

Neke vlastitosti trojina točaka oskulacije kod lemniskate.

Predao u sjednici matematično-prirodoslovnoga razreda jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti dne 28. svibnja 1879.

DOPISUJUĆI ČLAN PROF. DR. K. ZAHRADNIK.

Lemniskata je, kako poznato, mjesto točaka N te vlastitosti, da je umnožak njezinih udaljenosti od dviju čvrstih točaka G, G^1 (vidi lik) jednak četvrtini kvadrata nad GG^1 , naime

$$\overline{NG} \cdot \overline{NG^1} = \left(\frac{1}{2} \overline{GG^1}\right)^2.$$

Jednačba lemniskate u surednicih pravokutnih glasi:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0,$$

gdje je uzeta spojnica točaka G, G^1 za os X , te izhodište u sredini tih točaka, tako da je $G^1 O = O G = a$.

Iz jednačbe krivulje je uvidljivo, da su imaginarne točke kružne i izhodište koordinata dvotočke lemniskate. Ima dakle lemniskata maksimalni broj dvotočaka, koji u obće krivulja četvrtoga stupnja imati može a da se nerastavi u krivulje stupnja nižjega, radi toga je racionalna, t. j. koordinate koje god točke krivuljine možemo izraziti kao racionalne algebraičke slomljene funkcije parametra sa istim nazivnikom. Kao takav parametar rabiti možemo polumjer kruga, koji se dotica lemniskate u realnoj dvotočki.¹ Svaki krug presjeca naime lemniskatu u 8 točaka, nu ima imaginarne kružne točke zajedničke sa lemniskatom, što valja za 4 presjeke, dalje ide

¹ Vidi razpravu Dr. Em. Weyr-a „Die Lemniscate in rationaler Behandlung“ Ahhandl. d. kg. böhm. Gesellsch. d. Wissensch. VI Folge 6 Bd. 1873. Istoga parametra upotriebio sam kod „Theorie kardioidy“ u Archiv mathem. i fysiky dio I. Praha 1875, koja razprava i kašnje njemački izašla u Grunert-Hoppeovom Archiv für Mathematik und Physik. Teil. 59. pg. 337—350.

kroz realnu dvotočku lemniskate (izhodište surednica), te se dotica dvotangente u toj točki, što nam daje tri presjeka, ukupno dakle 7, tim preostaje još 1 presjek, kojega je položaj ovisan o veličini polumjera kruga i to jednoznačno.² Označimo li sa u polumjer ovakog kruga, dobijemo za koordinate točke u lemniskate (t. j. točke odgovarajuće krugu sa polumjerom $= u$).

$$\begin{aligned}x &= a^2 \sqrt{2} \frac{u(a^2 + u^2)}{a^4 + u^4} \\y &= a^2 \sqrt{2} \frac{u(a^2 - u^2)}{a^4 + u^4},\end{aligned}\quad (2)$$

koje jednačbe još jednostavnije možemo pisati, staviv

$$u = at$$

te potom

$$a \sqrt{2} = c, \quad (3)$$

naime:

$$\begin{aligned}x &= c \frac{t(1 + t^2)}{1 + t^4} \\y &= c \frac{t(1 - t^2)}{1 + t^4}.\end{aligned}\quad (4)$$

2. Parametre presjecišta kruga kojega god sa lemniskatom nadjemo, staviv vrijednosti (4) u obćenitu jednačbu kruga, kao korene biquadratičke jednačbe s obzirom na t . Nu budući da tri točke krug potpuno opredjeljuju, treba da postoji relacija medju parametrima presjecišta, koja nam daje uvjet, kada četiri točke leže na jednom te istom krugu. Sravnamo li koeficiente spomenute biquadratičke jednačbe, nadjemo namah ovu uvjetnu jednačbu, neovisnu dakle o posebnom položaju i velikosti polumjera kruga. naime:

$$t' t'' t''' t'''' = 1, \quad (5)$$

Krug krivosti ide kroz tri susjedne točke krivuljine, mora dakle u tom slučaju biti

$$t'' = t''' = t'''' = t,$$

a relacija (5) predje u

$$t' t^3 = 1. \quad (6)$$

Točka t' (t. j. točka, koja odgovara parametru t') u kojoj presjeca krug krivosti točke t lemniskatu, zove se *pridruženom* točkom.

² t. j. svakoj točki lemniskate odgovara samo jedini takav krug, te obratno, svaki takav krug opredjeljuje samo jedinu točku lemniskate.

Buduć da je jednačba (6) obzirom na t stupnja trećega, slijedi, da kroz svaku točku t' lemniskate možemo tri kruga krivosti proložiti, te parametre njezinih točaka oskulacije dobijemo kao korene jednačbe (6) naime

$$t^3 = \frac{1}{t'} \quad (6^1)$$

obzirom na t . Označimo li ove korene sa t_1, t_2, t_3 , to je poznata vlastitost ovake trojine točaka oskulacije, da ujedno sa pridruženom točkom t' leže na jednom te istom krugu.

Rabimo li obične pokratke

$$\begin{aligned} (t)_1 &= t_1 + t_2 + t_3 \\ (t)_2 &= t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3 \\ (t)_3 &= t_1 t_2 t_3 \end{aligned}$$

slijedi iz jednačbe (6¹)

$$(t)_1 = 0, (t)_2 = 0, (t)_3 = \frac{1}{t'} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\begin{smallmatrix} 3\lambda \\ t \end{smallmatrix} \right)_1 &= 3 \left(\begin{smallmatrix} \lambda \\ t \end{smallmatrix} \right)_3 = \frac{3}{t^{3\lambda}} \\ \left(\begin{smallmatrix} 3\lambda \\ t \end{smallmatrix} \right)_2 &= 3 \left(\begin{smallmatrix} 2\lambda \\ t \end{smallmatrix} \right)_3 = \frac{3}{t^{2\lambda}} \\ \left(\begin{smallmatrix} \mu \\ t \end{smallmatrix} \right)_1 &= \left(\begin{smallmatrix} \mu \\ t \end{smallmatrix} \right)_2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

za $u \geq 3\lambda$, predpostavimo, da je λ i μ cijeli broj. Na temelju tih relacija ćemo neke daljnje vlastitosti trojina točaka oskulacije pokazati.

Mjesto težišta trojina oskulacije.

3. Budi S (ξ, η) težište trojine oskulacije t_1, t_2, t_3 pridružene točki t^* , to je:

$$\begin{aligned} 3\xi = (x)_1 &= c \sum_{h=1}^3 \frac{t_h (1 + t_h^2)}{1 + t_h^4} \\ 3\eta = (y)_1 &= c \sum_{h=1}^3 \frac{t_h (1 - t_h^2)}{1 + t_h^4}, \end{aligned} \quad (9)$$

¹ Pišemo sada za t^1 jednostavno t ; rabimo dakle odsada $(t)_3 = \frac{1}{t}$.

ili obzirom na relacije (8):

$$3\xi = c \frac{\sum t_1 (1+t_1^2) (1+t_2^4) (1+t_3^4)}{\prod_{h=1}^3 (1+t_h^4)} = c \frac{\sum (t_1+t_1^3) (1-t_1^4+t_2^4 t_3^4)}{\prod_{h=1}^3 (1+t_h^4)}$$

$$3\eta = c \frac{\sum t_1 (1-t_1^2) (1+t_2^4) (1+t_3^4)}{\prod_{h=1}^3 (1+t_h^4)} = c \frac{\sum (t_1-t_1^3) (1-t_1^4+t_2^4 t_3^4)}{\prod_{h=1}^3 (1+t_h^4)}.$$

Nu buduće da je s obzirom na (8)

$$\begin{aligned} \sum (t_1+t_1^3) (1-t_1^4+t_2^4 t_3^4) &= (t^3)_1 + (t)_3 (t^3)_2 \\ \sum (t_1-t_1^3) (1-t_1^4+t_2^4 t_3^4) &= -(t^3)_1 + (t)_3 (t^3)_2 \\ \prod_{h=1}^3 (1+t_h^4) &= 1 + (t)_3^4, \end{aligned}$$

sliedi za koordinate težišta trojine oskulacije:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{c}{3} \frac{(t^3)_1 + (t)_3 (t^3)_2}{1 + (t)_3^4} = c \frac{t(1+t^2)}{1+t^4} \\ \eta &= \frac{c}{3} \frac{-(t^3)_1 + (t)_3 (t^3)_2}{1 + (t)_3^4} = c \frac{t(1-t^2)}{1+t^4}, \end{aligned} \quad (10)$$

t. j. težište trojine oskulacije leži u točki lemniskate ka kojoj trojina oskulacije spada.

Mjesto težišta trojina točaka oskulacije kod lemniskate je dakle dana lemniskata sama.

Krug opisani trojini oskulacije.

4. Krug idući kroz tri točke (x_h, y_h) $h = 1, 2, 3$ ima za jednačbu

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2, x, y, 1 \\ x_1^2 + y_1^2, x_1, y_1, 1 \\ x_2^2 + y_2^2, x_2, y_2, 1 \\ x_3^2 + y_3^2, x_3, y_3, 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ili razstavimo li taj determinant po elementih prvoga reda:

$$(x^2+y^2)|x, y, 1| - x|x^2+y^2, y, 1| + y|x^2+y^2, x, 1| - |x^2+y^2, x, y| = 0 \quad (11)$$

gdje su radi kratkoće pisani subdeterminanti

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = |x, y, 1|,$$

$$\left| \begin{array}{l} x_1^2 + y_1^2, y_1, 1 \\ x_2^2 + y_2^2, y_2, 1 \\ x_3^2 + y_3^2, y_3, 1 \end{array} \right| = |x^2 + y^2, y, 1|,$$

te slično i za $|x^2 + y^2, x, 1|$, $|x^2 + y^2, x, y|$ valja.

Stavimo li sada za x_h, y_h vrijednosti iz (4) u jednačbu (11), t. j. uvedemo li uvjet, da točke (x_h, y_h) $h=1, 2, 3$ leže na lemniskati, dobijemo nakon dulje transformacije:

$$\left. \begin{aligned} |x, y, 1| &= -\frac{2c^2\Delta[(t)_1 + (t)_2(t)_3]}{\Pi} \\ |x^2 + y^2, y, 1| &= -\frac{2c^3\Delta[1 + (t)_2 + (t)_1(t)_3 + (t)_3^2]}{\Pi} \\ |x^2 + y^2, x, 1| &= -\frac{2c^3\Delta[-1 + (t)_2 - (t)_1(t)_3 + (t)_3^2]}{\Pi} \\ |x^2 + y^2, x, y| &= \frac{4c^4\Delta(t)_3}{\Pi} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

gdje je

$$\Delta = |1, t, t^2|$$

te

$$\Pi = \prod_{h=1}^3 (1 + t_h^4).$$

Kod spomenute transformacije upotrebili smo vlastitosti, da je

$$\frac{|1, t^h, t^k|}{|1, t, t^2|} = \text{ciela simetrička funkcija}$$

elemenata t_1, t_2, t_3 , pretpostaviv, da h, k jesu cijeli brojevi, te $1 \leq h < k$. Da je determinant $|1, t^h, t^k|$ djeliv sa determinantom $|1, t, t^2|$ je uvidljivo, jerbo determinant $|1, t^h, t^k|$ sadržaje kao faktore $(t_2 - t_1), (t_3 - t_1), (t_3 - t_2)$, te umnožku tih faktora jednak¹ je upravo determinant $|1, t, t^2|$, a da je količnik tih determinanta simetrička funkcija, je uvidljivo iz toga, da se ne mienja; zamjenimo li na pr. t_2 sa t_3 .

Kod razvitbi dolaze:

$$\begin{aligned} |1, t, t^3| &= (t)_1 |1, t, t^2| = (t)_1 \Delta \\ |1, t^2, t^3| &= (t)_2 |1, t, t^2| = (t)_2 \Delta. \end{aligned} \quad (13)$$

¹ Srvnaj: O determinantih pg. 15. Zagreb Albrecht et Fiedler 1876, ili Dr. Siegm. Günther, Lehrbuch der Determinantentheorie, pg. 73, Erlangen 1875.

Uvedemo li sada u jednačbe (12) uvjet, da trojina točaka (x_h, y_h) , $h=1, 2, 3$ je trojina točaka oskulacije pridružena točki t^1 (7), t. j. da je krug (11) opisan trojini oskulacije, dobijemo:

$$\begin{aligned} |x, y, 1| &= 0 \\ |x^2 + y^2, y, 1| &= -\frac{2c^3 \Delta [1 + (t)_3^2]}{\Pi} \\ |x^2 + y^2, x, 1| &= -\frac{2c^3 \Delta [1 - (t)_3^2]}{\Pi} \quad (14) \\ |x^2 + y^2, x, y| &= \frac{4c^4 \Delta (t)_3}{\Pi} \end{aligned}$$

S obzirom na ove vrijednosti predje jednačba (11) u

$$[1 + (t)_3^2] x - [1 - (t)_3^2] y - 2c (t)_3 = 0 \quad (15)$$

ili (7)

$$T_m \equiv (1 + t^2) x + (1 - t^2) y - 2ct = 0; \quad (16)$$

Krug opisani trojini točaka oskulacije razpada se u dva pravca i to u pravac T_m te u pravac bezkonačno udaljeni, što je prouzročeno tim, budući da je

$$|x, y, 1| = 0,$$

t. j. ploština trokuta trojine oskulacije jednaka je ničici, trojina točaka oskulacije pridružene točki t leži na pravcu, a da taj pravac T_m ide kroz pridruženu točku t trojine oskulacije, kao što smo prije već spomenuli, lahko se osvjedočimo, staviv koordinate ove točke za x , te y naime

$$\begin{aligned} x &= \frac{ct(1 + t^2)}{1 + t^4} \\ y &= \frac{ct(1 - t^2)}{1 + t^4} \end{aligned}$$

u jednačbu toga pravca (16).

Pravac T_m je zajednička tetiva realnoga kruga krivosti idućega kroz t sa lemniskatom. Opisuje li točka t danu lemniskatu, zamotava pravac T_m stanovitu krivulju, te jednačbu zamotaljke (envelope) dobijemo kao diskriminant jednačbe toga pravca obzirom na t . Svrnemo li naime ovu jednačbu po uzmožih od t , je

$$T_m \equiv t^2 (x - y) - 2ct + (x + y) = 0,$$

dakle je jednačba zamotaljke

$$H \equiv x^2 - y^2 - c^2 = 0, \quad (17)$$

Iz ove jednačbe upoznajemo zamotaljku pravca T_m kao istostraničnu hiperbolu (vidi lik) sa osi $c = OA$, da ta hiperbola ima za podnožištnu krivulju danu lemniskatu, uzev pol u središti hiperbole, dade jednostavni račun. Iz ovoga sledi konstrukcija točke oskulacije reelnoga kruga krivosti idućega kroz t , do koje je sasma drugim putem došao Dr. Em. Weyr.¹ Konstruirajmo okomicu u točki t na spojnicu $\overline{Ot}$. Presjecište ove okomice sa lemniskatom je tražena točka oskulacije t^* . Obratno možemo naći ku danoj točki t^* , kao točki oskulacije pridruženu točku t , kao presjecište kruga nad $\overline{Ot}$ sa lemniskatom. Nu buduć da konstrukcija normale u točki t lemniskate nepruža nikakvih poteškoća, je tim i jednostavna konstrukcija polumjera i središta krivosti dana.

Pravac T_m je dakle tangentom hiperbole H , te M budi diralište i točka t podnožište s obzirom na O kao pol. Nu jest i poznato, da možemo smatrati lemniskatu kao krivulju inversnu k istostraničnoj hiperboli H sa krugom inversije nad $\overline{A^1A}$ kao premjerom. Točki M hiperbole odgovara točka lemniskate N inverzi. Jest naime

$$\overline{ON} \cdot \overline{OM} = c^2.$$

Smatramo li lemniskatu za podnožištnu krivulju hiperbole H , odgovara točki $M(x, y)$ hiperbole točka $t(\xi, \eta)$ lemniskate, te smatramo li lemniskatu za krivulju inversnu hiperbole H s obzirom na krug Γ (vidi lik) odgovara točki $M(x, y)$ hiperbole točka $N(\xi', \eta')$ lemniskate. Točke t te N jesu simetričke prama osi X ; jest naime

$$t \left\{ \begin{array}{l} \xi = \frac{c^2 x}{x^2 + y^2} \\ \eta = -\frac{c^2 y}{x^2 + y^2} \end{array} \right. \quad N \left\{ \begin{array}{l} \xi' = \frac{c^2 x}{x^2 + y^2} \\ \eta' = \frac{c^2 y}{x^2 + y^2} \end{array} \right. \quad (18)$$

što nam ovu simetričnost točaka t te N prama osi X dokazuje. Da je polara P_m točke M obzirom na krug inversije Γ tangentom hiperbole, a da je diralište M' ove tangente simetrično prama osi X sa točkom M je uvidljivo; ovu vlastitost možemo i drugačije izreći, naime: hiperbola H je sama sebi polarno reciproka obzirom na krug Γ .

¹ Vidi Dr. Em. Weyr. l. c. pag. 21.