UDK 51(497.5)Varićak, V.
Izlaganje sa znanstvenog skupa
Prihvaćeno za tisak: 21. studenog 2017.
DOI: http://doi.org/10.21857/90836cdvqy

DOPRINOS VLADIMIRA VARIĆAKA RAZVOJU MATEMATIKE U HRVATSKOJ

Mirko Primc

Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu

Sažetak

Vladimir Varićak bio je najistaknutiji hrvatski matematičar u razdoblju 1900. – 1940. godine. Rođen je 1865. u selu Švica blizu Otočca, pohađao je školu u Sisku, Petrinji i Zagrebu te obranio doktorsku disertaciju 1890. na Sveučilištu u Zagrebu. Njegov je mentor bio Karel Zahradnik, profesor matematike na Sveučilištu u Zagrebu u razdoblju 1876. – 1899. i prvi moderni hrvatski matematičar. Varićak je imenovan profesorom matematike na Sveučilištu u Zagrebu 1902. Isprva je njegov znanstveni interes bio vezan za klasičnu analitičku geometriju algebarskih krivulja, a kasnije se okrenuo neeuklidskim geometrijama, posebno hiperboličkoj geometriji. Postao je svjetski slavan radovima o geometriji Lobačevskog i specijalnoj teoriji relativnosti, objavljenim u *Physikalische Zeitschrift* 1910. i 1911. godine. Vladimir Varićak dao je velik doprinos razvoju matematike u Hrvatskoj nastavivši pionirsku misiju Karela Zahradnika na unapređivanju znanstvenog rada na Sveučilištu u Zagrebu. Početni krug tema vezanih za algebarske krivulje proširio je na tada aktualne probleme neeuklidskih geometrija i specijalne teorije relativnosti te je za navedenu problematiku zainteresirao i nove naraštaje matematičara. Njegovi znanstveni doprinosi znatno su pridonijeli ugledu Sveučilišta u Zagrebu, a hrvatskim matematičarima olakšali su pristup vrhunskim znanstvenim centrima u svijetu.

Ključne riječi: Vladimir Varićak; geometrija Lobačevskog; specijalna teorija relativnosti

Vladimir Varićak rođen je 1865. u selu Švica blizu Otočca, a osnovnu i srednju školu pohađao je u Sisku, Petrinji i Zagrebu. U razdoblju 1883. – 1887. studirao je matematiku i fiziku na Mudroslovnom fakultetu i položio profesorski ispit 1888.

Vrijeme školovanja Vladimira Varićaka podudara se s početkom modernog razdoblja u povijesti Sveučilišta u Zagrebu. Godine 1874. svečano je otvoreno Kraljevsko sveučilište Franje Josipa I. kao nastavak isusovačke akademije, a na Mudroslovni fakultet dolaze tri vrsna mlada profesora iz Praga da preuzmu katedre i pokrenu rad u prirodnim znanostima. Tako je 1875. postavljen za profesora fizike dr. Vinko Dvořak, 1876. za profesora matematike dr. Karel Zahradnik, a 1879. za profesora kemije dr. Gustav Janeček.

Dolazak Karela Zahradnika u Zagreb može se smatrati početkom nastave matematike na Sveučilištu u Zagrebu[1]. Zahradnik se bavio raznim pitanjima algebre, analize te elementarne i analitičke geometrije, nadasve geometrijom algebarskih krivulja trećeg i četvrtog stupnja, a rezultate svojih dugogodišnjih istraživanja iznio je u svojem opsežnom radu *O krivuljah u ravnini*[2]. Zahradnikove ideje bile su temelj problematike njegovih prvih učenika Davida Segena i Vladimira Varićaka[3].

Vladimir Varićak doktorirao je pod Zahradnikovim vodstvom 1990. radom *Teorija nožišnih krivulja*[4]. U radu se iz jednadžbe osnovne krivulje u pravokutnim koordinatama izvode jednadžbe pridružene nožišnice u raznim koordinatnim sustavima, proučavaju se stupanj, razred i singulariteti nožišnice, jednadžbe tangente nožišnice u raznim koordinatnim sustavima te formule za rektifikaciju i kvadraturu nožišnice, a detaljnije se proučavaju nožišnice elipse, kruga, hiperbole, parabole i astroide. Nakon disertacije Varićak objavljuje još dva rada vezana za analitičku geometriju algebarskih krivulja u ravnini, *Prilog teoriji Descartesova lista* (1891.) i *Prilog teoriji Pascalova limaçona* (1895.).

Analitička geometrija algebarskih krivulja u ravnini ima dugu povijest[5], a popis tema u disertaciji ilustrira pitanja koja su zanimala Zahradnika i Varićaka u okviru te teorije. Uza spomenuta pitanja, Zahradnika su zanimale i racionalne krivulje[6] te je dio njegovih istraživanja o cisoidi bio motiviran slutnjom da se svaka racionalna algebarska krivulja trećeg stupnja može realizirati kao cisoida[7]. S druge strane, eliptičke krivulje mogu se parametrizirati eliptičkim funkcijama, što je vjerojatno motiviralo Varićaka da proširi svoj znanstveni interes i na teoriju eliptičkih funkcija[8].

U radu *Prilog teoriji eliptičkih funkcija* (1894.), objavljenom i na francuskom[9], Varićak polazi od Halphenove interpretacije argumenta eliptičkih funkcija[10] kao

---

1 Vidi Vaclav Hável, *Profesor dr Karel Zahradnik (u povodu 125. godišnjice rođenja),* Glasnik Matematički 8 (28) (1973.), 335-337.

2 Rad 74 (1884.), 79-114.

3 David Segen doktorirao je 1889. i to je bila prva obranjena doktorska disertacija iz matematike na Sveučilištu u Zagrebu. Vladimir Varićak bio je drugi doktor matematike na Sveučilištu u Zagrebu – vidi *120 godina nastave prirodoslovlja i matematike na Sveučilištu u Zagrebu,* PMF, Zagreb, 1996.

4 Razprava odobrena povjerenstvom strogih ispita, Zagreb, 1890., 1-46.

5 Tako je krivulju *Pascalov limaçon* prvi proučavao Étienne Pascal (1588. – 1651.).

6 Algebarske krivulje koje se mogu parametrizirati racionalnim funkcijama.

7 Vidi sažetak knjige Martina Bečvářová, Ján Čižmár, *Karel Zahradnik (1848-1916), Matfyzpress,* Praha, 2011.

8 Najveći doprinos toj teoriji dali su Niels Henrik Abel (1802. – 1829.), Carl Gustav Jacobi (1804. – 1851.) i Karl Weierstrass (1815. – 1897.).

9 *Note éclaircissant la définition des fonctions elliptiques d'après G. H. Halphen,* Nouvelles Annales de Mathèmatiques XIV (1895.).

10 G. H. Halphen, *Traité des fonctions elliptiques,* Paris, 1886.

plošnog isječka izvjesne krivulje (C), neke vrste kružne konhoide, i analitičkim izrazima za geometrijski konstruirane objekte dokazuje da se za eliptičke funkcije realnog argumenta nova definicija podudara s izrazom za amplitudu koji je uveo Jacobi. Potom razmatra eliptičke funkcije imaginarnog argumenta koristeći se imaginarno pridruženom krivuljom[11] (C′) pridruženoj početnoj krivulji (C) te dokazuje izraze za eliptičke funkcije imaginarnog argumenta. Varićakova su razmatranja čisto geometrijska i razlikuju se od Halphenovih u tome što Halphen, prema Varićakovim riječima, „postavlja najprije sn, cn i dn za realne argumente, izvodi zatim općenitiju od ovih Weierstrassovu funkciju pu i tek pomoću nje određuje prvašnje tri funkcije uz imaginarne argumente".

Osim tema iz analitičke teorije algebarskih krivulja u ravnini, Varićak proučava i sfernu geometriju te 1894. objavljuje rad *Imaginarni sferni trokuti*. Tim radom završava i prvo od tri razdoblja Varićakova znanstvenog rada.

Nakon profesorskog ispita 1888. Varićak je radio kao profesor matematike i fizike u realnoj gimnaziji u Zemunu, nautičkoj školi u Bakru, pa ponovno u realnim gimnazijama u Osijeku i Zagrebu. Habilitirao je 1895. na Mudroslovnom fakultetu u Zagrebu, i to iz algebarske analize i sferne trigonometrije, a godine 1898. dobio je svoje prvo mjesto na Sveučilištu u Zagrebu. Bilo je to mjesto učitelja fizike i mehanike na novootvorenoj Šumarskoj akademiji u Zagrebu. Godine 1899. Karel Zahradnik pozvan je za rektora novoosnovane Tehničke visoke škole u Brnu, a Vladimir Varićak dolazi na njegovo upražnjeno mjesto. Već 1902. postavljen je za redovitog profesora[12].

U uvodu rada *Imaginarni sferni trokuti* Varićak kaže:

„Od šest temeljnih zadataka o sfernom trokutu: abC, cAB, abA,aAB, abc, ABC, mogu četiri pošljednja dati uz stanovite uvijete i imaginarne rješidbe, kojima se za obično ne traži geometrijsko značenje. A ne traži se s toga, što se drži izvjesna zadaća nemogućom, ako se neda rješiti pomoću kruga i pravca. Pušta se s vida da n. pr. zadatke drugoga stupnja, koji su nemogući s obzirom na izvjesni krug, rješava istostrana hiperbola, koja je tomu krugu involutorno pridružena. Pa kako je algebra proširila pojam broja, da osigura valjanost svojih rješidaba, tako je i geometrija prinuđena uz pozitivne uzeti ne samo negativne već i imaginarno signirane koordinate, resp. uz krug kao temeljnu krivulju prihvatiti hiperbolu, a u problemima višega stupnja pripustiti uz dotične krivulje i njihove imaginarne konjugate. Tim se tek određuje potpuni reciprocitet među geometrijskim tvorevinama i njihovim analitičkim korelatima."

---

[11] U fusnoti Varićak kaže: „O pojmu imaginarnih konjugata vidi M. Marie: *Théorie des fonctions de variables imaginaires*. Paris 1874. ili njegove rasprave u 'Nouvelles Annales' g. 1890 i 1981."

[12] Sibe Mardešić, *Vladimir Varićak, vodeći matematičar u Hrvatskoj u prvim desetljećima 20. stoljeća*, rukopis akademika Sibe Mardešića za radio emisiju posvećenu V. Varićaku, koja je emitirana 2011. godine.

Citirano razmatranje ilustrira Varićakov način gledanja na „realno i imaginarno" u geometriji koji se zamjećuje od rada *Prilog teoriji eliptičkih funkcija* sve do Sommerfeldove i Varićakove formule o slaganju brzina u teoriji relativnosti, a pomalo i najavljuje drugo razdoblje Varićakova znanstvenog rada posvećenog analitičkoj hiperbolnoj geometriji[13].

Prvi u nizu Varićakovih priloga posvećenih geometriji Lobačevskog opsežan je rad *Primjedbe o jednoj interpretaciji geometrije Lobačevskoga*[14] (1903.) u kojem Varićak polazi od Poincaréova modela geometrije Lobačevskoga u gornjoj poluravnini[15]. Varićak sustavno izvodi niz što poznatih što novih analitičkih formula i geometrijskih konstrukcija u ravnini Lobačevskog: konstrukcija polovišta luka i prenošenje jednakih segmenata s jedne geodetske linije na drugu, spuštanje normale iz neke točke na zadani pravac, formulu Lobačevskog za kut paralelnosti $\Pi(a)$ za duljinu a, Lahtinove formule koje povezuju Kartezijeve koordinate (x,y) Euklidove poluravnine s koordinatama (ξ,η) ravnine Lobačevskog, Engelove jednadžbe paralela[16] osi ξ u negativnom i pozitivnom smjeru, jednadžba pravca u općem položaju, jednadžbe pravaca koji sijeku osi ξ i η pod kutom A i na kojoj odsjecaju dužinu b, izvod glavnih trigonometrijskih poučaka hiperbolne geometrije, jednadžba kruga i konstrukcija kruga sa zadanim središtem i polumjerom, jednadžbe ekvidistantnih linija. Na kraju Varićak proučava analitička i geometrijska svojstva transformacije ravnine Lobačevskog određene jednadžbama $\xi=\xi_1$, $\Pi(\eta)+\Pi(\eta_1)=\pi/2$ te generalizira na čitavu ravninu rezultate H. Liebemanna[17]. Navedena razmatranja Varićak je poopćio i na hiperbolni prostor.

U kratkom razdoblju nakon toga Varićak objavljuje još osam radova iz analitičke geometrije Lobačevskog:

O transformacijama u ravnini Lobačevskoga, Rad 165 (1906), 50-80.

O translaciji po paralelama s osju X, Rad 165 (1906), 236-244.

Općena jednadžba pravca u hiperbolnoj ravnini, Rad 167 (1906), 167-188.

Bemerkung zu einem Punkte in der Festrede L. Schlesingers über Johann Bolyai, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Verinigung, XV, str. 319-320, 1907.

Beiträge zur nichteuklidischen Geometrie, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Verinigung, XVII, str. 70-83, 1908. Predavano u Dresdenu.

---

[13] Neeuklidska geometrija javlja se prvi put 1826. u radu Nikolaja I. Lobačevskog, no tek otkrićem euklidskih modela Eugenija Beltramija 1868. i Henrija Poincaréa 1882. postala je punopravnom granom matematike.

[14] Rad 154 (1903.), 81-131.

[15] U tom su modelu pravci (tj. geodetske linije) polukružnice sa središtem na x-osi i polupravci okomiti na x-os, a udaljenost između dviju točaka dana je integralom u kojem je element luka u pravokutnim Kartezijevim koordinatama oblika $ds^2=(dx^2+dy^2)/y^2$.

[16] F. Engel, *Nikolaj Iwanowitsch Lobatschefskij. Zwei geometrishe Abhandlungen.* Leipzig, 1898.

[17] *Die Construction des geradlingen Dreiecks der nichteuklidischen Geometrie aus den drei Winkeln.* Berichte der k. sächs. Ges. d. Wiss. Leipzig, 1901.

O ekvidistantnoj liniji u ravnini Lobačevskoga, Rad 173 (1908), 187-224.

Ekvidistantna površina. Rad. 175, str. 215-240, 1908.

Zur nichteuklidischen analytischen Geometrie, Atti del IV congresso internazionale dei Matematici, Vol II, str. 213-226, 1909, Roma. Predavano na kongresu.

U tom drugom znanstvenom razdoblju Varićak je napisao i rad povijesnog karaktera *Prvi osnivači neeuklidske geometrije*[18].

U točkama 1-6 tog opsežnog rada Varićak je opisao povijest pokušaja dokazivanja 5. Euklidova postulata od antike do 19. stoljeća i radova Karla Friedricha Gaussa, Janosa Bolyaija i N. I. Lobačevskog. Na samom kraju 6. točke povijesni pregled završava spomenom nekih značajnih suvremenika i nagrade Sveučilišta u Kazanu za koju se i sam Varićak kasnije natjecao[19]:

„Od sedamdesetih godina prošloga vijeka počelo je življe zanimanje za ova pitanja[20]. Pa kad je g. 1893 u Kazanju proslavljena prva stogodišnjica rođenja Lobačevskoga, živo učešće sa svih strana svijeta pokazalo je, da ime njegovo nije prazan zvuk. Uspomeni Kopernika geometrije, kako Lobačevskog nazivlje Sylvester, ponavljajući frazu Cliffordovu, učinjena je dostojna počast.

Internacionalnim prilozima podignut je Lobačevskomu spomenik u Kazanju i kod fiziko-matematičkoga društva tamošnjega stvorena je zaklada imena Lobačevskoga za nagrađivanje geometrijskih djela, naročito onih, koja rade o neeuklidskoj geometriji.

Prvi put je nagradom od 500 rubalja odlikovan 1897. god. Sophus Lie, drugi put g. 1900. Wilhelm Killing, a treći put g. 1904. David Hilbert. Četvrti put imala se podijeliti 1906., ali se natječaj morao obnoviti."[21]

U točki 7. rada Varićak pod naslovom *Kratak nacrt geometrije Lobačevskoga i Bolyaija* na 34 stranice daje pregled važnijih pojmova, konstrukcija i rezultata hiperbolne geometrije i trigonometrije i taj dio rada možemo smatrati prvim udžbenikom i priručnikom na hrvatskom za geometriju Lobačevskog.

U točki 8. rada pod naslovom *Apsolutna jedinica dužina* Varićak se vraća pitanju koje su si postavljali Gauss, Bolyai i Lobačevski: *koja geometrija opisuje naš stvarni prostor i može li se to eksperimentalno utvrditi?* Polazište razmatranja jest formula Lobačevskog $tg½\Pi(x)=e^{-x/R}$ za kut paralelnosti $\Pi(x)$ za duljinu x, pri čemu je R iza-

[18] Rad 169 (1907.), 109-194.

[19] Na natječaj za nagradu 1927. javio se i V. Varićak, a izvještaj i prijedlog za nagradu napisao je ruski matematičar A. P. Kotel'nikov. Varićak je dobio počasnu diplomu, a nagradu je dobio Hermann Weyl, kojemu je izvještaj i prijedlog za nagradu napisao David Hilbert. Na natječaj su se javili i P. Koebe (Leipzig), G. Kowalewski (Dresden), Fr. Schilling (Danzig), T. Shouten (Delft) i D. Struik (Rotterdam).

[20] Odnosi se na neeuklidske geometrije.

[21] Godine 1906. nagrada nije dodijeljena, počasnu diplomu dobio je Beppo Levi. Potom su nagradu dobili Ludwig Schlesinger (1909.), Friedrich Schur (1912.), Hermann Weyl (1927.), Élie Cartan (1937.), vidi https://en.wikipedia.org/wiki/Lobachevsky_Prize.

brana „apsolutna jedinica dužina". Iz formule slijedi da za $x \approx 0$ imamo $\Pi(x) \approx \pi/2$, pa za male dužine x ne vidimo razliku između euklidske i hiperbolne geometrije. No za $x \approx R$ imamo $\Pi(x) < \pi/2$, pa za takve (velike) dužine x vidimo razliku između euklidske i hiperbolne geometrije. Analizirajući mjerene podatke za paralakse zvijezda, Varićak zaključuje:

„/.../ uz pretpostavku, da u iskustvenom prostoru postoji geometrija Lobačevskog, /.../ apsolutna jedinica dužine u prostoru Lobačevskog veća je od šest stotina bilijuna kilometara, te nešto niže: Sada ćemo razumjeti, što smo prije rekli, da su sve dužine, s kojima imamo posla, presićušne prema toj apsolutnoj jedinici, tako da ih možemo prema njoj držati neizmjerno malenima. U praksi bi se formule Lobačevskoga reducirale na Euklidove."

Pri kraju ove točke Varićak kaže:

„Kad bismo htjeli ovaj odnošaj između geometrije Euklidove i geometrije Lobačevskoga razjasniti kojom analogijom iz fizike, mogli bismo uputiti na mehaniku elektrona. Ona se reducira na zakone Newtonove mehanike, kad brzine uzmemo dosta malene, a inače pokazuje velikih razlika prema njoj, na pr. u njoj ne postoji zakon ustrajnosti, zakon reakcije, a i mase se mijenjaju s brzinom elektrona."

Premda uz tu zadnju opasku Varićak ne daje nikakve reference, može se zaključiti da je riječ o Lorentzovoj teoriji elektrona[22]. U radu *Prvi osnivači neeuklidske geometrije*, objavljenom 1907., nema spomena o specijalnoj teoriji relativnosti i radovima Alberta Einsteina 1905. i Henrija Poincaréa 1906., no iz konteksta je jasno da je Varićak vrlo dobro upućen ne samo u suvremena zbivanja u geometriji nego i u burni razvoj fizike tog vremena[23].

Moglo bi se reći da gore citirano razmatranje iz rada *Prvi osnivači neeuklidske geometrije*, objavljenog 1907., najavljuje treće važno razdoblje Varićakova znanstvenog rada posvećeno primjeni geometrije Lobačevskog u teoriji relativnosti. Prvi radovi u nizu bili su:

Anwendung der Lobatschefskijschen Geometrie in der Relativ-theorie, Physikalische Zeitschrift 11 (1910), 93-96.

Die Relativtheorie und die Lobatschefskijsche Geometrie, Ibid., 287-293.

Die Reflexion des Lichtes an bewegten Spiegeln. Ibid, 586-587.

Zum Ehrenfest'schen Paradoxon, Physikalische Zeitschrift 12 (1911), 169-170.

Navedeni radovi skrenuli su pozornost međunarodnih znanstvenih krugova na Varićaka te je pozvan da na godišnjem sastanku Njemačkoga matematičkog društva u Karlsruheu 1911. održi predavanje *Über die nichteuklidische Interpretation*

[22] Na osnovi svoje teorije Hendrik Lorentz objasnio je Zeemanov efekt i za to je dobio Nobelovu nagradu iz fizike 1902.

[23] Tako V. Varićak na prethodnoj strani 171 u fusnoti navodi zbirku eseja H. Poincaréa *La science et l'hypothèse* iz 1902. godine i komentira neka Poincaréova filozofska gledišta o geometriji.

der Relativtheorie[24]. U tom predavanju Varićak opisuje razmišljanja koja su ga dovela do ideje da se geometrijom Lobačevskog koristi u rješavanju problema specijalne teorije relativnosti:

„/.../ Lorentzova kontrakcija činila mi se analognom deformaciji dužine u dobro poznatoj interpretaciji geometrije Lobačevskog kod koje su pravci predstavljeni polukružnicama i linearan element duljine je oblika $d\sigma = ds/y$. Taj se element uopće ne može premještati bez deformacije. To me je navelo na pomisao nije li Lorentzova kontrakcija posljedica neizotropnosti prostora? U teoriji relativnosti ne postoji paralelogram brzina; u prostoru Lobačevskog uopće ne postoje paralelogrami. U teoriji relativnosti, koja je prognala apsolutno iz fizike, postoji apsolutna brzina svjetlosti c, u geometriji Lobačevskog - apsolutna duljina R itd. Nije me začudilo ni to što se sličnosti vide i u povijesti razvoja ovih dviju disciplina. U oba se slučaja borba vodila oko vrijednosti nekih parametara, kojima su se u starim teorijama pripisivale beskonačno velike vrijednosti, a kod novih, naprotiv, konačne vrijednosti. U povijesti razvoja neeuklidske geometrije mnogi su vidjeli prividna protuslovlja, na isti način kako se mislilo naći protuslovlja i u teoriji relativnosti.

Sve to me je navelo na pomisao da transformiram Einsteinove formule i dam im geometrijsko neeuklidsko tumačenje. U međuvremenu je objavljen Sommerfeldov rad[25], u kojem je pokazano, da za sastavljanje brzina u teoriji relativnosti vrijede formule iz sferičke trigonometrije s imaginarnim stranicama. No hiperbolna geometrija je imaginarna slika sferičke, što je bilo poznato već Lobačevskomu i Bolyaju. I zato mi je postalo savršeno jasno da se hiperbolnoj geometriji u teoriji relativnosti otvara zanimljivo područje primjene."

Glavni rezultati Varićakove primjene geometrije Lobačevskog na specijalnu teoriju relativnosti relativističke su formule za sastavljanje brzina, kut aberacije svjetlosti, omjer frekvencija u Dopplerovu efektu i kut refleksije na ogledalu koje se kreće.

Problem slaganja brzina sastoji se u sljedećem: Imamo dva koordinatna sistema $S(x,y,z,t)$ i $S'(x',y',z',t')$, od kojih se drugi giba brzinom v u odnosu na prvi. Trebamo odrediti zavisnost među brzinama v_1 i v_2 jedne te iste točke u odnosu na ta dva sistema; brzinu v_2 u odnosu na sistem S možemo shvatiti kao brzinu sastavljenu od brzine v_1 u odnosu na sistem S' i brzine v tog sistema u odnosu na sistem S. Neka je α kut između brzina v i v_1. Budući da po principu relativnosti nema brzina v, v_1 i v_2 većih od brzine sjetlosti c, Varićak definira tzv. *pseudobrzine* u, u_1 i u_2 formulama

$v/c = th\ u$, $v_1/c = th\ u_1$ i $v_2/c = th\ u_2$.

---

[24] Predavanje je objavljeno na njemačkom jeziku u *Jahresbericht der Deutsch.* Math.Vereinigung. XXI, 103-127; a objavljeno je i u Varšavi u poljskom prijevodu, u Petrogradu na ruskom i u Parizu na francuskom jeziku.

[25] A. Sommerfeld, *Über die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten in der Relativtheorie,* Physikalische Zeitschrift 10 (1909.), 828.

Neka je *O* točka u ravnini Lobačevskog s apsolutnom jedinicom dužina *c* na koju nanesemo u smjeru brzine *v* dužinu *OA* = *u*, zatim na nju pod kutom α nanesemo dužinu $AC = u_1$. Dobili smo dužinu $CO = u_2$ koja je s *u* i u_1 vezana trigonometrijskom formulom hiperbolne geometrije

$ch\ u_2 = ch\ u\ ch\ u_1 + sh\ u\ sh\ u_1\ cos\ \alpha.$

Varićak pokazuje da je ta elegantna formula izražena u terminima brzina *v*, v_1 i v_2 ustvari Einsteinova relativistička formula za slaganje brzina. Te su formule veoma važne u fizici jer omogućuju eksperimentalnu potvrdu teorije relativnosti. No interpretacija tih formula u terminima geometrije Lobačevskog mogla bi dati i odgovor na pitanje ima li naš prostor strukturu prostora Lobačevskog. S tom motivacijom Varićak je u *Radu JAZU* objavio niz radova: *Primjedbe o teoriji relativnosti* (1913.), *O transformaciji brzine u teoriji relativnosti* (1913.), *Lorentzova i Einsteinova transformacija* (1913.), *Prilog neeuklidskoj interpretaciji teorije relativnosti* (1914.), *O transformaciji elektromagnetskoga polja u teoriji relativnosti* (1914.), *Primjedba o Dopplerovu učinku* (1915.), *O učinku Dopplerovu* (1916.), *O sastavljanju brzina u teoriji relativnosti* (1917.), *O teoriji relativnosti* (1918.), *O transversalnom Dopplerovu učinku* (1919.), *Bilješka o relativističkoj dinamici* (1919.), *O masi longitudinalnoj i transversalnoj* (1920.), *O svemirskom parametru* (1920.), *Dvije bilješke o teoriji relativnosti* (1921.), *Dopune nekim prethodnim radnjama* (1923.), *O impulzu i energiji* (1928.), *O akceleraciji* (1932.).

Knjiga *Darstellung der Relativitatstheorie im dreidimensionalen Lobatschefskijschen Raume*, Zagreb, 1924., str. 1-104, Varićakovo je glavno djelo, tj. sinteza svih njegovih istraživanja o neeuklidskoj geometriji i teoriji relativnosti.

Varićakovi radovi u časopisu *Physikalische Zeitschrift* imali su velik odjek u tadašnjim znanstvenim krugovima. Varićakova pretpostavka da naš stvarni prostor ima strukturu geometrije Lobačevskog izazivala je ponekad žustre polemike[26], a na kraju je ipak općeprihvaćena teorija prostor-vremena Hermanna Minkowskog. No usprkos tomu, Varićak je svojim znanstvenim djelovanjem znatno pridonio razumijevanju nekih aspekata specijalne teorije relativnosti. Tako, naprimjer, Tilman Sauer u svojem radu *The Einstein-Varićak Correspondence on Relativistic Rigid Rotation* (2007.) ističe bitnu ulogu Varićaka u razjašnjavanju problema vezanih za pojam krutog tijela u specijalnoj teoriji relativnosti[27].

Vladimir Varićak dao je velik doprinos razvoju matematike u Hrvatskoj nastavivši pionirsku misiju Karela Zahradnika na unapređivanju znanstvenog rada na Sveučilištu u Zagrebu. Početni krug tema vezanih za algebarske krivulje proširio je

[26] Vidi prilog Scott Walter, *The Non-Eucledean style in Minkowskian relativity u knjizi The symbolic universe. Geometry and physics 1890 -1930,* Oxford, 1999., koja je objavljena pod uredništvom J. Graya.

[27] Vidi prilog Tilman Sauer, *The Einstein-Varićak Correspondence on Relativistic Rigid Rotation u Proceedings of the Eleventh Marcel Grossmann Meeting on General Relativity,* ed. H. Kleinert, R. T. Jantzen and R. Ruffini, World Scientific, Singapore, 2007.

na tada aktualne probleme neeuklidskih geometrija i specijalne teorije relativnosti te je za navedenu problematiku zainteresirao i nove naraštaje matematičara. Od 1899. do 1942. bio je predstojnik Matematičkog seminara, 1930. preimenovanog u Matematički zavod, i u tom su razdoblju na Sveučilištu u Zagrebu doktorirali Aleksandar Truhelka (1912.), Željko Marković (1915.), Vladimir Vranić (1920.), Zdenka Makanec (1921.), Rudolf Cesarec (1927.), Mira Hercigonja (1931.) i Vilim Niče (1941.).

Varićakovi doprinosi u matematici i fizici imali su velik odjek u međunarodnim znanstvenim krugovima i znatno su pridonijeli ugledu Sveučilišta u Zagrebu, a hrvatskim matematičarima olakšali su pristup vrhunskim znanstvenim centrima u svijetu. Tako je znameniti William Srećko Feller[28] doktorirao u Göttingenu 1927. pod vodstvom R. Couranta s temom o algebarskim krivuljama, a Varićaka spominje kao profesora koji je na njega najviše utjecao tijekom studija matematike u Zagrebu. Đuro Kurepa[29], asistent u Matematičkom zavodu 1931./32., doktorirao je 1935. na Sorbonni u Parizu pod vodstvom M. Frécheta s temom iz teorije skupova, a o Varićaku kaže[30]:

„Radio je mnogo i čitao stvari iz svih matematičkih disciplina. Za najnovije i najprijepornije stvari imao je, čini se, osobitu sklonost. Otuda i njegov interes za principe geometrije i uopće matematike. Mnogo je cijenio obnovu matematike pomoću teorije skupova."

Ovdje valja spomenuti i pismo[31] Ivana Supeka[32] Varićaku s kojim mu iz Leipziga[33] šalje i predavanja profesora Paula Koebea o teoriji funkcija, a koje započinje riječima:

„Vrlo cijenjeni gospodine profesore,

Molim Vas da mi oprostite što Vam s priličnim zakašnjenjem šaljem 4-semestralna predavanja prof. Koebe o teoriji funkcija. Matematički institut ovdje ne posjeduje primjerke tih predavanja, pa sam među studentima morao tražiti najbolji koncept predavanja. /.../"

Na kraju možemo citirati ulomak iz članka dr. Vladimira Vranića *Razvitak matematike i srodnih disciplina kod Hrvata od godine 1860. do danas*[34] iz 1936. godine:

---

28 Vidi http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Feller.html.

29 Vidi 120 godina nastave prirodoslovlja i matematike na Sveučilištu u Zagrebu, PMF, Zagreb, 1996.

30 Vidi Đ. Kurepa, Vladimir Varićak (26. 03. 1865. – 17. 01. 1942.), Glasnik Mat. Fiz. Astron. 3 (1948.), 64-76.

31 I. Martinović, *Pismo Ivana Supeka Vladimiru Varićaku iz Leipziga 8. prosinca 1938.*, Prilozi za istraživanje hrvatske filozofske baštine 40/2(80) (2014), 503-512.

32 Vidi 120 godina nastave prirodoslovlja i matematike na Sveučilištu u Zagrebu, PMF, Zagreb, 1996.

33 Supek je u Leipzigu 1940. doktorirao fiziku i filozofiju pod vodstvom W. Heisenberga.

34 Obzor: spomen knjiga 1860-1935 / uredili Milivoj Dežman i Rudolf Maixner, Zagreb, 1936. http://library.foi.hr/knjige/knjiga1.aspx?C=1045&broj=1&stranica=00200.

„Prvi koga susrećemo je dr. Karlo Zahradnik (umro 1916.), koji je bio prvi profesor matematike na zagrebačkom sveučilištu. /.../ Njegov nasljednik je dr. Vladimir Varićak (rodj. 1865.), koji već djeluje punih 40 godina na zagrebačkom sveučilištu, pa je uz njegovo ime vezan gotovo čitav razvoj naše nauke u ovim krajevima."

Vladimir Varićak's Contribution to the Development of Mathematics in Croatia

Summary

Vladimir Varićak was the most prominent Croatian mathematician in the period 1900–1940. He was born in 1865 in the village Švica near Otočac. He attended school in Sisak, Petrinja and Zagreb; and obtained his Ph.D. in 1890 at the University of Zagreb. His Ph.D. thesis advisor was Karel Zahradnik, the professor of mathematics at the University of Zagreb from 1876 to 1899 and the first modern Croatian mathematician. Vladimir Varićak was appointed professor of mathematics at the University of Zagreb in 1902. Varićak's initial scientific interest lied in the classical analytic geometry of algebraic curves; subsequently, however, it shifted to non-Euclidean geometries, especially to the hyperbolic geometry. He became world-famous thanks to his papers on Lobachevskian geometry, and special theory of relativity published in the journal *Physikalische Zeitschrift* in 1910 and 1911. Vladimir Varićak contributed greatly to the development of mathematics in Croatia by continuing the pioneering mission of Karel Zahradnik in promoting scientific research at the University of Zagreb. He broadened the initial list of topics related to algebraic curves by the then contemporary problems in non-Euclidean geometries and special theory of relativity, managing thereby to make new generations of mathematicians interested in these problems. His scientific achievements contributed greatly to the reputation of the University of Zagreb, and made the best science centres in the world more accessible to Croatian mathematicians.

Keywords: Vladimir Varićak; Lobachevskian geometry; special theory of relativity