbaciti novu teoriju relativnosti! Želimo, jedino, ponovno naglasiti ono značenje *Occamove britve* kojim valja odbaciti one hipoteze koje su suvišne, što u modernoj znanosti znači one koje nemaju eksperimentalnu potvrdu. Stanje u suvremenoj teorijskoj i eksperimentalnoj fizici jednostavno možemo opisati tako da teorije koje se dobro prilagođavaju podacima i činjenicama trebaju biti prihvaćene, barem kao efektivne teorije. Koja je od njih baš ostvarena u Prirodi, teško je odgovoriti! Doista su nužno potrebni nedvosmisleni pokusi izravno povezani s teorijom i njezinim temeljnim predviđanjima. Napose ovo vrijedi za nove teorije dvojne specijalne relativnosti, jer one žele zamijeniti Einsteinovu teoriju relativnosti kao jednu od najvećih teorija fizike i filozofije u čitavoj njezinoj povijesti.

5. ZAKLJUČAK

Blanušine doprinose teoriji relativnosti smo razlučili i poredali u tri ranga: *izvorne doprinose* kroz Blanušine transformacijske formule za količinu topline i temperaturu (I.), koje je Blanuša dobio izvornom primjenom *STR* u termodinamici 1947. godine, zatim *znanstveno dopisivanje s W. Paulijem* 1948. godine (II.) o pojmovnim osnovama i formalizmu teorije relativnosti, te *Blanušinu metodu* (III.) u poimanju, objašnjavanju i populariziranju teorije relativnosti. Izdvojili smo, i držimo naročito značajnim, Blanušino pismo poštovanome profesoru W. Pauliju, što ga je Blanuša napisao na Martovske ide 15.03.1948. g. u Tehničkome fakultetu u Kačićevoj 26, u Zagrebu. Ovo je pismo važno u okviru povijesti znanosti jer pokazuje da je teorija relativnosti, kao veličanstvena prirodnoznanstvena teorija još uvijek otvorena što će,

vjerujemo, do izražaja doći napose 2005. godine prigodom njene 100. godišnjice. Blanušin pristup specijalnoj teoriji relativnosti tijekom cijelog njegovog života, u najboljem je skladu s Einsteinovim tumačenjem: *STR* je teorija o transformacijskim pravilima koja povezuju fizička opažanja različitih inercijalnih opažачa. I u suvremenim *DSR* – pokušajima, kad se *STR* želi revidirati, to se ne osporava.

D. Blanuša je izveo drukčiji oblik transformacijskih formula za količinu topline i termodinamičku temperaturu od Planckovih. Planckove relacije Pauli je ugradio u svoju slavnu knjigu iz teorije relativnosti 1921. godine. Blanuša je smatrao da je Planckovo shvaćanje krivo, prema tome su i relacije netočne, te ih nije mogao prihvatiti. Iz osjećaja dužnosti (u Kantovoj formulaciji) odnosno ljubavi (u platoničkoj formulaciji) prema znanstvenoj istini s jedne strane, te poštovanja prema W. Pauliju i njegovu djelu i ulozi u fizici s druge strane, Blanuša je odlučio pisati Pauliju pisma s detaljnim obrazloženjima i argumentima za svoje transformacijske formule u termodinamici. Tako je započelo njihovo znanstveno dopisivanje, jedinstveno u modernoj hrvatskoj znanstvenoj povijesti, a možda i čitavoj hrvatskoj kulturnoj i znanstvenoj povijesti. Dodatni razlog Blanuša je, svakako, nalazio i u činjenici da je Pauli neposredno prije, 1945. godine, primio Nobelovu nagradu za fiziku za slavni Paulijev princip isključenja.

Blanušine transformacijske formule u relativističkoj termodinamici i kontekst njihova otkrića, nisu još u povijesno-znanstvenome okviru završena priča. Naš prikaz i rezultate istraživanja tih pitanja, možemo u suvremenom kontekstu sabrati u ove zaključke i prijedloge:

- Blanuša je pogriješio što nije vlastita otkrića u teoriji relativnosti pokušao objaviti u svjetskim časopisima iz fizike, toga vremena. Njegovi doprinosi ostali su tako samo "lokalno" prepoznati!
- *Odgovornost znanstvenika* ("*Verantwortung des Wissenschaftlers*") Blanuša je, u ovom slučaju, uzimao tako da najprije treba upozoriti najuglednije živuće fizičare (osnivače) u području teorije relativnosti, ne bi li se oni suglasili s njegovim izvodima. U to je doba u Europi to bio Pauli, a Einstein je u Americi bio zaokupljen drugim pitanjima i problemima. Premda Pauli nije Blanuši dao očekivani odgovor, takav Blanušin etički stav, ostaje uzor naraštajima budućih istraživača u Hrvatskoj, Europi i svijetu.
- Je li Blanuša u pismima, možda, trebao upozoriti na usputnu Paulijevu i Planckovu opasku (str. 86. Paulijeve knjige, engl. izd. iz 1958.) o tome da

poopćavanje tenzora S_{ik} (tenzor Minkowskog) na druge oblike energije, osim elektromagnetske, može dovesti do stanovitih ("neopravdano uznemirujućih") paradoksa. Bi li Pauli drukčije postupio i preporučio Blanušin rad za objavljivanje u svjetskom časopisu iz fizike, možemo samo nagađati! Ostaje otvorenim što bi "strašni Pauli" ("der fürchterliche Pauli") ili "bič Božji" ("die Geissel Gottes") napravio?

- V. Devidéov zaključak (*Spomenica D. Blanuši*, Sv. 50, urednik V. Devidé, JAZU, 1989.) da se Blanušina otkrića u poznatim udžbenicima iz termodinamike neopravdano pripisuju H. Ottu (koji je do istih otkrića došao 13 godina kasnije od Blanuše), najboljim su putokazom što hrvatski znanstvenici trebaju učiniti. Napose se to odnosi na hrvatske povjesničare znanosti!
- Autor ovog članka će za nadolazeći 22. svjetski kongres o povijesti znanosti (Peking, 2005.) prijaviti rad o Blanušinim transformacijskim formulama u relativističkoj termodinamici i Blanušinoj korespondenciji s Paulijem 1948. godine. U godinu 2005. pada i 100. obljetnica Einsteinove *Specijalne teorije relativnosti*, koju će, zasigurno, svjetska znanstvena i kulturna javnost dostojno obilježiti!
- Uspomeni Danila Blanuše HAZU, Sveučilište u Zagrebu i FER trebaju posvetiti *Spomenicu* sličnu onoj posvećenoj Franu Bošnjakoviću⁴³, objavljenu povodom 100. obljetnice njegovog rođenja.

Blanušina motivacija u njegovim pismima Pauliju bila je isključivo znanstvena. Pored želje da se u relativističkoj termodinamici primjenjuju točne fizikalne formule, Blanuša je naročito želio da De Broglie u svoj novi projekt valno-mehaničke teorije termodinamike toga vremena, ugradi Blanušine a ne Planckove formule. Blanuša je bio stalno zainteresiran i otvoren za suvremeni razvoj fizike svoga vremena. Na kraju pisma Pauliju od 15. 03. 1948. godine, spominjući i pozdrave što ih Pauliju šalje Dr. Havliček, Blanuša naročito moli Paulija da mu pošalje članak o kvantnoj teoriji gravitacije dvojice ruskih fizičara Ivanenka i Sokolova, objavljen u Proc. Roy. Soc. A, 173 (1939) 212., a što ga on sam nije u mogućnosti nabaviti.

⁴³ Franu Bošnjakoviću, termodinamičaru svjetskoga ugleda, posvetio je njegov matični Fakultet strojarstva i brodogradnje (dok je djelovao u Hrvatskoj) i Sveučilište u Zagrebu velebnu spomenicu povodom njegove 100. obljetnice rođenja, koju je uredio M. Andrassy. U njoj je Bošnjaković obrađen kao rektor Sveučilišta u Zagrebu i njegov počasni doktor, kao dopisni član HAZU, a naročito njegova škola termodinamike i Bošnjakovićevi doprinosi tehničkoj termodinamici što ih je dao svojim radom u Zagrebu i na njemačkim termodinamičkim katedrama i laboratorijima.

Prisjetimo se nekih činjenica o Pauliju. Krsni je kum Pauliju bio E. Mach, fizičar i filozof čiji je doprinos idejama Einsteinove teorije relativnosti bio ključan. Opće poznata je činjenica da je W. Pauli imao "teži" karakter. Fizičar Paul Ehrenfest je Paulija nazivao "*strašnim Paulijem*" ("*der fürchterliche Pauli*") ili, pak, "*bičem Božjim*" ("*die Geissel Gottes*"). Sabrani znanstveni radovi Wolfganga Paulija u dva velika sveska, objavljeni 1964. godine, počinju pretiskom poznatog Paulijevog teksta napisanog pred njegovu smrt 1958. godine, u kojemu on izražava nevjericu u netom otkriveno narušenje simetrije prostornog pariteta (zrcaljenja) u β -raspadu. T.D. Lee i C.N. Yang su 1956. teorijski pretpostavili takvo narušenje, a eksperimentalno ga je izmjerila i protumačila C. Wu u β -raspadu ^{60}Co 1957. godine. Pauli je takve ideje teško prihvaćao, tako da ne iznenađuje njegov odnos prema Blanuši, njegovim izvodima i pismima.

S druge, pak, strane, Blanušine radove i djelovanje u matematici i fizici kao i u njihovu presjeku, možemo opisati jednostavnom Poincaréovom konvencijom: "*Les faits ne parlent pas*" ("*Činjenice ne govore.*"). Henri J. Poincaré ovom trivijalnom konvencijom osigurava mjesto i ulogu matematičkoj fizici, hipotezi i generalizaciji u znanstvenome istraživanju općenito. Poincaréova algebra i filozofske ideje ponovo oživljuju u pokušajima formuliranja novih postulata u fizici relativnosti, kad se relativnost želi proširiti i na fenomenologiju kvantne gravitacije. Poincaré je želio naglasiti kako nije sve u podacima i pokusima, ma koliko oni veliki i značajni bili! D. Blanuša je mislio i djelovao kao i slavni francuski matematičar i filozof Poincaré.

Želimo još reći da termodinamički prijemor između Blanuše i Paulija nije razriješen osjetljivim i preciznim pokusima. Barem, koliko je autoru ovog članka poznato! To nam se ne čini stranim jer Blanuša nije svoje otkriće objavio u svjetskom časopisu iz fizike, da bi se time onda pozabavili vrhunski sveučilišni laboratoriji u svijetu. S druge strane, ostvarenje njegovih misaonih eksperimentalnih prijedloga iz njegovih članaka, izgleda i danas tvrdim eksperimentalnim problemom. Naime, precizna mjerenja prijelaza topline između tijela u sustavu u mirovanju i odgovarajućem gibajućem sustavu, upućuju na gotovo savršenu izolaciju tih sustava od okoline. To, pak, predstavlja jedan od najtežih tehničkih iskušenja termodinamike u njezinoj povijesti!

Možemo reći, na kraju, da se u razvoju hrvatskog prirodoslovlja i matematike u 20. stoljeću ime profesora Danila Blanuše izdiglo zbog njegova dugogodišnjeg interesa i temeljitog bavljenja A. Einsteinom i pitanjima teorije relativnosti. Smijemo reći da svojim transformacijskim formulama i dokazima za njihovu valjanost,

Blanuša zaslužuje mjesto uz bok Plancku, Einsteinu i Pauliju, u područjima *STR* i termodinamike. Stoga je velika obveza hrvatskim znanstvenicima i povjesničarima znanosti istraživanje Blanušinih znanstvenih doprinosa u matematici i fizici, napose na širenju informacija o njegovu znanstvenome i nastavničkomu radu.

Zabilješke i izvori

1. Danilo Blanuša 1903. – 1987., Spomenica preminulim akademikima, Svezak 50, Razred za mat., fiz., kem. i tehničke znanosti, urednik izv. član V. Devidé, JAZU, Zagreb, 1989.
2. James Gleick, *Genius, The life and science of Richard Feynman*, Pantheon Books, New York, 1992.
3. Norbert Straumann, *General relativity and relativistic astrophysics*, with 81 Figures, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, Second Printing, 1991. *Title of the German edition: Allgemeine Relativitätstheorie und relativistische Astrophysik; 2. Auflage (Lecture Notes in Physics, Vol. 150).*
4. William D. McGlinn, *Introduction to Relativity*, The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, 2003.
5. Max Born, *Einsteinova teorija relativnosti i njezini fizički osnovi*, prema trećem izdanju preveo, dodatkom i bilješkama nadopunio D. Blanuša, znanstvena djela Hrvatskog prirodoslovnog društva, Knjiga I, "Tipografija" grafičko-nakladni zavod, Zagreb, 1948.
6. Danilo Blanuša, *Teorija relativnosti*, Mala biblioteka za matematiku, fiziku i kemiju br. 7, Školska knjiga, Zagreb, 1955.
7. Robert H. Dicke, *Gravitation and the Universe*, The Franklin Institute. Memoirs of the American Philosophical Society, Vol. 78 (1970), American Philosophical Society, Philadelphia, 1970.
8. Danilo Blanuša, *Sur les paradoxes de la notion d'énergie*, Glasnik Mat.-Fiz. i Astr. Ser. II 2 (1947), str. 249-250.
9. Danilo Blanuša, *O relativističkoj termodinamici*, Prvi kongres mat. i fiz. FNRJ, Bled 1949, Naučna knjiga, Beograd 1951., str. Str. 235-240.
10. Danilo Blanuša, *Osnovi relativističke kinematike*, Glasnik Mat.-Fiz. i Astr. Ser. II. 6 (1951), str. 1-32.
11. Blanušina korespondencija s W. Paulijem:
 - 11.1. Blanušino pismo poštovanom Profesoru W. Pauliju, nadnevka 15. 03. 1948., poslano iz Tehničkog fakulteta u Kačićevoj 26, tipkani tekst na pisačem stroju s Blanušinih ispravkama (ukupno 7 stranica).

- 11.2. Blanušino pismo Paulu Urbanu u Grazu, Universitätplatz 5, nadnevka 1. 06. 1948., Koncept napisan Blanušinom rukom (ukupno 4 stranice) iz kojeg se vidi da je dopisivanje bilo višestruko, uključujući Urbanove odgovore, te da je Blanuša Urbanu slao separate svojih radova.
12. Danilo Blanuša, *Opća teorija relativnosti*, popularno predavanje 08. siječnja 1975., B₁ ETF-a, Elektrotehnički fakultet Zagreb, 1975.;
Danilo Blanuša, *Gravitacija i svemir*, znanstveni kolokvij na 8. sjednici (prenumerirana u 220. sjednicu) Znanstvenog vijeća ETF-a, održanoj 8. srpnja 1975., Elektrotehnički fakultet Zagreb.
13. V. Glaser, *Kovarijantna kvantna elektrodinamika*, uredio dr. Danilo Blanuša, dopisni član, JAZU, Zagreb, 1955.
14. Nekrolog Vladimiru Jurku Glaseru, *CERN Courier*, Vol. 24, No. 2 (1984), p. 67.
15. L.D. Landau, J. B. Rumer, *Što je teorija relativnosti*, prijevod O. Vernić, predgovor akademik Danilo Blanuša, III izdanje, Školska knjiga, Zagreb, 1985.
16. Danilo Blanuša, *Gravitacija*, Tehnička enciklopedija 6 G-Ka, glavni urednik Hrvoje Požar, Jugoslavenski leksikografski zavod, Zagreb 1979., str. 260-265.
17. Roger Penrose and Wolfgang Rindler, *Spinors and space-time*, Volume 1: Two spinor calculus and relativistic fields, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
18. Erwin Schrödinger, *Expanding universes*, Cambridge University Press, 1957.
19. Paul Adrien Maurice Dirac, *The relation between mathematics and physics*, Lecture delivered on presentation of the James Scott prize, February 6, 1939. Published in: Proceedings of the Royal Society (Edinburgh), Vol. 59, 1938–39, Part II pp. 122-129.
20. A. Einstein, *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*, Annalen der Physik, 49 (1916) 769-822.
21. *The new physics*, priređivač P. Davies, Cambridge University Press, Cambridge, 1989., 2. poglavlje, Will, C., *The renaissance of general relativity*, str. 7-33.
22. Th. Frankel, *Gravitational curvature; An introduction to Einstein's theory*, W.H. Freeman and Comp., San Francisco, 1979.
23. A. Giazotto, *Interferometric detection of gravitational waves*, Physics Reports 182, br. 6 (1989) 365-425.
24. M. Hack, *Sette variazioni sul cielo*, Raffaello Cortina Editore, Milano 1999.
25. M. Ross, *Introduction to cosmology*, John Wiley & Sons, Chichester, 1994.
26. A. Pais, *Subtle is the Lord ... the science and life of Albert Einstein*, Oxford University Press, Oxford, 1983.
27. Ivan Ivanšić, Danilo Blanuša (07. 12. 1903. – 08. 08. 1987.); Popis publikacija Danila Blanuše, *Glasnik matematički* 22 (42), 1987, str. 535-540.

28. Tomislav Petković, *Uvod u znanost o toplini i termodinamici*, Element, Zagreb, 1997.
29. Tomislav Petković, *Uvod u modernu kozmologiju i filozofiju*, 2. prošireno izdanje, Gradska knjižnica "Juraj Šizgorić" Šibenik i "Element" Zagreb, Šibenik – Zagreb, 2002.
30. Fran Bošnjaković: Spomenica posvećena 100. obljetnici rođenja (1902. – 1993. – 2002.), uredio Mladen Andrassy, FSB i Sveučilište u Zagrebu, 2001.
31. *Collected Scientific Papers by Wolfgang Pauli*; in two volumes, Edited by R. Kronig and V.F. Weisskopf, Interscience Publisher, a division of John Wiley & Sons, J. Wiley, New York, 1964.
W. Pauli, Relativitätstheorie, in *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften*, Vol. 5, Part 2, B.G. Teubner, Leipzig, 1921, pp. 539-775.
Supplementary Notes by the Author, in *Theory of Relativity*, Pergamon Press, Inc., New York, 1958, pp. 207-232.
32. *Collected Scientific Papers by Wolfgang Pauli; Volume 2* (Journal articles, conference reports, and contributions to discussions, by Wolfgang Pauli):
Theorie und Experiment, Dialectica 6, 141-142 (1952).
Albert Einstein in der Entwicklung der Physik, Universitas 13, 593-598 (1958). Originally published in *Neue Zürcher Zeitung*, No. 89, Jan. 12, 1958.)
Zur Thermodynamik dissoziierter Gleichgewichtsgemische in äusseren Kraftfeldern, in *Festschrift Jakob Ackeret*, *Z. Angew. Math. Phys.* 9b, 490-497 (1958).
Impressionen über Albert Einstein, *Neue Zürcher Zeitung* No. 1055, Aug. 22, 1955.
33. M. Planck, *S.B. Preus. Akad. Wiss.* (1907) 542.
34. M. Planck, *Zur Dynamik bewegter Systeme*, *Annalen der Physik*, Leipzig, 76 (1908) 1-34.
35. Einstein, *Jb. Radioakt.*, 4 (1907) 440.
36. G. Amelino-Camelia, gr-qc/0012051, *Int. J. Mod. Phys. D* 11 (2002) 35.
37. G. Amelino-Camelia, D. Benedetti, F. D'andrea, *Comparison of relativity theories with observer-independent scales of both velocity and length/mass*, hep-th/0201245
38. G. Amelino-Camelia, *Space-time quantum solves three experimental paradoxes*, *Phys. Lett. B* 528 (2002) 181.
39. G. Amelino-Camelia, hep-th/0012238, *Phys. Lett. B* 510 (2001) 255.
40. G. Amelino-Camelia, *Status of Relativity with observer-independent length and velocity scales*, gr-qc/0106004.
41. J. Magueijo and L. Smolin, hep-th/0112090.
42. J. Magueijo, *Faster than the speed of light. The story of a scientific speculation*, Perseus Publishing, Cambridge, 2003.