

VLADIMIR VARIĆAK I SPECIJALNA TEORIJA RELATIVNOSTI

Maro Cvitan

Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Fizički odsjek

Sažetak

Varićakova istraživanja specijalne relativnosti stavljamo u povijesni kontekst. Naglasak je na njegovu radu o parametru rapiditeta koji je temeljen na radovima Minkowskog i Sommerfelda. Dani su komentari kojima se pokušavaju objasniti teškoće s hiperbolnom interpretacijom specijalne relativnosti.

Ključne riječi: specijalna teorija relativnosti; neeuklidska geometrija

UVOD: SPECIJALNA TEORIJA RELATIVNOSTI

Na prijelazu iz 19. u 20. stoljeće fizičare je zbunjivao težak problem. Ticao se relativnosti gibanja, tj. pitanja možemo li znati gibamo li se ili mirujemo. Za razumijevanje Varićakova doprinosa potrebno je uočiti da su rješenja tog problema zahtijevala odustajanje od jedne intuitivno prihvatljive slike svijeta (fizikalnih zakona) u korist druge, na prvi pogled, manje intuitivne. U nastavku ćemo vidjeti kako je Varićak povezoao rješenje navedenog problema, tj. specijalnu teoriju relativnosti s neeuklidskom geometrijom, i time omogućio nov i zanimljiv zorni prikaz problematike.

Recimo par riječi o specijalnoj teoriji relativnosti. Za njezin razvoj iznimno je bitan odnos sljedeća dva pitanja. Jedno je možemo li znati gibamo li se ili mirujemo. Brzopleti odgovor bio bi *da*. Odgovor *ne* iskristalizirao se u 17. stoljeću. To je poznati princip relativnosti gibanja za koji su zaslužni Galileo i Newton. Taj odgovor preživio je i promjenu paradigme s početka 20. stoljeća i služio je kao jedan od stupova specijalne teorije relativnosti.¹

Drugo je pitanje kakva je priroda brzine svjetlosti. Brzopleto se moglo tvrditi da je brzina svjetlosti *beskonačna*. Da je ipak *konačna*, dokazao je eksperimentom

¹ Međutim, nakon otkrića tzv. opće teorije relativnosti situacija se nešto zakomplicirala. Dodatnu važnost dobio je odgovor *da*. Štoviše, mjerenja dipolne komponente kozmičkog mikrovalnog zračenja (CMB) kažu nam da je brzina kojom se Zemlja giba u odnosu na CMB jednaka 370 ± 2 kilometara u sekundi. Ipak, odgovor *ne* nije pogrešan. On se odnosi na fizikalne zakone, a ne na konkretno stanje. Također, u tom kontekstu, nije definirano pitanje „giba li se CMB (odnosno metrika) nekom brzinom u odnosu na nešto drugo“.

Rømer u 17. stoljeću. Jednadžbe kojima se može predvidjeti brzina svjetlosti ovisno o mediju kojim se ona kreće pronašao je Maxwell u 19. stoljeću. U nastavku ćemo pretpostavljati da je medij vakuum.

Na prijelazu iz 19. u 20. stoljeće situacija je dakle bila: postoji relativnost gibanja (ne možemo znati gibamo li se ili ne), a Maxwellove jednadžbe predviđaju da je brzina svjetlosti u vakuumu oko 300 tisuća kilometara u sekundi. Postavljaju se pitanja tipa: što ako se izvor svjetlosti giba; što ako se medij giba; vuče li izvor medij za sobom?

Zamislimo situaciju u kojoj se izvor svjetlosti giba u odnosu na nas, a mi mjerimo brzinu svjetlosti iz tog izvora. Za zaključivanje ćemo se koristiti Galilejevom relativnošću. Prvo pretpostavimo da izvor svjetlosti vuče za sobom medij u kojem se giba svjetlost koju on emitira. Mjereći tu brzinu svjetlosti, doznali bismo brzinu izvora u odnosu na nas. Slijedi da tada brzina svjetlosti nama izgleda veća od one univerzalne brzine koju predviđaju Maxwellove jednadžbe. To je kontradikcija s Maxwellovim jednadžbama.

Pretpostavimo li, naprotiv, da izvor svjetlosti slobodno prolazi kroz medij u kojem se giba svjetlost (tj. ne vuče ga) zbog Galilejevih transformacija, uviđamo drugu vrstu kontradikcije jer ispada da medij ima ulogu apsolutnog prostora. To je zato jer bismo, uspoređujući brzinu opažača s brzinom svjetlosti (u Galilejevoj slici čini se da to možemo), mogli odrediti brzinu opažača u odnosu na medij, što bi značilo da znamo apsolutnu brzinu gibanja. A to bi bila kontradikcija s principom relativnosti gibanja.

Ovakvim misaonim eksperimentom zaključili bismo da od jednog od sljedeća tri principa moramo odustati: ili od Galilejeva zbrajanja brzina, ili od principa da ne možemo znati svoju apsolutnu brzinu, ili od Maxwellovih jednadžba. Stvarnim eksperimentima nije pronađena mogućnost određivanja apsolutne brzine.

Do pomirenja relativnosti gibanja s konceptom maksimalne brzine došlo se izmjenom načina zbrajanja brzina. Nov način zbrajanja brzina posljedica je novog pogleda na relativnost gibanja koji se naziva specijalna teorija relativnosti i koji je kompletirao Einstein 1905. godine. Zanimljivo je da se desetak godina kasnije opet mijenjala paradigma i taj najnoviji pogled koji je donijela opća teorija relativnosti nije negirao specijalnu teoriju relativnosti nego ju je uključivao kao određeni limes.

Napomenimo da je u to doba bio običaj koristiti se nazivom *eter* za medij u kojem se gibala svjetlost (vidi npr. [16]). Spomenimo da Varićak u svojem tekstu [7] daje detaljan pregled problematike te diskutira tri vrste etera prema tome povlači li ga izvor za sobom ili ne ili djelomično. Dodajmo i da u paradigmi opće teorije relativnosti, gdje su prostor i vrijeme zakrivljeni, veličina koja definira zakrivljenost prostora i vremena, metrika, podsjeća na spomenuti eter, i to onaj koji materija povlači djelomično na način reguliran Einsteinovom jednadžbom. Danas se riječ eter koristi za drugo: modele u kojima postoji preferirani sustav [15].

LORENTZOVE TRANSFORMACIJE

Kao što smo vidjeli, velika promjena u načinu razmišljanja bilo je odbacivanje Galilejeva zbrajanja brzina. Galilejevo zbrajanje brzina formalno slijedi iz Galilejevih transformacija koordinata. Općenito, smisao relacija za transformacije koordinata jest da nam kažu gdje će u prostoru i vremenu jedan opažatelj mjeriti neki događaj ako je poznato gdje drugi opažatelj mjeri taj isti događaj te ako je poznata relativna brzina tih dvaju opažatelja. Galilejeve transformacije koordinata glase:

$$\begin{aligned} t' &= t \\ x' &= x - vt \end{aligned} \quad (1)$$

Ovdje i u nastavku obično ćemo pretpostavljati da je relativna brzina dvaju opažatelja kolinearna s osima x i x' , tako da nećemo pisati relacije

$$\begin{aligned} y' &= y \\ z' &= z \end{aligned}$$

koje vrijede i u slučaju Lorentzovih transformacija.

Lorentzove transformacije² koordinata dane su relacijama (Einstein, 1905.)

$$\begin{aligned} t' &= -\beta\gamma x + \gamma t \\ x' &= \gamma x - \beta\gamma t \end{aligned} \quad (2)$$

gdje smo koristili pokrate

$$\beta = \frac{v}{c} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (4)$$

$$\beta\gamma = \frac{v}{c} \gamma \quad (5)$$

te smo u relacijama za transformacije odabrali jedinice tako da je brzina svjetlosti u vakuumu c jednaka jedan:

$$c = 1 \quad (6)$$

Za razliku od Galilejevih, Lorentzove transformacije „miješaju prostor i vrijeme“: na desnoj strani relacije za t' nalazi se x . Zbog toga više ne postoji apsolutnost vremena $t' = t$. Također na desnoj strani nalazi se vrijeme pomnoženo faktorom γ .

² Lorentzove transformacije mogu se izvesti iz postulata specijalne teorije relativnosti: 1) zakoni fizike su isti u svim inercijalnim sustavima; 2) brzina svjetlosti u vakuumu neovisna je o gibanju izvora (i o gibanju inercijalnog opažatelja). Iz navedenih postulata slijedi da masivne čestice ne mogu doseći brzinu svjetlosti u vakuumu. Ako se još, u skladu s opažanjima, postulira i kauzalnost time se isključuje mogućnost postojanja hipotetskih čestica (tzv. tahiona) koje se „oduvijek“ gibaju brže od brzine svjetlosti u vakuumu.

Posljedica netrivialnosti desne strane jest dobro poznat efekt: dilatacija vremena. Zbog tih komplikacija, Lorentzove su transformacije na glasu kao manje intuitivne od Galilejevih.

Zanimljiva je opservacija da se Lorentzove transformacije mogu napisati u obliku koji podsjeća na rotaciju osi t i x za imaginaran kut (Minkowski, 1907. – 1908. [13]):

$$\begin{aligned} it' &= -x \sin(iw) + it \cos(iw) \\ x' &= x \cos(iw) + it \sin(iw) \end{aligned} \quad (7)$$

Varićak [4] je 1910. uvidio da se gornje relacije mogu napisati isključivo pomoću realnih veličina, kao hiperbolne rotacije realnog kuta:

$$\begin{aligned} t' &= -x \operatorname{sh} w + t \operatorname{ch} w \\ x' &= x \operatorname{ch} w - t \operatorname{sh} w \end{aligned} \quad (8)$$

U POTRAZI ZA HIPERBOLNOM INTERPRETACIJOM SPECIJALNE RELATIVNOSTI

Ovakve estetski uspješne redefinicije mogu biti pokazatelj neke dublje pravilnosti npr. da je hiperbolna geometrija ugrađena u specijalnu relativnost. Varićakovi su suvremenici imali su različita mišljenja o upotrebljivosti hiperbolne geometrije.

Poincaré, kad je 1907., dakle prije Varićakovih radova, komentirao moguću primjenu hiperbolne geometrije u specijalnoj relativnosti, nije bio pretjerano poticajan: „vrlo teško i ne bi donijelo puno koristi” (prema [23]).

S druge strane, Minkowski [13] se, predstavljajući 1908. ideju da je fizička stvarnost 4-dimenzionalno prostor-vrijeme, činio više entuzijastičan kad je uočio da je vrh 4-vektora brzine:

„uvijek točka na plohi:

$$w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2 = -1$$

ili, ako želite, na:

$$t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1$$

i predstavlja u isto vrijeme 4-dimenzionalni vektor iz ishodišta do te točke; također vektori ove vrste uključuju brzinu nula, mirovanje. Neeuklidska geometrija, o kojoj sam ranije govorio okvirno, sada se otkriva pomoću ovih vektora brzine.” (prema [23])

Najveća inspiracija za Varićaka bio je Sommerfeldov rad iz 1909. [14] u kojemu je korištena sferna trigonometrija s imaginarnim kutovima da bi se reproducirale

Einsteinove relacije za zbrajanje brzina. Varićak je u to doba već neko vrijeme radio istraživanja vezana uz neeuclidsku geometriju (npr. [1], [2], [3]) te se upustio u interdisciplinarna istraživanja koja povezuju neeuclidsku geometriju i specijalnu relativnost. U svom radu iz 1910. Varićak [4] je reproducirao i Einsteinove relacije za zbrajanje brzina koristeći se hiperbolnom trigonometrijom, postigavši da mu kutovi w , za razliku od Sommerfeldova izvoda, budu realni. Kao i Sommerfeld, pokazao je ovo u općem slučaju kad brzine ne moraju biti kolinearne. Pogledajmo kako izgleda uobičajena formula za relativističko zbrajanje brzina u pojednostavnjenom slučaju kad su brzine kolinearne. Ona slijedi iz Lorentzovih transformacija koordinata i može se zapisati kao:

$$\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2} \quad (9)$$

U Varićakovu rječniku ista je relacija jednostavnija

$$w = w_1 + w_2 \quad (10)$$

gdje su veze među brzinama v (odnosno β) i kutovima w dane s:

$$\beta = th\ w = \frac{v}{c} \quad (11)$$

$$\beta_i = th\ w_i = \frac{v_i}{c},\ i = 1, 2 \quad (12)$$

U to doba i drugi su autori došli do sličnih rezultata: Whittaker [24] je 1910. neovisno definirao istu veličinu: kut w , a Robb [25] je 1911. neovisno i na drugi način uz pomoć hiperbolne geometrije izveo Einsteinove relacije za zbrajanje brzina.

U općenitom slučaju (kad brzine nisu nužno kolinearne) Varićak i Robb time su došli do pravila koje je moguće jednostavno izreći [4], [6], [25]:

Tako umjesto Euklidskog trokuta brzina, dobijemo Lobačevskijev trokut rapiditeta. (Robb, [25])

Gornji rezultat važan je jer daje dodatan zor u netransparentne relacije za relativističko zbrajanje brzina. Nekomutativnost relativističkog zbrajanja brzina (koje nisu kolinearne) uzrok je dobro poznatog fenomena Thomasove precesije (vidi npr. diskusiju u [18]).

Robb nastavlja:

Za male rapiditete, možemo poistovjetiti rapiditet i brzinu, a trokut Lobačevskog možemo smatrati Euklidskim. Također vidimo da su rapiditeti koji leže na istom pravcu aditivni.

Veličinu w , koju gore nazivamo kut, Varićak naziva *dužina* ili *pseudobrzina*, a predlaže jednostavan naziv *brzina*, s tim da za uobičajenu brzinu predlaže naziv *reducirana brzina*. (Nazivanje uobičajene brzine reduciranom motivirano je time da uobičajena brzina β uvijek ima manji iznos od veličine w koja ima svojstvo da teži u

beskonačno kad brzina β teži prema brzini svjetlosti.) Robb za veličinu w predlaže naziv *rapidity* [25]. Taj su naziv, osim Varićaka [6], vrlo brzo prihvatili i drugi autori (vidi [17]). Tako je naziv rapiditet ušao u standardnu upotrebu. Primjerice, definiran je kao standardna veličina u *The Review of Particle Physics* (2017.) [20], opsežnim sažecima fizike čestica i srodnih područja. Osim naziva rapiditet, danas susrećemo nazive *parametar potiska* (*boosta*) te *hiperbolna brzina*.

Usporedimo situaciju s razdobljem u drugoj polovici 19. stoljeća, kad su se znale Maxwellove jednadžbe, ali ne i Lorentzove transformacije. Zanimljivo je da je ispalilo da se Maxwellove jednadžbe transformiraju kovarijantno na Lorentzove transformacije, iako su Maxwellove jednadžbe bile pronađene četrdesetak godina prije Lorentzovih transformacija (vidi npr. diskusiju u [19]). Dakle, ako se Maxwellove jednadžbe uzmu kao polazna točka, one mogu poslužiti kao nit vodilja za otkrivanje Lorentzovih transformacija.

S druge strane, vidjeli smo da Lorentzove transformacije izgledaju kao rotacije u hiperbolnom prostoru. Ako to pokušamo uzeti kao polaznu točku i pogledamo što nam sugeriraju te relacije, dolazimo do pitanja postoji li neki drugi opis fizikalnih zakona koji bi se služio hiperbolnom geometrijom. Pri tome se nadamo da bi takav opis mogao biti temeljitiji i jednostavniji. Varićak je uložio dosta vremena u traganju za takvim novim opisom. Istraživao je mogućnost da je hiperbolni prostor gdje figuriraju rapiditeti fundamentalan. U nizu radova proučio je konstrukcije u hiperbolnom prostoru kojima može reproducirati razne fenomene specijalne relativnosti dobivene drugim razmatranjima: transformacije brzina (zbrajanje brzina), Lorentzove transformacije, transformacije elektromagnetnih polja, Dopplerov efekt, longitudinalnu i transverzalnu masu, relativističku energiju i impuls te silu i akceleraciju. Poznata su i njegova dopisivanja s Einsteinom [21], [22].

A POSTERIORI KOMENTARI

Nakon vremenskog odmaka od stotinjak godina od Varićakovih radova dajemo nekoliko komentara koji nastoje objasniti teškoće pristupa s hiperbolnom geometrijom.

Pogledamo li koliki je iznos rapiditeta w za brzinu svjetlosti $\beta=1$ iz relacije (3) vidimo da će biti beskonačno. Ako nas zanima isključivo zbrajanje brzina, ta činjenica pomaže za zorno prikazivanje relativističkog zbrajanja brzina: „brzina svjetlosti plus brzina svjetlosti daje brzinu svjetlosti“. Ali ako nas zanima i vrijeme putovanja, čini se da je informacija izgubljena te da je takav prikaz kompliciraniji jer neće više vrijediti uobičajena formula $t=s/v$. Tu se čini da je nepremostiv problem što svjetlost između dvije zadane točke putuje konačno dugo, a u hiperbolnom prikazu brzina je beskonačna. Također količine gibanja i energije fotona su konačne, a mogu biti različite od fotona do fotona, što znači da za prikaz fotona u hiperbolnom prostoru vjerojatno neće biti dovoljno samo koristiti beskonačan rapi-

ditet nego će dodatno biti potrebno voditi evidenciju o energiji i impulsu. Naprotiv, u uobičajenom formalizmu fotoni su prikazani četverovektorima kojima je norma nula, a komponente imaju značenje energije i impulsa.

Još jedan sličan komentar jest da u standardnom formalizmu fazna brzina može biti veća od brzine svjetlosti, pri čemu relacija $t=s/v$ daje očekivani rezultat. U hiperbolnom formalizmu ne čini se jasno kamo smjestiti brzine veće od svjetlosti.

Ovo nam daje naslutiti da se hiperbolni formalizam čini prikladniji za Lorentzove transformacije brzina (tj. zbrajanje brzina), a manje prikladan za transformacije ostalih (nenormiranih) 4-vektora. Pogledajmo zašto se pojavljuje problem s vektorima koji nisu normirani (kao brzine). U trodimenzionalnom prostoru Lobačevskog koordinate točke mogu se prikazati na razne načine. Varićak [6], [9] se koristi homogenim Weierstrassovim koordinatama $x, y, z, l = ct$ te koordinatama Lobačevskog X, Y, Z . Veza među njima dana je relacijama:

$$\begin{aligned}x &= \text{sh}X \text{ch}Y \text{ch}Z \\y &= \text{sh}Y \text{ch}Z \\z &= \text{sh}Z \\l &= \text{ch}X \text{ch}Y \text{ch}Z\end{aligned}\tag{13}$$

Varićak identificira koordinate x, y, z, l s koordinatama događaja u 4d prostoru. To izaziva sljedeći problem. Po konstrukciji koordinate x, y, z, l zadovoljavaju uvjet

$$l^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1\tag{14}$$

Međutim, općenito za događaje ne vrijedi takva restrikcija. Na primjer, za česticu koja miruje u ishodištu gornji uvjet (14) glasio bi $l^2 - x^2 - y^2 - z^2 = l^2$, što bi se slagalo samo kad je $l^2 = 1$. To znači da izvod Lorentzovih transformacija iz [6], striktno govoreći, vrijedi samo za podskup događaja koji zadovoljavaju uvjet (14). Tu se vide teškoće primjene trodimenzionalne hiperbolne geometrije na četverovektore događaja. Za brzine koje su četverovektori normirani kao (14) nema tih problema. Unatoč takvoj restrikciji, Varićak je dobio ispravnu formu Lorentzovih transformacija, što je posljedica činjenice da su one linearne.

Varićak se često koristi hiperbolnim prostorom i za događaje npr. u 6. odjeljku rada [6]. Također, nije striktan oko mjernih jedinica npr. u relaciji (2) reference [5] vidljivo je da veličina U (proporcionalna rapiditetu do na konstantu) mora imati dimenzije brzine. Međutim u tekstu Varićak inzistira da taj U ima dimenzije duljine. Time je prešutno uveo dodatnu vremensku skalu (od jedne sekunde) koja nema uporište u stvarnosti. To je također ekvivalentno uvođenju nove konstante koja ima dimenzije duljine. Takvu konstantu iznosa 300,000 km uvodi i u [11] za potrebe kvalitativnog proučavanja astrofizičkih posljedica zakrivljenosti prostora.

U radu [10] vješto konstruira veličine koje mu predstavljaju ekvivalente električnog i magnetskog polja u hiperbolnoj geometriji te, neovisno o tome, razmatra

Lorentzovu kontrakciju za koju zaključuje da ne postoji. Uzrok ovog pogrešnog zaključka treba tražiti u identifikaciji duljine d , koju razmatra, s duljinom testnih štapova u specijalnoj teoriji relativnosti. Duljinu d definirao je tako da bude skalar (vidi relaciju (34) u [10]), iako je poznato da je duljina štapa veličina koja se ne transformira ni kao skalar ni kao komponenta vektora.

HIPERBOLNA INSPIRACIJA

Uklanjanje kompleksnih veličina i zapisivanje formula za Lorentzove transformacije korištenjem realnog kuta/rapiditeta dalo je Varićaku ideju za novu sliku kako priroda funkcionira: gdje je hiperbolni prostor fundamentalan a rapiditeti se „pred dogode“ (prema S. Walter [23]: „pre-occur“).

Nakon svojih prvih radova iz područja specijalne teorije relativnosti bio je uvjeren da „... teorija relativnosti doista posve prirodno traži interpretaciju u prostoru Lobačevskoga“ [8] i istraživao je hiperbolnu interpretaciju specijalne relativnosti dugi niz godina. Između 1910. i 1936. o teoriji relativnosti objavio je 29 publikacija (prema popisu koji je dao Kurepa 1965. [12]).

Iako se daljnji razvoj relativnosti (i gravitacije) nije odvijao na način koji je sugerirala Varićakova slika, propitivanje geometrije prostora i vremena pokazalo se kao ispravan smjer. Promjena paradigme shvaćanja prostora i vremena dogodila se 1915. – uslijedila je Einsteinova opća teorija relativnosti gdje je prostor-vrijeme zakrivljeno.

Ipak, hiperbolna interpretacija još uvijek inspirira. U predgovoru nacrtu svoje knjige u kojoj u detalje razrađuje hiperbolne aspekte specijalne teorije relativnosti, John F. Barrett piše 2006. [26]:

„[...]when, many years later, I saw by chance the work of Varićak expressing the theory in terms of Bolyai – Lobachevski geometry (or ‘hyperbolic geometry’), it came as a revelation. Being convinced that this was without doubt the correct approach, I started to work on it [...]“

Zanimljivo je i spomenuti da je otkriće neeuklidske geometrije iz prve polovice 19. stoljeća imalo sličnosti s otkrićem specijalne teorije relativnosti. Na predavanju u Karlsruheu [6] Varićak govori o analogiji promjene statusa radijusa zakrivljenosti i apsolutne brzine nakon tih otkrića: „u oba slučaja bio je uloženi trud da se razumiju određeni parametri kojima je vrijednost u starim teorijama beskonačno a nedavnim teorijama su konačni“. Zaključno možemo komentirati kako je iz perspektive 21. stoljeća impresivno promatrati povijest velikih znanstvenih revolucija poput specijalne teorije relativnosti i neeuklidske geometrije kao i, zahvaljujući Varićaku, doticaje među njima.

Literatura

1. Varićak, V. (1907), „Bemerkung zu einem Punkte in der Festrede L. Schlesingers über Johann Bolyai“, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 12: 165–194.
2. Varićak, V. (1908), „Beiträge zur nichteuklidischen Geometrie“, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 17: 70–83.
3. Varićak, V. (1908) „Zur nichteuklidischen analytischen Geometrie“, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Bd. II, SS. 213–26.
4. Varićak, V. (1910), „Anwendung der Lobatschefskijschen Geometrie in der Relativtheorie“, Physikalische Zeitschrift, 11: 93–6 (Wikisource translation: Application of Lobachevskian Geometry in the Theory of Relativity).
5. Varićak, V. (1910), „Die Relativtheorie und die Lobatschefskijsche Geometrie“, Physikalische Zeitschrift, 11: 287–293 (Wikisource translation: The Theory of Relativity and Lobachevskian Geometry).
6. Varićak, V. (1912), „Über die nichteuklidische Interpretation der Relativtheorie“, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 21: 103–127 (Wikisource translation: On the Non-Euclidean Interpretation of the Theory of Relativity).
7. Varićak, V. (1921), Einsteinova specijalna teorija relativnosti, Zagreb, 44 str.
8. Varićak, V. (1913), O transformaciji brzine u teoriji relativnosti, Rad 200, 175–185.
9. Varićak, V. (1913), Lorentzova i Einsteinova transformacija, Rad 200, 209–219.
10. Varićak, V. (1914), O transformaciji elektromagnetskoga polja u teoriji relativnosti, Rad 2014, 103–130.
11. Varićak, V. (1920), O svemirskom parametru, Rad 223, 83–100.
12. Kurepa Đ. (1965), Prva stogodišnjica rođenja matematičara Vladimira Varićaka, Matematički vjesnik 3 (18) 61–68.
13. Minkowski, Hermann (1915) [1907]. „Das Relativitätsprinzip“. Annalen der Physik. 352 (15): 927–938. Bibcode:1915AnP...352..927M. doi:10.1002/andp.19153521505. Minkowski, Hermann (1908). „Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern“. Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse: 53–111. English translation: „The Fundamental Equations for Electromagnetic Processes in Moving Bodies.“ In: The Principle of Relativity (1920), Calcutta: University Press, 1–69.
14. A. Sommerfeld, On the Composition of Velocities in the Theory of Relativity. Physikalische Zeitschrift, 10, 828, 1909.
15. M. Gasperini 1987 Class. Quantum Grav. 4 485. Ted Jacobson and David Mattingly. Gravity with a dynamical preferred frame. Phys. Rev. D, 64:024028, Jun 2001.
16. Janez Strnad, Fizika, 3. del, Posebna teorija relativnosti, Atomi, (DZS, Ljubljana, 1980., pp 320).

17. Rapidity. (26. rujna 2017), Wikipedia, The Free Encyclopedia, poveznica <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Rapidity&oldid=802540184>
18. B. Klajn and I. Smolić. Subtleties of invariance, covariance and observer independence. *European Journal of Physics*, 34(4): 887, 2013.
19. D. V. Redžić. Are Maxwell's equations Lorentz-covariant? *European Journal of Physics*, 38(1):015602, 2017.
20. The Review of Particle Physics (2017), C. Patrignani et al. (Particle Data Group), *Chin. Phys. C*, 40, 100001 (2016) and 2017 update, poveznica <http://pdg.lbl.gov/>.
21. Sauer, T. (2007), „The Einstein-Varićak Correspondence on Relativistic Rigid Rotation“, in H. Kleinert; R.T. Jantzen; R. Ruffini, *Proceedings of the Eleventh Marcel Grossmann Meeting on General Relativity*, Singapore: World Scientific, Bibcode:2008mgm..conf.2453S, arXiv:0704.0962 Freely accessible, doi:10.1142/9789812834300_0432.
22. Miller, A. I. (1981), „Varićak and Einstein“, *Albert Einstein's special theory of relativity. Emergence (1905) and early interpretation (1905–1911)*, Reading: Addison–Wesley, pp. 249–253, ISBN 0-201-04679-2.
23. Walter, S. (1999), „The non-Euclidean style of Minkowskian relativity: Vladimir Varićak's non-Euclidean program“, in J. Gray, *The Symbolic Universe: Geometry and Physics*, Oxford University Press, pp. 91–127.
24. Whittaker, E. T. *A history of the theories of aether and electricity*, (1910), London; New York: Longmans, Green and Co, dostupno na <https://archive.org/details/historyoftheorie00whitrich>
25. Robb, Alfred (1911). *Optical geometry of motion, a new view of the theory of relativity*. Cambridge: Heffer & Sons, <https://archive.org/details/opticalgeometryo00robbrich>.
26. J. F Barrett, (2011), *The Hyperbolic Theory of Special Relativity*. ArXiv e-prints <https://arxiv.org/abs/1102.0462>; (2014 version) https://www.researchgate.net/publication/278243468_The_Hyperbolic_Theory_of_Special_Relativity_2014_version

Varićak and the Special Theory of Relativity

Summary

Varićak's research on special relativity is studied within the historical context. The emphasis is put on his paper on the parameter of rapidity that is based on the works by Minkowski and Sommerfeld. Comments attempting to explain difficulties with the hyperbolic interpretation of special relativity are given.

Keywords: special theory of relativity; non-Euclidean geometry