

DOKAZ PRINCIPA TOTALNE INDUKCIJE*

Definirajući prirodne brojeve kao konačne nepuste skupove, odnosno kao kardinalne brojeve konačnih nepraznih skupova, dokazat ćemo, da za prirodne brojeve vrijedi osnovni princip, t. zv. princip totalne indukcije.

1. **Pojmovi i oznake.** Ako je S skup, tada se sa

$$(1.1) \quad x \in S \text{ ili } S \ni x$$

označuje, da je x element (broj, atom, točka) skupa S ; relacija $x \in S$ se čita: x je element od S .

Ako su A i B dva skupa, pa ako iz $x \in A$ slijedi $x \in B$, onda se veli, da je A dio skupa B i piše

$$(1.2) \quad A \subseteq B \text{ odn. } B \supseteq A.$$

Ako je $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$, onda su skupovi A i B identični, pa se piše

$$(1.3) \quad A \equiv B \text{ ili } A = B.$$

Ako je $A \subseteq B$, ali nije $B \subseteq A$, onda se to označuje sa

$$(1.4) \quad A \subset B \text{ odn. } B \supset A$$

i kaže, da je A pravi dio skupa B .

Ako su A i B dva skupa, tada se pod *unijom (udruženjem)* skupova A i B razumijeva skup

$$(1.5) \quad A \cup B$$

* Primjedba. Članak je izvadak iz jednog drugog, što sam ga bio napisao petog mjeseca 1949. i iz kojeg su neki dijelovi ušli u moju knjigu »Teorija skupova«.

Potpunosti radi, navodim bez dokaza nekoliko teorema s uputom, s kojim je teoremom u knjizi dotični teorem povezan, da se u njoj lakše nađe sam dokaz tog teorema.

sastavljen od onih elemenata, koji leže u bar jednom od zadanih skupova A i B . Pod *diferencijom skupova* A i B razumijevamo skup

$$(1.6) \quad A \setminus B$$

sastavljen od svih elemenata skupa A koji nisu elementi skupa B . Ako je

$$(1.7) \quad P$$

izvjesna porodica skupova, onda se pod *presjekom skupova* iz P razumijeva skup

$$(1.8) \quad \bigcap_{S \in P} S \text{ ili } \bigcap_S S, (S \in P)$$

sastavljen od svih onih elemenata koji leže u svima članovima porodice P .

Skup je A ekvivalentan skupu B , simbolički

$$(1.9) \quad kA \equiv kB,$$

ako postoji postupak f , kojim svakom $x \in A$ možemo pridružiti jedan jedini element, $f(x)$, skupa B i to tako, da različitim elementima iz A odgovaraju različiti elementi u B i da svaki element iz B bude pritom pridružen jednom jedinom elementu iz A . Ako je $X \subseteq A$, onda će nam $f(X)$ označavati skup svih elemenata $f(x)$, kad x prolazi skupom X .

Ako je skup A ekvivalentan dijelu skupa B , naznačivat ćemo to sa

$$(1.10) \quad kA \leq kB \text{ odn. } kB \geq kA.$$

Ako je i $kA \leq kB$ i $kB \leq kA$, onda se piše

$$(1.11) \quad kA = kB;$$

Ako je $kA \leq kB$, ali nije $kA \geq kB$, onda se to naznačuje sa

$$(1.12) \quad kA < kB \text{ odn. } kB > kA.$$

Pod kardinalnim (glavnim) brojem razumijevamo svaki skup (isp. [1]); da naznačimo, da neki skup S shvatamo kardinalnim brojem, naznačujemo to sa

$$(1.13) \quad kS;$$

pri tome naravno ekvivalentne skupove identificiramo, pa $kA \equiv kB$ izražava činjenicu da je skup A ekvivalentan sa skupom B ; nadalje, ako su A i B dva skupa bez zajedničkih

točaka, onda se skup $A \cup B$, shvaćen kao kardinalan broj, zove *suma kardinalnih brojeva* A i B , što se naznačuje sa

$$k(A \cup B) = kA + kB.$$

Općenito, pod sumom ma kojih dvaju kardinalnih brojeva A i B ¹ razumijevamo bilo koji skup, što ga dobijemo obrazovanjem unije $A_1 \cup B_1$ dvaju skupova A_1 , B_1 bez zajedničkih točaka, a od kojih je A_1 ekvivalentan sa A , dok je B_1 ekvivalentan sa B . Suma kardinalnih brojeva A i B označuje se sa

$$(1.14) \quad kA + kB.$$

Odmah se vidi, da unija $A_1 \cup B_1$, shvaćena kao kardinalan broj, ne zavisi od posebnog izbora skupova A_1 i B_1 , jer ako je $kA_2 \equiv kA$, $kB_2 \equiv kB$, a A_2 , B_2 bez zajedničkih točaka, bit će

$$k(A_1 \cup B_1) \equiv k(A_2 \cup B_2),$$

*jer je A_1 ekvivalentno (preko A) sa A_2 , a B_1 (preko B) sa B_2 .

Prazni (vakantni) skup v , t. j. skup bez ijednog elementa shvaćen kao broj zove se *nula* i označuje sa 0 t. j.

$$(1.15) \quad kv = 0.$$

Specijalno, svaki predmet p obrazuje određen *jednočlan* skup, koji se označuje sa

$$(1.16) \quad \{p\} \text{ ili } (p),$$

a shvaćen kao kardinalan broj, označuje se sa 1 i piše

$$(1.17) \quad k\{p\} = 1.$$

Ako iz $x \in S$ slijedi, da je $S \setminus \{p\}$ jednočlan, stavlja se

$$(1.18) \quad ks = 2,$$

pa se zove *dvočlanim skupom*.

Analogno, ako iz $x \in S$ slijedi

$$k(S \setminus \{x\}) = 2,$$

veli se, da je skup S *tročlan*, a shvaćen kao broj, zove se »tri« i piše

$$(1.19) \quad kS = 3 \text{ i t. d.}$$

¹ Prema tome A i B su skupovi.

2. Konačni i beskonačni skupovi. Postavlja se pitanje: ako je S zadan skup, da li on može biti ekvivalentan sa bar jednim svojim pravim dijelom t. j. da li sistem

$$(2.1) \quad X \subset S, \quad kX \equiv kS$$

ima ili nema rješenja u X ?

Ako taj sistem ima bar jedno rješenje X , veli se, da je skup S *beskonačan (transfinitan)*; u obrnutom slučaju, S je *konačan (finitan)*. Specijalno, prazan skup smatramo konačnim.

Drugim riječima, vrijedi ova:

Dedekindova osnovna definicija. Ako za svako obostrano jednoznačno preslikavanje f skupa S na sama sebe vrijedi $fS = S$, skup S je konačan; ako pak postoji bar jedno obostrano jednoznačno preslikavanje f skupa S tako da bude

$$fS \subset S,$$

veli se, da je skup S *beskonačan ili transfinitan*.

Konačni skupovi $\neq v$ shvaćeni kao kardinalni brojevi zovu se *prirodnim brojevima*.

Teorem 2.1. a) Ako je skup S konačan, konačan je i svaki podskup $S_0 \subset S$.

b) Ako je skup S beskonačan, beskonačan je i svaki nadskup $S_1 \supseteq S$. (cf. Kurepa, Teorija skupova, teoremi 5.1.1 i 5.1.2.)

Teorem 2.2 a) Ako je skup S konačan, konačan je i skup

$$S \cup \{x\}$$

gdje je $\{x\}$ ma koji jednočlan skup; ako S ne sadrži $\{x\}$, onda je

$$kS < k(S \cup \{x\}).$$

b) Ako je skup S beskonačan, beskonačan je i skup

$$S \setminus \{x\} \text{ i uvijek je}$$

$$kS = k(S \setminus \{x\});$$

pritom je $\{x\}$ ma koji jednočlan skup (cf. teorem 5.1.3 i teorem 5.1.4 u Kurepa, Teorija skupova).

Teorem 2.3. Ako je kardinalni broj $m > 0$, onda postoji jedan jedini kardinalni broj, a označuje se sa $m - 1$, tako da bude kardinalni broj

$m = (m - 1) + 1$ (cf. teorem 5.2.1.1 u Kurepa, Teorija skupova).

Teorem 2.4. Za ma koje kardinalne brojeve m, n , ako je $m < n$, tad je $m + 1 \leq n$ (cf. teorem 5.2.3.2 u Kurepa, Teorija skupova).

3. Prirodni brojevi jesu kardinalni brojevi konačnih nepustih skupova. Skup svih prirodnih brojeva označujemo slovom

$$(3.1) \quad N.$$

Drugim riječima, N je skup svih konačnih nepraznih skupova, pri čemu poistovjećujemo ekvivalentne skupove i među njima ne pravimo nikakve razlike; tako na pr. $1 \in N, 2 \in N, 5 \in N$; naprotiv, nije $\{5\} \in N \setminus \{1\}$, ma da $\{5\} \in N$, jer jednočlani skup $\{5\}$ predodčuje broj 1; uopće iz $x \in N$ i $y \in N \setminus x$ proizlazi $x \neq y$.

Teorem 3.1. Ako je n prirodan broj, onda

- a) postoji i broj $n + 1$;
- b) $n + 1$ je prirodan broj i
- c) uvijek je $n < n + 1$ (cf. Kurepa, Teorija skupova, teorem 5.3.1).

4. Princip totalne indukcije. Princip totalne indukcije daje pregled o skupu N svih prirodnih brojeva, a sastoji se u ispravnosti ovog zaključka:

Pretpostavka. Neka je S ma kakav skup prirodnih brojeva koji udovoljava ovim dvjema uslovima:

Uslov I. Prirodni broj 1 leži u S :

$$(4.1) \quad 1 \in S;$$

Uslov II. Ako neki prirodni broj n leži u S , tada u S leži i prirodni broj $n + 1$ t. j.

$$(4.2) \quad \text{ako je } n \in S, \text{ onda je } n + 1 \in S;$$

Zaključak: Svaki prirodni broj leži u skupu S t. j.

$$(4.3) \quad S = N,$$

gdje je N skup svih prirodnih brojeva.

Naravno, princip totalne indukcije možemo i ovako formulirati: ako precrtamo broj 1 i ako, nadalje, precrtavši neki prirodni broj n , precrtamo i broj $n + 1$, onda ćemo precrtati svaki prirodni broj.

Da se vidi, da ova formulacija izlazi iz prethodne, dovoljno je promatrati skup S svih precrtanih prirodnih brojeva; da,

obrnuto, iz posljednje formulacije proizlazi prethodna, dovoljno je »precrtati« svaki član skupa S o kojemu se govori u principu.

Dokaz principa totalne indukcije prilično je dug.

§ 4.1. Označimo sa

$$(4.1.1) \quad \Phi$$

porodicu svih skupova $S \subseteq N$ za koje vrijede gornji uslovi I i II; označimo sa

$$(4.1.2) \quad N_0$$

presjek svih tih skupova, dakle

$$(4.1.3) \quad N_0 = \bigcap_s (S \in \Phi).$$

Dokazat ćemo nekoliko svojstava skupa N_0 iz kojih će proizaći jednakost

$$(4.1.4) \quad N_0 = N$$

pa dakle i

$$(4.1.5) \quad N = S$$

za svaki $S \in \Phi$, što i tvrdi princip totalne indukcije.

Dokažimo, da i skup N_0 ispunjava I i II, da je dakle

$$(4.1.6) \quad N_0 \in \Phi.$$

Najprije, iz $S \in \Phi$ slijedi $1 \in S$, što znači da broj 1 leži u svima članovima porodice Φ , a to baš znači da je

$$(4.1.7) \quad 1 \in N_0$$

t. j. da N_0 zadovoljava uslov I.

Dokažimo, da N_0 zadovoljava i uslov II t. j. da iz

$$n \in N_0 \text{ slijedi } n+1 \in N_0.$$

No, $n \in N_0$ znači da je

$$n \in X \text{ za svaki } X \in \Phi.$$

A to pak, po definiciji porodice Φ , znači da je i

$$n+1 \in X$$

za svaki $X \in \Phi$, što se drukčije izražava i ovako:

$$n+1 \in N_0.$$

§ 4.2. Za skup $N_0 \subseteq N$ vrijedi ovaj »princip totalne indukcije«: Ako je

$$(4.2.1) \quad S_1 \subset N_0, \text{ pa ako je}$$

$$(4.2.2) \quad 1 \in S_1; \text{ ako nadalje}$$

$$(4.2.3) \quad \text{iz } n \in S_1 \text{ slijedi } n+1 \in S_1,$$

onda je

$$(4.2.4) \quad S_1 = N_0.$$

Stvarno, skup S_1 zadovoljava uslove I, II, pa je dakle

$$S_1 \subseteq \Phi,$$

što po definiciji (4.1.3) znači, da je $N_0 \subset S_1$, a to s gornjom pretpostavkom (4.2.1) daje traženu jednakost $S_1 = N_0$.

§ 4.3. Skup N_0 je beskonačan t. j. skup N_0 može se pre-slikati na svoj vlastiti pravi dio.

Stvarno, stavimo

$$f(n) = n+1, (n \in N_0),$$

tada je ta funkcija obostrano jednoznačna, jer se napokon radi o prirodnim brojevima, i naravno da je $f(n) \neq 1$; no prema (4.1.7):

$$1 \in N_0,$$

tako dakle da je $f(N_0) \subset N_0 \setminus \{1\} \subset N_0$, što znači da je N_0 beskonačan.

§ 4.4. Za svaki $n \in N_0$ sadrži skup N_0 točno n brojeva koji su $\leq n$.

Označimo sa

$$(4.4.1) \quad S_1$$

skup svih brojeva iz N_0 za koje je ta tvrdnja ispravna. Naravno, $1 \in S_1$, jer je broj 1 jedini prirodni broj ≤ 1 ; također je $2 \in S_1$, jer su 1 i 2 očito jedini prirodni brojevi ≤ 2 . Uzmimo, da je tvrdnja dokazana za neki $n \in N_0$; dokažimo da je onda ona ispravna i za $n+1$. No, brojevi iz N_0 koji su $\leq n+1$ jesu (v. teorem 2.4): broj $n+1$ i svi brojevi iz N_0 koji su $\leq n$; ovih, po pretpostavci ima n , pa oni sa brojem $n+1$ koji je od njih sviju različit, sačinjavaju svega $n+1$ brojeva u N_0 koji su $\leq n+1$.

Ukratko, imamo ovo: $1 \in S_1$; iz $n \in S_1$ slijedi $n + 1 \in S_1$, što, prema (4.2) i relaciji (4.2.4), znači, da skup S_1 sadrži čitav N_0 , što smo i htjeli dokazati.

§ 4.5. Dokažimo napokon da je $N_0 = N$.

U obrnutom slučaju, postojao bi bar jedan prirodan broj

$$(4.5.1) \quad m,$$

koji ne leži u N_0 .

Odmah ćemo vidjeti, da to nije moguće, jer bismo inače mogli preslikati čitavi beskonačni skup N_0 na skup M , kojemu je m kardinalan broj, dakle na konačni skup

$$M.$$

a) Najprije, $m > 1$, jer po uslovu (I) vrijedi: $1 \in N_0$, dok po pretpostavci (4.5.1) broj m ne leži u N_0 , jer kad bi $m - 1$ bio u N_0 , bio bi u N_0 , po uslovu II, i broj $(m - 1) + 1 = m$. Stavimo

$$m_1 = m;$$

pretpostavimo, da je

$$n \in N_0, n > 1$$

i da smo za sve prirodne brojeve ν iz N_0 koji su $\leq n$ definirali brojeve

$$(4.5.2) \quad m_1, m_2, \dots, m_n \text{ sa svojstvom}$$

$$(4.5.3) \quad \begin{cases} m_1 = m \\ m_\nu = m_{\nu-1} - 1 \text{ za svaki } \nu \in N_0, 1 < \nu \leq n, \end{cases}$$

i da brojevi (4.5.2) ne leže u N_0 , pa je zato

$$(4.5.4) \quad m_\nu > 1 \text{ za svaki } \nu \leq n, \text{ a napose za } \nu = n.$$

Skup se (4.5.2) tada može proširiti nadopisujući još i prirodni broj $m_{n+1} = m_n - 1$; naime, kako je prema (4.5.4), $m_n > 1$, broj $m_n - 1$ postoji, a radi uslova II ne leži niti on u N_0 .

Na taj način, relacije (4.5.3), (4.5.4) vrijede za indeks $n = 1$, vrijede za indeks $n + 1$ čim vrijede za $n \in N_0$, pa one prema § 4.2 vrijede za svaki $n \in N_0$.

Bilo bi dakle:

$$(4.5.5) \quad \begin{cases} m_1 = m, \\ m_{n+1} = m_n - 1 > 0 \text{ za svaki } n \in N_0. \end{cases}$$

b) Sada ćemo odmah doći na najavljenju kontradikciju obrazovanjem preslikavanja

$$(4.5.6) \quad f(n), (n \in N_0)$$

beskonačnog skupa N_0 na konačni skup M , za koji je

$$(4.5.7) \quad kM = m = m_1.$$

Da počnemo, neka je $f(1)$ ma koji element u M . Stavimo:

$$M_1 = M, M_2 = M_1 \setminus \{f(1)\}.$$

Kako je $f(1) \in M_1$, bit će $kM_2 = kM_1 - 1 = m_1 - 1 = m_2$.

Uzmimo, da je n ma koji broj iz N_0 i pretpostavimo, da smo definirali točke

$f(1), \dots, f(n)$ iz M_1 i skupove

$M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$ i da je

$$(4.5.8) \quad f(v) \in M_v, M_{v+1} = M_v \setminus \{f(v)\}, kM_{v+1} \equiv m_{v+1}$$

za svih n brojeva $\leq n$ iz N_0 .

Proširimo relaciju (4.5.8) i za slučaj $v = n + 1$.

Napose za $v = n$ daje (4.5.8)

$$kM_{n+1} \equiv m_{n+1},$$

što prema (4.5.5) znači da množina M_{n+1} nije prazna, nego sadrži bar jedan element; označimo joj jedan element sa $f(n+1)$ i stavimo

$$M_{n+2} = M_{n+1} \setminus \{f(n+1)\}.$$

Bit će

$$kM_{n+2} = kM_{n+1} - k\{f(n+1)\} = m_{n+1} - 1 = m_{n+2},$$

a time (4.5.8) vrijedi i za $v = n + 1$. Prema svojstvu skupa N_0 iz § 4.2 dokazane su time relacije (4.5.8) za svaki prirodni broj iz N_0 .

Drugim riječima, dobili smo jednoznačno preslikavanje f :

$$f(n), (n \in N_0).$$

c) Da se vidi, da je to apsurd, treba još uočiti da je transformacija (4.5.8) i recipročno jednoznačna t. j. da među točkama $f(n)$, $(n \in N_0)$ nema jednakih. No, prema (4.5.8) imamo:

$$M_1 \supset M_2 \supset M_3 \supset \dots \supset M_n \supset M_{n+1} \supset \dots, (n \in N_0).$$

Dakle su množine

$$(4.5.9) \quad M_1 \setminus M_2, \dots, M_n \setminus M_{n+1}, M_{n+1} \setminus M_{n+2}, \dots$$

bez zajedničkih točaka. Ali, prema (4.5.8) imamo

$$M_n \setminus M_{n+1} = \{f(n)\},$$

pa nejednakost jednočlanih skupova (4.5.9) znači, da niti među točkama $f(a)$ ($n \in N_0$) nema jednakih.

Ukratko, kad bi postojao prirodan broj m koji nije sadržan u skupu N_0 svih prirodnih brojeva za koje vrijedi princip totalne indukcije, konačni skup M kardinalnog broja m sadržao bi beskonačni dio

$$\{f(1), f(2), \dots, f(n), f(n+1), \dots\}, (n \in N_0),$$

kao obostrano jednoznačnu sliku beskonačnog skupa N_0 . Kako je to, prema teoremu (2.1a) nemoguće, princip totalne indukcije je potpuno dokazan.

§ 4.6. *Niz prirodnih brojeva.* Standardni oblik skupa svih prirodnih brojeva glasi

$$(4.6.1) \quad 1, 2, 3, \dots, n, n+1, \dots$$

To je t. zv. *niz prirodnih brojeva*.

Početni član je 1; opći član je n , a član poslije njega jest baš broj $n+1$ koji se javlja u uslovu II kod totalne indukcije.

Dokazana jednakost $N = N_0$ i svojstvo iz § 4.4. daju:

Korolar 4.6.1. *Ako je n koji god prirodni broj, onda ima točno n prirodnih brojeva koji su $\leq n$ dakle*

$$(4.6.2) \quad k\{1, 2, \dots, n-1, n\} = n, (n \in N).$$

§ 5. *Opća primjedba.* U prethodnim izlaganjima nismo se eksplicite vezali za kakav određen sustav aksioma. Članak je pisan tako, da se može uklopiti na pr. u Fraenkel-Zermelov sustav BAPUVEF [4] ili u Dedekindova izlaganja u klasičnom spisu [2].

U spomenutom Fraenkel-Zermelovom sustavu nema glasovitog (Zermelova) aksioma o izboru. Inače, kad bi se taj aksiom prihvatio, dokaz principa potpune indukcije je vanredno jednostavan: pomoću aksioma izbora lako se dokazuje (Hartogs), da je skup N dobro uređen. Ako je tada S ma kakav podskup skupa N sa svojstvima I i II iz § 4, mora biti $S = N$; u protivnom naime slučaju, skup $N \setminus S$ imao bi bar jednu točku, a kao dio dobro uređena skupa N , imao bi

$N \setminus S$ i početni element, recimo p ; naravno $p > 1$, pa bi broj $p - 1$, kao manji od p , ležao ne u $N \setminus S$ nego u S ; no, zbog uslova II, iz $p - 1 \in S$ slijedi također $(p - 1) + 1 \in S$ t. j. $p \in S$, što je u proturječju sa $p \in N \setminus S$.

Inače, primijetimo da smo se u § 4.5b služili mogućnošću da u pojedinom nepraznom skupu koji se konkretno pojavljuje uočimo po jednu njegovu točku.

BIBLIOGRAFIJA

1. Birkhoff, Garrett: Generalized arithmetic, Duke math. Journ., 9, (1942), 283—302.
2. Dedekind, R.: Was sind und was sollen die Zahlen? (Prvo izdanje 1888; v. također Gesammelte math. Werke, III, 1932, pp. 335—391).
3. Kurepa, Đ.: Démonstration du principe de l'induction totale [C. r. Paris, 230, 703—705 (1950)].
4. Kurepa, Đ.: Teorija skupova, Zagreb, 22+444, 1950.
5. Neumann, J. v.: Definition durch transfinite Induktion. Math. Ann., 99 (1928), pp. 373—391.
6. Zermelo, E.: Ueber Grenzzahlen und Mengenbereiche, Fundamenta Mathematicae, 16 (1930), 29—47.

*(Primljeno na sjednici Odjela za matematičke, fizičke
i tehničke nauke dne 1. IV. 1950.)*