

ZNANSTVENI RAD U MATEMATICI AKADEMIKA VLADIMIRA DEVIDÉA

Akademik Vladimir Devidé objavio je 41 znanstveni rad u tri domaća i 13 inozemnih matematičkih časopisa (u Austriji, Nizozemskoj, DR Njemačkoj, SR Njemačkoj, Švicarskoj, Mađarskoj, Čehoslovačkoj, Poljskoj, Portugalu i Sjedinjenim Američkim Državama). O tim radovima je u američkim, njemačkim, francuskim i ruskim referativnim matematičkim časopisima objavljeno više od 120 prikaza. Prema područjima istraživanja radove možemo podijeliti na one iz algebre (pet radova), geometrije (18 radova), te osnova matematike, teorije skupova i logike (18 radova).

Od pet algebarskih radova ([9], [13], [1], [2], [11]) dva se bave elementarnim problemima; [9] rješava poznati problem određenja lažne kovanice vaganjem, a [13] se bavi vezama aritmetičke i geometrijske sredine. Preostala tri rada, [1], [2] i [11] posvećena su teoriji grupa i grupoida. U njima se uspoređuju razne aksiomatizacije tih struktura, a u [2] daje se jedna nova aksiomatizacija grupoida. Radi se o rezultatima koji proizlaze iz Devidéova doktorata *O jednoj klasi grupoida*. Riječ je inače o strukturama koje se od grupa razlikuju utoliko što je osnovna operacija parcijalna, tj. ne mora biti definirana na svim parovima elemenata grupoida, (na primjer, invertibilne matrice proizvoljnog reda čine jedan grupoid).

Devidéov rad u algebri značajan je i zbog toga što je za apstraktnu algebru zainteresirao tada mladog matematičara Zvonimira Janka. On je kod Devidéa doktorirao, a kasnije je postao svjetski poznati stručnjak za teoriju konačnih grupa i dizajna.

Od 18 geometrijskih radova njih 5 ([3], [7], [38], [39], [41]) bave se elementarnom euklidskom geometrijom. Rad [3] daje neka poopćenja geometrije trokuta na simplekse, u [7] se na uniforman način izvode neke

poznate geometrijske formule, [38] i [39] donose neke nove rezultate uvijek neiscrpne geometrije trokuta, a u [41] definiraju se i karakteriziraju semi-regularni tetraedri.

Daljnja četiri geometrijska rada, ([5], [36], [37] i [40]), bave se n -dimenzijskom euklidskom geometrijom. U radu [5] dokazuje se jedno svojstvo homotetičnih hiperelipsoida, u [36] izvode se teoremi o upisanim i opisanim hipersferama, u [37] uvodi se n -dimenzijsko poopćenje Eulervoga pravca, a u [40] daje se nov dokaz o dekompoziciji poliedra na simplekse.

Daljnja četiri geometrijska rada ([6], [25], [8] i [33]) bave se projektivnom i pretprojektivnom geometrijom. U radu [6] dokazuje se da polaritet preslikava projektivno proširenje euklidske ravnine u model euklidske ravnine, u [25] dane su neke nove karakterizacije pretprojektivnih geometrija, u [8] je generalizirana L'Huilierova formula (koja iz poznatih stranica sfernoga trokuta računa eksces, tj. računa za koliko zbroj njegovih kutova premašuje 180°). U [33] dani su novi kraći dokazi nekih standardnih rezultata projektivne geometrije.

Zadnja dva geometrijska rada, ([32] i [34]), bave se geometrijom linearne incidencije i u njima su dokazana neka poopćenja Bearovih rezultata o ekvivalenciji regularnih predgeometrija s projektivnim incidentnim geometrijama sa zadanim polaritetom.

Od 18 radova iz područja osnova matematike, teorije skupova i logike njih pet ([10], [12], [14], [16] i [26]) bavi se aksiomatizacijom prirodnih i cijelih brojeva. U radovima [10] i [16] uvedena je nova aksiomatizacija prirodnih brojeva ekvivalentna Peano-Dedekindovoj. Peanovi aksiomi karakteriziraju strukturu prirodnih brojeva $(\mathbb{N}, s)$, gdje je s funkcija sljedbenik (npr. $s(1) = 2$, $s(2) = 3, \dots$) postavljajući na nju neke zahtjeve. To su Peano-Dedekindovi aksiomi. Oni zahtijevaju da je funkcija sljedbenik s : (i) injektivna, (ii) promašuje točno jedan objekt (tj. postoji točno jedan nesljedbenik) i (iii) induktivna je (tj. za nju vrijedi princip indukcije: $1 \in M$ i $s(M) \subseteq M \Rightarrow M = \mathbb{N}$). Devidéova aksiomatizacija ne zahtijeva injektivnost funkcije sljedbenik s , a umjesto principa indukcije zahtijeva *Devidéov aksiom*: $M = s(M) \Rightarrow M = \emptyset$. U radu se dokazuje da je taj aksiom ekvi-

valentan s : $M \subseteq_s (M) \Rightarrow M = \emptyset$. Zatim se dokazuje da iz tog ekvivalentnog zahtjeva i aksioma (ii) o jedinstvenom nesljedbeniku slijede Peanovi aksiomi. Dakle, Devidéov aksiom i aksiom o jedinstvenom sljedbeniku čine novu aksiomatizaciju. Otud očito slijedi da je Devidéov aksiom neka vrsta principa indukcije. Može se dokazati da je on preformulacija principa transfinite indukcije, koji je jači od obične i zato povlači injektivnost funkcije sljedbenik s .

U radu [16] uvodi se i uređaj na skupu prirodnih brojeva, koristeći se Dedekindovom idejom da je $m \leq n$ ekvivalentno s $n \in N_m$, gdje je N_m aksiomatiziran (konstruiran) polazeći od m kao jedinstvenog nesljedbenika. U radu [12] prethodna je karakterizacija strukture ω (tj. uređajne strukture od $\mathbb{N}$) na standardni način proširena na strukturu $^*\omega + \omega$ (tj. na uređajnu strukturu skupa cijelih brojeva $\mathbb{Z}$). U radu [14] prethodno je opisano izvođenje injektivnosti funkcije sljedbenik s iz Devidéova aksioma i aksioma o jedinstvenom nesljedbeniku poopćeno na strukture koje zadovoljavaju nešto oslabljeni Devidéov aksiom i aksiom o najviše jednom sljedbeniku. U radu [26] dano je alternativno izvođenje uređaja na $\mathbb{N}$ uz zadanu funkciju sljedbenika s (riječ je zapravo o jednom načinu tranzitivnog zatvaranja relacije s).

Radovi [18] i [22] bave se aksiomom izbora. Rad [18] donosi još jednu ekvivalentnu formulaciju aksioma izbora: za svaki skup S postoji podskup V njegovog partitivnog skupa $P(S)$, čiji je kardinalitet jednak onome skupa S , i koji je takav da je svaki $U \subseteq V$ zatvoren na operaciju unije. U radu [22] relacije totalnoga, parcijalnog i dobrog uređaja karakterizirane su preko svojstava njihovih završnih segmenata (što je zapravo dual Hausdorfove prvotne karakterizacije preko početnih segmenata) i u vezi s tim, uveden je još jedan ekvivalent aksioma izbora. Aksiom izbora fundamentalni je aksiom teorije skupova, bez kojega nije moguće dokazati mnoge od temeljnih rezultata te teorije. S druge strane neke od njegovih posljedica djeluju gotovo paradoksalno (npr. teorem Banacha i Tarskoga da se svaki omeđeni skup točaka neprazne nutrine može rastaviti na pet dijelova i presložiti u bilo koji drugi omeđeni skup točaka neprazne nutrine).

Radovi [20] i [28] na vrlo koncizan način dokazuju Zermelov teorem o mogućoj dobroj uređenosti svih skupova. Dokaz je toliko kratak da ga je *Referativnij žurnal* iz Moskve u cijelosti reproducirao. I ovdje je riječ o temeljnom rezultatu teorije skupova (zapravo ekvivalentnom aksiomu izbora) bez kojega nije moguće dokazati mnoge standardne rezultate te teorije.

Daljnja tri rada, [19], [21] i [23], bave se fiksnim točkama u teoriji skupova. U radu [19] dokazano je da svako monotono preslikavanje f iz partitivnog skupa $P(S)$ u $P(S)$ ima apsolutni minimum i apsolutni maksimum, tj. postoje $U, V \subseteq S$ takvi da je $f(U)=U$ i $f(V)=V$, a za svaki drugi $W \subseteq S$, takav da je $f(W)=W$, vrijedi $U \subseteq W \subseteq V$. U radovima [21] i [23] generaliziran je teorem Tarskoga o fiksnim točkama u potpunim mrežama, a kao jedan od korolara dokazan je i Cantor-Bernsteinov teorem o usporedivosti kardinalnih brojeva. Za skup A kažemo da ima jednako elemenata koliko i skup B , tj. $|A| = |B|$, ako postoji 1-1 korespondencija među njihovim elementima. Skup A ima manje elemenata od skupa B , $|A| < |B|$, ako postoji 1-1 korespondencija između skupa A i pravog podskupa od B , ali ne postoji 1-1 korespondencija između skupa B i nekog podskupa od A . Polazeći od ovih prirodnih definicija nije lako dokazati da su svaka dva skupa A i B usporediva, tj. da uvijek vrijedi $|A| = |B|$ ili $|A| < |B|$ ili $|A| > |B|$. To dokazuje Cantor-Bernsteinov teorem.

Još jedan nov i direktan dokaz Cantor-Bernsteinova teorema dan je u radovima [29] i [30].

U radu [24] uvedene su dvije aksiomatizacije klasične propozicijske logike, u $\Rightarrow$, $\&$, $\neg$ formulaciji. Riješeno je i pitanje nezavisnosti aksioma jedne od tih aksiomatizacija, dok je ono za drugu ostalo otvoreno.

U radu [15] efektivno su nabrojene sve jednočlane i dvočlane baze istinosnih funkcija propozicijske logike, tj. svi jednočlani i dvočlani skupovi istinosnih funkcija koji generiraju sve istinosne funkcije propozicijske logike i koji su uz to nezavisni. Na primjer, dobro je poznato da konjunkcija $\&$ i negacija $\neg$ generiraju sve istinosne funkcije propozicijske logike (to je činjenica koja omogućuje izgradnju logičkih sklopova u našim računalima) i da su nezavisni. Dakle, $\&$ i $\neg$ čine jednu dvočlanu bazu isti-

nosnih funkcija propozicijske logike. Možda je manje poznato da i samo jedan veznik, npr. veznik $|$ sa značenjem “niti...niti...”, također generira sve istinosne funkcije propozicijske logike. On čini njihovu jednočlanu bazu. Devidé je efektivno nabrojao sve takove dvočlane i jednočlane baze.

Ovaj je rad bio posebno značajan za našu sredinu jer su se na njega nadovezali radovi prve generacije naših matematičkih logičara, koji su svi bili Devidéovi doktorandi (Vladimir Kirin, Kajetan Šeper i Luka Krnić).

Možemo primijetiti da se Devidé u svojem znanstvenom radu često vraćao temeljnim pitanjima, za koja bi mnogi pomislili da su zatvorena poglavlja znanosti. Za njega ona to nisu bila, pa je znao doći do iznenađujućih novih spoznaja o tim temeljnim pitanjima.

Akademik Devidé bio je osnivač Seminara za matematičku logiku i osnove matematike koji je pokrenut 1963./64. i u kojem se još uvijek odvija rad u matematičkoj logici i osnovama matematike u Hrvatskoj. Osim osnivanja i vođenja Seminara on je objavio i prvi hrvatski udžbenik iz matematičke logike. Držao je i prva predavanja iz tog područja na poslijediplomskom studiju PMF-a Sveučilišta u Zagrebu (*Matematička logika i Turingovi strojevi i rekurzivne funkcije*). Predavao je i na Međunarodnom sveučilišnom centru u Dubrovniku kolegije iz matematičke logike, rekurzivnih funkcija i filozofije matematike. Bio je voditelj i/ili član komisije za ocjenu i obranu 20 magistarskih radova i 26 disertacija.

Možemo slobodno reći da je najveća zasluga akademika Devidéa što je bio začetnik matematičke logike u Hrvatskoj. Znanstvenika je mnogo, začinjavci znanosti su rijetki.

RADOVI IZ MATEMATIKE

ZNANSTVENI RADOVI

1. Einige Eigenschaften von Gruppen in welchen mehrere Operationen definiert sind; Glasnik Mat.-Fiz. Astr. Ser. II 4., 1949., 97-103.
2. Einige Beziehungen der Kommutativitäts- und der Assoziativitätseigenschaft; Glasnik Mat.-Fiz. Astr. Ser. II 6, 1951., 33-48.
3. Poopćenje dvaju teorema elementarne planimetrije na n -dimenzionalni prostor; Glasnik Mat.-Fiz. Astr. Ser. II 6, 1951., 145-154.
4. Izvođenje identiteta vektorske algebre pomoću algebre kvaterniona; Vesnik Mat-Fiz. 3, 1951., 49-50.
5. Jedan teorem o homotetičkim hiperelipsoidima u n -dimenzionalnom prostoru; Glasnik Mat.-Fiz. Astr. Ser. II 8, 1953., 194-195.
6. Über ein Model der Euklidischen Geometrie; Glasnik Mat.-Fiz. Astr. Ser. II 8, 1953., 241-246.
7. Einige metrische Relationen über Simplexe; Glasnik Mat.-Fiz. Astr. Ser. II 9, 1954., 115-120.
8. Verallgemeinerung einer Formel von l'Huilier; Glasnik Mat.-Fiz. Astr. Ser. II 9, 1954., 121-127.
9. Ein Problem über Wägen; Elem. Math. 10, 1955., 11-15.
10. Ein Axiomensystem für die natürlichen Zahlen; Archiv Math. 6, 1955., 408-412.
11. Über eine Klasse von Gruppoiden, Glasnik Mat.-Fiz. Astr. Ser. II 10, 1955., 265-286.
12. Eine Charakterisierung des Ordnungstypus $^*\omega + \omega$ der Menge der ganzen Zahlen mittels der Nachfolger-funktion; Glasnik Mat.-Fiz. Astr. Ser. II 11, 1956., 11-15.

13. Ein Vergleich des arithmetischen und des geometrischen Mittels; Glasnik Mat.-Fiz. Astr. Ser. II 11, 1956., 23-24.
14. Eine Charakterisierung und Klassifikation der umkehrbar eindeutigen Abbildungen einer Menge in sich; Z. Math. Logik Grundlagen Math. 2, 1956., 228-232.
15. Elementare Aufzählung der minimalen erzeugenden Operationssysteme der Aussagenlogik; Z. Math. Logik Grundlagen Math. 5, 1959., 266-279.
16. An axiom system for natural numbers and their ordering; Glasnik Mat.-Fiz. Astr. Ser. II 15, 153-159; Zagreb 1960.
17. Anschaulicher Beweis des Vierscheitelsatzes; Elem. Math. 16, 1961., 61-62.
18. An equivalent of the axiom of choice; Nieuw Archief voor Wisk. (3) 10, 1962., 53-54.
19. On monotone mappings of the power set; Portugal. Math. 21, 1962., 111-112.
20. A proof of the well-ordering theorem; Colloq. Math. 11, 1963., 53-54.
21. On monotone mappings of complete lattices; Found. Math. 53, 1964., 147-154.
22. A note on order relations; Publ. Math. Debrecen 10, 1963., 155-156.
23. Application of a lattice-theorem to abstract set theory; Rad JAZU 331, 1964., 67-74.
24. An axiom-system for the classical two-valued $\{\supset, \&, \sim\}$ -propositional logic; Glasnik Mat.-Fiz. Astr. Ser. II 19, 1964., 157-166.
25. Plane pre-projective geometries; Glasnik Mat.-Fiz. Astr. Ser. II 20, 1965., 251-260.
26. An ordering of the set of natural numbers based on Peano axioms; Arch. Math. 3, 1967., 31-34.
27. A remark concerning the foundations of the theory of recursive functions; Glasnik Mat. Ser. III 2 (22), 1967., 3-8.
28. A proof of Zermelo's theorem; J. Symbolic Logic 32, 1967., 366.
29. A direct proof of the comparability of cardinals; Glasnik Mat. Ser. III 3 (23), 1968., 151-153.
30. A theorem on partially ordered sets; J. Austral. Math. Soc. 9, 1969., 361-362.

31. Pre-geometric relations; Publ. Monash Univ. 1968., 1-54.
32. Pre-geometric relations; Glasnik Mat. Ser. III 4 (24), 1969., 242-253.
33. A proof of two theorems by R. Baer; Glasnik Mat. Ser. III 4 (24), 1969., 255-257.
34. Some properties of pre-geometric binary relations; Univ. Beograd Publ. Elektrotehn. Ser. Mat. Fiz. No 284, 1969., 61-78.
35. Einige Bemerkungen zur Grandjot'schen Kritik betreffend die Peano'schen Funktionalgleichungen; Publ. Techn. Univ. Miskolc XXX, 1970., 285-287.
36. Über gewisse Klassen von Simplexen; Rad JAZU 370 (1975), 21-36.
37. Über einige Eigenschaften der Euler'schen Geraden; Rad JAZU 374 (1977), 33-43.
38. Über eine Klasse von Dreiecken; Rad JAZU 382 (1978), 55-64.
39. Einige merkwürdige Punkte im Dreieck; Rad JAZU 396 (1982), 17-21, (zajedno s O. Bottema).
40. Einfacher Beweis eines Zerlegungssatzes; Rad JAZU 396 (1982), 45-46.
41. Über eine Klasse von Tetraedern; Rad JAZU 408 (1984), 45-50.

KNJIGE

1. Zadaci iz matematike I, Sveučilište u Zagrebu, I. izd. 1946., II. izd. 1948.
2. Zadaci iz matematike II₁, Sveučilište u Zagrebu, 1948.
3. Zadaci iz matematike II₂, Sveučilište u Zagrebu, 1949. Skripta 1. – 3. u koautorstvu s B. Zelenkom.
4. Odabrani primjeri iz više matematike I, Sveučilište u Zagrebu, I. izd. 1959., II. izd. 1961.
5. Repetitorij više matematike I, Sveučilište u Zagrebu, I. izd. 1959., II. izd. 1961.
6. Vektorski račun, Sveučilište u Zagrebu, od 1962. do 1987. tiskano 4 puta

7. Matematička logika (klasična logika sudova), Matemat. institut SRS, Beograd, I. izd. 1964., II. izd. 1972.
8. Zbirka elementarnih ali težih zadataka, Zavod za izdav. udžbenika, Beograd, 1965.
9. Riješeni zadaci iz više matematike I, Sveučilište u Zagrebu, 1967.
10. Zadaci iz apstraktne algebre, Naučna knjiga, Beograd, I. izd. 1968., do sada 6 izdanja.
11. Riješeni zadaci iz više matematike s repetitorijem I, Školska knjiga, Zagreb, I. izd. 1972. do sada 6 izdanja.
12. Zbirka elementarnih ali težih zadataka, Zavod za izdav. udžbenika, Beograd, 1972.
13. Riješeni zadaci iz više matematike s repetitorijem II, Školska knjiga, Zagreb, I. izd. 1973. do sada 4 izdanja.
14. Uvod u matematičku logiku, Matem. institut Kiril i Metodij, Skopje, 1973.
15. "Stara" i "nova" matematika, Školska knjiga, Zagreb, 1975.
16. Matematika kroz kulture i epohe, Školska knjiga, Zagreb, 1979.
17. Na izvorima matematike, Radničko sveučilište Božidar Maslarić, Osijek, 1979.
18. Matematika skozi kulture in epohe (prijevod na slovenski br 16.), Društvo matematikov Slovenije, Ljubljana, 1984.
19. Zabavna matematika, Školska knjiga, Zagreb, 1991.
20. Matematička čitanka, Školska knjiga, Zagreb, 1991.
21. Gros (tucet tuceta) matematičkih zadataka, Hrv. Matem. Društvo, Zagreb, 1995.
22. Iksnaiks, Hrv. matem. društvo, Zagreb, 2000.
23. Čudesna matematika – pogled iznutra i izvana, HMD, Zagreb, 2010.

