

Dr. Ing. DANILO BLANUŠA

JEDNA VRST INTEGRALNIH TEOREMA BESSELOVIH FUNKCIJA

(Dalja izlaganja na temelju radnje iz 271. knjige „Rada“)

Istražujemo u ovom posljednjem dijelu integralne teoreme, o kojima je bila riječ na kraju I. dijela.¹

1. Jedna temeljna Laplaceova transformacija

U Laplaceovoj transformaciji

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt \quad (1)$$

zvat ćemo $F(t)$ prvotnom funkcijom, a $f(s)$ izvedenom funkcijom.

Doetsch daje u svojoj knjizi o Laplaceovoj transformaciji² na stranama 401 do 403 tablicu prvotnih funkcija s pripadnim izvedenim funkcijama. Pod brojem 38 te tablice dane su funkcije

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } 0 \leq t \leq \alpha \\ J_0(k \sqrt{t^2 - \alpha^2}) & \text{za } t > \alpha \end{cases} \quad (2)$$

$$f(s) = \frac{e^{-\alpha \sqrt{s^2 + k^2}}}{\sqrt{s^2 + k^2}} \quad (3)$$

s naznakom $\alpha \geq 0$, k po volji, apscisa konvergencije $\beta = 0$. To dakle znači, da je Laplaceov integral (1) s funkcijom (2)

¹ Formule označene rimskim brojkama I do III odnose se na prijašnje autorove radnje o Besselovim funkcijama; v. »Rad« i Math. Rev., 8 (1947), str. 580—581.

² G. Doetsch: Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation, Springer, Berlin 1937. Ovu ćemo knjigu odsada kratko citirati sa »Doetsch«.

konvergentan za $\operatorname{Re}(s) > 0$, a divergentan za $\operatorname{Re}(s) < 0$. Ovo je međutim ispravno samo onda, ako je k realan broj, što u Doetschovoj tablici nije naznačeno, a nije naznačeno ni na str. 373 spomenute knjige, gdje je ta transformacija napisana ovako:

$$\int_{\alpha}^{\infty} e^{-\sigma \tau} J_0(k \sqrt{\tau^2 - \alpha^2}) d\tau = \frac{e^{-\alpha \sqrt{\sigma^2 + k^2}}}{\sqrt{\sigma^2 + k^2}} \quad (\alpha \geq 0, \sigma > 0, k \text{ po volji}). \quad (4)$$

Ova je formula toliko specijalnija, što se traži $\sigma > 0$, dakle σ realno, dok naznaka za apscisu konvergenције $\beta = 0$ u tablici dopušta kompleksno s (koje odgovara varijabli σ), za koje je $\operatorname{Re}(s) > 0$. Uvjet, da k treba da bude realno, ne da se ni iz čega naslutiti, jer se u toj tablici za konstante u raznim funkcijama dopuštaju kompleksne vrijednosti, što je vidljivo iz funkcije pod brojevima 4 do 9, gdje su apscise konvergenције ovisne o realnim odnosno imaginarnim dijelovima dotičnih konstanta. S obzirom na to, da je relacija (4) temelj naših daljih razmatranja, provest ćemo točnu diskusiju konvergenције toga Laplaceova integrala za slučaj kompleksnog k , premda nam ne će svi ti rezultati biti potrebni.

Prije nego što prijedemo na tu diskusiju, dat ćemo neke kritičke primjedbe o onim mjestima u literaturi, koja rade o tom integralu. Kao izvor za formulu (4) Doetsch navodi Watsonovo djelo³, str. 416, formula (4), u kojoj da treba supstituirati $t^2 - y^2 = \tau^2$, $a = \sigma$, $b = k$, $y^2 = -\alpha^2$. To, istina, nije sasvim korektno, jer ta formula glasi

$$\int_0^{\infty} J_0(bt) \frac{\exp[-a \sqrt{t^2 - y^2}]}{\sqrt{t^2 - y^2}} t dt = \frac{\exp[\mp iy \sqrt{a^2 + b^2}]}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (4a)$$

s napomenom, da vrijedi gornji ili donji predznak prema tome, da li put integracije odozgo ili odozdo obilazi singularitet integranda na mjestu $t = y$. Veličina y je izrijeком pretpostavljena kao realna i pozitivna, dok bi u Doetschovoj formuli prema $y^2 = -\alpha^2$ zbog realnog a ta veličina ispala čisto imaginarna. Može se međutim analognim postupkom, kako Watson dobiva našu formulu (4a), dobiti relacija

$$\int_0^{\infty} J_0(bt) \frac{\exp[-a \sqrt{t^2 + \alpha^2}]}{\sqrt{t^2 + \alpha^2}} t dt = \frac{\exp[-\alpha \sqrt{a^2 + b^2}]}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad (4b)$$

³ G. N. Watson, A treatise on the theory of Bessel functions, Cambridge University Press, 1922. Ovo ćemo djelo kratko citirati sa »Watson«.

u kojoj je a realno i pozitivno, pa bi iz nje ispravno izlazila naša formula (4), koju donosi Doetsch. U Watsonovu tekstu se pretpostavlja, da su konstante a i b (koje odgovaraju Doetschovim konstantama σ i k) realne i pozitivne, a tek se u bilješki kaže, da bi uz izvjesna ograničenja mogle biti i kompleksne («with certain limitations, a and b may be complex»). Ova će ograničenja biti predmet naše diskusije.

Možemo još navesti Weyrichovu knjigu⁴, gdje je na str. 110 dana formula (18), koja glasi:

$$\frac{e^{ikR}}{R} = \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k^2}|z|} \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}}, \quad (4c)$$

gdje je $R = \sqrt{r^2 + z^2}$. Naznačeno je, da $\sqrt{\lambda^2 - k^2}$ mora imati takav predznak, da bude $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} \sqrt{\lambda^2 - k^2} = +1$. Nema diskusije o dopustivim vrijednostima veličine k . Očito je, da se integral ne mijenja, ako k nadomjestimo sa $-k$, dok se lijeva strana relacije mijenja. Može se pokazati, da imaginarni dio veličine k mora biti veći od nule. Ako je k čisto imaginarno i taj imaginarni dio pozitivan, stavimo $k = ia$, čime je $a > 0$, dalje stavimo $|z| = \sigma$, $r = c$, $\lambda = +\sqrt{r^2 - a^2}$, $R = \sqrt{r^2 + z^2} = \sqrt{c^2 + z^2}$, pa dobijemo (4), gdje samo piše c mjesto k . Ako k nije čisto imaginarno, dobijemo istu formulu (4), ali s kompleksnim a , a krivulja integracije polazi od a i teži prema $+\infty$. Formula (4) je i za taj slučaj ispravna, što se neposredno uviđa analitičkim produživanjem.

Formula (4c) dana je i u II. dijelu djela Franka i Misesa⁵ na str. 924., formula (11). Ni ovdje nisu diskutirane dopustive vrijednosti veličine k , samo je na str. 923 kod formule (9a) primjedba, da integrand integrala $\int_0^{\infty} e^{i(k + \lambda \cos \beta) \varrho} d\varrho$ iščezava za $\varrho = \infty$, što se postizava prikladnim predznakom veličine k , odnosno za realno k time, da se λ odabere kompleksno. Očito je, da se to slaže s našom primjedbom, da imaginarni dio veličine k mora biti pozitivan. Kompleksno λ za formulu (4c) nema

⁴ R. Weyrich: Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen, Teubner, Leipzig und Berlin 1937.

⁵ Ph. Frank und P. v. Mises: Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, Vieweg u. Sohn, Braunschweig 1935.

smisla, jer je to realna varijabla integracije. Dalje se nalaze u I. dijelu istog djela (1930) na str. 825. formule (32), (31), koje glase:

$$Kv \int_0^{\infty} e^{-p\alpha - \varrho \left(a + \frac{x}{v}\right)} J_0 \left(i\varrho \sqrt{a^2 + 2a \frac{x}{v}} \right) d\alpha = \frac{1}{pH(x, p)} \quad (4d)$$

sa

$$\frac{1}{H(x, p)} = Kv \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2\varrho}{p}}} \exp \left[-\frac{xp}{v} \left(\sqrt{1 + \frac{2\varrho}{p}} - 1 \right) \right]. \quad (4c)$$

Na citiranom mjestu je u eksponentu eksponencijalne funkcije pod integralom pomutnjom ispušten sumand $-pa$. Stavimo li u (4d), (4e) $\varrho = -ik$, $p = \sigma + ik$, $\frac{x}{v} = \beta$, $a = \tau - \beta$, dobijemo opet formulu (4), u kojoj samo piše β mjesto α . U sva tri citirana djela navodi se kao izvor jedna Sommerfeldova rasprava⁶. U toj se raspravi upotrebljava i dokazuje relacija (4c), a k je tako definirano, da je k , pa čak i k^2 , kompleksan broj u prvom kvadrantu (vidi str. 678. te rasprave). Time je tamo zadovoljen spomenuti uvjet, da imaginarni dio veličine k mora biti pozitivan. Relacija je međutim točna i onda, ako je k u drugom kvadrantu, što se uviđa analitičkim produživanjem, kod kojega $\sqrt{\lambda^2 - k^2}$ ne smije proći kroz nulu, dakle k^2 ne smije dobiti pozitivnu realnu vrijednost, t. j. k ne smije prijeći u treći ili četvrti kvadrant.

Prelazimo sada na diskusiju konvergencije integrala (4). Napišimo taj integral našim kasnijim oznakama:

$$L = \int_x^{\infty} e^{-st} J_0(c \sqrt{t^2 - x^2}) dt \quad (x \geq 0) \quad (5)$$

i stavimo općenito

$$s = s_1 + is_2 \quad (6)$$

$$c = c_1 + ic_2. \quad (7)$$

Budući da je prema III (1)

$$J_0(z) = J_0(-z), \quad (8)$$

možemo promjenom predznaka od c uvijek postići, da bude

⁶ A. Sommerfeld: Über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie, Ann. d. Physik und Chemie, 28 (1909), str. 665 i t. d., osobito str. 683.

$$\text{ili} \quad c_2 > 0 \quad (9)$$

$$c_1 > 0, \quad c_2 = 0. \quad (10)$$

Konvergenција integrala (5) na donjoj granici nije sumnjiva, jer je tamo prema III (1) integrand kontinuiran. Radi se dakle o konvergeniji s obzirom na gornju granicu. Poslužit ćemo se asimptotskim razvojem⁷

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \cos\left(z - \frac{\nu}{2}\pi - \frac{\pi}{4}\right) \left[\sum_{m=0}^{M-1} (-1)^m \frac{(\nu, 2m)}{(2z)^{2m}} + O(|z|^{-2M}) \right] - \right. \\ \left. - \sin\left(z - \frac{\nu}{2}\pi - \frac{\pi}{4}\right) \left[\sum_{m=0}^{M-1} (-1)^m \frac{(\nu, 2m+1)}{(2z)^{2m+1}} + O(|z|^{-2M-1}) \right] \right\}, \quad (11)$$

gdje je upotrebljen Hankelov simbol

$$(\nu, m) = \frac{(4\nu' - 1^2)(4\nu' - 3^2) \dots [4\nu' - (2m-1)^2]}{2^{2m} m!}, \quad (\nu, 0) = 1, \quad (12)$$

a pretpostavlja se

$$-\pi < \arg z < \pi. \quad (13)$$

Ovaj posljednji uvjet bit će za nas zadovoljen s obzirom na (10) i s obzirom na to, da je $\sqrt{t^2 - x^2} \geq 0$.

Stavimo li u (11)

$$\nu = 0, \quad M = 1, \quad (14)$$

dobijemo

$$J_0(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right) [1 + O(|z|^{-2})] - \right. \\ \left. - \sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \left[-\frac{1}{8z} + O(|z|^{-3}) \right] \right\} = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \frac{1}{2} \left[\exp\left(iz - \frac{i\pi}{4}\right) + \exp\left(-iz + \frac{i\pi}{4}\right) \right] [1 + O(|z|^{-2})] - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left[\exp\left(iz - \frac{i\pi}{4}\right) - \exp\left(-iz + \frac{i\pi}{4}\right) \right] \left[-\frac{1}{8z} + O(|z|^{-3}) \right] \right\} = \\ = \sqrt{\frac{1}{2\pi z}} \left\{ \exp\left(iz - \frac{i\pi}{4}\right) [1 + O(|z|^{-1})] + \exp\left(-iz + \frac{i\pi}{4}\right) [1 + O(|z|^{-1})] \right\}. \quad (15)$$

⁷ L. c. 4, str. 47.

Uvrstimo li sad

$$z = c \sqrt{t^2 - x^2} = (c_1 + i c_2) t \sqrt{1 - \frac{x^2}{t^2}} \quad (16)$$

i uočimo, da zbog

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{c \sqrt{t^2 - x^2}}{t} = c \quad (17)$$

iz egzistencije konačnog $\limsup_{t \rightarrow \infty} [c \sqrt{t^2 - x^2} |f(t)|]$ očito izlazi i egzistencija konačnog $\limsup_{t \rightarrow \infty} [t f(t)]$, to jest da mjesto $O(|c \sqrt{t^2 - x^2}|^{-1})$ možemo pisati $O(t^{-1})$, dobijemo

$$\begin{aligned} J_0(c \sqrt{t^2 - x^2}) &= \\ &= \frac{\exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right)}{\sqrt{2\pi c}} \sqrt{\frac{1}{t \sqrt{1 - \frac{x^2}{t^2}}}} \left\{ \exp\left(i c_1 t \sqrt{1 - \frac{x^2}{t^2}}\right) \cdot \right. \\ &\quad \cdot \exp\left(-c_2 t \sqrt{1 - \frac{x^2}{t^2}}\right) [1 + O(t^{-1})] \Big\} + \\ &+ \frac{\exp\frac{i\pi}{4}}{\sqrt{2\pi c}} \sqrt{\frac{1}{t \sqrt{1 - \frac{x^2}{t^2}}}} \left\{ \exp\left(-i c_1 t \sqrt{1 - \frac{x^2}{t^2}}\right) \cdot \right. \\ &\quad \cdot \exp\left(c_2 t \sqrt{1 - \frac{x^2}{t^2}}\right) [1 + O(t^{-1})] \Big\}, \quad (18) \end{aligned}$$

tako da za integrand od (5) vrijedi asimptotski razvoj

$$\begin{aligned} e^{-st} J_0(c \sqrt{t^2 - x^2}) &= \\ &= \frac{\exp\left(-\frac{i\pi}{4}\right)}{\sqrt{2\pi c}} \sqrt{\frac{1}{t \sqrt{1 - \frac{x^2}{t^2}}}} \left\{ \exp[i(c_1 - s_2)t] \exp\left[i c_1 t \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{t^2}} - 1\right)\right] \cdot \right. \\ &\quad \cdot \exp[-(c_2 + s_1)t] \exp\left[-c_2 t \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{t^2}} - 1\right)\right] [1 + O(t^{-1})] \Big\} + \end{aligned}$$

$$\frac{\exp \frac{i\pi}{4}}{\sqrt{2\pi c}} \frac{1}{\sqrt{t\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}}} \left\{ \exp[-i(c_1 + s_2)t] \exp\left[-ic_1 t \left(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}} - 1\right)\right] \cdot \right. \\ \left. \cdot \exp[(c_2 - s_1)t] \exp\left[c_2 t \left(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}} - 1\right)\right] [1 + O(t^{-1})] \right\}. \quad (19)$$

Zbog

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[t \left(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}} - 1 \right) \right] = 0 \quad (20)$$

vrijedi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \exp\left[i c_1 t \left(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}} - 1\right)\right] = \lim_{t \rightarrow \infty} \exp\left[-i c_1 t \left(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}} - 1\right)\right] = \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \exp\left[-c_2 t \left(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}} - 1\right)\right] = \lim_{t \rightarrow \infty} \exp\left[c_2 t \left(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}} - 1\right)\right] = 1. \quad (21)$$

Dalje je očito

$$|\exp[i(c_1 - s_2)t]| = |\exp[-i(c_1 + s_2)t]| = 1 \quad (22)$$

i

$$\frac{1}{\sqrt{t\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}}} = O(t^{-\frac{1}{2}}). \quad (23)$$

Pretpostavimo li sad

$$s_1 > c_2, \quad (24)$$

to se vidi s obzirom na (9), da eksponenti eksponencijalnih funkcija $\exp[-(c_2 + s_1)t]$ i $\exp[(c_2 - s_1)t]$ postaju negativni i da integral mora biti apsolutno konvergentan. Pretpostavimo li dalje

$$s_1 = c_2 > 0 \quad (25)$$

$$s_2 = -c_1, \quad (26)$$

to se vidi, da funkcija $\exp[-(c_2 + s_1)t]$ i sada ima negativan eksponent i da će stoga prvi sumand izraza na desnoj strani od (19) dati apsolutno konvergentan integral. Drugi sumand toga izraza će glasiti

$$S_2 = \frac{\exp \frac{i\pi}{4}}{\sqrt{2\pi c}} \frac{1}{\sqrt{t\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}}} \left\{ \exp \left[-ic_1 t \left(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}} - 1 \right) \right] \cdot \right. \\ \left. \cdot \exp \left[c_2 t \left(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}} - 1 \right) \right] [1 + O(t^{-1})] \right\}. \quad (27)$$

S obzirom na (21) i (23) dat će član $O(t^{-1})$ u uglastoj zagradi apsolutno konvergentan integral.

Prema (21) možemo staviti

$$\exp \left[-ic_1 t \left(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}} - 1 \right) \right] \exp \left[c_2 t \left(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}} - 1 \right) \right] = \\ = 1 + \delta_1 + i\delta_2, \quad (28)$$

gdje je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta_1 = 0 \quad (29)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta_2 = 0, \quad (30)$$

t. j. za po volji maleno ε može se naći T tako, da za

$$t > T \quad (31)$$

vrijedi

$$|\delta_1| < \varepsilon \quad (32)$$

i prema tome

$$1 + \delta_1 > 1 - \varepsilon. \quad (33)$$

Budući da je osim toga

$$\frac{1}{\sqrt{t\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}}} > \frac{1}{\sqrt{t}}, \quad (34)$$

to je

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\sqrt{t\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}}} \exp \left[-ic_1 t \left(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}} - 1 \right) \right] \exp \left[c_2 t \left(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}} - 1 \right) \right] \right\} \\ = \frac{1}{\sqrt{t\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}}} (1 + \delta_1) > \frac{1 - \varepsilon}{\sqrt{t}} \quad \text{za } t > T, \quad (35)$$

i prema tome taj dio daje divergentan integral. Integral (5) je dakle pod pretpostavkom (25), (26) divergentan, tako da je po poznatim stavcima⁸ apscisa konvergencije, a ujedno i apscisa apsolutne konvergencije

$$\beta = c_2. \quad (36)$$

U točki $s_1 = c_2 > 0$, $s_2 = -c_1$ pravca konvergencije $s_1 = c_2 > 0$ divergira dakle integral (5). Preostaje još da se istraži, da li je taj integral konvergentan u ostalim točkama pravca konvergencije. (Svakako on u tim točkama ne može biti apsolutno konvergentan, jer pravac apsolutne konvergencije pripada ili sav ili ne pripada nikako području apsolutne konvergencije⁹). Konačno još treba posebno diskutirati slučaj $c_2 = 0$. Pretpostavimo dakle najprije

$$s_2 = c_2 > 0 \quad (37)$$

$$s_2 \neq -c_1. \quad (38)$$

Prvi sumand izraza na desnoj strani od (19) dat će zbog (36) apsolutno konvergentan integral, isto tako dio drugog sumanda, koji je pomnožen sa $O(t^{-1})$. Preostaje još izraz

$$R = \frac{\exp \frac{i\pi}{4}}{\sqrt{2\pi c}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t} \sqrt[4]{1 - \frac{x^2}{t^2}}} \exp[-i(c_1 + s_2)t] \cdot \exp\left[(c_2 - ic_1)t\left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{t^2}} - 1\right)\right]. \quad (39)$$

Red potencija

$$y = t\left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{t^2}} - 1\right) = -t\left(\frac{x^2}{2t^2} + \frac{x^4}{8t^4} + \frac{x^6}{16t^6} + \frac{3x^8}{128t^8} + \dots\right) = -\left(\frac{x^2}{2t} + \frac{x^4}{8t^3} + \dots\right) \quad (40)$$

možemo uvrstiti u razvoj

$$\exp[(c_2 - ic_1)y] = 1 + \frac{(c_2 - ic_1)y}{1!} + \frac{(c_2 - ic_1)^2 y^2}{2!} + \dots, \quad (41)$$

što je dopušteno, jer je za dovoljno veliko t red (40) apsolutno konvergentan i suma apsolutnih vrijednosti njegovih članova

⁸ Doetsch, 3. poglavlje § 2. str. 13 i t. d.

⁹ Doetsch, str. 15.

manja od radija konvergencije reda (41).¹⁰ (Taj radij konvergencije je neizmjerljivo velik.) Dobijemo dakle

$$\begin{aligned} \exp \left[(c_2 - i c_1) t \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{t^2}} - 1 \right) \right] &= 1 - (c_2 - i c_1) \left(\frac{x^2}{2t} + \frac{x^4}{8t^3} + \dots \right) + \\ &+ \frac{1}{2!} (c_2 - i c_1)^2 \left(\frac{x^2}{2t} + \frac{x^4}{8t^3} + \dots \right)^2 - \frac{1}{3!} (c_2 - i c_1)^3 \left(\frac{x^2}{2t} + \frac{x^4}{8t^3} + \dots \right)^3 + \dots = \\ &= 1 - (c_2 - i c_1) \frac{x^2}{2t} + (c_2 - i c_1)^2 \frac{x^4}{8t^3} - (c_2 - i c_1) \left[1 + \frac{1}{6} (c_2 - i c_1)^2 x^2 \right] \frac{x^4}{8t^3} + \dots \end{aligned} \quad (42)$$

Dalje vrijedi

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1 - \frac{x^2}{t^2}}} = 1 + \frac{x^2}{4t^2} + \frac{5x^4}{32t^4} + \frac{15x^6}{128t^6} + \dots \quad (43)$$

Produkt apsolutno konvergentnih redova (42) i (43) daje

$$\begin{aligned} R &= \frac{\exp \frac{i\pi}{4}}{\sqrt{2\pi c}} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp [-i(c_1 + s_2)t] \left\{ 1 - (c_2 - i c_1) \frac{x^2}{2t} + \right. \\ &\quad \left. \left[(c_2 - i c_1)^2 \frac{x^2}{2} + 1 \frac{x^2}{4t^2} - \dots \right] \right\} = \\ &= \frac{\exp \frac{i\pi}{4}}{\sqrt{2\pi c}} \frac{\exp [-i(c_1 + s_2)t]}{\sqrt{t}} [1 + O(t^{-1})]. \end{aligned} \quad (44)$$

Dio toga izraza, koji je pomnožen sa $O(t^{-1})$, daje očito apsolutno konvergentan integral, a ostali dio za $c_1 + s_2 \neq 0$ [vidi (38)] uvjetno konvergentan integral, što je lako dokazati.¹¹

¹⁰ Isporedi na pr. K. Knopp: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Springer, Berlin 1922, str. 173.

¹¹ Taj integral je dobro poznat. Zna se, da je

$$\int_0^\infty \frac{e^{it}}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (1 + i).$$

Usporedi C. Jordan: Cours d'analyse de l'école polytechnique, Gauthier-Villars, Paris 1913, II. sv., str. 201.

Prema tome je pod uvjetima (37), (38) integral (5) uvjetno konvergentan. Pretpostavimo konačno

$$s_1 = c_2 = 0 \quad (45)$$

$$c_1 > 0. \quad (46)$$

Za

$$s_2 = -c_1 \quad (47)$$

daje drugi član od (19) divergentan integral, što smo već prije dokazali (nezavisno od toga, da li vrijedi (37) ili (45)). Prvi član će dati uvjetno konvergentan integral, (a ne apsolutno konvergentan, kao pod pretpostavkom (37)), što izlazi na analogan način, kao što je bio upotrebljen, da se izvede (44). Integral (5) je dakle pod pretpostavkom (45), (46), (47) divergentan.

Za

$$s_2 = c_1 \quad (48)$$

uz (45), (46) dat će prvi član od (19) divergentan integral, a drugi član uvjetno konvergentan, dakle je integral (5) divergentan. Ako ne vrijedi ni (47) ni (48), dat će oba člana od (19) uvjetno konvergentne integrale, tako da je integral (5) konvergentan. Vidi se dakle, da je za $c_2 = 0$ na pravcu konvergencije $s_1 = 0$ integral (5) divergentan u dvije točke, $s_2 = -c_1$ i $s_2 = c_1$.

Slučaj

$$c_1 = c_2 = 0 \quad (49)$$

je trivijalan, jer je onda Besselova funkcija u integralu (5) identično jednaka jedan.

Oslobodimo li se pretpostavke (9) odnosno (10), možemo dobivene rezultate izraziti ovako:

STAVAK IV 1. Stavimo li

$$c = c_1 + ic_2, \quad (50)$$

apscisa je konvergencije integrala

$$L = \int_0^{\infty} e^{-st} J_0(c\sqrt{t^2 - x^2}) dt \quad (51)$$

dana sa

$$\beta = |c_2|. \quad (52)$$

Ako je

$$c_2 \neq 0, \quad (53)$$

integral je na pravcu konvergencije svagdje uvjetno konvergentan, osim u točki $(|c_2|, -c_1 \operatorname{sgn} c_2)$, gdje je divergentan. Ako je

$$c_2 = 0, c_1 \neq 0, \quad (54)$$

integral je na pravcu konvergencije svagdje uvjetno konvergentan, osim u točkama $(0, c_1)$, $(0, -c_1)$, gdje je divergentan. Slučaj

$$c_1 = c_2 = 0 \quad (55)$$

je trivijalan, i integral je u tom slučaju na cijelom pravcu konvergencije divergentan.

Potpunosti radi primjećujemo, da je analogno kod Laplaceovih transformacija, koje odgovaraju funkcijama pod brojem 34 i 35 Doetschove tablice i koje glase

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \frac{J_{\nu}(at)}{t} dt = \frac{(\sqrt{s^2 + a^2} - s)^{\nu}}{\nu a^{\nu}} \quad (\operatorname{Re}(\nu) > 0) \quad (56)$$

i

$$\int_0^{\infty} e^{-st} t^{\nu} J_{\nu}(at) dt = \frac{(2a)^{\nu} \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} (s^2 + a^2)^{\nu + \frac{1}{2}}} \quad \left(\operatorname{Re}(\nu) > -\frac{1}{2}\right), \quad (57)$$

apscisa konvergencije dana apsolutnom vrijednošću imaginarnog dijela konstante a , i samo je onda jednaka nuli, kao što je tamo naznačeno, ako je ta konstanta realna.

2. Kompozicija dviju ili više Besselovih funkcija nultoga reda

Relacija (4), napisana oznakama prema (5), glasi:

$$\int_x^{\infty} e^{-st} J_0(c \sqrt{t^2 - x^2}) dt = \frac{\exp(-x \sqrt{s^2 + c^2})}{\sqrt{s^2 + c^2}} \quad (x \geq 0, \operatorname{Re}(s) > |\operatorname{Im}(c)|, c \text{ po volji}), \quad (58)$$

gdje je još uzet u obzir stavak IV. 1. Integriramo li ovu jednakost po x od x do ∞ , izmijenivši na lijevoj strani poredak integracija, što je očito dopušteno, dobijemo:

$$\int_x^\infty \left[\int_x^\infty e^{-st} J_0(c \sqrt{t^2 - x^2}) dt \right] dx = \int_x^\infty \left[e^{-st} \int_x^t J_0(c \sqrt{t^2 - x^2}) dx \right] dt =$$

$$= \int_x^\infty \frac{\exp(-x \sqrt{s^2 + c^2})}{\sqrt{s^2 + c^2}} dx = \frac{\exp(-x \sqrt{s^2 + c^2})}{s^2 + c^2}. \quad (59)$$

Prema tome u Laplaceovoj transformaciji (1) odgovara prvotnoj funkciji

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } 0 \leq t \leq x \\ \int_x^t J_0(c \sqrt{t^2 - x^2}) dx & \text{za } t > x \end{cases} \quad (60)$$

izvedena funkcija

$$f(s) = \frac{\exp(-x \sqrt{s^2 + c^2})}{s^2 + c^2}. \quad (61)$$

Prema poznatim stavcima¹² operaciji komponiranja u području prvotnih funkcija odgovara operacija množenja u području izvedenih funkcija.

Neka su $x_1 \geq 0$ i $x_2 \geq 0$ dva realna parametra i neka je

$$F_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } 0 \leq t \leq x_1 \\ J_0(c \sqrt{t^2 - x_1^2}) & \text{za } t > x_1 \end{cases} \quad (62)$$

$$F_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } 0 \leq t \leq x_2 \\ J_0(c \sqrt{t^2 - x_2^2}) & \text{za } t > x_2. \end{cases} \quad (63)$$

Tvorimo u smislu I (33) kompoziciju

$$K_{0,0}^{0,0}(t; x_1, x_2) = \int_0^t F_1(y) F_2(t-y) dy =$$

$$= \int_{x_1}^{t-x_2} J_0(c \sqrt{y^2 - x_1^2}) J_0(c \sqrt{(t-y)^2 - x_2^2}) dy \quad (t > x_1 + x_2). \quad (64)$$

¹² Doetsch, str. 161, stavak IV b.

Prvotnim funkcijama (62), (63) odgovaraju prema (2), (3) izvedene funkcije

$$f_1(s) = \frac{\exp(-x_1 \sqrt{s^2 + c^2})}{\sqrt{s^2 + c^2}} \quad (65)$$

$$f_2(s) = \frac{\exp(-x_2 \sqrt{s^2 + c^2})}{\sqrt{s^2 + c^2}}, \quad (66)$$

dok kompoziciji $K_{0,0}^{0,0}(t; x_1, x_2)$ kao prvotnoj funkciji odgovara njihov produkt

$$f_1(s) f_2(s) = \frac{\exp[-(x_1 + x_2) \sqrt{s^2 + c^2}]}{s^2 + c^2} \quad (67)$$

kao izvedena funkcija. U drugu ruku prema (60), (61) izvedenoj funkciji (67) odgovara kao prvotna funkcija integral

$$I = \int_{x_1 + x_2}^t J_0(c \sqrt{t^2 - y^2}) dy. \quad (68)$$

Budući da je prvotna funkcija, koja pripada zadanoj izvedenoj funkciji, jednoznačno određena,¹³ mora kompozicija (64) biti identična s integralom (68), t. j. dobijemo integralan teorem Besselovih funkcija, u kojem ćemo prema III (1) pisati funkciju A_0 mjesto funkcije J_0 :

$$\begin{aligned} K_{0,0}^{0,0}(t; x_1, x_2) &= \int_{x_1}^{t-x_2} A_0(c \sqrt{y^2 - x_1^2}) A_0(c \sqrt{(t-y)^2 - x_2^2}) dy = \\ &= \int_{x_1 + x_2}^t A_0(c \sqrt{t^2 - y^2}) dy. \end{aligned} \quad (69)$$

Analitičkim produživanjem lako je uvidjeti, da ova relacija vrijedi i onda, kad nije zadovoljena pretpostavka, da su x_1, x_2 i t realni brojevi s uvjetom $t > x_1 + x_2$, već to mogu biti tri bilo koja kompleksna broja, a krivulja integracije bilo koja krivulja, koja se može rektificirati (na pr. po odsječcima glatka krivulja), a spaja točke, koje su dane donjim i gornjim granicama integrala. Drugi korijeni, koji se pojavljuju u argumentima funkcija, samo su prividni, jer je A_0 takva funkcija, kako izlazi iz III (1). Integrali u (69) su stoga očito cijele ana-

¹³ Ako zahtijevamo, da bude kontinuirana. Vidi Doetsch, str. 34.

litičke funkcije. Istina je, da se u tom poopćenju prvi integral u (69) više ne može smatrati kompozicijom u strogom smislu definicije I (33). Ipak ćemo pridržati taj izraz i u ovom slučaju.

Provede li se postupak integriranja po x od x do ∞ , koji je doveo od (58) do (59), r puta, dolazi se do relacije

$$\int_x^\infty \left[e^{-st} \left(\int_x^t dx \right)^r J_0(c \sqrt{t^2 - x^2}) dx \right] dt = \frac{\exp(-x \sqrt{s^2 + c^2})}{(\sqrt{s^2 + c^2})^{r+1}}. \quad (70)$$

Uzevši još u račun formulu II (154) za n -struku integraciju, možemo dakle reći, da prvotnoj funkciji

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } 0 \leq t \leq x \\ \frac{1}{(r-1)!} \int_x^t (y-x)^{r-1} J_0(c \sqrt{t^2 - y^2}) dy & \text{za } t > x \end{cases} \quad (71)$$

odgovara izvedena funkcija

$$f(s) = \frac{\exp(-x \sqrt{s^2 + c^2})}{(\sqrt{s^2 + c^2})^{r+1}}. \quad (72)$$

Neka su dalje $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_r \geq 0$ realni parametri. Onda prvotnim funkcijama

$$F_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } 0 \leq t \leq x_k \\ J_0(c \sqrt{t^2 - x_k^2}) & \text{za } t > x_k \end{cases} \quad (k = 1, \dots, r) \quad (73)$$

odgovaraju izvedene funkcije

$$f_k(s) = \frac{\exp(-x_k \sqrt{s^2 + c^2})}{\sqrt{s^2 + c^2}} \quad (k = 1, \dots, r). \quad (74)$$

Kompozicija funkcija (73) glasi:

$$\begin{aligned} K_{0, \dots, 0}^{0, \dots, 0}(t; x_1, \dots, x_r) &= F_1(t) * F_2(t) * \dots * F_r(t) = \\ &= \int_0^t dy_1 F_1(t - y_1) \int_0^{y_1} dy_2 F_2(y_1 - y_2) \dots \int_0^{y_{r-3}} dy_{r-2} F_{r-2}(y_{r-3} - y_{r-2}) \cdot \\ &\quad \cdot \int_0^{y_{r-2}} dy_{r-1} F_{r-1}(y_{r-2} - y_{r-1}) F_r(y_{r-1}). \end{aligned} \quad (75)$$

Uvrstimo li funkcije (73), lako se vidi, da će odbacivanje onih dijelova integrala, za koje su integrandi jednaki nuli, značiti, da se pojedine varijable integracije kreću u ovim granicama:

$$x_r \leq y_{r-1} \leq y_{r-2} - x_{r-1} \quad (76a)$$

$$x_r + x_{r-1} \leq y_{r-2} \leq y_{r-3} - x_{r-2} \quad (76b)$$

$$x_r + x_{r-1} + x_{r-2} \leq y_{r-3} \leq y_{r-4} - x_{r-3} \quad (76c)$$

.....

$$x_r + x_{r-1} + \dots + x_3 \leq y_2 \leq y_1 - x_2 \quad (76d)$$

$$x_r + x_{r-1} + \dots + x_2 \leq y_1 \leq t - x_1. \quad (76e)$$

Dobijemo dakle, zamijenivši J_0 sa A_0 :

$$\begin{aligned} & K_{0, \dots, 0}^{0, \dots, 0}(t; x_1, \dots, x_r) = \\ & = \int_{\sum_{k=2}^r x_k}^{t-x_1} dy_1 A_0(c \sqrt{(t-y_1)^2 - x_1^2}) \int_{\sum_{k=3}^r x_k}^{y_1-x_2} dy_2 A_0(c \sqrt{(y_1-y_2)^2 - x_2^2}) \dots \int_{x_r+x_{r-1}}^{y_{r-3}-x_{r-2}} dy_{r-2} \cdot \\ & \cdot A_0(c \sqrt{(y_{r-3}-y_{r-2})^2 - x_{r-2}^2}) \int_{x_r}^{y_{r-2}-x_{r-1}} dy_{r-1} \cdot \\ & \cdot A_0(c \sqrt{(y_{r-2}-y_{r-1})^2 - x_{r-1}^2}) A_0(c \sqrt{y_{r-1}^2 - x_r^2}), \quad (77) \end{aligned}$$

gdje je u smislu (76e)

$$t > \sum_{k=1}^r x_k. \quad (78)$$

Ovoj kompoziciji odgovara kao izvedena funkcija produkt funkcija (74):

$$f_1(s) f_2(s) \dots f_r(s) = \frac{\exp[-(x_1 + x_2 + \dots + x_r) \sqrt{s^2 + c^2}]}{(\sqrt{s^2 + c^2})^r}. \quad (79)$$

Stavimo li još

$$X = \sum_{k=1}^r x_k, \quad (80)$$

možemo prema (71) i (72) zaključiti, da je

$$K_{0, \dots, 0}^{0, \dots, 0}(t; x_1, \dots, x_r) = \frac{1}{(r-2)!} \int_X (y-X)^{r-2} \Delta_0(c \sqrt{t^2 - y^2}) dy \quad (81)$$

pod pretpostavkom, da je $t > X$. Razumijevamo li pod

$$K_{0, \dots, 0}^{0, \dots, 0}(t; x_1, \dots, x_r)$$

izraz (77) i onda, ako su $t, x_1, x_2, \dots, x_r$ bilo koji kompleksni brojevi, koji dakle više ne zadovoljavaju uvjet $t > X$, opet se analitičkim produživanjem uviđa, da (81) vrijedi i u tom slučaju.

3. Jednadžbe rekurzije za kompoziciju dviju Besselovih funkcija višega reda

Za ovo, što slijedi, pretpostavlja se prema potrebi, da su parametri $x_1, x_2, \dots$ od nule različiti. Slučajevi, kod kojih iščezavanje jednog parametra ili više njih dovodi do teškoća, raspraviti će se kasnije. Razmatrajmo kompoziciju

$$K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(t; x_1, x_2) = \int_{x_1}^{t-x_2} y^{m_1} \Delta_{n_1}(c \sqrt{y^2 - x_1^2}) (t-y)^{m_2} \Delta_{n_2}(c \sqrt{(t-y)^2 - x_2^2}) dy, \quad (82)$$

pri čemu su m_1, m_2, n_1, n_2 nenegativni cijeli brojevi, t, x_1, x_2 bilo koji kompleksni brojevi, a krivulja integracije bilo koja krivulja, koja se može rektificirati, a spaja točke x_1 i $t-x_2$.

Ako su t, x_1, x_2 nenegativni realni brojevi i $t > x_1 + x_2$, možemo (82) shvatiti kao kompoziciju funkcija

$$F_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } 0 \leq t \leq x_1 \\ t^{m_1} \Delta_{n_1}(c \sqrt{t^2 - x_1^2}) & \text{za } t > x_1 \end{cases} \quad (83)$$

$$F_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } 0 \leq t \leq x_2 \\ t^{m_2} \Delta_{n_2}(c \sqrt{t^2 - x_2^2}) & \text{za } t > x_2. \end{cases} \quad (84)$$

U tom slučaju komutativni zakon za operaciju komponiranja daje

$$K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(t; x_1, x_2) = K_{n_2, n_1}^{m_2, m_1}(t; x_2, x_1). \quad (85)$$

Analitičkim produživanjem izlazi, da (85) vrijedi i za bilo koje kompleksne vrijednosti od t, x_1, x_2 , a dobije se to i izravno iz (82) supstitucijom $z = t-y$.

Diferenciramo li (82) po x_1 i uzmemo u račun III (9), dobijemo

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_1} K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(t; x_1, x_2) = \\ & = -x_1^{m_1} (t-x_1)^{m_2} \Lambda_{n_2} (c \sqrt{(t-x_1)^2 - x_2^2}) + \frac{c^2 x_1}{2(n_1+1)} K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(t; x_1, x_2) \quad (86) \end{aligned}$$

ili

$$\begin{aligned} & K_{n_1+1, n_2}^{m_1, m_2}(t; x_1, x_2) = \\ & = \frac{2(n_1+1)}{c^2 x_1} \left\{ \frac{\partial K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(t; x_1, x_2)}{\partial x_1} + x_1^{m_1} (t-x_1)^{m_2} \Lambda_{n_2} (c \sqrt{(t-x_1)^2 - x_2^2}) \right\} \quad (87) \end{aligned}$$

i analogno

$$\begin{aligned} & K_{n_1, n_2+1}^{m_1, m_2}(t; x_1, x_2) = \\ & = \frac{2(n_2+1)}{c^2 x_2} \left\{ \frac{\partial K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(t; x_1, x_2)}{\partial x_2} + x_2^{m_2} (t-x_2)^{m_1} \Lambda_{n_1} (c \sqrt{(t-x_2)^2 - x_1^2}) \right\}. \quad (88) \end{aligned}$$

U (87) i (88) pretpostavlja se $x_1 \neq 0$ odnosno $x_2 \neq 0$. Ove jednadžbe daju mogućnost postepenog povisivanja donjih indeksa kompozicije. Diferenciramo li (82) po t , izlazi s obzirom na III (9):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(t; x_1, x_2)}{\partial t} = \\ & = (t-x_2)^{m_1} x_2^{m_2} \Lambda_{n_1} (c \sqrt{(t-x_2)^2 - x_1^2}) + m_2 K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2-1}(t; x_1, x_2) - \\ & - \frac{c^2}{2(n_2+1)} K_{n_1, n_2+1}^{m_1, m_2+1}(t; x_1, x_2) \quad (89) \end{aligned}$$

ili

$$\begin{aligned} & K_{n_1, n_2+1}^{m_1, m_2+1}(t; x_1, x_2) = \\ & = \frac{2(n_2+1)}{c^2} \left\{ (t-x_2)^{m_1} x_2^{m_2} \Lambda_{n_1} (c \sqrt{(t-x_2)^2 - x_1^2}) + m_2 K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2-1}(t; x_1, x_2) - \right. \\ & \quad \left. - \frac{\partial K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(t; x_1, x_2)}{\partial t} \right\} \quad (90) \end{aligned}$$

i analogno s obzirom na (85)

$$K_{n_1+1, n_2}^{m_1+1, m_2}(t; x_1, x_2) = \frac{2(n_1+1)}{c^2} \left\{ (t-x_1)^{m_2} x_1^{m_1} \Lambda_{n_2}(c\sqrt{(t-x_1)^2 - x_2^2}) + \right. \\ \left. + m_1 K_{n_1, n_2}^{m_1-1, m_2}(t; x_1, x_2) - \frac{\partial K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(t; x_1, x_2)}{\partial t} \right\}. \quad (91)$$

Uvrstimo li u (90) za $K_{n_1, n_2+1}^{m_1, m_2+1}$ izraz, koji daje (88), dobijemo:

$$\frac{\partial K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2+1}(t; x_1, x_2)}{\partial x_2} = \\ = x_2 \left\{ m_2 K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2-1}(t; x_1, x_2) - \frac{\partial K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(t; x_1, x_2)}{\partial t} \right\}. \quad (92)$$

Integriramo li po x_2 i odredimo donju granicu integrala tako, da integral iščezava za $t = x_1 + x_2$, kao u (82), izlazi:

$$K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2+1}(t; x_1, x_2) = \\ = \int_{t-x_1}^{x_2} y \left\{ m_2 K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2-1}(t; x_1, y) - \frac{\partial K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(t; x_1, y)}{\partial t} \right\} dy \quad (93)$$

i analogno

$$K_{n_1, n_2}^{m_1+1, m_2}(t; x_1, x_2) = \\ = \int_{t-x_2}^{x_1} y \left\{ m_1 K_{n_1, n_2}^{m_1-1, m_2}(t; y, x_2) - \frac{\partial K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(t; y, x_2)}{\partial t} \right\} dy. \quad (94)$$

Posljednje dvije jednadžbe dopuštaju postepeno povisivanje gornjih indeksa kompozicije. Jednadžbe vrijede i za $m_2 = 0$ odnosno $m_1 = 0$, kada otpada prvi član u vitičastoj zagradi u integrandu. To se razabira, ako se cijeli izvod izvrši pod tom pretpostavkom.

Dajemo još neke jednadžbe rekurzije, koje mogu prema potrebi korisno poslužiti. Prema III (7) vrijedi

$$(y^2 - x_1^2) \Lambda_{n_1}(c\sqrt{y^2 - x_1^2}) = \\ = \frac{4n_1(n_1-1)}{c^2} \left\{ \Lambda_{n_1-1}(c\sqrt{y^2 - x_1^2}) - \Lambda_{n_1-2}(c\sqrt{y^2 - x_1^2}) \right\}. \quad (95)$$

Pomnožimo li ovu relaciju sa $y^{m_1}(t-y)^{m_1} A_{n_2}(c\sqrt{(t-y)^2-x_2^2})$ i integriramo po y od x_1 do $t-x_2$, dobijemo

$$K_{n_1, n_2}^{m_1+2, m_2} = x_1^2 K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2} + \frac{4n_1(n_1-1)}{c^2} (K_{n_1-1, n_2}^{m_1, m_2} - K_{n_1-2, n_2}^{m_1, m_2}) \quad (96)$$

i analogno

$$K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2+2} = x_2^2 K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2} + \frac{4n_2(n_2-1)}{c^2} (K_{n_1, n_2-1}^{m_1, m_2} - K_{n_1, n_2-2}^{m_1, m_2}). \quad (97)$$

Ako se u (92) povisi m_2 za jednu jedinicu i uvrsti izraz (97), izlazi

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2+1}(t; x_1, x_2)}{\partial t} &= (m_2 + 1) K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(t; x_1, x_2) - \\ &- \frac{1}{x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ x_2 K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(t; x_1, x_2) + \frac{4n_2(n_2-1)}{c^2} K_{n_1, n_2-1}^{m_1, m_2}(t; x_1, x_2) - \right. \\ &\quad \left. - K_{n_1, n_2-2}^{m_1, m_2}(t; x_1, x_2) \right\}. \end{aligned} \quad (98)$$

Integracija po t daje, ako se donja granica odredi tako, da integral iščezava za $t = x_1 + x_2$,

$$\begin{aligned} &K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2+1}(t; x_1, x_2) = \\ &= \int_{x_1+x_2}^t \left\{ (m_2 + 1) K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(y; x_1, x_2) - \frac{1}{x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ x_2 K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(y; x_1, x_2) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{4n_2(n_2-1)}{c^2} \left[K_{n_1, n_2-1}^{m_1, m_2}(y; x_1, x_2) - K_{n_1, n_2-2}^{m_1, m_2}(y; x_1, x_2) \right] \right\} \right\} dy \quad (99) \end{aligned}$$

i analogno

$$\begin{aligned} &K_{n_1, n_2}^{m_1+1, m_2}(t; x_1, x_2) = \\ &= \int_{x_1+x_2}^t \left\{ (m_1 + 1) K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(y; x_1, x_2) - \frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ x_1 K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(y; x_1, x_2) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{4n_1(n_1-1)}{c^2} \left[K_{n_1-1, n_2}^{m_1, m_2}(y; x_1, x_2) - K_{n_1-2, n_2}^{m_1, m_2}(y; x_1, x_2) \right] \right\} \right\} dy. \quad (100) \end{aligned}$$

4. Izravne formule za kompoziciju dviju Besselovih funkcija višega reda

Ponovljenom primjenom jednadžbe rekurzije (87) dobije se lako

$$K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(t; x_1, x_2) = \frac{2^{n_1} n_1!}{c^{2n_1}} \left(\frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{n_1} K_{0, n_2}^{m_1, m_2}(t; x_1, x_2) + \\ + \sum_{k=0}^{n_1-1} \frac{2^{n_1-k} n_1!}{c^{2(n_1-k)} k!} \left(\frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{n_1-k-1} \left[x_1^{m_1-1} (t-x_1)^{m_2} A_{n_2}(c\sqrt{(t-x_1)^2-x_2^2}) \right] \quad (101)$$

i dalje

$$K_{0, n_2}^{m_1, m_2}(t; x_1, x_2) = \frac{2^{n_2} n_2!}{c^{2n_2}} \left(\frac{1}{x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{n_2} K_{0, 0}^{m_1, m_2}(t; x_1, x_2) + \\ + \sum_{k=0}^{n_2-1} \frac{2^{n_2-k} n_2!}{c^{2(n_2-k)} k!} \left(\frac{1}{x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{n_2-k-1} \left[x_2^{m_2-1} (t-x_2)^{m_1} A_0(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1^2}) \right]. \quad (102)$$

Uvrstimo li (102) u (101) i uzmemo u račun, da je prema III (9)

$$\frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} A_r(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1^2}) = \frac{c^2}{2(r+1)} A_{r+1}(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1^2}), \quad (103)$$

dakle

$$\left(\frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{n_1} A_0(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1^2}) = \frac{c^{2n_1}}{2^{n_1} n_1!} A_{n_1}(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1^2}), \quad (104)$$

izlazi

$$K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(t; x_1, x_2) = \frac{2^{n_1+n_2} n_1! n_2!}{c^{2(n_1+n_2)}} \left(\frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{n_1} \left(\frac{1}{x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{n_2} K_{0, 0}^{m_1, m_2}(t; x_1, x_2) + \\ + \sum_{k=0}^{n_1-1} \frac{2^{n_1-k} n_1!}{c^{2(n_1-k)} k!} \left(\frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{n_1-k-1} \left[x_1^{m_1-1} (t-x_1)^{m_2} A_{n_2}(c\sqrt{(t-x_1)^2-x_2^2}) \right] + \\ + \sum_{k=0}^{n_2-1} \frac{2^{n_2-k} n_2!}{c^{2(n_2-k)} k!} \left(\frac{1}{x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{n_2-k-1} \left[x_2^{m_2-1} (t-x_2)^{m_1} A_{n_1}(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1^2}) \right]. \quad (105)$$

Pri tome pretpostavljamo $n_1 > 0$ i $n_2 > 0$. Ako je na primjer $n_1 = 0$, $n_2 > 0$, otpada prva suma na desnoj strani od (105), t. j. vraćamo se na (102). Slučaj $n_1 = n_2 = 0$ je trivijalan. Time je $K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}$ izraženo pomoću $K_{0,0}^{m_1, m_2}$. Treba još izraziti $K_{0,0}^{m_1, m_2}$ pomoću $K_{0,0}^{0,0}$, koje je dano formulom (69). To ćemo učiniti u točki 6 za općenitiji slučaj kompozicije bilo kojeg broja Bessel-ovih funkcija i onda specijalizacijom izvesti relaciju, koja nam ovdje treba. [Vidi formulu (129).]

Zabilježimo još nešto općenitiju formulu, kojom se svodi $K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}$ na $K_{p, q}^{m_1, m_2}$, gdje je $p < n_1$, $q < n_2$. Ta se formula dobije analognim načinom kao (105) i glasi:

$$\begin{aligned} & K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(t; x_1, x_2) = \\ & = \frac{2^{n_1+n_2-p-q} n_1! n_2!}{c^{2(n_1+n_2-p-q)} p! q!} \left(\frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{n_1-p} \left(\frac{1}{x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{n_2-q} K_{p, q}^{m_1, m_2}(t; x_1, x_2) + \\ & + \sum_{k=0}^{n_1-p-1} \frac{2^{n_1-p-k} n_1!}{c^{2(n_1-p-k)} (p+k)!} \left(\frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{n_1-p-k-1} [x_1^{m_1-1} (t-x_1)^{m_2} \Delta_{n_2}(c \sqrt{(t-x_1)^2 - x_2^2})] + \\ & + \sum_{k=0}^{n_2-q-1} \frac{2^{n_2-q-k} n_2!}{c^{2(n_2-q-k)} (q+k)!} \left(\frac{1}{x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{n_2-q-k-1} [x_2^{m_2-1} (t-x_2)^{m_1} \Delta_{n_1}(c \sqrt{(t-x_2)^2 - x_1^2})]. \end{aligned} \quad (106)$$

5. Jednadžbe rekurzije za kompoziciju bilo kojeg broja Besselovih funkcija višega reda

Kao poopćenje od (82) definiramo u analogiji sa (77) kompoziciju

$$\begin{aligned} & K_{n_1, \dots, n_r}^{m_1, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r) = \\ & = \int_{x_k=2}^{t-x_1} dy_1 (t-y_1)^{m_1} \Delta_{n_1}(c \sqrt{(t-y_1)^2 - x_1^2}) \int_{k=3}^{y_1-x_2} dy_2 (y_1-y_2)^{m_2} \Delta_{n_2}(c \sqrt{(y_1-y_2)^2 - x_2^2}) \dots \\ & \dots \int_{x_r+x_{r-1}}^{y_{r-3}-x_{r-2}} dy_{r-2} (y_{r-3}-y_{r-2})^{m_{r-2}} \Delta_{n_{r-2}}(c \sqrt{(y_{r-3}-y_{r-2})^2 - y_{r-2}^2}) \cdot \\ & \cdot \int_{x_r}^{y_{r-2}-x_{r-1}} dy_{r-1} \Delta_{n_{r-1}}(c \sqrt{(y_{r-2}-y_{r-1})^2 - x_{r-1}^2}) \Delta_{n_r}(c \sqrt{y_{r-1}^2 - x_r^2}), \end{aligned} \quad (107)$$

koja se za realne vrijednosti od $t, x_1, \dots, x_r$ i $t > X$ (vidi (80)) može smatrati kompozicijom funkcija

$$F_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } 0 \leq t \leq x_k \\ t^{m_k} \Delta_{n_k} (c \sqrt{t^2 - x_k^2}) & \text{za } t > x_k \end{cases} \quad (k = 1, \dots, r), \quad (108)$$

dok ćemo mi dopuštati i bilo kakve kompleksne vrijednosti od $t, x_1, \dots, x_r$.

Diferenciramo li (107) po x_1 , dobijemo očito:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} K_{n_1, \dots, n_r}^{m_1, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r) &= -x_1^{m_1} K_{n_2, \dots, n_r}^{m_2, \dots, m_r}(t - x_1; x_2, \dots, x_r) + \\ &+ \frac{c^2 x_1}{2(n_1 + 1)} K_{n_1+1, n_2, \dots, n_r}^{m_1, m_2, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r). \end{aligned} \quad (109)$$

Zbog komutativnog zakona za operaciju komponiranja vrijedi analogna formula za bilo koje x_k , t. j.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} K_{n_1, \dots, n_r}^{m_1, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r) &= \\ &= -x_k^{m_k} K_{n_1, \dots, n_{k-1}, n_{k+1}, \dots, n_r}^{m_1, \dots, m_{k-1}, m_{k+1}, \dots, m_r}(t - x_k; x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_r) + \\ &+ \frac{c^2 x_k}{2(n_k + 1)} K_{n_1, \dots, n_{k-1}, n_k+1, n_{k+1}, \dots, n_r}^{m_1, \dots, m_{k-1}, m_k, m_{k+1}, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r). \end{aligned} \quad (110)$$

Diferencira li se (107) po t , izlazi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} K_{n_1, \dots, n_r}^{m_1, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r) &= x_1^{m_1} K_{n_2, \dots, n_r}^{m_2, \dots, m_r}(t - x_1; x_2, \dots, x_r) + \\ &+ m_1 K_{n_1, n_2, \dots, n_r}^{m_1-1, m_2, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r) - \frac{c^2}{2(n_1 + 1)} K_{n_1+1, n_2, \dots, n_r}^{m_1+1, m_2, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r) \end{aligned} \quad (111)$$

ili pomoću (109)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} K_{n_1, \dots, n_r}^{m_1, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r) &= m_1 K_{n_1, n_2, \dots, n_r}^{m_1-1, m_2, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r) - \\ &- \frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} K_{n_1, n_2, \dots, n_r}^{m_1+1, m_2, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r) \end{aligned} \quad (112)$$

i analogno za bilo koje x_k :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} K_{n_1, \dots, n_r}^{m_1, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r) = \\ & = m_k K_{n_1, \dots, n_{k-1}, n_{k+1}, \dots, n_r}^{m_1, \dots, m_{k-1}, m_k+1, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r). \end{aligned} \quad (113)$$

Isporede li se formule (109), (110) i (111) sa (86), (89), vidi se, da (109) do (111) vrijede i za $r=2$, ako se definira

$$K_n^m(t; x) = t^m A_n(c \sqrt{t^2 - x^2}). \quad (114)$$

Razumije se, da i formule (112), (113) vrijede i za $r=2$ te u tom slučaju odgovaraju formuli (92). U analogonu formule (93), koji bismo dobili iz (112), bila bi integracija po prvom parametru protegnuta od $t-X+x_1$ do x_1 tako da integral iščezava za $t=X$.

6. Izravne formule za kompoziciju bilo kojeg broja Besselovih funkcija višega reda

Pretpostavimo $r \geq 2$ i primijenimo na (112) operaciju S_{x_1} definiranu prema II (135) sa $g_1(x_1) = x_1$. Uoči li se, da sve kompozicije (107) zadovoljavaju uvjet II (148), kako se odmah uviđa, izlazi s obzirom na stavak II. 5.:

$$\begin{aligned} & K_{n_1, n_2, \dots, n_r}^{m_1+1, m_2, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r) = \\ & = S_{x_1} \left\{ m_1 K_{n_1, n_2, \dots, n_r}^{m_1-1, m_2, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r) - \frac{\partial}{\partial t} K_{n_1, n_2, \dots, n_r}^{m_1, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r) \right\}. \end{aligned} \quad (115)$$

Ova relacija vrijedi i za $m_1=0$, kad prvi član u vitičastoj zagradi otpada, analogno kao što je to bilo kod (93), (94).

Izbjegavajmo najprije svaku komutaciju operatora S_{x_1} i $\frac{\partial}{\partial t}$. Označimo li radi kratkoće samo prvi gornji indeks kompozicija, dok mjesto S_{x_1} pišemo S , daje postepena primjena jednadžbe rekurzije (115) na primjer:

$$\begin{aligned} K^4 = & \left(3S^2 + 3S^2 \frac{\partial}{\partial t} S \frac{\partial}{\partial t} + 2S \frac{\partial}{\partial t} S^2 \frac{\partial}{\partial t} + S \frac{\partial}{\partial t} S \frac{\partial}{\partial t} S + \right. \\ & \left. + S \frac{\partial}{\partial t} S \frac{\partial}{\partial t} S \frac{\partial}{\partial t} S \frac{\partial}{\partial t} \right) K^0. \end{aligned} \quad (116)$$

Pogled na tu jednakost pokazuje, da desno od svakog $\frac{\partial}{\partial t}$ stoji S ili K^0 , i lako je vidjeti potpunom indukcijom, da to vrijedi i za bilo koje K^m . Prema stavku II. 5. komutira dakle svako $\frac{\partial}{\partial t}$ s operatorom, koji mu je nalijevo, pa stoga možemo u svakom članu operatore $\frac{\partial}{\partial t}$, počevši s onim, koji stoji najdalje nalijevo u dotičnom članu, postepeno pomicati na lijevi kraj člana. Time prelazi (116) u oblik

$$K^4 = \left[3S^2 + 6 \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 S^3 + \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^4 S^4 \right] K^0. \quad (117)$$

Općenito vrijedi, kako se dokazuje potpunom indukcijom na temelju (115):

$$K_{n_1, \dots, n_r}^{m_1, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r) =$$

$$(-1)^{m_1} m_1! \sum_{k=0}^{\left[\frac{m_1}{2} \right]} \frac{1}{2^k k! (m_1 - 2k)!} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{m_1 - 2k} S_{x_1}^{m_1 - k} K_{n_1, n_2, \dots, n_r}^{0, m_2, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r). \quad (118)$$

Da taj dokaz izvršimo, nadovezujemo najprije na stavak II. 5. Tvrdimo, da izraz $\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^p S^q f(t; x_1, \dots, x_r)$, gdje S^q znači produkt od q operatora $S_{g_k(x_k)}$ ($k = 1, \dots, r$), koji ne moraju biti međusobno jednaki, zadovoljava uvjet II (148), ako to čini funkcija $f(t; x_1, \dots, x_r)$ i ako je $p \leq q$. To svakako vrijedi za $q = 1$, jer je za $p = 0$ izraz jednak Sf , pa je prema istom stavku $\frac{\partial}{\partial t} Sf = S \frac{\partial}{\partial t} f$, čime je operator S na prvom mjestu, pa izraz opet zadovoljava II (148). Pretpostavimo li, da je tvrdnja ispravna za neko q , bit će dopustiva prijetvorba

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{p+1} S^{q+1} &= \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^p S \left(\frac{\partial}{\partial t} \right) S^q = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{p-1} S \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 S^{q-1} = \dots = S \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{p+1} S^q, \end{aligned} \quad (119)$$

čime je S došlo na prvo mjesto, pa tvrdnja vrijedi i za $q + 1$.

Time je tvrdnja dokazana potpunom indukcijom. Iz nje dalje izlazi, da vrijedi

$$S^n \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^p S^q f = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^p S^{n+q} f, \quad (120)$$

ako je $p \leq q$, a funkcija f zadovoljava II (148). Čitamo li naime (119) zdesna nalijevo, vidimo, da se operatori S jedan po jedan mogu s lijeve strane potencije $\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^p$ prenijeti na desnu.

Ako dakle na izraz (112) djeluje operacija S_{x_1} , ta se operacija može dodati potenciji $S_{x_1}^{m_1-k}$, jer je $m_1 - 2k \leq m_1 - k$, a kompozicija $K_{n_1, n_2, \dots, n_r}^{m_1+1, m_2, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r)$ zadovoljava II (148).

Pretpostavljajući, da relacija (118) vrijedi za neko $m_1 \geq 1$, uvrstimo je sad u (115) i nadomjestimo u prvoj sumi na desnoj strani k sa $k-1$. Izlazi

$$\begin{aligned} & (-1)^{m_1+1} (m_1+1)! \sum_{k=0}^{\left[\frac{m_1+1}{2} \right]} \frac{1}{2^k k! (m_1-2k+1)!} \cdot \\ & \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{m_1+1-2k} S_{x_1}^{m_1+1-k} K_{n_1, n_2, \dots, n_r}^{0, m_2, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r) = m_1 (-1)^{m_1-1} (m_1-1)! \cdot \\ & \cdot \sum_{k=1}^{\left[\frac{m_1+1}{2} \right]} \frac{1}{2^{k-1} (k-1)! (m_1-2k+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{m_1+1-2k} S_{x_1}^{m_1+1-k} K_{n_1, n_2, \dots, n_r}^{0, m_2, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r) - \\ & - (-1)^{m_1} m_1! \sum_{k=0}^{\left[\frac{m_1}{2} \right]} \frac{1}{2^k k! (m_1-2k)!} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{m_1+1-2k} S_{x_1}^{m_1+1-k} K_{n_1, n_2, \dots, n_r}^{0, m_2, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r), \end{aligned} \quad (121)$$

Pretpostavimo najprije

$$1 \leq k \leq \frac{m_1}{2}. \quad (122)$$

Članovi s indeksom k daju

$$\frac{(-1)^{m_1+1} (m_1+1)!}{2^k k! (m_1-2k+1)!} = \frac{(-1)^{m_1-1} (m_1-1)! m_1}{2^{k-1} (k-1)! (m_1-2k+1)!} -$$

$$- \frac{(-1)^{m_1} m_1!}{2^k k! (m_1-2k)!}. \quad (123)$$

Dijelimo li sa $(-1)^{m_1-1} m_1!$ i množimo sa $2^k k! (m_1-2k+1)!$, to dobijemo

$$m_1 + 1 = 2k + m_1 - 2k + 1, \quad (124)$$

što je ispravno. Za $k=0$ dobijemo

$$\frac{(-1)^{m_1+1} (m_1+1)!}{2^0 0! (m_1+1)!} = - \frac{(-1)^{m_1} m_1!}{2^0 0! m_1!}, \quad (125)$$

što je ispravno. Ako je m_1 lih broj, može biti $k = \frac{m_1+1}{2} = s$, dakle $m_1 = 2s-1$, pa dobijemo

$$\frac{(-1)^{2s} (2s)!}{2^s s! 0!} = \frac{(-1)^{2s-2} (2s-2)! (2s-1)}{2^{s-1} (s-1)! 0!}, \quad (126)$$

što je ispravno. Budući da formula (118) vrijedi za $m_1=0$ i za $m_1=1$, ona je time dokazana. Razumije se, da analogna formula vrijedi za svaki od gornjih indeksa kompozicije. Pođemo li od kompozicije, kojoj su svi gornji indeksi jednaki nuli i provedemo postepeno povišenje pojedinih indeksa prema formuli (118), dobijemo članove s operatorskim produktima oblika

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{m_1-2k_1} S_{x_1}^{m_1-k_1} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{m_2-2k_2} S_{x_2}^{m_2-k_2} \dots,$$

u kojima možemo na temelju (120) sve operatore S premjestiti na desni kraj dotičnog operatorskog produkta, počevši od onih, koji su desnom kraju najbliži. Dobijemo stoga općenito

$$K_{n_1, \dots, n_r}^{m_1, \dots, m_r} (t; x_1, \dots, x_r) = \left(\prod_{k=1}^r (-1)^{m_k} m_k! \right).$$

$$\sum_{k_1=0}^{\left[\frac{m_1}{2} \right]} \sum_{k_2=0}^{\left[\frac{m_2}{2} \right]} \dots \sum_{k_r=0}^{\left[\frac{m_r}{2} \right]} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{\sum_{s=1}^r m_s - 2k_s} \left(\prod_{v=1}^r S_{x_v}^{m_v - k_v} \right) K_{n_1, \dots, n_r}^{0, \dots, 0} (t; x_1, \dots, x_r). \quad (127)$$

Ako stavimo sve donje indekse jednako nuli i uvrstimo (81), možemo pisati:

$$K_{0, \dots, 0}^{m_1, \dots, m_r} (t; x_1, \dots, x_r) = \frac{1}{(r-2)!} \left(\prod_{k=1}^r (-1)^{m_k} m_k! \right).$$

$$\sum_{k_1=0}^{\left[\frac{m_1}{2}\right]} \dots \sum_{k_r=0}^{\left[\frac{m_r}{2}\right]} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{s=1}^{\sum m_s - 2k_s} \left(\prod_{v=1}^r S_{x_v}^{m_v - k_v} \right) \int_X (y-X)^{r-2} A_0(c \sqrt{t^2 - y^2}) dy. \quad (128)$$

Za $r=2$ dobije se iz toga:

$$K_{0,0}^{m_1, m_2} (t; x_1, x_2) = (-1)^{m_1 + m_2} m_1! m_2!.$$

$$\sum_{k_1=0}^{\left[\frac{m_1}{2}\right]} \sum_{k_2=0}^{\left[\frac{m_2}{2}\right]} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{m_1 + m_2 - 2k_1 - 2k_2} S_{x_1}^{m_1 - k_1} S_{x_2}^{m_2 - k_2} \int_{x_1 + x_2}^t A_0(c \sqrt{t^2 - y^2}) dy. \quad (129)$$

Ova se formula može uvrstiti u (105), pa je time dobiven izraz za $K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2} (t; x_1, x_2)$.

Na temelju jednadžbe rekurzije (109) možemo postaviti opću formulu, koja izražava $K_{n_1, \dots, n_r}^{m_1, \dots, m_r} (t; x_1, \dots, x_r)$ pomoću $K_{0, \dots, 0}^{m_1, \dots, m_r} (t; x_1, \dots, x_r)$. Neka je r , kao i dosad, broj parova indeksa kompozicije. (Smatramo, da svaki donji indeks s pripadnim gornjim čini par). Neka je dalje p broj donjih indeksa, koji su veći od nule, dok su ostali donji indeksi jednaki nuli. Dopuštamo $1 \leq p \leq r$. (Slučaj $p=0$ je trivijalan.) Radi jednostavnosti zamišljamo, da je prvih p donjih indeksa veće od nule, što zbog komutativnog zakona komponiranja ne znači smanjivanje općenitosti. Neka je Q minimum dvaju brojeva p i $r-1$, t. j. $Q=p$, ako je $p \leq r-1$ i $Q=r-1$ za $p=r$. Neka konačno $(k_1, k_2, \dots, k_\gamma)$ znači kombinaciju γ -tog razreda ($1 \leq \gamma \leq Q$) elemenata $1, 2, \dots, p$, a $(s_1, s_2, \dots, s_{r-\gamma})$ tomu komplementarnu kombinaciju $(r-\gamma)$ -tog razreda, tako da su $k_1, k_2, \dots, k_\gamma, s_1, s_2, \dots, s_{r-\gamma}$ svi elementi $1, 2, \dots, r$. Zbog $1 \leq \gamma \leq Q$ i jedna i druga kombinacija imaju uvijek barem jedan elemenat. Pod sumom $\sum_{(k_1, \dots, k_\gamma)}$ sa zadanim γ razumijevamo, da u dotičnom izrazu treba uvrstiti redom sve kom-

binacije indeksa $(k_1, \dots, k_\gamma)$, a istodobno za indekse $s_1, \dots, s_{r-\gamma}$ tomu komplementarnu kombinaciju, i tako nastale izraze zbrojiti. Postavljamo sada opću formulu služeći se oznakom

$$\frac{1}{x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} = D_{x_k}, \quad (130)$$

koja odgovara oznaci II (134):

$$\begin{aligned} & K_{n_1, \dots, n_p, 0, \dots, 0}^{m_1, \dots, m_p, m_{p+1}, \dots, m_r} (t; x_1, \dots, x_r) = \\ & \prod_{\alpha=1}^p \left(\frac{2}{c^2} \right)^{n_\alpha} n_\alpha! \left\{ \left(\prod_{\beta=1}^p D_{x_\beta}^{n_\beta} \right) K_{0, \dots, 0}^{m_1, \dots, m_r} (t; x_1, \dots, x_r) + \right. \\ & + \sum_{\gamma=1}^Q \sum_{(k_1, \dots, k_\gamma)} \prod_{\delta=1}^{r-\gamma} D_{x_{s_\delta}}^{n_{s_\delta}} \sum_{w_\gamma=0}^{n_{k_1}-1} \dots \sum_{w_\gamma=0}^{n_{k_\gamma}-1} \left(\prod_{\varepsilon=1}^{\gamma} \left(\frac{2}{c^2} \right)^{-w_\varepsilon} \frac{1}{w_\varepsilon!} D_{x_{k_\varepsilon}}^{n_{k_\varepsilon}-w_\varepsilon-1} \right) \cdot \\ & \cdot \left[\left(\prod_{\varepsilon=1}^{\gamma} x_{k_\varepsilon}^{m_{k_\varepsilon}-1} \right) K_{0, \dots, 0}^{m_{s_1}, \dots, m_{s_{r-\gamma}}} \left(t - \sum_{\varphi=1}^{\gamma} x_{k_\varphi}; x_{s_1}, \dots, x_{s_{r-\gamma}} \right) \right] \Big\}. \quad (131) \end{aligned}$$

Opaža se, da smo umjesto komplementarne kombinacije $(s_1, \dots, s_{r-\gamma})$ mogli staviti komplementarnu kombinaciju $(s_1, \dots, s_{p-\gamma})$, t. j. mogli smo izostaviti elemente $s_{p+1}, \dots, s_r$, jer ti elementi u produktu $\prod_{\delta=1}^{r-\gamma}$ prinose samo faktore $D_{x_{s_{p+1}}}^0, \dots, D_{x_{s_r}}^0$, koji znače jedinični operator, pa se mogu izostaviti. Gornja granica spomenutog produkta glasila bi onda $p-\gamma$ umjesto $r-\gamma$, a kompoziciju na kraju formule (131) pisali bismo

$$K_{0, \dots, 0, 0, \dots, 0}^{m_{s_1}, \dots, m_{s_{p-\gamma}}, m_{p+1}, \dots, m_r} \left(t - \sum_{\varphi=1}^{\gamma} x_{k_\varphi}; x_{s_1}, \dots, x_{s_{p-\gamma}}, x_{p+1}, \dots, x_r \right).$$

Za kasnije svrhe ipak nam je zgodnije ostati kod oblika (131). Treba još primijetiti, da za $r \geq p \geq r-1$, $\gamma = p$ kompozicija na kraju formule (131) ima samo jedan par indeksa, pa se treba sjetiti definicije (114).

Da dokažemo formulu (131), pretpostavimo $r \geq 2$ i stavimo u (190) $n_1 = n_2 = \dots = n_r$. Prema (131) bilo bi za $p=1$, $n_1=1$

$$K_{1,0,\dots,0}^{m_1,m_2,\dots,m_r}(t;x_1,\dots,x_r) = \frac{2}{c^2} \left\{ D_{x_1} K_{0,\dots,0}^{m_1,\dots,m_r}(t;x_1,\dots,x_r) + \right. \\ \left. + x_1^{m_1-1} K_{0,\dots,0}^{m_2,\dots,m_r}(t-x_1;x_2,\dots,x_r) \right\} \quad (132)$$

u skladu sa (109). Formula (131) dakle vrijedi za taj slučaj. Pretpostavimo dalje, da je formula (131) dokazana, ako je $p=1$, a n_1 je neki pozitivan cio broj. Dokazujemo, da (131) onda vrijedi i za n_1+1 . Iz (131) izlazilo bi naime:

$$K_{n_1+1,n_2,\dots,n_r}^{m_1,m_2,\dots,m_r}(t;x_1,\dots,x_r) = \\ = \left(\frac{2}{c^2} \right)^{n_1+1} (n_1+1)! \left\{ D_{x_1}^{n_1+1} K_{0,\dots,0}^{m_1,\dots,m_r}(t;x_1,\dots,x_r) + \right. \\ \left. + \sum_{w_1=0}^{n_1} \left(\frac{2}{c^2} \right)^{-w_1} \frac{1}{w_1!} D_{x_1}^{n_1-w_1} \left[x_1^{m_1-1} K_{0,\dots,0}^{m_2,\dots,m_r}(t-x_1;x_2,\dots,x_r) \right] \right\}. \quad (133)$$

Izluči li se $\frac{2}{c^2} (n_1+1) D_{x_1}$ i odvoji član sume za $w_1=n_1$, vidi se, da izlazi

$$K_{n_1+1,n_2,\dots,n_r}^{m_1,m_2,\dots,m_r}(t;x_1,\dots,x_r) = \frac{2(n_1+1)}{c^2} D_{x_1} \left\{ \left(\frac{2}{c^2} \right)^{n_1} n_1! \left(\frac{2}{c^2} \right)^{-n_1} \frac{1}{n_1!} \cdot \right. \\ \cdot x_1^{m_1-1} K_{0,\dots,0}^{m_2,\dots,m_r}(t-x_1;x_2,\dots,x_r) + \\ \left. + \left(\frac{2}{c^2} \right)^{n_1} n_1! D_{x_1} K_{0,\dots,0}^{m_2,\dots,m_r}(t;x_1,\dots,x_r) + \right. \\ \left. + \sum_{w_1=0}^{n_1-1} \left(\frac{2}{c^2} \right)^{-w_1} \frac{1}{w_1!} D_{x_1}^{n_1-w_1-1} \left[x_1^{m_1-1} K_{0,\dots,0}^{m_2,\dots,m_r}(t-x_1;x_2,\dots,x_r) \right] \right\} = \\ = \frac{2(n_1+1)}{c^2} D_{x_1} \left\{ x_1^{m_1-1} K_{0,\dots,0}^{m_2,\dots,m_r}(t-x_1;x_2,\dots,x_r) + \right. \\ \left. + K_{n_1,\dots,n_r}^{m_2,\dots,m_r}(t;x_1,\dots,x_r) \right\} \quad (134)$$

u suglasnosti sa (109). Budući da analogni dokaz vrijedi za bilo koje x_k , time je potpunom indukcijom dokazano, da (131) vrijedi za $p = 1$.

Pretpostavimo sad, da (131) vrijedi za neko p ($1 \leq p \leq r-1$). Dokazujemo, da onda vrijedi i za $p+1$. Neka su dakle $n_1, \dots, n_p$ bilo koji pozitivni cijeli brojevi i neka je ponajprije $n_{p+1} = 1$. U izrazu, što ga za taj slučaj daje (131), razmotrimo članove, kod kojih je u kombinaciji $(k_1, \dots, k_r)$ sadržan broj $p+1$. Indeks sumacije w_{p+1} zbog $n_{p+1} = 1$ dobiva samo jedinu vrijednost nula, pa se iz svih tih članova može izlučiti $x_{p+1}^{m_{p+1}-1}$ i k tome dodati faktor $\frac{2}{c^2}$ iz produkta pred vitičastom zagradom, a izraz, koji ostaje, očito je isti onaj, što ga daje

$$K_{n_1, \dots, n_p, 0, \dots, 0}^{m_1, \dots, m_p, m_{p+2}, \dots, m_r} (t - x_{p+1}; x_1, \dots, x_p, x_{p+2}, \dots, x_r)$$

prema formuli (131). Prvi član u vitičastoj zagradi, kako ga ta formula daje za ovu posljednju kompoziciju, nastaje od one kombinacije $(k_1, \dots, k_r)$, u kojoj se nalazilo samo $p+1$.

Razmotrimo dalje članove, koji odgovaraju kombinacijama $(k_1, \dots, k_r)$, u kojima nije sadržano $p+1$. Iz tih članova se može izlučiti $D_{x_{p+1}}$, (koje se nalazi među faktorima $D_{x_{s_\delta}}^{n_{s_\delta}}$), a taj isti faktor se može izlučiti i iz prvog člana u vitičastoj zagradi, koji bi glasio

$$\begin{aligned} & \left(\prod_{\beta=1}^{p+1} D_{x_\beta}^{n_\beta} \right) K_{0, \dots, 0}^{m_1, \dots, m_r} (t; x_1, \dots, x_r) = \\ & = D_{x_{p+1}} \left(\prod_{\beta=1}^p D_{x_\beta}^{n_\beta} \right) K_{0, \dots, 0}^{m_1, \dots, m_r} (t; x_1, \dots, x_r). \end{aligned} \quad (135)$$

I ovdje dodajemo faktor $\frac{2}{c^2}$ od produkta pred vitičastom zagradom, a izraz, koji ostaje, očito je prema (131) jednak

$$K_{n_1, \dots, n_p, 0, \dots, 0}^{m_1, \dots, m_p, m_{p+1}, \dots, m_r} (t; x_1, \dots, x_r).$$

Izlazi dakle

$$\begin{aligned} & K_{n_1, \dots, n_p, 1, 0, \dots, 0}^{m_1, \dots, m_p, m_{p+1}, m_{p+2}, \dots, m_r} (t; x_1, \dots, x_r) = \\ & \frac{2}{c^2} \left\{ x_{p+1}^{m_{p+1}-1} K_{n_1, \dots, n_p, 0, \dots, 0}^{m_1, \dots, m_p, m_{p+2}, \dots, m_r} (t - x_{p+1}; x_1, \dots, x_p, x_{p+2}, \dots, x_r) + \right. \\ & \left. + D_{x_{p+1}} K_{n_1, \dots, n_p, 0, \dots, 0}^{m_1, \dots, m_p, m_{p+1}, \dots, m_r} (t; x_1, \dots, x_r) \right\}, \quad (136) \end{aligned}$$

što odgovara formuli (110), ako se u njoj mjesto k piše $p+1$ i stavi $x_{p+1} = 1$. Budući da je u kompozicijama na desnoj strani od (136) broj od nule različitih donjih indeksa jednak p , prema pretpostavci s pravom smo na njih primijenili formulu (131), a relacija (136) dokazuje, da je ta formula (131) ispravna i za kompoziciju na lijevoj strani, gdje je taj broj indeksa jednak $p+1$, a $(p+1)$ -ti indeks jednak jedan.

Pretpostavimo dalje, da je relacija (131) dokazana onda, kad je $(p+1)$ -ti indeks n_{p+1} neki pozitivan cio broj. Dokazujemo, da formula vrijedi i onda, ako je taj indeks jednak $n_{p+1} + 1$. Primijenimo opet formulu (131) na taj slučaj, da je $(p+1)$ -ti indeks $n_{p+1} + 1$. Razmotrimo li članove, koji daju kombinacije $(k_1, \dots, k_\gamma)$, u kojima je sadržan broj $p+1$, uzevši u račun samo vrijednost indeksa sumacije $w_{p+1} = n_{p+1}$, i izlučimo $\left(\frac{2}{c^2}\right)^{n_{p+1}+1} (n_{p+1}+1)!$ iz produkta pred vitičastom zagradom, a $\left(\frac{2}{c^2}\right)^{-w_{p+1}} \frac{1}{w_{p+1}!} = \left(\frac{2}{c^2}\right)^{-n_{p+1}} \frac{1}{n_{p+1}!}$ iz dotičnih članova između zagrada, dakle ukupno $\frac{2}{c^2} (n_{p+1} + 1)$, dobivamo izraz, koji prema (131) odgovara veličini

$$K_{n_1, \dots, n_p, 0, \dots, 0}^{m_1, \dots, m_p, m_{p+1}, \dots, m_r} (t - x_{p+1}; x_1, \dots, x_p, x_{p+2}, \dots, x_r).$$

Razmotrimo li sve ostale članove, možemo izlučiti $D_{x_{p+1}}$. Ovaj se operator nalazi među faktorima $D_{x_{k_e}}^{n_{k_e}-w_e-1}$, ako je $p+1$ sadržano u kombinaciji $(k_1, \dots, k_\gamma)$, pa je tada za $k_e = p+1$ $D_{x_{k_e}}^{n_{k_e}-w_e-1}$ nadomješteno sa $D_{x_{p+1}}^{n_{p+1}-w_{p+1}}$, jer je $(p+1)$ -ti indeks $n_{p+1}+1$ umjesto n_{p+1} . Tu dakle izlučujemo $D_{x_{p+1}}$. Ako $p+1$ nije sadržano u kombinaciji $(k_1, \dots, k_\gamma)$, među faktorima se

$D_{x_{p+1}}^{n_{p+1}}$ nalazi jedan, koji glasi $D_{x_{p+1}}^{n_{p+1}+1} = D_{x_{p+1}} D_{x_{p+1}}^{n_{p+1}}$. I ovdje izlučujemo $D_{x_{p+1}}$. Odvojimo li još faktor $\frac{2}{c^2} (n_{p+1} + 1)$ iz produkta pred vitičastom zagradom, preostaje izraz, koji je u smislu (131) jednak

$$K_{n_1, \dots, n_p, n_{p+1}+1, 0, \dots, 0}^{m_1, \dots, m_p, m_{p+1}, m_{p+2}, \dots, m_r} (t; x_1, \dots, x_r).$$

Dobili smo dakle

$$\begin{aligned} K_{n_1, \dots, n_{p+1}, 0, \dots, 0}^{m_1, \dots, m_{p+1}, m_{p+2}, \dots, m_r} (t; x_1, \dots, x_r) &= \frac{2(n_{p+1} + 1)}{c^2} \cdot \\ \cdot \left\{ x_{p+1}^{m_{p+1}-1} K_{n_1, \dots, n_p, 0, \dots, 0}^{m_1, \dots, m_p, m_{p+2}, \dots, m_r} (t - x_{p+1}; x_1, \dots, x_p, x_{p+2}, \dots, x_r) + \right. \\ &\left. + D_{x_{p+1}} K_{n_1, \dots, n_{p+1}, 0, \dots, 0}^{m_1, \dots, m_{p+1}, m_{p+2}, \dots, m_r} (t; x_1, \dots, x_r) \right\}. \quad (137) \end{aligned}$$

Primjena formule (131) na prvu kompoziciju desne strane od (137) opravdana je, jer ta kompozicija ima samo p donjih indeksa, koji su od nule različiti, a primjena na drugu kompoziciju desne strane opravdana je prema pretpostavci, jer je $(p+1)$ -ti donji indeks n_p . Relacija (137) dokazuje, da je onda relacija (131) ispravna i za lijevu stranu formule (137). Tim je potpunom indukcijom izvršen dokaz za formulu (131).

Radi boljeg pregleda napisat ćemo tu formulu opširnije za slučaj $r=3$, $p=3$:

$$\begin{aligned} K_{n_1, n_2, n_3}^{m_1, m_2, m_3} (t; x_1, x_2, x_3) &= \\ &= \left(\frac{2}{c^2} \right)^{n_1+n_2+n_3} n_1! n_2! n_3! \left[D_{x_1}^{n_1} D_{x_2}^{n_2} D_{x_3}^{n_3} K_{0, 0, 0}^{m_1, m_2, m_3} (t; x_1, x_2, x_3) + \right. \\ &+ D_{x_2}^{n_2} D_{x_3}^{n_3} \sum_{w_1=0}^{n_1-1} \left(\frac{2}{c^2} \right)^{-w_1} \frac{1}{w_1!} D_{x_1}^{n_1-w_1-1} \left[x_1^{m_1-1} K_{0, 0}^{m_2, m_3} (t - x_1; x_2, x_3) \right] + \\ &+ D_{x_1}^{n_1} D_{x_3}^{n_3} \sum_{w_2=0}^{n_2-1} \left(\frac{2}{c^2} \right)^{-w_2} \frac{2}{w_2!} D_{x_2}^{n_2-w_2-1} \left[x_2^{m_2-1} K_{0, 0}^{m_1, m_3} (t - x_2; x_1, x_3) \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + D_{x_1}^{n_1} D_{x_2}^{n_2} \sum_{w_3=0}^{n_3-1} \left(\frac{2}{c^2} \right)^{-w_3} \frac{1}{w_3!} D_{x_3}^{n_3-w_3-1} \left[x_3^{m_3-1} K_{0,0}^{m_1,m_2} (t-x_3; x_1, x_2) \right] + \\
& + D_{x_3}^{n_3} \sum_{w_1=0}^{n_1-1} \sum_{w_2=2}^{n_2-1} \left(\frac{2}{c^2} \right)^{-w_1-w_2} \frac{1}{w_1! w_2!} \cdot \\
& \cdot D_{x_1}^{n_1-w_1-1} D_{x_2}^{n_2-w_2-1} \left[x_1^{m_1-1} x_2^{m_2-1} K_0^{m_3} (t-x_1-x_2; x_3) \right] + \\
& + D_{x_2}^{n_2} \sum_{w_1=0}^{n_1-1} \sum_{w_3=0}^{n_3-1} \left(\frac{2}{c^2} \right)^{-w_1-w_3} \frac{1}{w_1! w_3!} \cdot \\
& \cdot D_{x_1}^{n_1-w_1-1} D_{x_3}^{n_3-w_3-1} \left[x_1^{m_1-1} x_3^{m_3-1} K_0^{m_2} (t-x_1-x_3; x_2) \right] + \\
& + D_{x_1}^{n_1} \sum_{w_2=0}^{n_2-1} \sum_{w_3=0}^{n_3-1} \left(\frac{2}{c^2} \right)^{-w_2-w_3} \frac{1}{w_2! w_3!} \cdot \\
& \cdot D_{x_2}^{n_2-w_2-1} D_{x_3}^{n_3-w_3-1} \left[x_2^{m_2-1} x_3^{m_3-1} K_0^{m_1} (t-x_2-x_3; x_1) \right] \Big\}. \quad (138)
\end{aligned}$$

Želimo li izraziti $K_{n_1, \dots, n_p, 0, \dots, 0}^{m_1, \dots, m_p, m_{p+1}, \dots, m_r} (t; x_1, \dots, x_r)$ pomoću $K_{0, \dots, 0}^{0, \dots, 0} (t; x_1, \dots, x_r)$ [vidi (81)], moramo formulu (128) uvrstiti u (131). Pri tome treba uočiti, da se za $r-1 \leq p \leq r$ u (131) pojavljuju kompozicije s jednim parom indeksa, kako smo već spomenuli [isporedi (138)], dok (128) vrijedi samo za $r \geq 2$, a za $r=1$ vrijedi definicija (114). Razlog, da (128) ne vrijedi za $r=1$, leži u tom, da za taj slučaj iz (112) ne izlazi (115), jer (112) doduše vrijedi i za $r=1$, kako je lako uvjeriti se na temelju definicije (114) i formule III (9), ali funkcija $K_n^m(t; x)$ ne zadovoljava uvjet II (148). Moramo stoga u (131) za slučaj, ako ima kompozicija s jednim parom indeksa, dotične članove odvojiti.

Bit će prikladno da dopustimo i negativne cijele potencije integralnih operatora S_{x_k} definirajući

$$S_{x_k}^{-n} = D_{x_k}^n. \quad (139)$$

Pretpostavimo dakle najprije $r \geq 3$ i $1 \leq p < r-1$. U tom je slučaju $Q = p$ i nema kompozicija s jednim parom indeksa. Uvrštenje formule (128) u (131) daje, ako uzmemo u račun (139):

$$\begin{aligned}
 K_{n_1, \dots, n_p, 0, \dots, 0}^{m_1, \dots, m_p, m_{p+1}, \dots, m_r} (t; x_1, \dots, x_r) &= \prod_{a=1}^p \left(\frac{2}{c^2} \right)^{n_a} n_a! \cdot \\
 &\cdot \left\{ \frac{1}{(r-2)!} \sum_{q_1=0}^{\left[\frac{m_1}{2} \right]} \dots \sum_{q_r=0}^{\left[\frac{m_r}{2} \right]} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{\sum_{u=1}^r (m_u - 2q_u)} \cdot \\
 &\cdot \left(\prod_{v=1}^r (-1)^{m_v} m_v! S_{x_v}^{m_v - n_v - q_v} \right) \int_X^t (y - X)^{r-2} \Lambda_0 (c \sqrt{t^2 - y^2}) dy + \\
 &+ \frac{1}{(r-\gamma-2)!} \sum_{\gamma=1}^p \sum_{(k_1, \dots, k_\gamma)} \sum_{w_1=0}^{n_{k_1}-1} \dots \sum_{w_\gamma=0}^{n_{k_\gamma}-1} \left(\prod_{\varepsilon=1}^{\gamma} \left(\frac{2}{c^2} \right)^{-w_\varepsilon} \frac{1}{w_\varepsilon!} D_{x_{k_\varepsilon}}^{n_{k_\varepsilon} - w_\varepsilon - 1} \right) \cdot \\
 &\cdot \left[\left(\prod_{\varepsilon=1}^{\gamma} x_{k_\varepsilon}^{m_{k_\varepsilon} - 1} \right) \sum_{v_1=0}^{\left[\frac{m_{s_1}}{2} \right]} \dots \sum_{v_{r-\gamma}=0}^{\left[\frac{m_{s_{r-\gamma}}}{2} \right]} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{\sum_{\varphi=1}^{r-\gamma} (m_{s_\varphi} - 2v_\varphi)} \cdot \\
 &\cdot \left(\prod_{\delta=1}^{r-\gamma} (-1)^{m_{s_\delta}} m_{s_\delta}! S_{x_{s_\delta}}^{m_{s_\delta} - n_{s_\delta} - v_\delta} \right) \cdot \\
 &\cdot \int_{x_{s_1} + \dots + x_{s_{r-\gamma}}}^{t - (x_{k_1} + \dots + x_{k_\gamma})} (y - x_{r_1} - \dots - x_{s_{r-\gamma}})^{r-\gamma-2} \Lambda_0 (c \sqrt{(t - x_{k_1} - \dots - x_{k_\gamma})^2 - y^2}) dy \Bigg\}.
 \end{aligned} \tag{140}$$

Ako je naprotiv $r-1 \leq p \leq r$, bit će $Q = r-1$, a članove sa $\gamma = r-1$ ćemo odijeliti. Dobijemo na pr. za $p = r$ ($r \geq 2$):

$$\begin{aligned}
& K_{n_1, \dots, n_{r-1}, 0}^{m_1, \dots, m_{r-1}, m_r} (t; x_1, \dots, x_r) = \prod_{\alpha=1}^P \left(\frac{2}{e^2} \right)^{n_\alpha} n_\alpha! \cdot \\
& \cdot \left\{ \frac{1}{(r-2)!} \sum_{q_1=0}^{\left[\frac{m_1}{2} \right]} \dots \sum_{q_r=0}^{\left[\frac{m_r}{2} \right]} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{\sum_{u=1}^r (m_u - 2q_u)} \cdot \\
& \cdot \left(\prod_{v=1}^r (-1)^{m_v} m_v! S_{x_v}^{m_v - n_v - q_v} \right) \int_X^t (y-X)^{r-2} \Lambda_0 (c \sqrt{t^2 - x^2}) dy + \\
& + \frac{1}{(r-\gamma-2)!} \sum_{\gamma=1}^{r-2} \sum_{(k_1, \dots, k_\gamma)} \sum_{w_1=0}^{n_{k_1}-1} \dots \sum_{w_\gamma=0}^{n_{k_\gamma}-1} \left(\prod_{\varepsilon=1}^{\gamma} \left(\frac{2}{c^2} \right)^{-w_\varepsilon} \frac{1}{w_\varepsilon!} D_{x_{k_\varepsilon}}^{n_{k_\varepsilon} - w_\varepsilon - 1} \right) \cdot \\
& \cdot \left[\left(\prod_{\varepsilon=1}^{\gamma} x_{k_\varepsilon}^{m_{k_\varepsilon} - 1} \right) \sum_{v_1=0}^{\left[\frac{m_{s_1}}{2} \right]} \dots \sum_{v_{r-\gamma}=0}^{\left[\frac{m_{s_{r-\gamma}}}{2} \right]} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{\sum_{\varphi=1}^r (m_{s_\varphi} - 2v_\varphi)} \cdot \\
& \cdot \left(\prod_{\delta=1}^{r-\gamma} (-1)^{m_{s_\delta}} m_{s_\delta}! S_{x_{s_\delta}}^{m_{s_\delta} - n_{s_\delta} - v_\delta} \right) \cdot \\
& \cdot \int_{x_{s_1} + \dots + x_{s_{r-\gamma}}}^{t - (x_{k_1} + \dots + x_{k_\gamma})} (y - x_{s_1} - \dots - x_{s_{r-\gamma}})^{r-\gamma-2} \Lambda_0 (c \sqrt{(t - x_{k_1} - \dots - x_{k_\gamma})^2 - y^2}) dy \Big] + \\
& + \sum_{(k_1, \dots, k_{r-1})} \sum_{w_1=0}^{n_{k_1}-1} \dots \sum_{w_{r-1}=0}^{n_{k_{r-1}}-1} \left(\prod_{\varepsilon=1}^{r-1} \left(\frac{2}{c^2} \right)^{-w_\varepsilon} \frac{1}{w_\varepsilon!} D_{x_{k_\varepsilon}}^{n_{k_\varepsilon} - w_\varepsilon - 1} \right) D_{s_1}^{n_{s_1}} \cdot \\
& \cdot \left\{ \left(\prod_{\varepsilon=1}^{r-1} x_{k_\varepsilon}^{m_{k_\varepsilon} - 1} \right) (t - x_{k_1} - \dots - x_{k_{r-1}})^{m_{s_1}} \Lambda_0 (c \sqrt{(t - x_{k_1} - \dots - x_{k_{r-1}})^2 - x_{s_1}^2}) \right\}.
\end{aligned}$$

(141)

Pri tom je s_1 onaj broj između brojeva $1, \dots, r$, koji nije sadržan u kombinaciji $(k_1, \dots, k_{r-1})$.

Za $p=r-1$ formula ostaje formalno ista, samo što se kombinacije $(k_1, \dots, k_r)$ tvore od brojeva $1, \dots, k_{r-1}$, pa u zadnjoj sumi dobijemo jedinu kombinaciju $(k_1, \dots, k_{r-1}) = (1, \dots, r-1)$ sa $D_{x_{s_1}}^{n_{s_1}} = D_{x_r}^{n_r} = D_{x_r}^0 = I$.

7. Kanonski oblik integralnih teorema

Pokušajmo desnu stranu najopćenitijeg integralnog teorema (141) izraziti pomoću što manjeg broja što jednostavnijih funkcija. Uzmimo li se u račun formule (130), II (116), III (255) i III (119), a ova posljednja formula s oznakama prema III (1) glasi

$$A_n(z) = n! \left\{ A_1(z) \sum_{w=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{(-1)^w [(n-w-1)!]^2}{\left(\frac{z}{2}\right)^{2n-2w} (w!)^2 (n-2w-1)!} - \\ - A_0(z) \sum_{w=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} \frac{(-1)^w (n-w-2)! (n-w-1)!}{\left(\frac{z}{2}\right)^{2n-2w-2} w! (w+1)! (n-2w-2)!} \right\}, \quad (142)$$

onda se iz posljednje višestruke sume u vitičastoj zagradi u (141) razabira, da ponovljena primjena operacija $D_{x_{k_r}}$ i $D_{x_{s_1}}$ na izraz u uglastoj zagradi u (141) daje očito funkciju oblika

$$R_0(t; x_1, \dots, x_r) \cdot A_0(c \sqrt{(t-x_{k_1}-\dots-x_{k_{r-1}})^2-x_{s_1}^2}) + \\ + R_1(t; x_1, \dots, x_r) \cdot A_1(c \sqrt{(t-x_{k_1}-\dots-x_{k_{r-1}})^2-x_{s_1}^2}), \quad (143)$$

gdje su R_0 i R_1 racionalne funkcije od $t, x_1, \dots, x_r$. Da su te funkcije racionalne, uzrokovano je napose time, što su sve potencije od z u (142) take, tako da korijen u argumentu Besselove funkcije otpada, kad se uvrsti mjesto z u formulu (142).

Razmotrimo sad srednju višestruku sumu u vitičastoj zagradi u formuli (141). Pretpostavimo najprije, da je eksponent operatora $S_{x_{s_0}}$ pozitivan. Stavimo li

$$t - (x_{k_1} + \dots + x_{k_r}) = \bar{t}, \quad (144)$$

$$x_{s_1} + \dots + x_{s_{r-\gamma}} = \bar{X}, \quad (145)$$

$$\varphi(\bar{t}, \bar{y}) = A_0(c \sqrt{\bar{t}^2 - \bar{y}^2}), \quad (146)$$

može se integral u srednjoj višestrukoj sumi u (141) nakon izvršenja operacije $S_{x_{s_\delta}}^{m_{s_\delta} - n_{s_\delta} - v_\delta}$ prema II (186) i II (188) svesti na oblik

$$\begin{aligned} \int_0^{\bar{t}-\bar{X}} \Phi(y) \varphi(\bar{t}, y + \bar{X}) dy &= \int_{\bar{X}}^{\bar{t}} \Phi(y - \bar{X}) \varphi(\bar{t}, y) dy = \\ &= \int_{\bar{X}}^{\bar{t}} \Phi(y - \bar{X}) A_0(c \sqrt{\bar{t}^2 - y^2}) dy = \\ &= \int_{x_{s_1} + \dots + x_{s_{r-\gamma}}}^{t - (x_{k_1} + \dots + x_{k_\gamma})} \Phi(y - x_{s_1} - \dots - x_{s_{r-\gamma}}) \cdot \\ &\cdot A_0(c \sqrt{(t - x_{k_1} - \dots - x_{k_\gamma})^2 - y^2}) dy, \end{aligned} \quad (147)$$

gdje je Φ u smislu II (189) cijela racionalna funkcija od $y, x_{s_1}, \dots, x_{s_{r-\gamma}}$. Djeluje li na takav integral operacija $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m_{s_\varphi} - 2v_\varphi}$ i zatim, poslije množenja sa $x_{k_\varepsilon}^{m_{k_\varepsilon} - 1}$, operacija $D_{x_{k_\varepsilon}}^{n_{k_\varepsilon} - w_\varepsilon - 1}$, očito će diferencijacije pod znakom integracije s obzirom na III (9) povisivati indeks A -funkcije, koja će biti pomnožena cijelom racionalnom funkcijom od $y, x_1, \dots, x_r$, dok će pred dobivenim integralima stajati racionalne funkcije od $x_{k_1}, \dots, x_{k_\gamma}$. Rastavljanjem tih integrala po pojedinim potencijama od y dolazimo na integrale oblika

$$\int_{\bar{X}}^{\bar{t}} y^m A_n(c \sqrt{\bar{t}^2 - y^2}) dy,$$

pomnožene racionalnim funkcijama od $x_1, \dots, x_r$, a ti se integrali prema III (382) do (385), III (339) i III (318), III (326) mogu izraziti u obliku

$$R_0 A_0 (c \sqrt{t^2 - \bar{X}^2}) + R_1 A_1 (c \sqrt{t^2 - \bar{X}^2}) + R_2 \int_{\bar{X}}^{\bar{t}} A_0 (c \sqrt{t^2 - y^2}) dy + \\ + R_3 \int_{\bar{X}}^{\bar{t}} A_1 (c \sqrt{t^2 - y^2}) dy + R_4, \quad (148)$$

gdje $\bar{t}$ i $\bar{X}$ imaju značenje (144), (145), a R_0, R_1, R_2, R_3, R_4 su racionalne funkcije od $t, x_1, \dots, x_r$. Diferencijacije po gornjoj granici integrala (147) dovode očito do analognih izraza kao (143), pa ih možemo smatrati već sadržanim u (148). Slučaj, da je eksponent od $S_{x_{s_\delta}}$ u (141) jednak nuli ili negativan, ne daje nikakvih načelnih promjena u razmatranju, jer se time samo pojednostavnjuje funkcija Φ u (147) i u smislu (139) dodaju nove operacije diferenciranja.

Prva višestruka suma u vitičastoj zagradi u (141) dopušta isto razmatranje, pa je rezultat sadržan u obliku (148) za $\gamma = 0$, u kojem je slučaju $\bar{t} = t$ i $\bar{X} = X$. Isto tako je i (143) specijalan slučaj od (148) za $\gamma = r-1$ (pri čemu je $R_2 = R_3 = R_4 = 0$), tako da se (141) može izraziti pomoću članova oblika (148). Razumije se, da to vrijedi i za slučaj (140), koji se od (141) razlikuje u tome, što izvjesnih članova nema.

Označimo sad sa N broj kombinacija nultog do $(r-1)$ -tog razreda elemenata $1, \dots, r$, i numerirajmo sve te kombinacije od 1 do N . (Nije teško vidjeti, da je $N = 2^r - 1$). Neka je $(x_{k_1}, \dots, x_{k_\gamma})$ k -ta od tih kombinacija. Stavljamo

$$x_{k_1} + \dots + x_{k_\gamma} = a_k \quad (k = 1, \dots, N) \quad (149)$$

$$x_{s_1} + \dots + x_{s_{r-\gamma}} = b_k \quad (k = 1, \dots, N). \quad (150)$$

Napose neka je prva kombinacija ona, koja odgovara $\gamma = 0$, dakle kombinacija »nikakav elemenat«, koja je nultog razreda, pa je za taj slučaj

$$a_1 = 0, \quad b_1 = x_1 + \dots + x_r = X. \quad (151)$$

Razumije se, da je uvijek

$$a_k + b_k = X \quad (k = 1, \dots, N). \quad (152)$$

Možemo sada integralni teorem (141) dovesti u oblik

$$\begin{aligned}
 K_{n_1, \dots, n_r}^{m_1, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r) = & \sum_{k=1}^N R_{0,k}(t; x_1, \dots, x_r) \Lambda_0(c \sqrt{(t-a_k)^2 - b_k^2}) + \\
 & + \sum_{k=1}^N R_{1,k}(t; x_1, \dots, x_r) \Lambda_1(c \sqrt{(t-a_k)^2 - b_k^2}) + \\
 & + \sum_{k=1}^N R_{2,k}(t; x_1, \dots, x_r) \int_{b_k}^{t-a_k} \Lambda_0(c \sqrt{(t-a_k)^2 - y^2}) dy + \\
 & + \sum_k R_{3,k}(t; x_1, \dots, x_r) \int_{b_k}^{t-a_k} \Lambda_1(c \sqrt{(t-a_k)^2 - y^2}) dy + \\
 & + R_4(t; x_1, \dots, x_r), \tag{153}
 \end{aligned}$$

gdje su $R_0, R_{1,k}, R_{2,k}, R_{3,k}$ ($k = 1, \dots, N$) i R_4 racionalne funkcije od $t, x_1, \dots, x_r$. Pri tome su s obzirom na (143) svakako neke od veličina $R_{2,k}$ i $R_{3,k}$ jednake nuli, na što se međutim ne obaziremo.

Oblik (153) integralnih teorema nazvat ćemo kanonskim oblikom tih teorema. Pita se, da li je u tom izrazu, koji je linearan s obzirom na funkcije

$$\begin{aligned}
 & \Lambda_0(c \sqrt{(t-a_k)^2 - b_k^2}), \quad \Lambda_1(c \sqrt{(t-a_k)^2 - b_k^2}) \\
 & \int_{b_k}^{-a_k} \Lambda_0(c \sqrt{(t-a_k)^2 - y^2}) dy, \quad \int_{b_k}^{t-a_k} \Lambda_1(c \sqrt{(t-a_k)^2 - y^2}) dy, \\
 & (k = 1, \dots, N),
 \end{aligned}$$

broj tih funkcija sveden na minimum, t. j. ne daju li se možda neke od tih funkcija linearno izraziti pomoću ostalih funkcija, s koeficijentima, koji su racionalne funkcije od $t, x_1, \dots, x_r$. Razumije se, da bi to moralo vrijediti za bilo kakve vrijednosti parametara $x_1, \dots, x_r$ (izuzevši vrijednost nula, koju zasad isključujemo) i varijable t . Ovo je pitanje ekvivalentno s pitanjem, da li između navedenih funkcija postoji linearna relacija s koeficijentima, koje su racionalne funkcije od $x_1, \dots, x_r$ i t . Dokažemo li, da takve relacije ne može biti, time je i doka-

zано, да се не дају поједине од наведених функција изразити линеарно помоћу осталих и да су према томе рационалне функције, које функцирају као коефицијенти у изразу (153), једнозначно одређене. На основу таквог доказа биће оправдан назив »канонски облик« за израз (153).

Треба примјетити, да за тај доказ нису довољни познати критерији линеарне независности (детерминанта Вронскога и Грамова детерминанта), јер коефицијенти нису константе, већ рационалне функције варијабле t . Јасно је, да је довољно доказати немogućност линеарне релације за неке специјалне вриједности параметара $x_1, \dots, x_r$. Одбирамо стога параметре $x_1, \dots, x_r$ тако, да буде задовољен увјет, да ни у којем пару једнадžби

$$\left. \begin{aligned} a_j &= a_k \\ b_j^2 &= b_k^2 \end{aligned} \right\} \quad (j \neq k; j, k = 1, \dots, N) \quad (154)$$

не буду задовољене обје једнадžбе и да за највише једну вриједност k_1 индекса k буде

$$b_{k_1} = 0. \quad (154a)$$

Да је могуће одабрати параметре $x_1, \dots, x_r$ тако, да овај увјет буде задовољен, излази из познатог ставка алгебре¹⁴:

»Ако су $f_1(x_1, \dots, x_r), \dots, f_r(x_1, \dots, x_r)$ било какви полиноми, који не ишчезавају идентично, и ако је M неки skup од неizmјерно много величина, на пр. skup цијелих бројева, могу се за варијабле $x_1, x_2, \dots, x_r$ на неizmјерно много начина одабрати такве величине $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ skupa M , да буде $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \neq 0$ за $v = 1, \dots, n$ «. Ставимо ли за наш случај

$$f_{j,k}(x_1, \dots, x_r) = a_j - a_k + i(b_j^2 - b_k^2) \quad (j \neq k; j, k = 1, \dots, N), \quad (155)$$

јасно је, да су према (149), (150) те функције полиноми варијабла $x_1, \dots, x_r$, који не ишчезавају идентично, јер би иначе за реалне варијабле реални дио био $a_j - a_k$, и тај би реални дио морао идентично ишчезавати, што је немogućе, јер су a_j и a_k суме елемената различитих комбинација варијабла $x_1, \dots, x_r$. Одaberемо ли за M на пр. skup позитивних цијелих бројева, уклонили смо се вриједности нула за параметре $x_1, \dots, x_r$, па и за бројеве b_k , а примјена citiranог ставка даје mogućност да се задовољи жељени увјет. На основу тога извешћемо у идућој тоčki доказ, да је немogućа линеарна релација између споменутих функција, с коефицијентима, који су рационалне функције варијабле t .

¹⁴ O. Perron: Algebra I., W. de Gruyter, Berlin u. Leipzig 1932, стр. 77, ставак 29.

8. Dokaz jednoznačnosti kanonskog oblika integralnih teorema

Dokazujemo

STAVAK IV. 8. Neka je zadano N parova kompleksnih brojeva a_k, b_k ($k=1, \dots, N$) tako, da ni u kojem od parova jednadžbi

$$\left. \begin{aligned} a_j &= a_k \\ b_j^2 &= b_k^2 \end{aligned} \right\} (j \neq k; j, k=1, \dots, N) \quad (156)$$

nisu zadovoljene obje jednadžbe i da najviše za jednu vrijednost k_1 indeksa vrijedi $b_{k_1}=0$ (156a); neka su dalje $R_{0,k}, R_{1,k}, R_{2,k}, R_{3,k}$ ($k=1, \dots, N$) i R_4 cijele racionalne funkcije varijable t , koje nisu sve identično jednake nuli: onda je nemoguće, da postoji identitet oblika

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N R_{0,k} \Lambda_0(c \sqrt{(t-a_k)^2 - b_k^2}) + \sum_{k=1}^N R_{1,k} \Lambda_1(c \sqrt{(t-a_k)^2 - b_k^2}) + \\ & + \sum_{k=1}^N R_{2,k} \int_{b_k}^{t-a_k} \Lambda_0(c \sqrt{(t-a_k)^2 - y^2}) dy + \\ & + \sum_{k=1}^N R_{3,k} \int_{b_k}^{t-a_k} \Lambda_1(c \sqrt{(t-a_k)^2 - y^2}) dy + R_4 \equiv 0. \quad (157) \end{aligned}$$

Jasno je, da se slučaj, ako su koeficijenti R razlomljeno racionalne funkcije, koji nama treba, može svesti na ovaj, ako se identitet pomnoži zajedničkim višekratnikom svih nazivnika. Uvest ćemo još pojednostavnjenje $c=1$ (158), koje ne znači smanjivanje općenitosti, jer se to pojednostavnjenje može postići supstitucijom

$$t = \frac{\bar{t}}{c}, \quad y = \frac{\bar{y}}{c}, \quad a_k = \frac{\bar{a}_k}{c}, \quad b_k = \frac{\bar{b}_k}{c}, \quad (159)$$

koja ne ruši pretpostavke našega stavka.

Izvest ćemo najprije dokaz za slučaj $N=1$. Radi jednostavnosti neka je $a_1=0$, što ne znači smanjivanje općenitosti, jer se to može postići supstitucijom $t = \bar{t} + a_1$ (160). Ispuste li se još suvišni indeksi, radi se dakle o identitetu

$$R_0 A_0 (\sqrt{t^2 - b^2}) + R_1 A_1 (\sqrt{t^2 - b^2}) + R_2 \int_b^t A_0 (\sqrt{t^2 - y^2}) dy + \\ + R_3 \int_b^t A_1 (\sqrt{t^2 - y^2}) dy + R_4 \equiv 0. \quad (161)$$

Izvest ćemo najprije neke pomoćne formule. Stavi li se u III (216) $n = 0$, odnosno $n = 1$ i integrira po z od 0 do t , izlazi, ako se mjesto z piše y :

$$\int_0^t A_0 (c \sqrt{t^2 - y^2}) dy = \sum_{w=0}^{\infty} \frac{(-1)^w \left(\frac{c}{2}\right)^{2w} t^{2w+1}}{(w!)^2} \sum_{k=0}^w \frac{(-1)^k \binom{w}{k}}{2k+1}, \quad (162)$$

$$\int_0^t A_1 (c \sqrt{t^2 - y^2}) dy = \sum_{w=0}^{\infty} \frac{(-1)^w \left(\frac{c}{2}\right)^{2w} t^{2w+1}}{w! (w+1)!} \sum_{k=0}^w \frac{(-1)^k \binom{w}{k}}{2k+1}. \quad (163)$$

Stavi li se u II (94) $-q = 2n + 1$ (164) i nadomjesti n sa w , izlazi

$$\sum_{k=0}^w \frac{(-1)^k \binom{w}{k}}{2k+1} = \frac{2^{2w+1} (w+1)! w!}{(2w+2)!} = \frac{2^{2w} (w!)^2}{(2w+1)!} \quad (165)$$

Uvrštenje u (162) i (163) daje

$$\int_0^t A_0 (c \sqrt{t^2 - y^2}) dy = \sum_{w=0}^{\infty} \frac{(-1)^w c^{2w} t^{2w+1}}{(2w+1)!} = \frac{1}{c} \sin(ct), \quad (166)$$

$$\int_0^t A_1 (c \sqrt{t^2 - y^2}) dy = \sum_{w=0}^{\infty} \frac{(-1)^w 2c^{2w} t^{2w+2}}{(2w+2)!} = \\ = \frac{2}{c^2 t} \sum_{w=0}^{\infty} \frac{(-1)^w c^{2w+2} t^{2w+2}}{(2w+2)!} = \frac{2}{c^2 t} [1 - \cos(ct)]. \quad (167)$$

Na temelju tih formula vrijedi, ako se još uvede (158),

$$\int_b^t A_0(\sqrt{t^2 - y^2}) dy = \sin t - \int_0^b A_0(\sqrt{t^2 - y^2}) dy, \quad (168)$$

$$\int_b^t A_1(\sqrt{t^2 - y^2}) dy = \frac{2}{t} (1 - \cos t) - \int_0^b A_1(\sqrt{t^2 - y^2}) dy. \quad (169)$$

Stavi li se u (42) $c_2 = 0$, $c_1 = -1$ (170) i odijele realni članovi od imaginarnih, izlazi

$$\begin{aligned} \cos \left(t \sqrt{1 - \frac{x^2}{t^2}} - 1 \right) &= \cos (\sqrt{t^2 - x^2} - t) = 1 - \frac{x^4}{8t^2} + \\ &+ \dots = 1 + O(|t|^{-2}), \end{aligned} \quad (171)$$

$$\begin{aligned} \sin \left(t \sqrt{1 - \frac{x^2}{t^2}} - 1 \right) &= \sin (\sqrt{t^2 - x^2} - t) = \\ &= -\frac{x^2}{2t} - \left(1 - \frac{x^2}{6} \right) \frac{x^4}{8t^3} - \dots = O(|t|^{-1}). \end{aligned} \quad (172)$$

Piše li se mjesto (realnog) broja x kompleksni broj b , ovi razvoji očito ostaju na snazi, ako je samo predznak korijenja tako odabran, da bude

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \sqrt{1 - \frac{b^2}{t^2}} = \lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t^2 - b^2}}{t} = +1, \quad (173)$$

pri čemu i t može biti kompleksna varijabla. Vrijedi dakle

$$\cos (\sqrt{t^2 - b^2} - t) = 1 + O(|t|^{-2}), \quad (174)$$

$$\sin (\sqrt{t^2 - b^2} - t) = O(|t|^{-1}). \quad (175)$$

Možemo stoga pisati

$$\begin{aligned} \sin \left(\sqrt{t^2 - b^2} - \frac{\pi}{4} \right) &= \sin \left(t - \frac{\pi}{4} \right) \cos (\sqrt{t^2 - b^2} - t) + \\ &+ \cos \left(t - \frac{\pi}{4} \right) \sin (\sqrt{t^2 - b^2} - t) = \\ &= \sin \left(t - \frac{\pi}{4} \right) [1 + O(|t|^{-2})] + \cos \left(t - \frac{\pi}{4} \right) O(|t|^{-1}) \end{aligned} \quad (176)$$

i analogno

$$\begin{aligned} \cos \left(\sqrt{t^2 - b^2} - \frac{\pi}{4} \right) &= \cos \left(t - \frac{\pi}{4} \right) [1 + O(|t|^{-2})] - \\ &- \sin \left(t - \frac{\pi}{4} \right) O(|t|^{-1}). \end{aligned} \quad (177)$$

Ako je imaginarni dio varijable t ograničen, a realni dio teži prema $\pm\infty$, $\left| \sin \left(t - \frac{\pi}{4} \right) \right|$ i $\left| \cos \left(t - \frac{\pi}{4} \right) \right|$ su ograničeni, pa je očito za taj slučaj

$$\sin \left(t - \frac{\pi}{4} \right) O(|t|^{-n}) = O(|t|^{-n}), \quad (178)$$

$$\cos \left(t - \frac{\pi}{4} \right) O(|t|^{-n}) = O(|t|^{-n}), \quad (179)$$

dakle prema (176) i (177)

$$\sin \left(\sqrt{t^2 - b^2} - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left(t - \frac{\pi}{4} \right) + O(|t|^{-1}), \quad (180)$$

$$\cos \left(\sqrt{t^2 - b^2} - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \left(t - \frac{\pi}{4} \right) + O(|t|^{-1}), \quad (181)$$

Iz (11) izlazi za $\nu = 0$ i $\nu = 1$ s obzirom na III (1):

$$A_0(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \cos \left(z - \frac{\pi}{4} \right) [1 + O(|z|^{-2})] + \sin \left(z - \frac{\pi}{4} \right) O(|z|^{-1}) \right\}, \quad (182)$$

$$A_1(z) = \frac{2}{z} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \sin \left(z - \frac{\pi}{4} \right) [1 + O(|z|^{-2})] + \cos \left(z - \frac{\pi}{4} \right) O(|z|^{-1}) \right\}. \quad (183)$$

Zbog (173) očito vrijedi

$$O(|\sqrt{t^2 - b^2}|^{-n}) = O(|t|^{-n}). \quad (184)$$

Nadomjesti li se u (182), (183) z sa $\sqrt{t^2 - b^2}$, gdje je t varijabla s ograničenim imaginarnim dijelom i s realnim dijelom, koji teži prema $+\infty$, bit će s obzirom na (173) zadovoljen uvjet (13) (i onda, ako je imaginarni dio od t jednak nuli), pa se dobije pomoću (180), (181), (184)

$$\begin{aligned} A_0(\sqrt{t^2 - b^2}) &= \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \left\{ \cos \left(t - \frac{\pi}{4} \right) + O(|t|^{-1}) \right\} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos \left(t - \frac{\pi}{4} \right) + O(|t|^{-\frac{3}{2}}), \end{aligned} \quad (185)$$

$$\begin{aligned} A_1(\sqrt{t^2 - b^2}) &= \frac{2}{t} \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \left\{ \sin \left(t - \frac{\pi}{4} \right) + O(|t|^{-1}) \right\} = \\ &= \frac{2}{t} \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \sin \left(t - \frac{\pi}{4} \right) + O(|t|^{-\frac{5}{2}}). \end{aligned} \quad (186)$$

S obzirom na (178), (179) izlazi također

$$A_0(\sqrt{t^2 - b^2}) = O(|t|^{-\frac{1}{2}}) \quad (187)$$

$$A_1(\sqrt{t^2 - b^2}) = O(|t|^{-\frac{3}{2}}) \quad (188)$$

što, drukčije rečeno, znači, da postoji konačni

$$\limsup_{|t| \rightarrow \infty} |t|^{\frac{1}{2}} |A_0(\sqrt{t^2 - b^2})| \text{ i } \limsup_{|t| \rightarrow \infty} |t|^{\frac{3}{2}} |A_1(\sqrt{t^2 - b^2})|,$$

gdje t tako teži prema ∞ , da realni dio teži prema $+\infty$, dok imaginarni dio ostaje ograničen.

Označuje li $M_0(t)$ maksimum funkcije $|A_0(\sqrt{t^2 - \lambda^2 b^2})|$, a $M_1(t)$ maksimum funkcije $|A_1(\sqrt{t^2 - \lambda^2 b^2})|$ s obzirom na realnu varijablu λ , koja prelazi zatvoreni interval $(0, 1)$, pod istim će uvjetima očito postojati i konačan

$$\limsup_{|t| \rightarrow \infty} |t|^{\frac{1}{2}} M_2(t) \text{ i } \limsup_{|t| \rightarrow \infty} |t|^{\frac{3}{2}} M_1(t), \text{ ili}$$

$$M_0(t) = O(|t|^{-\frac{1}{2}}) \quad (189), \quad M_1(t) = O(|t|^{-\frac{3}{2}}) \quad (190).$$

Iz toga izlazi

$$\begin{aligned} \left| \int_0^b A_0(\sqrt{t^2 - y^2}) dy \right| &= \left| \int_0^1 b A_0(\sqrt{t^2 - \lambda^2 b^2}) d\lambda \right| \leq \\ &\leq |b| \int_0^1 |A_0(\sqrt{t^2 - \lambda^2 b^2})| d\lambda \leq |b| M_0(t), \end{aligned} \quad (191)$$

dakle

$$\int_0^b A_0(\sqrt{t^2 - y^2}) dy = O(|t|^{-\frac{1}{2}}) \quad (192)$$

i analogno

$$\int_0^b A_1(\sqrt{t^2 - y^2}) dy = O(|t|^{-\frac{3}{2}}). \quad (193)$$

Prema (168), (169) dobivamo dakle

$$\int_b^t A_0(\sqrt{t^2 - y^2}) dy = \sin t + O(|t|^{-\frac{1}{2}}), \quad (194)$$

$$\int_b^t A_1(\sqrt{t^2 - y^2}) dy = \frac{2}{t} (1 - \cos t) + O(|t|^{-\frac{3}{2}}). \quad (195)$$

Poslije ovih priprava prelazimo na dokaz nemogućnosti identiteta (161). Neka je t realna varijabla, a m najveći stupanj polinoma R_0, R_1, R_2, R_3, R_4 , pa stavimo prema tome

$$R_0 = p_m t^m + p_{m-1} t^{m-1} + \dots, \quad (196a)$$

$$R_1 = q_m t^m + q_{m-1} t^{m-1} + \dots, \quad (196b)$$

$$R_2 = r_m t^m + r_{m-1} t^{m-1} + \dots, \quad (196c)$$

$$R_3 = s_m t^m + s_{m-1} t^{m-1} + \dots, \quad (196d)$$

$$R_4 = u_m t^m + u_{m-1} t^{m-1} + \dots, \quad (196e)$$

gdje je barem jedan od koeficijenata p_m, q_m, r_m, s_m, u_m od nule različit. Označimo li lijevu stranu identiteta (161) sa $F(t)$, izlazi iz toga identiteta na temelju (185), (186), (194), (195), (196):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-m} F(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (r_m \sin t + u_m) = 0, \quad (197)$$

dakle zbog periodiciteta sinusa

$$r_m \sin t + u_m \equiv 0 \quad (198)$$

ili

$$r_m = u_m = 0. \quad (199)$$

To dakle znači, da su R_2 i R_4 najviše $(m-1)$ -toga stupnja ili nula (ako je $m=0$). Time dobivamo dalje

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-m+\frac{1}{2}} F(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} p_m \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = 0, \quad (200)$$

dakle

$$p_m = 0. \quad (201)$$

I R_0 je dakle najviše $(m-1)$ -toga stupnja ili nula. Izlazi dalje
 $\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-m+1} F(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [r_{m-1} \sin t + 2s_m (1 - \cos t) + u_{m-1}] = 0, \quad (202)$

dakle zbog periodiciteta izraza u uglastoj zagradi

$$r_{m-1} \sin t + 2s_m (1 - \cos t) + u_{m-1} \equiv 0. \quad (203)$$

Za $t=0$ izlazi

$$u_{m-1} = 0, \quad (204)$$

za $t=\pi$ dobiva se

$$s_m = 0, \quad (205)$$

a za $t = \frac{\pi}{2}$

$$r_{m-1} = 0, \quad (206)$$

tako da je i R_3 najviše $(m-1)$ -toga stupnja ili nula, a R_2 i R_4 najviše $(m-2)$ -toga stupnja ili nula. Prema tome je dalje

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} t^{-m+\frac{3}{2}} F(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left[p_{m-1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) + \right. \\ &\quad \left. + q_m \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (207)$$

dakle

$$p_{m-1} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) + q_m \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \equiv 0. \quad (208)$$

Za $t = \frac{\pi}{4}$ izlazi

$$p_{m-1} = 0, \quad (209)$$

a za $t = \frac{3\pi}{4}$

$$q_m = 0. \quad (210)$$

Time je i R_1 najviše $(m-1)$ -toga stupnja ili nula, a R_0 najviše $(m-2)$ -toga stupnja ili nula. Prema (199), (201), (205), (210) svi su dakle koeficijenti p_m, q_m, r_m, s_m, u_m jednaki nuli, t. j. nijedan od polinoma $R_0, \dots, R_4$ nije m -toga stupnja, što se protivi pretpostavci. Identitet (161) je dakle nemoguć.

Da dokažemo nemogućnost općeg identiteta (157), prenijet ćemo taj identitet pomoću Laplaceove transformacije iz područja prvotnih funkcija u područje izvedenih funkcija. Pomnožimo najprije identitet polinomom

$$G(t) = \prod_{k=1}^N (t - a_k - b_k)(t - a_k), \quad (211)$$

koji sigurno ne iščezava identično. Stavimo li

$$R_{0,k}(t) \cdot G(t) = R_{0,k}(t), \quad (212)$$

$$R_{1,k}(t) \cdot G(t) = (t - a_k - b_k) \bar{R}_{1,k}(t), \quad (213)$$

$$R_{2,k}(t) \cdot G(t) = \bar{R}_{2,k}(t), \quad (214)$$

$$R_{3,k}(t) \cdot G(t) = (t - a_k) \bar{R}_{3,k}(t), \quad (215)$$

$$R_4(t) \cdot G(t) = \bar{R}_4(t), \quad (216)$$

opet su i $\bar{R}_{0,k}(t), \bar{R}_{1,k}(t), \bar{R}_{2,k}(t), \bar{R}_{3,k}(t), \bar{R}_4(t)$ polinomi, i njihovo identično iščezavanje je ekvivalentno s identičnim iščezavanjem polinoma $R_{0,k}(t), \dots, R_4(t)$. Uvedemo li još (158), možemo mjesto identiteta (157) razmatrati identitet

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N \bar{R}_{0,k}(t) \Lambda_0(\sqrt{(t-a_k)^2 - b_k^2}) + \\ & + \sum_{k=1}^N \bar{R}_{1,k}(t) (t - a_k - b_k) \Lambda_1(\sqrt{(t-a_k)^2 - b_k^2}) + \\ & + \sum_{k=1}^N \bar{R}_{2,k}(t) \int_{b_k}^{t-a_k} \Lambda_0(\sqrt{(t-a_k)^2 - y^2}) dy + \\ & + \sum_{k=1}^N \bar{R}_{3,k}(t) (t - a_k) \int_{b_k}^{t-a_k} \Lambda_1(\sqrt{(t-a_k)^2 - y^2}) dy + \bar{R}_4(t) \equiv 0. \quad (217) \end{aligned}$$

Prema (58) vrijedi

$$\int_b^{\infty} e^{-st} A_0(\sqrt{t^2 - b^2}) dt = \frac{\exp(-b\sqrt{s^2 + 1})}{\sqrt{s^2 + 1}} \quad (b \geq 0, \operatorname{Re}(s) > 0). \quad (218)$$

Kao što je spomenuto u diskusiji formule (4c), može se analitičkim produživanjem uvidjeti, da se b može odabrati i kompleksno, pa se u tom slučaju krivulja integracije počinje u točki b i teži prema $+\infty$. Možemo je napose odabrati i tako, da vodi od točke b do jedne na osi x po volji odabrane točke, a odanle uz os x prema $+\infty$.

Ako je ai imaginarni dio kompleksnoga broja a , supstitucija će $t = t - a$ (219) uzrokovati, da se krivulja integracije počinje u točki $a + b$ i teži prema $ai + \infty$. Uočimo li, da je integrand cijela funkcija, koja teži eksponencijalno prema nuli, kad uz ograničeni imaginarni dio realni dio od t teži prema $+\infty$ [isporedi (187)], uvidamo, da se na temelju Cauchyeva teorema put integracije može tako pomaknuti, da od točke $a + b$ teži prema $+\infty$. Vrijedi stoga

$$\int_{a+b}^{\infty} e^{-st} A_0(\sqrt{(t-a)^2 - b^2}) dt = \frac{\exp(-b\sqrt{s^2 + 1} - as)}{\sqrt{s^2 + 1}} \quad (\operatorname{Re}(s) > 0). \quad (220)$$

Derivira li se ova jednadžba r puta po s , izlazi

$$\int_{a+b}^{\infty} e^{-st} t^r A_0(\sqrt{(t-a)^2 - b^2}) dt = (-1)^r \frac{\partial^r}{\partial s^r} \frac{\exp(-b\sqrt{s^2 + 1} - as)}{\sqrt{s^2 + 1}}. \quad (221)$$

Deriviranje relacije (220) po b daje pomoću III (8)

$$\begin{aligned} & \int_{a+b}^{\infty} e^{-st} A_1(\sqrt{(t-a)^2 - b^2}) dt = \\ & = \frac{2}{b} \left\{ \exp[-(a+b)s] - \exp(-b\sqrt{s^2 + 1} - as) \right\}. \end{aligned} \quad (222)$$

Derivira li se to po s , izlazi

$$\begin{aligned} \int_{a+b}^{\infty} e^{-st} t A_1(\sqrt{(t-a)^2 - b^2}) dt &= \frac{2}{b} \left\{ (a+b) \exp[-(a+b)s] + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial s} \exp(-b\sqrt{s^2 + 1} - as) \right\}. \end{aligned} \quad (223)$$

Prema (222) i (223) vrijedi

$$\begin{aligned} & \int_{a+b}^{\infty} e^{-st} (t-a-b) \Lambda_1(\sqrt{(t-a)^2-b^2}) dt = \\ & = \frac{2}{b} \left(\frac{\partial}{\partial s} + a+b \right) \exp(-b\sqrt{s^2+1} - as). \end{aligned} \quad (224)$$

Deriviramo to još r puta po s i dobijemo

$$\begin{aligned} & \int_{a+b}^{\infty} e^{-st} t^r (t-a-b) \Lambda_1(\sqrt{(t-a)^2-b^2}) dt = \\ & = (-1)^r \frac{\partial^r}{\partial s^r} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial s} + a+b \right) \left[\frac{2}{b} \exp(-b\sqrt{s^2+1} - as) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (225)$$

Prema (59) vrijedi

$$\int_b^{\infty} e^{-st} \int_b^t \Lambda_0(\sqrt{t^2-y^2}) dy dt = \frac{\exp(-b\sqrt{s^2+1})}{s^2+1} \quad (\operatorname{Re}(s) > 0). \quad (226)$$

Nadomjestimo li opet t sa $t-a$, pomaknemo prikladno put integracije i deriviramo r puta po s , izlazi

$$\begin{aligned} & \int_{a+b}^{\infty} e^{-st} t^r \int_b^{t-a} \Lambda_0(\sqrt{(t-a)^2-y^2}) dy dt = \\ & = (-1)^r \frac{\partial^r}{\partial s^r} \frac{\exp(-b\sqrt{s^2+1} - as)}{s^2+1}. \end{aligned} \quad (227)$$

Ako na temelju (222) izvršimo prijetvorbu analognu onoj, koja je dovela od (58) do (59), i pomnožimo jednadžbu sa e^{as} , dobivamo

$$\begin{aligned} & \int_{a+b}^{\infty} \exp[-s(t-a)] \int_b^{t-a} \Lambda_1(\sqrt{(t-a)^2-y^2}) dy dt = \\ & = \int_b^{\infty} \frac{2}{y} [\exp(-ys) - \exp(-y\sqrt{s^2+1})] dy \quad (\operatorname{Re}(s) > 0). \end{aligned} \quad (228)$$

Deriviranje po s i dioba sa e^{as} daje

$$\begin{aligned} & - \int_{a+b}^{\infty} e^{-st} (t-a) \int_b^{t-a} \Lambda_1(\sqrt{(t-a)^2 - y^2}) dy dt = \\ & = \frac{2 \exp[-(a+b)s]}{s} - \frac{2s}{s^2+1} \exp(-b\sqrt{s^2+1} - as). \quad (229) \end{aligned}$$

Derivirajmo tu jednadžbu r puta po s :

$$\begin{aligned} & \int_{a+b}^{\infty} e^{-st} t^r (t-a) \int_b^{t-a} \Lambda_1(\sqrt{(t-a)^2 - y^2}) dy dt = \\ & = (-1)^r \frac{\partial^r}{\partial s^r} \left\{ \frac{2 \exp[-(a+b)s]}{s} - \frac{2s}{s^2+1} \exp(-b\sqrt{s^2+1} - as) \right\}. \quad (230) \end{aligned}$$

Uvedimo sad kraticu

$$\begin{aligned} Q_k(t) &= \overline{R}_{0,k}(t) \Lambda_0(\sqrt{(t-a_k)^2 - b_k^2}) + \\ &+ \overline{R}_{1,k}(t) (t-a_k-b_k) \Lambda_1(\sqrt{(t-a_k)^2 - b_k^2}) + \\ &+ \overline{R}_{2,k}(t) \int_{b_k}^{t-a_k} \Lambda_0(\sqrt{(t-a_k)^2 - y^2}) dy + \\ &+ \overline{R}_{3,k}(t) (t-a_k) \int_{b_k}^{t-a_k} \Lambda_1(\sqrt{(t-a_k)^2 - y^2}) dy \quad (231) \end{aligned}$$

i načinimo izraz

$$T(s) = \sum_{k=1}^N \int_{a_k+b_k}^{\infty} e^{-st} Q_k(t) dt + \int_0^{\infty} e^{-st} \overline{R}_4(t) dt. \quad (232)$$

Zamislamo li, da put integracije pojedinih integrala pod sumom vodi od $a_k + b_k$ do 0 (na pr. pravocrtno), i zatim od 0 po osi x prema ∞ , dijelovi će integrala od 0 do ∞ s posljednjim integralom od (232) prema pretpostavljenom identitetu (217) dati nulu, tako da ostaje

$$T(s) = \sum_{k=1}^N \int_{a_k+b_k}^0 e^{-st} Q_k(t) dt. \quad (233)$$

Time je postignuto, da su otpale teškoće konvergencije, pa je stoga cijela analitička funkcija (233) jednoznačno definirana u cijeloj ravnini. (Dvoznačnost korištena u argumentima Bessel-ovih funkcija ne očituje se, jer su to take funkcije svojeg argumenta.) Razumijeva li se pod $\bar{R}_{0,k} \left(-\frac{\partial}{\partial s} \right)$ simbolički izraz, koji se dobije, ako se u polinomu $\bar{R}_{0,k}(t)$ zamijeni općenito t^r sa $(-1)^r \frac{\partial^r}{\partial s^r}$ i analogno za $\bar{R}_{1,k}(t), \dots, \bar{R}_4(t)$, može se na temelju (221), (225), (227), (230) i na temelju relacije

$$\int_0^{\infty} e^{-st} t^r dt = \frac{r!}{s^{r+1}} = (-1)^r \frac{\partial^r}{\partial s^r} \frac{1}{s} \quad (234)$$

mjesto (232) pisati

$$\begin{aligned} T(s) = & \sum_{k=1}^N \left\{ \bar{R}_{0,k} \left(-\frac{\partial}{\partial s} \right) \frac{\exp(-b_k \sqrt{s^2+1} - a_k s)}{\sqrt{s^2+1}} + \right. \\ & + \bar{R}_{1,k} \left(-\frac{\partial}{\partial s} \right) \left[\left(\frac{\partial}{\partial s} + a_k + b_k \right) \frac{2 \exp(-b_k \sqrt{s^2+1} - a_k s)}{b_k} \right] + \\ & + \bar{R}_{2,k} \left(-\frac{\partial}{\partial s} \right) \frac{\exp(-b_k \sqrt{s^2+1} - a_k s)}{s^2+1} + \\ & + \bar{R}_{3,k} \left(-\frac{\partial}{\partial s} \right) \left[\frac{2 \exp[-(a_k+b_k)s]}{s} \cdot \frac{2s \exp(-b_k \sqrt{s^2+1} - a_k s)}{s^2+1} \right] \Bigg\} + \\ & + \bar{R}_4 \left(-\frac{\partial}{\partial s} \right) \frac{1}{s} \quad (235) \end{aligned}$$

Slučaj $b_{k_1} = 0$ [vidi (156a)] ne daje bitnih teškoća. U prvom, trećem i četvrtom članu pod sumom može se izravno staviti $b_{k_1} = 0$, što se može učiniti već u (220), dakle i u (221), zatim u (226) i (227) pa u (229) i (230). U drugom članu dobije se mjesto

$$\frac{2 \exp(-b_{k_1} \sqrt{s^2+1} - a_{k_1} s)}{b_{k_1}}$$

graničnim prijelazom $-2 \sqrt{s^2+1} \exp(-a_{k_1} s)$ što se može izvršiti već u (224) i (225).

U području, u kojem su integrali u (232) konvergentni, funkcija (235) je identična s funkcijom (233), pa analitičkim produživanjem izlazi, da mora s njom biti identična svagdje, t. j. (235) je cijela analitička funkcija i prema tome ne mijenja svoju vrijednost, ako se s uzduž zatvorene krivulje povrti u prvotnu točku.

Riemannova ploha funkcije $\sqrt{s^2+1}$ ima dva razgraništa $s=i$ i $s=-i$, pa obilaženje svakog od tih razgraništa mijenja korijenu predznak. Odaberimo dakle zatvorenu krivulju, koja obuhvaća, recimo, $+i$, a ne obuhvaća $-i$, i zamislimo, da s prođe po toj krivulji. Tim će se u (235) izmijeniti predznaci korijena. Budući da čitava funkcija (235) mora ostati ista, bit će razlika dobivenoga i prvotnog izraza jednaka nuli:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \left\{ \bar{R}_{0,k} \left(-\frac{\partial}{\partial s} \right) \frac{\exp(-b_k \sqrt{s^2+1} - a_k s) + \exp(b_k \sqrt{s^2+1} - a_k s)}{\sqrt{s^2+1}} + \right. \\ + \bar{R}_{1,k} \left(-\frac{\partial}{\partial s} \right) \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial s} + a_k + b_k \right) \left[\frac{2}{b_k} \exp(-b_k \sqrt{s^2+1} - a_k s) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2}{b_k} \exp(b_k \sqrt{s^2+1} - a_k s) \right] \right\} + \\ + \bar{R}_{2,k} \left(-\frac{\partial}{\partial s} \right) \frac{\exp(-b_k \sqrt{s^2+1} - a_k s) - \exp(b_k \sqrt{s^2+1} - a_k s)}{s^2 + 1} + \\ + \bar{R}_{3,k} \left(-\frac{\partial}{\partial s} \right) \left[-\frac{2s}{s^2+1} \exp(-b_k \sqrt{s^2+1} - a_k s) + \right. \\ \left. + \frac{2s}{s^2+1} \exp(b_k \sqrt{s^2+1} - a_k s) \right] \Big\} \equiv 0. \quad (236) \end{aligned}$$

Ni ovdje slučaj $b_{k_1} = 0$ ne daje bitnih teškoća. Prvi član pod sumom daje

$$\bar{R}_{0,k} \left(-\frac{\partial}{\partial s} \right) \frac{2 \exp(-a_{k_1} s)}{\sqrt{s^2+1}},$$

drugi član daje

$$\bar{R}_{1,k_1} \left(-\frac{\partial}{\partial s} \right) \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial s} + a_{k_1} \right) \left[-4 \sqrt{s^2+1} \exp(-a_{k_1} s) \right] \right\},$$

a treći i četvrti član otpadaju.

Razmatrajmo kompleksne brojeve $-a_k + b_k$ i $-a_k - b_k$ ($k = 1, \dots, N$), pri čemu je moguće, da su neki od tih brojeva međusobno jednaki, a da nije povrijeđen uvjet stavka IV. 8, da ni u kojem paru jednadžbi (156) nisu zadovoljene obje jednadžbe. Ipak ćemo sve te brojeve in abstracto razlikovati. Ako međutim za jednu vrijednost k_1 indeksa k vrijedi (156a), ne ćemo razlikovati dotična dva broja $-a_{k_1} + b_{k_1}$ i $-a_{k_1} - b_{k_1}$, koja su oba jednaka $-a_{k_1}$, već ćemo taj broj uvrstiti samo među brojeve $-a_k + b_k$. U tom slučaju dakle razmatramo svega $2N-1$ takvih brojeva, dok ih je inače $2N$.

Neka je ϱ maksimum apsolutnih vrijednosti tih $2N$ odnosno $2N-1$ brojeva, t. j. polumjer najveće kružnice sa središtem u ishodištu, na kojoj leži bar jedna od točaka, koje odgovaraju tim brojevima. Odaberimo jednu od tih točaka na toj kružnici, pri čemu je moguće, da toj točki odgovara nekoliko međusobno jednakih brojeva. Neka su ti međusobno jednaki brojevi

$$-a_k + b_k \text{ za indekse } k = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n_1}. \quad (237)$$

$$-a_k - b_k \text{ „ „ „ } k = \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n_2}. \quad (238)$$

Među indeksima pod (237) može pri tom biti sadržan indeks k_1 . Zajednička vrijednost tih brojeva neka je $\varrho e^{i\varphi}$ ($-\pi < \varphi \leq \pi$).

Da korijeni u (236) budu jednoznačni, ograničimo se na područje izvan kružnice s polumjerom $R = 1$ i ustanovimo, da korijen $\sqrt{s^2+1}$ treba da bude pozitivan za realno pozitivno s . (Ta pretpostavka odgovara (173) i šutke je vrijedila već za (218).) Možemo tada korijen razviti u red potencija po $\frac{1}{s}$:

$$\sqrt{s^2+1} = s \sqrt{1 + \frac{1}{s^2}} = s + \frac{1}{2s} - \frac{1}{8s^3} + \dots \quad (239)$$

Funkcija

$$\sqrt{s^2+1} - s = \frac{1}{2s} - \frac{1}{8s^3} + \dots \quad (240)$$

je dakle za $s = \infty$ regularna i jednaka nuli, i stoga funkcija

$$\exp [A (\sqrt{s^2+1} - s)] = \exp \left[A \left(\frac{1}{2s} - \frac{1}{8s^3} + \dots \right) \right], \quad (241)$$

gdje je A bilo kakav kompleksni broj, za $s = \infty$ regularna i jednaka jedan. Lako se uviđa, da (236) poslije izvršenih deriviranja dobiva oblik

$$\sum_{k=1}^N \left\{ U_k(s) + \sqrt{s^2+1} V_k(s) \right\} \exp(-b_k \sqrt{s^2+1} - a_k s) - \\ - \sum_{k=1}^N \left\{ U_k(s) - \sqrt{s^2+1} V_k(s) \right\} \exp(b_k \sqrt{s^2+1} - a_k s) \equiv 0, \quad (242)$$

gdje su $U(s)$ i $V(s)$ izvjesne racionalne funkcije od s . Taj oblik vrijedi napose i za $k=k_1$ ($b_{k_1}=0$), samo što će za taj indeks dio sa $U_{k_1}(s)$ otpasti, a dijelovi sa $V_{k_1}(s)$ će se zbrojiti.

Pomnožimo li (242) sa $\exp(-s \varrho e^{i\varphi})$, možemo pisati:

$$\sum_{k=1}^N \left\{ U_k(s) + \sqrt{s^2+1} V_k(s) \right\} \exp[-b_k(\sqrt{s^2+1} - s)] \cdot \\ \cdot \exp[(-a_k - b_k - \varrho e^{i\varphi})s] - \\ - \sum_{k=1}^N \left\{ U_k(s) - \sqrt{s^2+1} V_k(s) \right\} \exp[b_k(\sqrt{s^2+1} - s)] \cdot \\ \cdot \exp[(-a_k + b_k - \varrho e^{i\varphi})s] \equiv 0. \quad (243)$$

Istražimo iz prve sume članove, za koje indeks k ima vrijednosti (238), a iz druge sume članove, kojima indeks ima vrijednosti (237). Među ovim posljednjima može biti član s indeksom $k=k_1$, za koji je $b_{k_1}=0$. Za taj indeks vadimo dotične članove iz obiju suma, što zajedno daje

$$2 \sqrt{s^2+1} V_{k_1}(s) \exp[(-a_{k_1} - \varrho e^{i\varphi})s].$$

Sve ove izvađene članove skupimo u funkciju $G_1(s)$, dok sve ostale članove skupimo u funkciju $G_2(s)$. Onda je dakle

$$G_1(s) + G_2(s) \equiv 0 \quad (244)$$

$$\text{ili} \quad G_1(s) \equiv -G_2(s). \quad (245)$$

Uzmemo li sad u račun, da su eksponencijalne funkcije $\exp[(-a_k - b_k - \varrho e^{i\varphi})s]$ i $\exp[(-a_k + b_k - \varrho e^{i\varphi})s]$ u članovima od $G_1(s)$ sve jednake jedan, jer smo zajedničku vrijednost dotičnih brojeva $-a_k - b_k$ i $-a_k + b_k$ označili sa $\varrho e^{i\varphi}$, izlazi iz (239) i (241), da $G_1(s)$ za $s = \infty$ može imati samo nebitno singularno mjesto.

Za vrijednosti indeksa k , koje su sadržane u $G_2(s)$, vrijedi

$$-a_k + b_k = \varrho_k \exp(i\varphi_k) \quad (-\pi < \varphi_k \leq \pi), \quad (246)$$

$$-a_k - b_k = \sigma_k \exp(i\psi_k) \quad (-\pi < \psi_k \leq \pi), \quad (247)$$

pri čemu je sigurno

$$\varrho_k \leq \varrho, \quad \sigma_k \leq \varrho, \quad (248)$$

jer je ϱ maksimum svih apsolutnih vrijednosti tih brojeva, a u slučaju

$$\varrho_k = \varrho \quad \text{odnosno} \quad \sigma_k = \varrho \quad (249)$$

sigurno je

$$\varphi_k \neq \varphi \quad \text{odnosno} \quad \psi_k \neq \varphi, \quad (250)$$

jer se ti brojevi razlikuju od $\varrho e^{i\varphi}$. Stavimo li sad u $G_2(s)$

$$s = \lambda e^{-i\varphi}, \quad (251)$$

gdje neka λ bude pozitivno (dakle realno), dobivamo za eksponente eksponencijalnih funkcija

$$\begin{aligned} (-a_k + b_k - \varrho e^{i\varphi}) \lambda e^{-i\varphi} &= \lambda [(-a_k + b_k) e^{-i\varphi} - \varrho] = \\ &= \lambda \{ \varrho_k \exp[i(\varphi_k - \varphi)] - \varrho \} = \lambda [\varrho_k \cos(\varphi_k - \varphi) - \varrho + \\ &\quad + i \varrho_k \sin(\varphi_k - \varphi)] \end{aligned} \quad (252)$$

i analogno

$$\begin{aligned} (-a_k - b_k - \varrho e^{i\varphi}) \lambda e^{-i\varphi} &= \\ &= \lambda [\sigma_k \cos(\psi_k - \varphi) - \varrho + i \sigma_k \sin(\psi_k - \varphi)]. \end{aligned} \quad (253)$$

Realni dio tih eksponenata je u slučaju (249) negativan zbog (250), a pogotovu je negativan u slučaju znaka $<$ u (248). Ako je dakle μ minimum brojeva $\varrho - \varrho_k \cos(\varphi_k - \varphi)$ i $\varrho - \sigma_k \cos(\psi_k - \varphi)$ i ako je $0 < \varepsilon < \mu$, za $\lambda \rightarrow \infty$ $G_2(s)$ će sigurno jače težiti prema nuli nego $\exp[-(\mu - \varepsilon)\lambda]$, jer su eksponencijalne funkcije pomnožene funkcijom poput (241), (239) i racionalnim funkcijama $U_k(s)$ odnosno $V_k(s)$, a sve te funkcije ne mogu težiti jače prema ∞ nego konačna potencija. Ako dakle funkcija $G_2(s)$ sadržava barem jedan član, ima ona za $s = \infty$ sigurno bitno singularno mjesto, koliko ne iščezava identično. Budući da

lijeva strana identiteta (245) nema bitno singularno mjesto za $s = \infty$, mora desna strana, dakle i lijeva, identično iščezavati, t. j. vrijedi

$$G_1(s) \equiv 0. \quad (254)$$

Kad $G_2(s)$ uopće ne bi imao članova, vrijedila bi eo ipso relacija (254), no $G_2(s)$ ima za $N \geq 2$ (a slučaj $N=1$ smo već riješili) sigurno barem jedan član, jer bi inače svi brojevi $-a_k - b_k$ i $-a_k + b_k$ bili sadržani među jednakim brojevima (237) i (238), što bi dovelo do protivrječja s pretpostavkom stavka IV. 8. s obzirom na jednadžbe (156). Kako smo vidjeli, u izrazu $G_1(s)$ može biti sadržan član s indeksom k_1 . Ako je u $G_1(s)$ sadržan samo taj član sa k_1 , za koji je $g_{k_1} = 0$, onda je

$$G_2(s) \equiv 0 \quad (255)$$

identitet, koji odgovara identitetu (236), samo što nema članova s indeksom k_1 . Na temelju toga skraćenog identiteta, koji zbog $N \geq 2$ sigurno nije bez članova, vršimo analogni postupak, koji smo izvršili sa (236) i dolazimo do neke nove funkcije $G_1(s)$, koja više ne sadržava član sa k_1 (ali sigurno nije bez članova, kako izlazi iz postupka, kojim se ta funkcija dobije).

Prema tome smo dakle svakako došli do neke funkcije $G_1(s)$, koja sigurno ne sadržava samo član s indeksom k_1 . Prema načinu, kako su iz (243) odijeljeni članovi za $G_1(s)$, imat će (254) oblik

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n_2} \left\{ U_{\beta_k}(s) + \sqrt{s^2+1} V_{\beta_k}(s) \right\} \exp(-b_{\beta_k} \sqrt{s^2+1} - a_{\beta_k} s) - \\ & - \sum_{k=1}^{n_1} \left\{ U_{\alpha_k}(s) - \sqrt{s^2+1} V_{\alpha_k}(s) \right\} \exp(b_{\alpha_k} \sqrt{s^2+1} - a_{\alpha_k} s) \equiv 0, \quad (256) \end{aligned}$$

pri čemu smo faktor $\exp(-s \varrho e^{i\varphi})$ opet odbacili. Ukoliko je član s indeksom k_1 sadržan u tom identitetu, on glasi prema prije spomenutom

$$2\sqrt{s^2+1} V_{k_1}(s) \exp(-s_{k_1} s).$$

Prođe li s iznova zatvorenu krivulju, koja uključuje $+i$, a isključuje $-i$, promijenit će se predznaci korijena u (256), t. j. izlazi

$$\sum_{k=1}^{n_1} \left\{ U_{\beta_k}(s) - \sqrt{s^2+1} V_{\beta_k}(s) \right\} \exp(b_{\beta_k} \sqrt{s^2+1} - a_{\beta_k} s) - \\ - \sum_{k=1}^{n_1} \left\{ U_{\alpha_k}(s) + \sqrt{s^2+1} V_{\alpha_k}(s) \right\} \exp(-b_{\alpha_k} \sqrt{s^2+1} - a_{\alpha_k} s) \equiv 0, \quad (257)$$

a član s indeksom k_1 , ukoliko je sadržan, glasi

$$2\sqrt{s^2+1} V_{k_1}(s) \exp(-a_{k_1} s).$$

Razmatrajmo sad brojeve

$$-a_k - b_k \quad \text{za indekse } k = \alpha_1, \dots, \alpha_{n_1}, \quad (258)$$

$$-a_k + b_k \quad ,, \quad k = \beta_1, \dots, \beta_{n_1}, \quad (259)$$

koje dobijemo iz (237) i (238) promjenom predznaka brojeva b_k . Budući da su brojevi (237) i (238) međusobno jednaki, brojevi su (258), (259) svi međusobno različiti. Da su dva broja (258) jednaka, t. j.

$$-a_j - b_j = -a_k - b_k, \quad (260)$$

a uz to otprije

$$-a_j + b_j = -a_k + b_k, \quad (261)$$

izlazilo bi

$$a_j = a_k, \quad b_j = b_k \quad (262)$$

u protivrječju s pretpostavkom stavka IV. 8. Analogno vrijedi za slučaj, da su dva broja (259) jednaka. Da je jedan broj (258) jednak jednom broju (259), bilo bi

$$-a_\alpha - b_\alpha = -a_\beta + b_\beta, \quad (263)$$

a otprije

$$-a_\alpha + b_\alpha = -a_\beta - b_\beta, \quad (264)$$

pa bi bilo

$$a_\alpha = a_\beta \text{ i } b_\alpha = -b_\beta, \text{ dakle } b_\alpha^2 = b_\beta^2 \quad (265)$$

u protivrječju s pretpostavkom stavka IV. 8. Ovdje se vidi, zašto su u (156) brojevi b_k u kvadratu. Na ovo pitanje ćemo se još kasnije osvrnuti.

Ako je $\bar{\varrho}$ maksimum apsolutnih vrijednosti brojeva (258), (259), pa je $\bar{\varrho} e^{i\bar{\varphi}}$ jedan od brojeva, koji imaju tu apsolutnu vrijednost, možemo (257) pomnožiti sa $\exp(-s \bar{\varrho} e^{i\bar{\varphi}})$ i dobivamo analogon relacije (243):

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n_2} \left\{ U_{\beta_k}(s) - \sqrt{s^2+1} V_{\beta_k}(s) \right\} \cdot \\ & \cdot \exp[b_{\beta_k}(\sqrt{s^2+1}-s)] \exp[(-a_{\beta_k} + b_{\beta_k} - \bar{\varrho} e^{i\bar{\varphi}})s] - \\ & - \sum_{k=1}^{n_1} \left\{ U_{\alpha_k}(s) + \sqrt{s^2+1} V_{\alpha_k}(s) \right\} \cdot \\ & \cdot \exp[-b_{\alpha_k}(\sqrt{s^2+1}-s)] \exp[(-a_{\alpha_k} - b_{\alpha_k} - \bar{\varrho} e^{i\bar{\varphi}})s] \equiv 0. \quad (266) \end{aligned}$$

(Eventualni član indeksa k_1 dakako glasi

$$-2\sqrt{s^2+1} V_{k_1}(s) \exp[(-a_{k_1} - \bar{\varrho} e^{i\bar{\varphi}})s].)$$

Ako se broj $\bar{\varrho} e^{i\bar{\varphi}}$ nalazi među brojevima $-a_{\beta_k} + b_{\beta_k}$, izvadit ćemo član s indeksom β_k i nazvati ga $\bar{G}_1(s)$, dok ostatak izraza (266) nazivamo $\bar{G}_2(s)$. Ako je naprotiv broj $\bar{\varrho} e^{i\bar{\varphi}}$ sadržan među brojevima $-a_{\alpha_k} - b_{\alpha_k}$, neka je $\bar{G}_1(s)$ član s indeksom α_k , a ostatak izraza neka je $\bar{G}_2(s)$. Analognim razmatranjem kao prije dobivamo

$$\bar{G}_1(s) \equiv 0. \quad (267)$$

Ako je $\bar{\varrho} e^{i\bar{\varphi}}$ bio broj s indeksom k_1 , t. j. $\bar{\varrho} e^{i\bar{\varphi}} = -a_{k_1}$, daje nam

$$\bar{G}_2(s) \equiv 0 \quad (268)$$

identitet, koji se podudara sa (257), samo što nema člana s indeksom k_1 . Ponovimo li razmatranje, dolazimo svakako do neke funkcije $\bar{G}_1(s)$, koja ne sadržava toga člana, t. j. ima oblik

$$\left\{ U_{\alpha}(s) + \sqrt{s^2+1} V_{\alpha}(s) \right\} \exp(-b_{\alpha} \sqrt{s^2+1} - a_{\alpha} s) \equiv 0, \quad (269)$$

ako je $\bar{\rho} e^{i\varphi}$ među brojevima (258) odnosno

$$\{U_{\beta}(s) - \sqrt{s^2 + 2} V_{\beta}(s)\} \exp(b_{\beta} \sqrt{s^2 + 1} - a_{\beta} s) \equiv 0, \quad (270)$$

ako je $\bar{\rho} e^{i\varphi}$ među brojevima (259). Prođe li s zatvorenu krivulju, koja uključuje $+i$, a isključuje $-i$, možemo u (270) promijeniti predznake korijenja, tako da i tu dobijemo oblik (269).

Isporedi li se (243) sa (236), vidi se, da identitet (269), koji sadržava samo članove, u kojima je u eksponentu eksponencijalne funkcije negativni predznak pred b_k , mora glasiti

$$\begin{aligned} & \bar{R}_{0,\alpha} \left(-\frac{\partial}{\partial s} \right) \frac{\exp(-b_{\alpha} \sqrt{s^2 + 1} - a_{\alpha} s)}{\sqrt{s^2 + 1}} + \\ & + \bar{R}_{1,\alpha} \left(-\frac{\partial}{\partial s} \right) \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial s} + a_{\alpha} + b_{\alpha} \right) \left[\frac{2}{b_{\alpha}} \exp(-b_{\alpha} \sqrt{s^2 + 1} - a_{\alpha} s) \right] \right\} + \\ & + \bar{R}_{2,\alpha} \left(-\frac{\partial}{\partial s} \right) \frac{\exp(-b_{\alpha} \sqrt{s^2 + 1} - a_{\alpha} s)}{s^2 + 1} + \\ & + \bar{R}_{3,\alpha} \left(-\frac{\partial}{\partial s} \right) \left\{ -\frac{2s}{s^2 + 1} \exp(-b_{\alpha} \sqrt{s^2 + 1} - a_{\alpha} s) \right\} \equiv 0. \quad (271) \end{aligned}$$

S obzirom na (221), (225), (227), (230) i na relaciju

$$\int_{a+b}^{\infty} e^{-st} t^r dt = (-1)^r \frac{\partial^r}{\partial s^r} \frac{\exp[-(a+b)s]}{s} \quad (272)$$

može se mjesto (271) pisati

$$\begin{aligned} & \int_{a_{\alpha} + b_{\beta}}^{\infty} e^{-st} \left\{ \bar{R}_{0,\alpha}(t) \Lambda_0(\sqrt{(t-a_{\alpha})^2 - b_{\alpha}^2}) + \right. \\ & + \bar{R}_{1,\alpha}(t) (t-a_{\alpha}-b_{\alpha}) \Lambda_1(\sqrt{(t-a_{\alpha})^2 - b_{\alpha}^2}) + \\ & + \bar{R}_{2,\alpha}(t) \int_{b_{\alpha}}^{t-a_{\alpha}} \Lambda_0(\sqrt{(t-a_{\alpha})^2 - y^2}) dy + \\ & \left. + \bar{R}_{3,\alpha}(t) (t-a_{\alpha}) \int_{b_{\alpha}}^{t-a_{\alpha}} \Lambda_1(\sqrt{(t-a_{\alpha})^2 - y^2}) dy - 2\bar{R}_{3,\alpha}(t) \right\} dt \equiv 0. \quad (273) \end{aligned}$$

Stavimo li

$$t = \bar{t} + a_\alpha + b_\alpha, \quad (274)$$

postaje donja granica vanjskog integrala nula, a ako prikladno pomaknemo put integracije, gornja granica je opet $+\infty$. Time je integracija protegnuta uzduž realne osi, pa možemo upotrijebiti stavak o uzajamnoj jednoznačnosti preslikavanja, koje daje Laplaceova transformacija¹⁵. Time je izraz u zagradi, u koji naknadno opet uvodimo t prema (274), identično jednak nuli. To je onda relacija poput (160), tako da vrijedi

$$\overline{R_{0,\alpha}}(t) \equiv \overline{R_{1,\alpha}}(t) \equiv \overline{R_{2,\alpha}}(t) \equiv \overline{R_{3,\alpha}}(t) \equiv 0 \quad (275)$$

i s obzirom na (212) do (216),

$$R_{0,\alpha}(t) \equiv R_{1,\alpha}(t) \equiv R_{2,\alpha}(t) \equiv R_{3,\alpha}(t) \equiv 0. \quad (276)$$

Time smo u prvom identitetu (157) snizili N za jednu jedinicu. Ponavljanjem toga postupka može se sniziti N na jedan. Koliko postoji indeks k_1 , za koji je $b_{k_1} = 0$, dotični će članovi ostati u tom posljednjem identitetu, u kojem je $N = 1$. Budući da smo za taj slučaj već izveli dokaz, koji ne ovisi o tom, da li je $b = 0$, time je sve dokazano.

Izvršit ćemo još diskusiju nekih slučajeva, gdje nisu zadovoljeni svi uvjeti stavka IV.8. Ako nije zadovoljen uvjet, da (156a) vrijedi za najviše jednu vrijednost k_1 indeksa k , već ako je za barem dva indeksa k_1 i k_2

$$b_{k_1} = b_{k_2} = 0, \quad (277)$$

lako se vidi, da postoji identitet poput (157). Prema (168) izlazi naime

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{b_{k_1}}^{t-a_{k_1}} A_0(\sqrt{(t-a_{k_1})^2 - y^2}) dy = \\ &= \int_0^{t-a_{k_1}} A_0(\sqrt{(t-a_{k_1})^2 - y^2}) dy = \sin(t-a_{k_1}), \end{aligned} \quad (278)$$

¹⁵ Doetsch, 3. pogl. § 7.

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_{b_{k_2}}^{t-a_{k_2}} A_0 (\sqrt{(t-a_{k_2})^2 - y^2}) dy = \\
 &= \int_0^{t-a_{k_2}} A_0 (\sqrt{(t-a_{k_2})^2 - y^2}) dy = \sin(t-a_{k_2}), \quad (279)
 \end{aligned}$$

a prema (169)

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \int_{b_{k_1}}^{t-a_{k_1}} A_1 (\sqrt{(t-a_{k_1})^2 - y^2}) dy = \int_0^{t-a_{k_1}} A_1 (\sqrt{(t-a_{k_1})^2 - y^2}) dy = \\
 &= \frac{2}{t-a_{k_1}} [1 - \cos(t-a_{k_1})], \quad (280)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_4 &= \int_{b_{k_2}}^{t-a_{k_2}} A_1 (\sqrt{(t-a_{k_2})^2 - y^2}) dy = \int_0^{t-a_{k_2}} A_1 (\sqrt{(t-a_{k_2})^2 - y^2}) dy = \\
 &= \frac{2}{t-a_{k_2}} [1 - \cos(t-a_{k_2})]. \quad (281)
 \end{aligned}$$

Ako u izrazu

$$\begin{aligned}
 \sin(t-a_{k_1}-a_{k_2}) &= \cos a_{k_2} \sin(t-a_{k_1}) - \sin a_{k_2} \cos(t-a_{k_1}) = \\
 &= \cos a_{k_1} \sin(t-a_{k_2}) - \sin a_{k_1} \cos(t-a_{k_2}) \quad (282)
 \end{aligned}$$

nadomjestimo $\sin(t-a_{k_1})$, $\sin(t-a_{k_2})$, $\cos(t-a_{k_1})$, $\cos(t-a_{k_2})$ vrijednostima prema (278), (279), (280), (281), dobijemo identitet

$$\begin{aligned}
 \cos a_{k_2} I_1 - \cos a_{k_1} I_2 + \frac{1}{2} (t-a_{k_1}) \sin a_{k_2} I_3 - \\
 - \frac{1}{2} (t-a_{k_2}) \sin a_{k_1} I_4 + \sin a_{k_1} - \sin a_{k_2} = 0, \quad (283)
 \end{aligned}$$

koji potpada pod oblik (157).

Ovdje istina treba primijetiti, da su koeficijenti u kanonskom obliku integralnih teorema bile racionalne funkcije ne samo s obzirom na varijablu t , već i s obzirom na parametre $x_1, \dots, x_r$. Kad bismo za parametre a_k uvrstili izraze (149), u identitetu (283) bili bi koeficijenti doduše racionalne funkcije

varijable t , ali transcendentne funkcije parametara $x_1, \dots, x_r$. Iz toga se vidi, da bi zahtjev, da koeficijenti ovise racionalno o parametrima, vjerojatno omogućio slabije uvjete s obzirom na te parametre u stavku IV. 8. U ovo pitanje međutim ne ulazimo.

Pretpostavimo dalje, da u drugoj jednadžbi (156) nisu napisani kvadrati, već prve potencije parametara b_k . To dakle znači, da na pr. za neko k može biti $a_j = a_k$ (284), $b_j = -b_k \neq 0$ (285). Funkcije za indekse j i k podudaraju se u prvoj sumi od (157), a isto tako i u drugoj sumi. Takvi se članovi dakle mogu zbrojiti. U trećoj i četvrtoj sumi također će se neki članovi moći zbrojiti, kako ćemo još vidjeti. (Pri tom još pridolaze neke trigonometrijske funkcije.) Pita se, nisu li poslije toga zbrajanja koeficijenti opet jednoznačno određeni. Neka najprije postoje barem dva para indeksa j_1, k_1 i j_2, k_2 , za koje vrijedi (284) i (285). Supstitucija $y = -y$ (286) daje

$$\int_0^b A_0(\sqrt{t^2 - y^2}) dy = - \int_0^{-b} A_0(\sqrt{t^2 - y^2}) d\bar{y}, \quad (287)$$

dakle s obzirom na (168)

$$\begin{aligned} \int_{-b}^t A_0(\sqrt{t^2 - y^2}) dy &= \sin t - \int_0^{-b} A_0(\sqrt{t^2 - y^2}) dy = \\ &= \sin t + \int_0^b A_0(\sqrt{t^2 - y^2}) dy = \sin t + \\ &+ \sin t - \int_b^t A_0(\sqrt{t^2 - y^2}) dy \end{aligned} \quad (288)$$

ili

$$\int_b^t A_0(\sqrt{t^2 - y^2}) dy + \int_{-b}^t A_0(\sqrt{t^2 - y^2}) dy = 2 \sin t. \quad (289)$$

Slično se dobiva

$$\int_b^t A_1(\sqrt{t^2 - y^2}) dy + \int_{-b}^t A_1(\sqrt{t^2 - y^2}) dy = \frac{4}{t} (1 - \cos t). \quad (290)$$

Prema tome će biti

$$\begin{aligned}
 & A \int_{b_{j_1}}^{t-a_{j_1}} \Lambda_0 (\sqrt{(t-a_{j_1})^2 - y^2}) dy + A \int_{-b_{j_1}}^{t-a_{j_1}} \Lambda_0 (\sqrt{(t-a_{j_1})^2 - y^2}) dy + \\
 & + B \int_{b_{j_2}}^{t-a_{j_2}} \Lambda_0 (\sqrt{(t-a_{j_2})^2 - y^2}) dy + B \int_{-b_{j_2}}^{t-a_{j_2}} \Lambda_0 (\sqrt{(t-a_{j_2})^2 - y^2}) dy + \\
 & + C(t-a_{j_1}) \int_{b_{j_1}}^{t-a_{j_1}} \Lambda_1 (\sqrt{(t-a_{j_1})^2 - y^2}) dy + \\
 & + C(t-a_{j_1}) \int_{-b_{j_1}}^{t-a_{j_1}} \Lambda_1 (\sqrt{(t-a_{j_1})^2 - y^2}) dy + \\
 & + D(t-a_{j_2}) \int_{b_{j_2}}^{t-a_{j_2}} \Lambda_1 (\sqrt{(t-a_{j_2})^2 - y^2}) dy + \\
 & + D(t-a_{j_2}) \int_{-b_{j_2}}^{t-a_{j_2}} \Lambda_1 (\sqrt{(t-a_{j_2})^2 - y^2}) dy - \\
 & - 4C - 4D = 2A \sin(t-a_{j_1}) + 2B \sin(t-a_{j_2}) - \\
 & - 4D \cos(t-a_{j_1}) - 4D \cos(t-a_{j_2}). \quad (291)
 \end{aligned}$$

Stavimo li

$$A = -2 \operatorname{ctg}(a_{j_1} - a_{j_2}); B = \frac{2}{\sin(a_{j_1} - a_{j_2})}; C = 1; D = 0, \quad (292)$$

desna strana izraza (291), u kojoj su stegnuti dotični članovi treće i četvrte sume prema (157), identično iščezava, kako se može lako izračunati. U tom slučaju dakle postoji identitet oblika (156). I ovdje su koeficijenti racionalne funkcije varijable t , ali djelomice transcendentne funkcije parametara. Postoji li samo jedan par indeksa j, k , za koji vrijedi (284), (285), a nema indeksa, za koji bi vrijedila jednadžba (156a), dokaz jednoznačnosti se može ipak izvesti, ako se stegnu članovi, koji odgovaraju u (157) tim indeksima.

Na temelju (284), (285) vrijedi

$$R_{0,j}(t) \Lambda_0(\sqrt{(t-a_j)^2 - b_j^2}) + R_{0,k}(t) \Lambda_0(\sqrt{(t-a_k)^2 - b_k^2}) = \\ = [R_{0,j}(t) + R_{0,k}(t)] \Lambda_0(\sqrt{(t-a_j)^2 - b_j^2}), \quad (293)$$

$$R_{1,j}(t) \Lambda_1(\sqrt{(t-a_j)^2 - b_j^2}) + R_{1,k}(t) \Lambda_1(\sqrt{(t-a_k)^2 - b_k^2}) = \\ = [R_{1,j}(t) + R_{1,k}(t)] \Lambda_1(\sqrt{(t-a_j)^2 - b_j^2}). \quad (294)$$

Dalje je s obzirom na (288) i (166), (167)

$$\int_{-b_j}^{t-a_j} \Lambda_0(\sqrt{(t-a_j)^2 - y^2}) dy = - \int_{b_j}^{t-a_j} \Lambda_0(\sqrt{(t-a_j)^2 - y^2}) dy + 2 \sin(t-a_j) = \\ = - \int_{b_j}^{t-a_j} \Lambda_0(\sqrt{(t-a_j)^2 - y^2}) dy + 2 \int_0^{-a_j} \Lambda_0(\sqrt{(t-a_j)^2 - y^2}) dy, \quad (295)$$

$$\int_{-b_j}^{t-a_j} \Lambda_1(\sqrt{(t-a_j)^2 - y^2}) dy = - \int_{b_j}^{t-a_j} \Lambda_1(\sqrt{(t-a_j)^2 - y^2}) dy + \frac{4}{t-a_j} [1 - \\ - \cos(t-a_j)] = - \int_{b_j}^{t-a_j} \Lambda_1(\sqrt{(t-a_j)^2 - y^2}) dy + 2 \int_0^{t-a_j} \Lambda_1(\sqrt{(t-a_j)^2 - y^2}) dy. \quad (296)$$

Mogu se dakle prema (293) do (296) članovi identiteta s indeksima j i k dovesti u oblik

$$[R_{0,j}(t) + R_{0,k}(t)] \Lambda_0(\sqrt{(t-a_j)^2 - b_j^2}) + [R_{1,j}(t) + R_{1,k}(t)] \cdot \\ \cdot \Lambda_1(\sqrt{(t-a_j)^2 - b_j^2}) + [R_{2,j}(t) - R_{2,k}(t)] \int_{b_j}^{t-a_j} \Lambda_0(\sqrt{(t-a_j)^2 - y^2}) dy + \\ + 2 R_{2,k}(t) \int_0^{t-a_j} \Lambda_0(\sqrt{(t-a_j)^2 - y^2}) dy + [R_{3,j}(t) - R_{3,k}(t)] \cdot \\ \cdot \int_{b_j}^{t-a_j} \Lambda_1(\sqrt{(t-a_j)^2 - y^2}) dy + 2 R_{3,k}(t) \int_0^{t-a_j} \Lambda_1(\sqrt{(t-a_j)^2 - y^2}) dy. \quad (297)$$

Uvedemo li mjesto članova s indeksima j i k članove s novim indeksima p, q s vrijednostima

$$a_p = a_j, \quad b_p = b_j, \quad (298), (299)$$

$$R_{0,p}(t) = R_{0,j}(t) + R_{0,k}(t), \quad (300)$$

$$R_{1,p}(t) = R_{1,j}(t) + R_{1,k}(t), \quad (301)$$

$$R_{2,p}(t) = R_{2,j}(t) - R_{2,k}(t), \quad (302)$$

$$R_{3,p}(t) = R_{3,j}(t) - R_{3,k}(t), \quad (303)$$

$$a_q = a_j, \quad b_q = 0, \quad (304), (305)$$

$$R_{0,q}(t) = R_{1,q}(t) = 0, \quad (306)$$

$$R_{2,q}(t) = 2R_{2,j}(t), \quad (307)$$

$$R_{3,q}(t) = 2R_{3,j}(t), \quad (308)$$

dobivamo upravo izraz (297). Vrijednost b_q je dopustiva, jer smo pretpostavili, da nijedan od ostalih b_k nije jednak nuli. Stavak IV. 8. je dakle primjenljiv, i identitet je nemoguć.

Time je diskusija osobitih slučajeva izvršena.

9. Formule rekurzije za kompozicije, ako pojedini parametri iščekavaju

Jednadžbe rekurzije (87), (88), (92), (93), (94) nisu primjenljive, kad je dotični parametar jednak nuli. Za taj ćemo slučaj izvesti druge jednadžbe rekurzije. Stavimo u (82) $x_2 = 0$ i upotrebimo III (6):

$$\begin{aligned} K_{n_1, n_2+2}^{m_1, m_2+2}(t; x_1, 0) &= \int_{x_1}^t y^{m_1} (t-y)^{m_2+2} A_{n_1} \left(c \sqrt{y^2 - x_1^2} \right) A_{n_2+2} [c(t-y)] dy = \\ &= \frac{4(n_2+1)(n_2+2)}{c^2} \int_{x_1}^t y^{m_1} (t-y)^{m_2} A_{n_1} \left(c \sqrt{y^2 - x_1^2} \right) \left\{ A_{n_2+1} [c(t-y)] - \right. \\ &\quad \left. - A_{n_2} [c(t-y)] \right\} dy = \frac{4(n_2+1)(n_2+2)}{c^2} \left[K_{n_1, n_2+1}^{m_1, m_2}(t; x_1, 0) - \right. \\ &\quad \left. - K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(t; x_1, 0) \right]. \end{aligned} \quad (309)$$

Nadomjestimo li u (89) n_2 sa $n_2 + 1$ i m_2 sa $m_2 + 1$, stavimo $x_2 = 0$ i uvrstimo izraz (309), izlazi

$$\frac{\partial K_{n_1, n_2+1}^{m_1, m_2+1}(t; x_1, 0)}{\partial t} = (m_2 - 2n_2 - 1) K_{n_1, n_2+1}^{m_1, m_2}(t; x_1, 0) + 2(n_2 + 1) K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(t; x_1, 0). \quad (310)$$

Pretpostavimo li $m_2 > 0$, deriviramo (90) (u kojem je stavljeno $x_2 = 0$) po t i uvrstimo izraz (310), dobivamo

$$K_{n_1, n_2+1}^{m_1, m_2}(t; x_1, 0) = \frac{2(n_2 + 1)}{2n_2 - m_2 + 1} \left\{ K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(t; x_1, 0) - \frac{m_2}{c^2} \frac{\partial K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2-1}(t; x_1, 0)}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(t; x_1, 0)}{\partial t^2} \right\} \cdot (2n_2 - m_2 + 1 \neq 0, m_2 > 0). \quad (311)$$

Ako je naprotiv $m_2 = 0$, u (90) prvi član u vitičastoj zagradi ne iščezava, kada stavljamo $x_2 = 0$, ali iščezava drugi član. Dobivamo za taj slučaj

$$K_{n_1, n_2+1}^{m_1, 0}(t; x_1, 0) = \frac{2(n_2 + 1)}{2n_2 + 1} \left\{ K_{n_1, n_2}^{m_1, 0}(t; x_1, 0) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \left[t^{m_1} A_{n_1} \left(c \sqrt{t^2 - x_1^2} \right) \right] + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 K_{n_1, n_2}^{m_1, 0}(t; x_1, 0)}{\partial t^2} \right\}. \quad (312)$$

Formule (311), (312) dopuštaju postepeno povisivanje donjega indeksa, kojemu odgovara parametar stavljen jednako nuli, uz pretpostavku, da je $m_2 \neq 2n_2 + 1$. Uz lihi m_2 može se dakle povisivanje od n_2 provesti od 0 do $\frac{m_2-1}{2}$ i od $\frac{m_2+1}{2}$ na više, dok za tâki m_2 povisivanju od n_2 nema zapreka.

Pretpostavimo sada $m_2 > 0$ i nadomjestimo u (311) m_2 sa $m_2 + 1$. Poređenje sa (90), gdje zbog $x_2 = 0$ prvi član u zagradi otpada, daje

$$c^2 K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2+1}(t; x_1, 0) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2+1}(t; x_1, 0) = (2n_2 - m_2) m_2 K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2+1}(t; x_1, 0) - (2n_2 - 2m_2 - 1) \frac{\partial}{\partial t} K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(t; x_1, 0) \quad (m_2 > 0) \quad (313)$$

Stavimo li u (311) $m_2=1$, $x_2=0$ i ispodredimo sa (90), gdje stavljamo $m_2=0$, tako da otpada drugi član u zagradi, dok prvi član ne otpada, izlazi

$$c^2 K_{n_1, n_2}^{m_1, 1}(t; x_1, 0) + \frac{\partial^2}{\partial t^2} K_{n_1, n_2}^{m_1, 1}(t; x_1, 0) = \\ = 2n_2 t^{m_1} A_{n_1} \left(c \sqrt{t^2 - x_1^2} \right) - (2n_2 - 1) \frac{\partial}{\partial t} K_{n_1, n_2}^{m_1, 0}(t; x_1, 0). \quad (314)$$

Jednadžbe (313) i (314) imaju oblik

$$c^2 f(t) + f''(t) = \varphi(t), \quad (315)$$

pri čemu je za slučaj (313)

$$f(x_1) = 0, \quad f'(x_1) = 0, \quad (316)$$

a za slučaj (314)

$$f(x_1) = 0, \quad f'(x_1) = x_1^{m_1}, \quad (317)$$

kako izlazi iz definicije (82) i iz jednadžbe (89), koja vrijedi i za $m_2=0$, pri čemu otpada drugi član na desnoj strani. Opće rješenje jednadžbe (315) može se varijacijom konstanta dobiti u obliku

$$f(t) = \frac{e^{ict}}{2ic} \left\{ C_1 + \int_0^t e^{-icy} \varphi(y) dy \right\} + \frac{e^{-ict}}{-2ic} \left\{ C_2 + \int_0^t e^{icy} \varphi(y) dy \right\}. \quad (318)$$

Odredimo li konstante C_1 i C_2 pomoću (316), dobivamo

$$f(t) = \frac{1}{2ic} \left\{ e^{ict} \int_{x_1}^t e^{-icy} \varphi(y) dy - e^{-ict} \int_{x_1}^t e^{icy} \varphi(y) dy \right\} = \\ = \frac{1}{c} \int_{x_1}^t \varphi(y) \sin [c(t-y)] dy. \quad (319)$$

Odredimo li te konstante pomoću (317), izlazi

$$f(t) = \frac{1}{2ic} \left\{ e^{ic(t-x_1)} x_1^{m_1} + e^{ict} \int_{x_1}^t e^{-icy} \varphi(y) dy - e^{-ic(t-x_1)} x_1^{m_1} - \right.$$

$$\begin{aligned}
- e^{-ict} \int_{x_1}^t e^{ict} \varphi(y) dy \Big\} &= \frac{1}{c} \Big\{ x_1^{m_1} \sin [c(t-x_1)] + \\
&+ \int_{x_1}^t \varphi(y) \sin [c(t-y)] dy \Big\}. \quad (320)
\end{aligned}$$

Uvrštenjem izraza za $\varphi(t)$ prema (313) jednačba (319) glasi

$$\begin{aligned}
K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2+1}(t; x_1, 0) &= \frac{(2n_2-m_2)m_2}{c} \int_{x_1}^t K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2-1}(y; x_1, 0) \sin [c(t-y)] dy - \\
- \frac{2n_2-2m_2-1}{c} \int_{x_1}^t \frac{\partial}{\partial y} K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(y; x_1, 0) \sin [c(t-y)] dy \quad (m_2 > 0). \quad (321)
\end{aligned}$$

Parcijalna integracija daje

$$\begin{aligned}
&\int_{x_1}^t \frac{\partial}{\partial y} K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(y; x_1, 0) \sin [c(t-y)] dy = \\
&= \Big\{ K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(y; x_1, 0) \sin [c(t-y)] \Big\}_{y=x_1}^{y=t} + \\
&+ c \int_{x_1}^t K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(y; x_1, 0) \cos [c(t-y)] dy = \\
&= c \int_{x_1}^t K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(y; x_1, 0) \cos [c(t-y)] dy. \quad (322)
\end{aligned}$$

No budući da je

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^t K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(y; x_1, 0) \sin [c(t-y)] dy = \\
&= c \int_{x_1}^t K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(y; x_1, 0) \cos [c(t-y)] dy, \quad (323)
\end{aligned}$$

izlazi

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^t \frac{\partial}{\partial y} K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(y; x_1, 0) \sin [c(t-y)] dy = \\ & = \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^t K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(y; x_1, 0) \sin [c(t-y)] dy. \end{aligned} \quad (324)$$

Stavimo li kao u (83)

$$F_1(t) = \begin{cases} t^{m_1} \Delta_{n_1}(c \sqrt{t^2 - x_1^2}) & \text{za } t > x_1 \\ 0 & \text{za } 0 \leq t \leq x_1 \end{cases}, \quad (325)$$

a kao specijalne slučajeve od (84) i (62) odnosno (63)

$$F_2(t) = t^{m_2} \Delta_{n_2}(ct) \quad (t \geq 0), \quad (326)$$

$$F_3(t) = \Delta_0(ct) \quad (t \geq 0), \quad (327)$$

onda je prema (82) i I (33)

$$K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(t; x_1, 0) = F_1(t) * F_2(t) \quad (t > x_1), \quad (328)$$

a prema (64), (69), (166)

$$\frac{1}{c} \sin(ct) = F_3(t) * F_3(t) \quad (t \geq 0). \quad (329)$$

Prema tome je očito za $t > x_1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \int_{x_1}^t K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(y; x_1, 0) \sin [c(t-y)] dy &= F_1(t) * F_2(t) * F_3(t) = \\ &= K_{n_1, n_2, 0, 0}^{m_1, m_2, 0, 0}(t; x_1, 0, 0, 0), \end{aligned} \quad (330)$$

a analitičkim produživanjem se uvida, da je i za bilo koji kompleksni x_1, t

$$\frac{1}{c} \int_{x_1}^t K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(y; x_1, 0) \sin [c(t-y)] dy = K_{n_1, n_2, 0, 0}^{m_1, m_2, 0, 0}(t; x_1, 0, 0, 0). \quad (331)$$

Jednadžba (321) može se dakle pisati u obliku

$$\begin{aligned} K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2+1}(t; x_1, 0) &= m_2(2n_2 - m_2) K_{n_1, n_2, 0, 0}^{m_1, m_2-1, 0, 0}(t; x_1, 0, 0, 0) - \\ &- (2n_2 - 2m_2 - 1) \frac{\partial}{\partial t} K_{n_1, n_2, 0, 0}^{m_1, m_2, 0, 0}(t; x_1, 0, 0, 0) \quad (m_2 > 0). \end{aligned} \quad (332)$$

Uvrštenjem izraza za $\varphi(t)$ prema (314) u jednadžbu (320) izlazi

$$\begin{aligned} K_{n_1, n_2}^{m_1, 1}(t; x_1, 0) &= \frac{1}{c} x_1^{m_1} \sin [c(t-x_1)] + \\ &+ \frac{2n_2}{c} \int_{x_1}^t y^{m_1} A_{n_1} (c \sqrt{y^2-x_1^2}) \sin [c(t-y)] dy - \\ &- \frac{2n_2-1}{c} \int_{x_1}^t \frac{\partial}{\partial y} K_{n_1, n_2}^{m_1, 0}(y; x_1, 0) \sin [c(t-y)] dy. \quad (333) \end{aligned}$$

Analognim se zaključivanjem uviđa, da se ta jednadžba može dovesti u oblik

$$\begin{aligned} K_{n_1, n_2}^{m_1, 1}(t; x_1, 0) &= x_1^{m_1} K_{0, 0}^{0, 0}(t-x_1; 0, 0) + 2n_2 K_{n_1, 0, 0}^{m_1, 0, 0}(t; x_1, 0, 0) - \\ &- (2n_2-1) \frac{\partial}{\partial t} K_{n_1, n_2, 0, 0}^{m_1, 0, 0, 0}(t; x_1, 0, 0, 0). \quad (334) \end{aligned}$$

Za kompozicije sa više od dva para indeksa dobiva se mjesto (309) sasvim analognim načinom

$$\begin{aligned} &K_{n_1+2, n_2, \dots, n_r}^{m_1+2, m_2, \dots, m_r}(t; 0, x_2, \dots, x_r) = \\ &= \frac{4(n_1+1)(n_1+2)}{c^2} K_{n_1+1, n_2, \dots, n_r}^{m_1, m_2, \dots, m_r}(t; 0, x_2, \dots, x_r) - \\ &- K_{n_1, \dots, n_r}^{m_1, \dots, m_r}(t; 0, x_2, \dots, x_r), \quad (335) \end{aligned}$$

gdje je samo radi jednostavnosti prvi parametar stavljen jednak nuli umjesto drugog. Nadomjestimo li u (111) m_1 sa m_1+1 i n_1 sa n_1+1 , stavimo $x_1=0$ i uvrstimo zatim izraz (335), izlazi

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} K_{n_1+1, n_2, \dots, n_r}^{m_1+1, m_2, \dots, m_r}(t; 0, x_2, \dots, x_r) = \\ &= 2(n_1+1) K_{n_1, \dots, n_r}^{m_1, \dots, m_r}(t; 0, x_2, \dots, x_r) - \\ &- (2n_1-m_1+1) K_{n_1+1, n_2, \dots, n_r}^{m_1, m_2, \dots, m_r}(t; 0, x_2, \dots, x_r). \quad (336) \end{aligned}$$

Neka je sada $m_1 > 0$. Deriviramo li (111), u kojemu je stavljeno $x_1 = 0$, po t i uvrstimo (336), izlazi

$$\begin{aligned} & K_{n_1+1, n_2, \dots, n_r}^{m_1, m_2, \dots, m_r}(t; 0, x_2, \dots, x_r) = \\ &= \frac{2(n_1+1)}{2n_1-m_1+1} \left\{ K_{n_1, \dots, n_r}^{m_1, \dots, m_r}(t; 0, x_2, \dots, x_r) - \right. \\ & \quad - \frac{m_1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} K_{n_1, n_2, \dots, n_r}^{m_1-1, m_2, \dots, m_r}(t; 0, x_2, \dots, x_r) + \\ & \quad \left. + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} K_{n_1, \dots, n_r}^{m_1, \dots, m_r}(t; 0, x_2, \dots, x_r) \right\} \\ & \quad (2n_1-m_1+1 \neq 0, \quad m_1 > 0). \end{aligned} \quad (337)$$

Ako je $m_1 = 0$, onda za $x_1 = 0$ u (111) ne otpada prvi član desne strane, ali otpada drugi član. U tom slučaju se dobiva:

$$\begin{aligned} & K_{n_1+1, n_2, \dots, n_r}^{0, m_2, \dots, m_r}(t; 0, x_2, \dots, x_r) = \\ &= \frac{2(n_1+1)}{2n_1+1} \left\{ K_{n_1, n_2, \dots, n_r}^{0, m_2, \dots, m_r}(t; 0, x_2, \dots, x_r) - \right. \\ & \quad - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} K_{n_2, \dots, n_r}^{m_2, \dots, m_r}(t; x_2, \dots, x_r) + \\ & \quad \left. + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} K_{n_1, n_2, \dots, n_r}^{0, m_2, \dots, m_r}(t; 0, x_2, \dots, x_r) \right\}. \end{aligned} \quad (338)$$

Formule (337), (338) dopuštaju povisivanje donjega indeksa za ove kompozicije pod analognim uvjetima kao formule (311), (312) za kompozicije sa dva para indeksa.

Za povisivanje gornjega indeksa postupamo sasvim analogno kao u slučaju kompozicija sa dva para indeksa. Polazeći od formule (111) umjesto (89) odnosno (90), i od (337) umjesto (311), dobivamo analogno prema (313), (314):

$$\begin{aligned} & \left(c^2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) K_{n_1, n_2, \dots, n_r}^{m_1+1, m_2, \dots, m_r}(t; 0, x_2, \dots, x_r) = \\ &= (2n_1-m_1) m_1 K_{n_1, n_2, \dots, n_r}^{m_1-1, m_2, \dots, m_r}(t; 0, x_2, \dots, x_r) - \\ & - (2n_1-2m_1-1) \frac{\partial}{\partial t} K_{n_1, \dots, n_r}^{m_1, \dots, m_r}(t; 0, x_2, \dots, x_r) \quad (m_1 > 0), \end{aligned} \quad (339)$$

$$\begin{aligned} \left(c^2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) K_{n_1, n_2, \dots, n_r}^{1, m_2, \dots, m_r}(t; 0, x_2, \dots, x_r) = \\ = 2n_1 K_{n_2, \dots, n_r}^{m_2, \dots, m_r}(t; x_2, \dots, x_r) - \\ - (2n_1 - 1) K_{n_1, n_2, \dots, n_r}^{0, m_2, \dots, m_r}(t; 0, x_2, \dots, x_r). \end{aligned} \quad (340)$$

Jednadžba (315) vrijedi i ovdje. Mjesto (316), (317) dobivamo za $m_1 > 0$ i za $m_1 = 0$

$$f(x_2 + \dots + x_r) = 0, \quad f'(x_2 + \dots + x_r) = 0, \quad (341)$$

kako se razabira iz (107) i (111). Sasvim analogni zaključci kao kod kompozicija sa dva para indeksa dovode konačno do jednadžbi

$$\begin{aligned} K_{n_1, n_2, \dots, n_r}^{m_1+1, m_2, \dots, m_r}(t; 0, x_2, \dots, x_r) = \\ = m_1(2n_1 - m_1) K_{n_1, n_2, \dots, n_r}^{m_1-1, m_2, \dots, m_r, 0, 0}(t; 0, x_2, \dots, x_r, 0, 0) - \\ - (2n_1 - 2m_1 - 1) \frac{\partial}{\partial t} K_{n_1, n_2, \dots, n_r}^{m_1, \dots, m_r, 0, 0}(t; 0, x_2, \dots, x_r, 0, 0) \\ (m_1 > 0) \end{aligned} \quad (342)$$

i

$$\begin{aligned} K_{n_1, n_2, \dots, n_r}^{1, m_2, \dots, m_r}(t; 0, x_2, \dots, x_r) = \\ = 2n_1 K_{n_2, \dots, n_r}^{m_2, \dots, m_r, 0, 0}(t; x_2, \dots, x_r, 0, 0) - \\ - (2n_1 - 1) K_{n_1, n_2, \dots, n_r}^{0, m_2, \dots, m_r, 0, 0}(t; 0, x_2, \dots, x_r, 0, 0). \end{aligned} \quad (343)$$

Formule (311), (312), (332), (334), (337), (338), (342), (343) omogućuju postepeno povisivanje indeksa, za koje je pripadni parametar stavljen jednak nuli. Formule su izvedene za slučaj, da je to prvi par indeksa, ali vrijede, dakako, analogno, i kad je to bilo koji par indeksa. Polazna je točka kod toga povisivanja formula (81), koja daje kompozicije s bilo koliko indeksa, ako su ti indeksi jednaki nuli. Povisivanje donjih indeksa svih potrebnih kompozicija vrši se onda na temelju formula (87), III (5), ako se pripadni parametar razlikuje od nule, a pomoću (311), (312), (337), (338), ako je jednak nuli (pri čemu nema teškoća, jer gornji indeks nije lih, nego jednak nuli).

Zatim se vrši povisivanje gornjih indeksa pomoću (93), (112), ako se pripadni parametar razlikuje od nule, a pomoću (332), (334), (342), (343), ako je jednak nuli. Razabira se, da je postupak, ako je koji parametar jednak nuli, dosta opsežan, pa će zato biti prikladnija metoda graničnog prijelaza, koju ćemo raspraviti u idućoj točki.

10. Granični prijelaz u izravnim formulama za kompozicije, kad pojedini parametri $x_1, x_2, \dots$ konvergiraju prema nuli

Želimo li u općim formulama (140), (141) neke od parametara $x_1, \dots, x_r$ staviti jednako nuli, nailazimo na teškoće, jer operator $D_{x_k} = \frac{1}{x_k} \frac{\partial}{\partial x_k}$ u tom slučaju gubi smisao. Očito

lijeva strana u tim formulama prema definiciji (107) ne pruža nikakve teškoće u tom pogledu, pa je vrijednost te lijeve strane, kada se neki parametri stave jednako nuli, jednoznačno određena i jednaka limesu, koji dobivamo, ako ti parametri istodobno na bilo koji način ili svaki za sebe u bilo kojem poredaju konvergiraju prema nuli. Taj granični prijelaz mora dakle biti primjenljiv i na desnu stranu kao cjelinu, ali ne mora biti primjenljiv na svaki sumand desne strane. Tu ćemo se poslužiti stavkom II. 7, koji je primjenljiv, jer svi sumandi desne strane imaju derivacije bilo kojega reda i za $x_k = 0$, ako ih prethodno pomnožimo dovoljno visokom potencijom dotičnoga parametra x_k , koji treba konvergirati prema nuli.

Prema II (270), a s obzirom na formule II (132) i II (133) vidi se, da je rezultat postupka taj, da treba operatorsku potenciju $D_{x_k}^s = \left(\frac{1}{x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \right)^s$ nadomjestiti sa $\frac{2^s s!}{(2s)!} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)^{2s}$, ako djeluje

na neku funkciju $f(x_k)$, a sa $\frac{2^s s!}{(2s+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)^{2s+1}$, ako djeluje na

funkciju oblika $\frac{1}{x_k} \varphi(x_k)$, i poslije tih deriviranja funkcijâ $f(x_k)$ odnosno $\varphi(x_k)$ staviti $x_k = 0$. Slučaj, da je funkcija oblika $\frac{1}{x_k} \varphi(x_k)$, nastaje u (140) odnosno (141), kada je $m_{k_\varepsilon} = 0$, jer je onda dotični faktor u uglastoj zagradi $x_{k_\varepsilon}^{-1}$.

Time bi problem graničnog prijelaza u načelu bio riješen, no mi ćemo još raspraviti neka pojednostavnjenja, koja se mogu učiniti. Zamislimo na primjer, da se u srednjem članu vitičaste

zgrade na desnoj strani od (141) treba neki određeni x_{k_e} staviti jednako nuli. Označimo uglastu zgradu u tom srednjem članu sa $\frac{1}{x_{k_e}} \varphi(t, x_{k_e})$ i stavimo

$$\varphi(t, x_{k_e}) = x_{k_e}^{m_{k_e}} \psi(t, x_{k_e}). \quad (344)$$

Prema prije rečenom imat ćemo nadomjestiti

$$D_{x_{k_e}}^{n_{k_e} - w_e - 1} \frac{1}{x_{k_e}} \varphi(t, x_{k_e}) \quad (345)$$

sa

$$\frac{2^{n_{k_e} - w_e - 1} (n_{k_e} - w_e - 1)!}{(2n_{k_e} - 2w_e - 1)!} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_{k_e}} \right)^{2n_{k_e} - 2w_e - 1} \varphi(t, x_{k_e}) \right\}_{x_{k_e} = 0} \quad (346)$$

Prema (344) vrijedi

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial x_{k_e}} \right)^{2n_{k_e} - 2w_e - 1} \varphi(t, x_{k_e}) = \\ & = \sum_{s=0}^{2n_{k_e} - 2w_e - 1} \binom{2n_{k_e} - 2w_e - 1}{s} \frac{m_{k_e}!}{(m_{k_e} - s)!} x_{k_e}^{m_{k_e} - s} \left(\frac{\partial}{\partial x_{k_e}} \right)^{2n_{k_e} - 2w_e - 1 - s} \cdot \\ & \quad \cdot \psi(t, x_{k_e}), \end{aligned} \quad (347)$$

ako je

$$m_{k_e} > 2n_{k_e} - 2w_e - 1 \quad (348)$$

i

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial}{\partial x_{k_e}} \right)^{2n_{k_e} - 2w_e - 1} \varphi(t, x_{k_e}) = \\ & \sum_{s=0}^{m_{k_e}} \binom{2n_{k_e} - 2w_e - 1}{s} \frac{m_{k_e}!}{(m_{k_e} - s)!} x_{k_e}^{m_{k_e} - s} \left(\frac{\partial}{\partial x_{k_e}} \right)^{2n_{k_e} - 2w_e - 1 - s} \psi(t, x_{k_e}), \end{aligned} \quad (349)$$

ako je

$$m_{k_e} \leq 2n_{k_e} - 2w_e - 1. \quad (350)$$

Stavimo li sada $x_{k_\varepsilon} = 0$, onda u slučaju (348) išezne desna strana od (347), dok u slučaju (350) dobivamo

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_{k_\varepsilon}} \right)^{2n_{k_\varepsilon} - 2w_\varepsilon - 1} \varphi(t, x_{k_\varepsilon}) \right\}_{x_{k_\varepsilon} = 0} = \\ = \frac{(2n_{k_\varepsilon} - 2w_\varepsilon - 1)!}{(2n_{k_\varepsilon} - 2w_\varepsilon - m_{k_\varepsilon} - 1)!} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_{k_\varepsilon}} \right)^{2n_{k_\varepsilon} - 2w_\varepsilon - m_{k_\varepsilon} - 1} \psi(t, x_{k_\varepsilon}) \right\}_{x_{k_\varepsilon} = 0}. \quad (351)$$

Prema tome treba izraz (345) u slučaju (348) nadomjestiti nulom, a u slučaju (350), s obzirom na (346), sa

$$\frac{2^{n_{k_\varepsilon} - w_\varepsilon - 1} (n_{k_\varepsilon} - w_\varepsilon - 1)!}{(2n_{k_\varepsilon} - 2w_\varepsilon - m_{k_\varepsilon} - 1)!} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_{k_\varepsilon}} \right)^{2n_{k_\varepsilon} - 2w_\varepsilon - m_{k_\varepsilon} - 1} \psi(t, x_{k_\varepsilon}) \right\}_{x_{k_\varepsilon} = 0}. \quad (352)$$

Budući da $\psi(t, x_{k_\varepsilon})$ ovisi o varijablama t i x_{k_ε} očito samo u obliku linearnoga izraza $t - x_{k_1} - \dots - x_{k_\gamma}$, gdje se x_{k_ε} nalazi među varijablama $x_{k_1}, \dots, x_{k_\gamma}$, može se diferencijacija $\frac{\partial}{\partial x_{k_\varepsilon}}$ nadomjestiti diferencijacijom $\left(-\frac{\partial}{\partial t} \right)$, tako da mjesto (352) možemo pisati

$$\frac{2^{n_{k_\varepsilon} - w_\varepsilon - 1} (-1)^{m_{k_\varepsilon} + 1} (n_{k_\varepsilon} - w_\varepsilon - 1)!}{(2n_{k_\varepsilon} - 2w_\varepsilon - m_{k_\varepsilon} - 1)!} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{2n_{k_\varepsilon} - 2w_\varepsilon - m_{k_\varepsilon} - 1} \psi(t, 0). \quad (353)$$

Konačni je dakle efekt, da se u slučaju (348) dotični član u (141) odbaci, dok se u slučaju (350) ispušta dotični $x_{k_\varepsilon}^{m_{k_\varepsilon} - 1}$, a mjesto dotičnoga operatora

$$D_{x_{k_\varepsilon}}^{n_{k_\varepsilon} - w_\varepsilon - 1} \quad (354)$$

piše se

$$\frac{2^{n_{k_\varepsilon} - w_\varepsilon - 1} (-1)^{m_{k_\varepsilon} + 1} (n_{k_\varepsilon} - w_\varepsilon - 1)!}{(2n_{k_\varepsilon} - 2w_\varepsilon - m_{k_\varepsilon} - 1)!} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{2n_{k_\varepsilon} - 2w_\varepsilon - m_{k_\varepsilon} - 1} \quad (355)$$

i konačno se stavlja $x_{k_\epsilon} = 0$, što se može učiniti i prije deriviranja po t . Razumije se, da se diferencijacija po t , sadržana u (355), može sažeti s diferencijacijom

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{\varphi=1}^{\sum (m_{s_\varphi} - 2v_\varphi)}$$

koja se nalazi u (141).

Uzmimo sada, da treba neki određeni broj parametara x_{s_δ} ($\delta = 1, 2, \dots, H$; $1 \leq H \leq r - \gamma$) u (141) staviti jednako nuli. Pretpostavimo, da uz odabrane v_δ vrijedi

$$m_{s_\delta} - n_{s_\delta} - v_\delta \geq 0 \quad (\delta = 1, 2, \dots, h) \quad (356)$$

i

$$m_{s_\delta} - n_{s_\delta} - v_\delta < 0 \quad (\delta = h + 1, \dots, H), \quad (357)$$

gdje je

$$1 \leq h \leq H, \quad (358)$$

pa se pitajmo, čime treba nadomjestiti operaciju

$$\prod_{\delta=1}^H (-1)^{m_{s_\delta}} m_{s_\delta}! S_{x_{s_\delta}}^{m_{s_\delta} - n_{s_\delta} - v_\delta}, \quad (359)$$

ako hoćemo parametre x_{s_δ} ($\delta = 1, \dots, H$) staviti jednako nuli.

Primijenimo li jednadžbu II (205), dobivamo

$$\left\{ \left(\prod_{\delta=1}^h (-1)^{m_{s_\delta}} m_{s_\delta}! S_{x_{s_\delta}}^{m_{s_\delta} - n_{s_\delta} - v_\delta} \right) \right.$$

$$t^{-(x_{k_1} + \dots + x_{k_\gamma})}$$

$$\int_{x_{s_1} + \dots + x_{s_{r-\gamma}}} (y - x_{s_1} - \dots - x_{s_{r-\gamma}})^{r-\gamma-2} \cdot$$

$$\cdot \Lambda_0 \left(c \sqrt{t - x_{k_1} - \dots - x_{k_\gamma}}^2 - y^2 \right) dy \Bigg\}_{x_{s_1} = \dots = x_{s_h} = 0} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(r-\gamma-2)!}{\left[r-\gamma-2+2 \sum_{\varphi=1}^h (m_{s_{\varphi}}-n_{s_{\varphi}}-v_{\varphi}) \right]!} \cdot \\
&\cdot \left(\prod_{\delta=1}^h \frac{(-1)^{n_{s_{\delta}}+v_{\delta}} 2^{m_{s_{\delta}}-n_{s_{\delta}}-v_{\delta}} m_{s_{\delta}}! \Gamma\left(m_{s_{\delta}}-n_{s_{\delta}}-v_{\delta}+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \right) \cdot \\
&\cdot \int_{X_h}^{t-(x_{k_1}+\dots+x_{k_{r\gamma}})} (y-X_h)^{r-\gamma-2+2 \sum_{\varphi=1}^h (m_{s_{\varphi}}-n_{s_{\varphi}}-v_{\varphi})} \cdot \\
&\cdot \Delta_0 \left(c \sqrt{(t-x_{k_1}-\dots-x_{k_{r\gamma}})^2-y^2} \right) dy, \quad (360)
\end{aligned}$$

gdje je

$$X_h = x_{s_{h+1}} + \dots + x_{s_{r-\gamma}}. \quad (361)$$

Na ovaj izraz treba još da djeluje operacija

$$\prod_{\delta=h+1}^H (-1)^{m_{s_{\delta}}} m_{s_{\delta}}! S_{s_{s_{\delta}}}^{m_{s_{\delta}}-n_{s_{\delta}}-v_{\delta}}, \quad (362)$$

koju zbog (357) i (139) treba prema prije rečenom nadomjestiti operacijom

$$\begin{aligned}
&\prod_{\delta=h+1}^H \frac{(-1)^{m_{s_{\delta}}} m_{s_{\delta}}! 2^{-m_{s_{\delta}}+n_{s_{\delta}}+v_{\delta}} (-m_{s_{\delta}}+n_{s_{\delta}}+v_{\delta})!}{(-2m_{s_{\delta}}+2n_{s_{\delta}}+2v_{\delta})!} \cdot \\
&\cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_{s_{\delta}}} \right)^{-2m_{s_{\delta}}+2n_{s_{\delta}}+2v_{\delta}} \quad (363)
\end{aligned}$$

i poslije izvršenja te operacije staviti

$$x_{s_{h+1}} = \dots = x_{s_H} = 0. \quad (364)$$

Stavimo li kratkoće radi

$$w = -m_{s_{\delta}} + n_{s_{\delta}} + v_{\delta}, \quad (365)$$

vrijedi s obzirom na II (85)

$$\begin{aligned} \frac{(-m_{s_\delta} + n_{s_\delta} + v_\delta)!}{(-2m_{s_\delta} + 2n_{s_\delta} + 2v_\delta)!} &= \frac{w!}{(2w)!} = \frac{(w-1)!}{2(2w-1)!} = \frac{\Gamma(w)}{2\Gamma(2w)} = \\ &= \frac{(-1)^w \Gamma\left(-w + \frac{1}{2}\right)}{2^{2w} \sqrt{\pi}} = \\ &= \frac{(-1)^{-m_{s_\delta} + n_{s_\delta} + v_\delta} \Gamma\left(m_{s_\delta} - n_{s_\delta} - v_\delta + \frac{1}{2}\right)}{2^{-2m_{s_\delta} + 2n_{s_\delta} + 2v_\delta} \sqrt{\pi}}, \quad (366) \end{aligned}$$

tako da (363) dobiva oblik

$$\prod_{\delta=h+1}^H \frac{(-1)^{n_{s_\delta} + v_\delta} m_{s_\delta}! 2^{m_{s_\delta} - n_{s_\delta} - v_\delta} \Gamma\left(m_{s_\delta} - n_{s_\delta} - v_\delta + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_{s_\delta}}\right)^{-2m_{s_\delta} + 2n_{s_\delta} + 2v_\delta}. \quad (367)$$

Pod pretpostavkom

$$q \geq \sum_{r=1}^s 2n_r, \quad (368)$$

gdje su n_r pozitivni cijeli brojevi, vrijedi očito

$$\begin{aligned} &\left\{ \left(\prod_{r=1}^s \left(\frac{\partial}{\partial x_r} \right)^{2n_r} \right) \int_X^t (z - X)^q \varphi(t, z) dz \right\}_{x_1 = \dots = x_s = 0} = \\ &= \frac{q!}{(q - 2n_1 - \dots - 2n_s)!} \int_{X_0}^t (z - X_0)^{q - 2n_1 - \dots - 2n_s} \varphi(t, z) dz, \quad (369) \end{aligned}$$

dok za

$$q < \sum_{r=1}^s 2n_r \quad (370)$$

Iako dobivamo

$$\left\{ \left(\prod_{r=1}^s \left(\frac{\partial}{\partial x_r} \right)^{2n_r} \right) \int_X (z-X)^q \varphi(t, z) dz \right\}_{x_1=\dots=x_s=0} =$$

$$= (-1)^{q+1} q! \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial X} \right)^{-\left(q - \sum_{r=1}^s 2n_r\right)-1} \varphi(t, X) \right\}_{X=X_0}. \quad (371)$$

Ako je $X_0 \neq 0$, može se dakako već u vitičastoj zagradi staviti $X = X_0$.

Primijenimo li formule (369) odnosno (371) na operaciju (367), koja treba djelovati na izraz (360), izlazi konačno, da iščezavanje parametara $x_{s_1}, \dots, x_{s_H}$ znači, da u (141) treba izraz

$$\prod_{\delta=1}^H (-1)^{m_{s_\delta}} m_{s_\delta}! S_{x_{s_\delta}}^{m_{s_\delta} - n_{s_\delta} - v_\delta} \cdot$$

$$\int_{x_{s_1} + \dots + x_{s_{r-\gamma}}}^{t - (x_{k_1} + \dots + x_{k_\gamma})} (y - x_{s_1} - \dots - x_{s_{r-\gamma}})^{r-\gamma-2} \cdot$$

$$\cdot \Lambda_0 \left(c \sqrt{t - x_{k_1} - \dots - x_{k_\gamma}}^2 - y^2 \right) dy \quad (372)$$

za slučaj

$$r - \gamma - 2 + 2 \sum_{\varphi=1}^H (m_{s_\varphi} - n_{s_\varphi} - v_\varphi) \geq 0 \quad (373)$$

nadomjestiti izrazom

$$\frac{(r - \gamma - 2)!}{\left[r - \gamma - 2 + 2 \sum_{\varphi=1}^H (m_{s_\varphi} - n_{s_\varphi} - v_\varphi) \right]!} \cdot$$

$$\prod_{\delta=1}^H \frac{(-1)^{n_{s_\delta} + v_{s_\delta}} 2^{m_{s_\delta} - n_{s_\delta} - v_\delta} m_{s_\delta}! \Gamma\left(m_{s_\delta} - n_{s_\delta} - v_\delta + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}.$$

gdje je

a za slučaj

izrazom

Pojednostavnjenja, koja smo raspravili, mogu se dakako analogno primijeniti na prvi izraz u vitičastoj zagradi u (141). U posljednjem izrazu u toj zagradi može se operator $D_{x_1}^{n_1}$ izravno primijeniti na Besselovu funkciju

što s obzirom na (104) daje

86

pa se naknadno može staviti $x_{s_1} = 0$, tako da se tu dobije rezultat i bez primjene stavka II. 7, koji bi dakako dao isto, jer je

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{1}{m!} \left\{ \frac{d^m}{dx^m} [(x-a)^m f(x)] \right\}_{x=a}, \quad (379)$$

ako li limes na lijevoj strani postoji. U tom slučaju ga dakle ne treba nadomjestiti limesom desne strane, kao što to činimo u smislu jednadžbe II (207). Prijetvorbu (378) smo uostalom već upotrebili u formuli (105) za kompoziciju dviju Besselovih funkcija. Što je izvršeno za jednadžbu (141), može se dakako analogno učiniti i za jednadžbu (140), osim prijetvorbe (378), koja ne dolazi u obzir, jer dotičnih članova nema. Kada su neki parametri stavljeni jednako nuli, jasno je, da će se brojevi a_k , b_k , definirani prema (149), (150), tvoriti samo od onih parametara, koji nisu stavljeni jednako nuli, i da će broj članova u kanonskom obliku biti prema tome manji. Ako su napose svi parametri stavljeni jednako nuli, bit će samo jedan par brojeva a_k , b_k , naime $a = b = 0$.

11. Kriterij za pojavljivanje integrala u kanonskom obliku integralnih teorema

Prema (153) mogu se kompozicije, koje razmatramo, izraziti pomoću četiri vrste transcendentnih funkcija:

$$A_0(c \sqrt{(t-a_k)^2 - b_k^2}), \quad A_1(c \sqrt{(t-a_k)^2 - b_k^2}), \quad (380), (381)$$

$$\int_{b_k}^{t-a_k} A_0(c \sqrt{(t-a_k)^2 - y^2}) dy, \quad (382)$$

$$\int_{b_k}^{t-a_k} A_1(c \sqrt{(t-a_k)^2 - y^2}) dy. \quad (383)$$

Od tih su funkcija prve dvije vrste dobro poznate Besselove funkcije, za koje postoje i tablice, dok su posljednje dvije vrste manje poznate transcendentne funkcije, za koje smo u IV. 8. dokazali da se ne mogu linearno izraziti pomoću prvih dviju, a ni međusobno. Da su te nove funkcije (382), (383) transcendentne, izlazi već iz toga, što prema (166), (167) za specijalnu vrijednost parametra b_k degeneriraju u trigonometrijske funkcije, za koje znamo da su transcendentne.

Bit će zanimljivo istražiti, pod kojim se uvjetima u kanonskom obliku uopće ne pojavljuju funkcije (382), (383), koje ćemo kratko zvati »integralima«, t. j. kada će racionalne funkcije, koje u (153) fungiraju kao koeficijenti tih integrala, biti identično jednake nuli s obzirom na varijablu t za bilo koje vrijednosti parametara $x_1, \dots, x_r$. Pri tom ćemo uzeti u računu slučaj, da neki od tih parametara imaju fiksiranu vrijednost nula. Kao odgovor na to pitanje postavljamo

STAVAK IV. 11. Da u kanonskom obliku kompozicija

$$K_{n_1, \dots, n_r}^{m_1, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r) \quad (r \geq 2)$$

koeficijenti integrala budu identično jednaki nuli s obzirom na varijablu t za bilo koje vrijednosti onih od parametara $x_1, \dots, x_r$, koji nisu stavljeni jednako nuli, nužno je i dovoljno, da se ispuni jedan od ovih uvjeta:

A) Za sve $k=1, \dots, r$ vrijedi

$$m_k < n_k, \quad (384)$$

a nijedan od parametara ne mora biti stavljen jednako nuli.

B) Među vrijednostima $k=1, \dots, r$ ima jedna vrijednost k_1 , za koju je

$$m_{k_1} - n_{k_1} \geq 0, \quad (385)$$

a za sve ostale $k \neq k_1$ vrijedi

$$m_k - n_k \leq -(m_{k_1} - n_{k_1} + 1). \quad (386)$$

Nijedan od parametara ne mora biti stavljen jednako nuli.

C) Među vrijednostima $k=1, \dots, r$ ima lih broj $q > 1$ vrijednosti $k_1, k_2, \dots, k_q$, za koje je

$$m_{k_j} \geq 2n_{k_j} \quad (j = 1, \dots, q), \quad (387)$$

a pripadni parametri su stavljeni jednako nuli:

$$x_{k_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, q). \quad (388)$$

Za sve ostale vrijednosti $k_{q+1}, \dots, k_r$, ukoliko ih ima (t. j. ako nije $q=r$), vrijedi

$$m_{k_j} - n_{k_j} \leq - \left[\frac{q+1}{2} + \sum_{\alpha=1}^q (m_{k_\alpha} - n_{k_\alpha}) \right] \\ (j = q+1, \dots, r), \quad (389)$$

a pripadni parametri $x_{k_{q+1}}, \dots, x_{k_r}$ nemoraju biti stavljeni jednako nuli.

U slučaju $r=2$ uvjet C) je neispunljiv, jer se traži $r \geq q \geq 3$, dok se uvjeti A) i B) daju sažeti u

$$m_1 + m_2 < n_1 + n_2. \quad (390)$$

S obzirom na komutativni zakon za komponiranje možemo uvijek postići, da bude $k_1 = 1$, t. j. da (385) glasi

$$m_1 - n_1 \geq 0, \quad (391)$$

a (386) postane

$$m_k - n_k \leq - (m_1 - n_1 + 1) \quad (k = 2, \dots, r). \quad (392)$$

Dalje možemo postići, da vrijednosti $k_1, \dots, k_q$ budu prve u nizu 1, 2, $\dots$, r , tako da (387) glasi

$$m_k \geq 2n_k \quad (k = 1, \dots, q), \quad (393)$$

a mjesto (388) vrijedi

$$x_1 = x_2 = \dots = x_q = 0. \quad (394)$$

Konačno je (389) nadomješten sa

$$m_k - n_k \leq - \left[\frac{q+1}{2} + \sum_{\alpha=1}^q (m_\alpha - n_\alpha) \right] \\ (k = q+1, \dots, r). \quad (395)$$

Time je postignuto pojednostavljenje u pisanju. Prije nego što pristupimo dokazu stavka, primjećujemo: ako je za neku kompoziciju dokazano, da koeficijenti integrala identično iščezavaju, onda taj zaključak ostaje na snazi, ako bilo koje od parametara (koji nisu već stavljeni jednako nuli) stavimo jednako nuli. Ako naime u kanonskom obliku nema integrala (382), (383) i ako neki od koeficijenata funkcija (380), (381) odnosno član R_4 u

(153) postaju neizmjerni, kada dotični parametri teže prema nuli, onda moramo izvršiti granični prijelaz prema stavku II. 7. Takav postupak involvira procese deriviranja, koji, izvršeni na funkcije (380), (381), prema (142) i III (9) daju opet funkcije tih vrsta, tako da u kanonskom obliku opet nema integrala (382), (383). Dokazujemo li dakle, da je koji od uvjeta A), B), C) dovoljan, možemo pretpostaviti, da su samo oni parametri jednaki nuli, koji prema uvjetu to moraju biti, pa će dokaz vrijediti i za slučaj, ako su još dalji parametri stavljeni jednako nuli. Ako dokazujemo, da su ti uvjeti nužni, moći ćemo za slučajeve, koji tim uvjetima nisu obuhvaćeni, pretpostaviti, da je što više parametara jednako nuli, i dokazati, da se u kanonskom obliku pojavljuju integrali. Taj će dokaz vrijediti i onda, ako ti parametri nisu stavljeni jednako nuli, jer bi inače integrali morali nastati stavljanjem tih parametara jednako nuli, što smo vidjeli, da ne može biti. Kratko rečeno, stavljanjem parametara jednako nuli mogu integrali iz kanonskoga oblika nestati, ali integrali ne mogu nastati, ako ih nije već bilo.

Dokazujemo najprije, da su uvjeti stavka dovoljni. Pri tome trebamo neke zaključke, koji se daju izvesti iz stavka II. 2. Zamislimo, da je u smislu IV. 7. određen kanonski oblik integrala

$$\int_x^t (y - X)^m A_0 (c \sqrt{t^2 - y^2}) dy. \quad (396)$$

Pitamo se, pod kojim se uvjetima izvršenjem operacija D_{x_k} ($k=1, \dots, n$) na taj integral mogu ukloniti integrali u njegovu kanonskom obliku.

Razvijemo li potenciju $(y - X)^m$ po binomnom stavku i rastavimo integral (396) na toliko sumanda, koliko taj razvoj ima članova, jasno je prema III (269) i III (333), da članovi s lihim potencijama od y ne prinosе integrala za kanonski oblik, pa dakako ni onda, ako na njih još izvršimo neke operacije D_{x_k} . Članovi s takim potencijama od y daju prema III (341) izraz, koji, ako se izostave članovi bez integrala, ima oblik

$$(-1)^m \left\{ X^m - \binom{m}{2} f_2(t) X^{m-2} + \right. \\ \left. + \binom{m}{4} f_4(t) X^{m-4} - \dots \right\} \int_x^t A_0 (c \sqrt{t^2 - y^2}) dy +$$

$$+ (-1)^m \left\{ X^m - \binom{m}{2} g_2(t) X^{m-2} + \right. \\ \left. + \binom{m}{4} g_4(t) X^{m-4} - \dots \right\} \int_X^t A_i(c \sqrt{t^2 - y^2}) dy, \quad (397)$$

gdje funkcije $f(t)$ i $g(t)$ znače sume, koje u III (341) fungiraju kao koeficijenti integrala, a indeksi tih funkcija znače eksponent od x u integralu na lijevoj strani od III (341).

Primijene li se na izraz (397) operacije D_{x_k} , vidi se, da diferencijacije po donjoj granici integrala daju članove bez integrala, tako da se možemo ograničiti na pitanje, pod kojim se uvjetima primjenom operacija D_{x_k} može poništiti izraz oblika

$$X^m - \binom{m}{2} f_2(t) X^{m-2} + \binom{m}{4} f_4(t) X^{m-4} - \dots \quad (398)$$

Jasno je, da se mora poništiti koeficijent svake potencije od t u tom izrazu, a takav koeficijent ima oblik polinoma

$$aX^m + bX^{m-2} + \dots, \quad (399)$$

gdje neki od koeficijenata $a, b, \dots$ mogu biti jednaki nuli. Potencija X^s je prema (80) homogena funkcija s -toga stupnja varijabla $x_1, \dots, x_n$, pa primjena nekih operacija D_{x_k} na sumu (399) snižava stupanj svakoga člana, koji pri tome ne iščezne, za isti broj jedinica, tako da su članovi, koji nisu iščezli, različitog stupnja i poslije izvršenja tih operacija, i njihova suma ne može biti jednaka nuli za bilo koje vrijednosti parametara $x_1, \dots, x_n$. Moraju dakle svi članovi sume (399) iščeznuti svaki za sebe, da cijela suma iščezne. Budući da svaka potencija od X , koja se pojavljuje u (398), mora biti sadržana u nekom koeficijentu (399) neke potencije od t (uključivo nulte potencije), dakle će (398) primjenom operacija D_{x_k} iščeznuti identično s obzirom na t za bilo koje vrijednosti parametara $x_1, \dots, x_n$, onda i samo onda, ako primjenom tih istih operacija iščeznu sve potencije $X^m, X^{m-2}, \dots$, koje se nalaze u (398).

Za iščezavanje potencije X^m vrijede kriteriji stavka II. 2. Ako je za najvišu potenciju X^m ispunjen kriterij A) toga stavka, t. j. ako je $m < n$ (400), taj je uvjet pogotovu ispunjen i za sve niže potencije od X u (398). Ako je za najvišu potenciju X^m ispunjen kriterij B) rečenoga stavka, t. j. ako je $m - n$ lih broj, a $m \geq n$, onda je i za sve niže potencije X^{m-2k} u (398) $m - 2k - n$ lih broj, pa te potencije, bez obzira na to, da li je

za njih $m - 2k = n$, iščeznu $\frac{m-n+3}{2}$ -kratnom primjenom svih operacija D_{x_k} . Te su operacije za poništenje najviše potencije X^m nužne i dovoljne, a za poništenje nižih potencija očito pogotovu dovoljne. Prema tome možemo ustanoviti, da su kriteriji za poništenje integrala u kanonskom obliku od (396) primjenom operacija D_{x_k} isti kao kriteriji prema stavku II. 2., koji su nužni i dovoljni za poništenje potencije X^m .

Prijeđimo sada na pitanje, da li je uvjet A) stavka IV. 11. dovoljan. Promotrimo u tu svrhu prvi član vitičaste zgrade u (140) odnosno (141). Budući da je zbog (384)

$$m_v - n_v - q_v \leq -1, \quad (401)$$

možemo prema (139) pisati

$$S_{x_v}^{m_v - n_v - q_v} = D_{x_v}^{-m_v + n_v + q_v}. \quad (402)$$

Budući da je $r - 2 < r$ (403), što odgovara uvjetu $m < n$ kriterija A) u stavku II. 2., a primijenjeno je r različitih operacija (402), dok prema rečenom kriteriju treba primijeniti barem $m + 1$, t. j. u našem slučaju $r - 2 + 1 = r - 1$ takvih operacija, ne daje taj član integrala za kanonski oblik.

U drugom članu u vitičastoj zagradi od (140) odnosno (141) može se analogno zbog (384) staviti

$$m_{s_\delta} - n_{s_\delta} - v_\delta \leq -1 \quad (404)$$

i prema (139)

$$S_{x_{s_\delta}}^{m_{s_\delta} - n_{s_\delta} - v_\delta} = D_{x_{s_\delta}}^{-m_{s_\delta} + n_{s_\delta} + v_\delta}. \quad (405)$$

Ovdje je broj varijabla $x_1, \dots, x_{r-\gamma}$ jednak $r - \gamma$, pa je $r - \gamma - 2 < r - \gamma$ (406) analogon relacije $m < n$. Izvršeno je $r - \gamma$ operacija (405), što je više nego $m + 1 = r - \gamma - 2 + 1 = r - \gamma - 1$. I ovaj član dakle ne daje integrala za kanonski oblik, a treći član u vitičastoj zagradi (141) uopće ne sadržava integrala. Time je dokazano, da je uvjet A) stavka IV. 11. dovoljan pod pretpostavkom, da nijedan od parametara $x_1, \dots, x_r$ nije stavljen jednako nuli, što se pretpostavlja u (140), (141). Pogotovu je taj uvjet dovoljan i onda, ako se neki ili svi ti parametri stave jednako nuli, kako smo već prije raspravili. Pretpostavimo dalje, da vrijedi uvjet B) stavka IV. 11., t. j. da

vrijede (301) i (392). Za članove drugog izraza u vitičastoj zagradi od (140) odnosno (141), za koje je m_1 sadržan u brojevima $m_{k_1}, \dots, m_{k_\gamma}$, t. j. kada je 1 sadržan među $k_1, \dots, k_\gamma$, vrijedi isto razmatranje kao gore, t. j. ti članovi ne daju integrala. Ako je naprotiv u drugom izrazu vitičaste zagrade 1 sadržan među brojevima $s_1, \dots, s_{r-\gamma}$, t. j. m_1 među brojevima $m_{s_1}, \dots, m_{s_{r-\gamma}}$, moramo izvršiti novo razmatranje, koje će biti primjenljivo i na prvi izraz u vitičastoj zagradi.

Zamislamo, da je u drugom izrazu u vitičastoj zagradi na integral najprije primijenjena samo operacija $S_{x_1}^{m_1 - n_1 - v_1}$, gdje smo pretpostavili, da je $s_1 = 1$. Smijemo dalje pretpostaviti, da je

$$m_1 - n_1 - v_1 \geq 0, \quad (407)$$

jer inače operator $S_{x_1}^{m_1 - n_1 - v_1}$ u smislu (139) znači deriviranje, i stoga taj slučaj potpada pod argumentaciju, koju smo dali za slučaj uvijek A) stavka IV. 11. Uvodimo kratice

$$X_1 = x_{k_1} + \dots + x_{k_\gamma}, \quad (408)$$

$$X_2 = x_{s_1} + x_{s_2} + \dots + x_{s_{r-\gamma}} = x_1 + x_{s_2} + \dots + x_{s_{r-\gamma}}. \quad (409)$$

Prema definicijama, koje su dane prije formule (131), vrijedi onda

$$X_1 + X_2 = X = x_1 + \dots + x_r. \quad (410)$$

Supstitucijom

$$z = y - X_2 + x_1 \quad (411)$$

možemo integral drugog izraza u vitičastoj zagradi od (140) odnosno (141) dovesti u nešto drugi oblik:

$$\begin{aligned} & \int_{X_2}^{t-X_1} (y - X_2)^{r-\gamma-2} A_0 (c \sqrt{(t-X_1)^2 - y^2}) dy = \\ & = (-1)^{r-\gamma-1} \int_{t-X+X_1}^{x_1} (x_1 - z)^{r-\gamma-2} A_0 (c \sqrt{(t-X_1)^2 - (z + X_2 - x_1)^2}) dz. \end{aligned} \quad (412)$$

Stavimo sada u II (168)

$$n = r, \quad q = r - \gamma - 2, \quad k = 1, \quad (413), (414), (415)$$

$$\varphi(t; z, x_2, \dots, x_r) =$$

$$= (-1)^{r-\gamma-1} (r - \gamma - 2)! A_0 (c \sqrt{(t-X_1)^2 - (z + X_2 - x_1)^2}), \quad (416)$$

označivši varijablu y sa z . Prema II (170) i II (175), gdje osim (413) do (416) još stavljamo

$$m = m_1 - n_1 - v_1, \quad (417)$$

dobivamo onda s obzirom na (412)

$$\begin{aligned} & S_{X_2}^{m_1-n_1-v_1} \int_{X_2}^{t-X_1} (y-X_2)^{r-\gamma-2} A_0 (c \sqrt{(t-X_1)^2-y^2}) dy = \\ & = \frac{(-1)^{r-\gamma-1} (r-\gamma-2)!}{(m_1-n_1-v_1)! 2^{m_1-n_1-v_1}} \int_{t-X+x_1}^{x_1} \left[\left(\int_{x_1}^z dz \right)^{r-\gamma-2} (x_1^2-z^2)^{m_1-n_1-v_1} \right] \cdot \\ & \cdot A_0 (c \sqrt{(t-X_1)^2-(z+X_2-x_1)^2}) dz, \quad (418) \end{aligned}$$

što u slučaju $\gamma = r-2$ (419) [to je najveća moguća vrijednost od γ u dotičnom izrazu od (140) i (141)] daje

$$\begin{aligned} & S_{X_2}^{m_1-n_1-v_1} \int_{X_2}^{t-X_1} A_0 (c \sqrt{(t-X_1)^2-y^2}) dy = \\ & = - \frac{1}{(m_1-n_1-v_1)! 2^{m_1-n_1-v_1}} \int_{t-X+x_1}^{x_1} (x_1^2-z^2)^{m_1-n_1-v_1} \cdot \\ & \cdot A_0 (c \sqrt{(t-X_1)^2-(z+X_2-x_1)^2}) dz, \quad (420) \end{aligned}$$

dok u slučaju da je $\gamma < r-2$ (421) možemo prijeći na oblik II (176), t. j.

$$\begin{aligned} & S_{X_2}^{m_1-n_1-v_1} \int_{X_2}^{t-X_1} (y-X_2)^{r-\gamma-2} A_0 (c \sqrt{(t-X_1)^2-y^2}) dy = \\ & = \frac{(-1)^{r-\gamma-1} (r-\gamma-2)}{(m_1-n_1-v_1)! 2^{m_1-n_1-v_1}} \int_{t-X+x_1}^{x_1} \left[\int_{x_1}^z (z-u)^{r-\gamma-3} (x_1^2-u^2)^{m_1-n_1-v_1} du \right] \cdot \\ & \cdot A_0 (c \sqrt{(t-X_1)^2-(z+X_2-x_1)^2}) dz. \quad (422) \end{aligned}$$

Ako na desnoj strani od (420) i (422) opet uvedemo y prema (411), te formule glase:

$$\begin{aligned} & S_{X_2}^{m_1-n_1-v_1} \int_{X_2}^{t-X_1} A_0 (c \sqrt{(t-X_1)^2-y^2}) dy = \\ & = \frac{1}{(m_1-n_1-v_1)! 2^{m_1-n_1-v_1}} \int_{X_2}^{t-X_1} [x_1^2-(y-X_2+x_1)^2]^{m_1-n_1-v_1} \cdot \\ & \cdot A_0 (c \sqrt{(t-X_1)^2-y^2}) dy, \quad (423) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{x_1}^{m_1-n_1-v_1} \int_{x_2}^{t-X_1} (y-X_2)^{r-\gamma-2} A_0(c \sqrt{(t-X_1)^2-y^2}) dy = \\
= \frac{(-1)^{r-\gamma-2} (r-\gamma-2)}{(m_1-n_1-v_1)! 2^{m_1-n_1-v_1}} \cdot \\
\cdot \int_{x_2}^{t-X_1} \left[\int_{x_1}^{y-X_2+x_1} (y-X_2+x_1-u)^{r-\gamma-3} (x_1^2-u^2)^{m_1-n_1-v_1} du \right] \cdot \\
\cdot A_0(c \sqrt{(t-X_1)^2-y^2}) dy. \quad (424)
\end{aligned}$$

Stavimo sada

$$X_2 - x_1 = \bar{X}_2 = x_{s_2} + \dots + x_{s_{r-\gamma}}. \quad (425)$$

Pretpostavi li se najprije (419), onda je $\bar{X}_2 = x_{s_2}$ (426), pa se integral u (423) može pisati u obliku

$$\int_{x_1+x_{s_2}}^{t-X_1} [x_1^2 - (y-x_{s_2})^2]^{m_1-n_1-v_1} A_0(c \sqrt{(t-X_1)^2-y^2}) dy. \quad (427)$$

Prema (140) odnosno (141) treba na taj integral još primijeniti operaciju

$$S_{x_{s_2}}^{m_{s_2}-n_{s_2}-v_2} = D_{x_{s_2}}^{-m_{s_2}+n_{s_2}+v_2}, \quad (428)$$

gdje je s obzirom na (392) sigurno

$$-m_{s_2} + n_{s_2} + v_2 \geq m_1 - n_1 + 1 > m_1 - n_1 - v_1. \quad (429)$$

Razvije li se potencija u integralu (427) po binomnom stavku, dobiju se integrali oblika (396) (gdje je sada $X = x_{s_2}$). Kako smo vidjeli, mogu se na te integrale primijeniti kriteriji stavka II. 2. Najviši će eksponent biti

$$m = 2(m_1 - n_1 - v_1), \quad (430)$$

a i svi su ostali eksponenti takvi. Broj varijabla je jednak jedan, dakle $n = 1$ (431). U slučaju $m = 0$ (432) dat će diferencijacija (428) izraz, koji ne sadržava integrala. Ako je $m_1 - n_1 - v_1 > 0$ (433), može prema (430) i (431) biti $m > n$, a $m - n$ je lih broj, dakle treba prema stavku II. 2. B) izvršiti jedinu operaciju $D_{x_{s_2}}$, i to

$$\frac{m-n+3}{2} = \frac{2(m_1-n_1-v_1)-1+3}{2} = m_1-n_1-v_1+1$$

puta. Prema (428) ona je izvršena $-m_{s_2} + n'_{s_2} + v_2$ puta, što je zbog (429) barem toliko kao $m_1 - n_1 - v_1 + 1$. U kanonskom obliku dakle nema integrala.

Za slučaj (421) služimo se oblikom (424). S oznakom (425) integral na desnoj strani od (424) dobiva oblik

$$\int_{x_1 + \bar{X}_2}^{\epsilon - X_1} \left[\int_{x_1}^{y - \bar{X}_2} (y - \bar{X}_2 - u)^{r-\gamma-3} (x_1^2 - u^2)^{m_1-n_1-v_1} du \right] \cdot \Lambda_0(c \sqrt{(t - X_1)^2 - y^2}) dy. \quad (434)$$

Nutarnji integral može se razviti po potencijama od $y - \bar{X}_2$ pomoću formule II (182), čime se dobivaju sami integrali oblika (396):

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{y - \bar{X}_2} (y - \bar{X}_2 - u)^{r-\gamma-3} (x_1^2 - u^2)^{m_1-n_1-v_1} du = \\ &= \sum_{s=0}^{r-\gamma-3} \frac{(-1)^{r-\gamma-2-s} (m_1 - n_1 - v_1)! \binom{r-\gamma-3}{s} \Gamma\left(\frac{r-\gamma-2-s}{2}\right)}{2 \Gamma\left(\frac{r-\gamma-s}{2} + m_1 - n_1 - v_1\right)} \cdot \\ & \cdot x_1^{2(m_1-n_1-v_1) + r-\gamma-2-s} (y - \bar{X}_2)^s + \\ &+ \sum_{s=0}^{m_1-n_1-v_1} \frac{(-1)^s \binom{m_1-n_1-v_1}{s}}{(r-\gamma-2) \binom{r-\gamma-2+2s}{r-\gamma-2}} x_1^{2(m_1-n_1-v_1)-2s} (y - \bar{X}_2)^{r-\gamma-2+2s}. \quad (435) \end{aligned}$$

U prvoj je sumi najviši eksponent $s = r - \gamma - 3$, koji odgovara eksponentu m u (396) i u stavku II. 2. Da se ponište integrali u kanonskom obliku, treba prema stavku II. 2.A) primijeniti $m + 1$ različitih operacija $D_{x_{s_\delta}}$, svaku barem jedamput. Prema (140) odnosno (141) ima tih operacija $r - \gamma - 1$, dakle za jednu više nego što je potrebno, a svaka je izvršena barem jedamput, jer je zbog (386) i (385)

$$-m_{s_\delta} + n_{s_\delta} + v_{s_\delta} \geq 1. \quad (436)$$

Članovi prve sume od (435) dakle ne prinose integrala za kanonski oblik.

U drugoj je sumi najmanji eksponent od $y - \bar{X}_2$ jednak $r - \gamma - 2$. Tu je $m < n$, a primijenjeno je, kako smo spomenuli, $r - \gamma - 1$, dakle $m + 1$ različitih operacija D_{x_δ} , što je prema stavku II. 2. A) dosta da se uklone integrali u kanonskom obliku. Za ostale potencije je $m > n$, a

$$m - n = r - \gamma - 2 + 2s - (r - \gamma - 1) = 2s - 1$$

lih broj, pa prema stavku II. 2. B) treba primijeniti sve operacije D_{x_δ} ($\delta = 2, \dots, r - \gamma$), i to svaku $\frac{m-n+3}{2}$ puta. To je u našem slučaju

$$\frac{m-n+3}{2} = \frac{r-\gamma-2+2s-(r-\gamma-1)+3}{2} = s+1$$

puta. No budući da je $s \leq m_1 - n_1 - v_1$, to je zbog (386)

$$s+1 \leq m_1 - n_1 - v_1 + 1 \leq -(m_{s_\delta} - n_{s_\delta}) \leq -(m_{s_\delta} - n_{s_\delta} - v_{s_\delta}), \quad (437)$$

tako da je i taj zahtjev zadovoljen, a ni ovi članovi ne prinose integrala za kanonski oblik. Razmatranje je očito primjenljivo i na prvi član u vitičastoj zagradi u (140), (141), ako stavimo $\gamma = 0$. Time je dokazano, da je uvjet B) stavka IV. 11. dovoljan. To pogotovu vrijedi, ako su koji od parametara stavljeni jednako nuli.

Prelazimo na pitanje, da li je uvjet C) stavka IV. 11. dovoljan. Neka dakle vrijede (393), (394), (395). Ako su koji od brojeva $1, \dots, q$ sadržani među brojevima $k_1, \dots, k_\gamma$, zbog (393) za njih će vrijediti (348), tako da desna strana od (347) iščezne, kako je tamo spomenuto, kada se dotični parametri prema (394) stave jednako nuli, odnosno tih članova u smislu (140) uopće nema, ako je dotični donji indeks jednak nuli. (Razumije se, da u (140) ne bi moralo baš $r-p$ posljednjih donjih indeksa biti jednako nuli, kako smo radi jednostavnijega pisanja pretpostavili.) U tom slučaju dakle dotični članovi u (140) odnosno (141) otpadaju. Zamišlimo prema tome, da su svi brojevi $1, \dots, q$ sadržani među brojevima $s_1, \dots, s_{r-\gamma}$, na pr. kao $s_1 = 1, s_2 = 2, \dots, s_q = q$, gdje je $q \leq r - \gamma$, jer inače moraju neki od brojeva $1, \dots, q$ biti sadržani među $k_1, \dots, k_\gamma$. Na ovaj slučaj može se primijeniti formula (374), gdje samo treba mjesto H pisati q . Zbog $\gamma \leq r - 2$ i uvjeta (393) ne može vrijediti (376), tako da (377) ne dolazi u obzir. (Taj izraz i onako ne bi pridonio integrala za kanonski oblik.)

Ako je najprije $q = r - \gamma$, to je X_q , koji odgovara X_H u (374), jednak nuli, a operatori u izrazu (372) svi su integralni operatori, koje prema (140), (141) treba primijeniti. Budući da je q lih broj, bit će i eksponent varijable y u (374) lih, pa taj izraz u smislu III (318) ne daje integrala za kanonski oblik, na čemu ni primjena operatora $D_{x_{k_e}}$ i $\frac{\partial}{\partial t}$ prema (140), (141) ništa ne mijenja. Neka je dakle $q < r - \gamma$. U tom slučaju na (374), u kojem piše H mjesto q , treba još primijeniti operatore

$$S_{x_{s_\delta}}^{m_{s_\delta} - n_{s_\delta} - v_\delta} \quad (\delta = q + 1, \dots, r - \gamma).$$

U smislu stavka II. 2. i izraza (396) vrijedi u ovom slučaju za broj varijabla $n = r - \gamma - q$ (438), a za eksponent pod integralom

$$m = r - \gamma - 2 + 2 \sum_{\varphi=1}^q (m_\varphi - n_\varphi - v_\varphi). \quad (439)$$

Ako je $m < n$, to prema stavku II. 2. A) treba da bude izvršeno barem $m + 1$ različitih operacija $D_{x_{s_\delta}}$ ($\delta = q + 1, \dots, r - \gamma$), svaka barem jedamput. Budući da je broj različitih izvršenih operacija jednak broju varijabla n , koji je pretpostavljen kao veći od m , a svaka je operacija $D_{x_{s_\delta}}$ s obzirom na (139) izvršena barem jedamput, jer je zbog (393), (395) i $q \geq 3$

$$m_{s_\delta} - n_{s_\delta} - v_\delta \leq m_{s_\delta} - n_{s_\delta} \leq - \left[\frac{q+1}{2} + \sum_{\varphi=1}^q (m_\varphi - n_\varphi) \right] \leq - \frac{q+1}{2} < -1$$

$$(\delta = q + 1, \dots, r - \gamma), \quad (440)$$

taj je uvjet zadovoljen. Ako je $m \geq n$, prema (438), (439) $m - n$ je lih broj, jer je q lih, pa se može primijeniti stavak II. 2. B). Broj m je po (439) maksimalan, ako su svi $v_\varphi = 0$, t. j.

$$m_{\max} = r - \gamma - 2 + 2 \sum_{\varphi=1}^q (m_\varphi - n_\varphi). \quad (441)$$

Treba dakle svaku operaciju izvršiti barem

$$\frac{m_{\max} - n + 3}{2} = \frac{q+1}{2} + \sum_{\varphi=1}^q (m_{\varphi} - n_{\varphi}) \quad (442)$$

puta, a to je s obzirom na (440) i (139) zaista učinjeno. Prema tome u drugom članu vitičaste zgrade u (140), (141) nema integrala u kanonskom obliku, a isto razmatranje vrijedi i za prvi član, ako stavimo $\gamma = 0$. Ovo vrijedi pogotovu onda, ako su koji od parametara $x_{q+1}, \dots, x_r$ stavljeni jednako nuli. Time je dokazano, da je i uvjet C) stavka IV. 11. dovoljan.

Prije nego što dokažemo, da su uvjeti stavka IV. 11. nužni, provest ćemo neka pomoćna razmatranja. Recimo, da želimo sve parametre od (140), (141) staviti jednako nuli. Ako za jedan od k_{ε} ($\varepsilon = 1, \dots, \gamma$) vrijedi

$$m_{k_{\varepsilon}} \geq 2n_{k_{\varepsilon}}, \quad (443)$$

onda će s obzirom na (348) svi članovi dotične sume po w_{ε} otpasti, t. j. članovi za dotičnu kombinaciju $(k_1, \dots, k_{\gamma})$ otpadaju. Možemo dakle pretpostaviti

$$m_{k_{\varepsilon}} < 2n_{k_{\varepsilon}} \quad (\varepsilon = 1, \dots, \gamma). \quad (444)$$

Indeks sumacije w_{ε} će onda trebati primiti samo cijele vrijednosti

$$0 \leq w_{\varepsilon} \leq \frac{2n_{k_{\varepsilon}} - m_{k_{\varepsilon}} - 1}{2}, \quad (445)$$

jer za ostale vrijednosti na temelju (348) dotični članovi otpadaju. Prema (355) dobivamo stoga za dotičnu kombinaciju $(k_1, \dots, k_{\gamma})$, a uz odabrane v_{φ} , kao dio drugoga izraza vitičaste zgrade u (140), (141):

$$\frac{1}{(r-\gamma-2)!} \sum_{w_i=0}^{\left[\frac{2n_{k_1} - m_{k_1} - 1}{2} \right]} \dots$$

$$\dots \sum_{w_\gamma=0}^{\left[\frac{2n_{k_\gamma}-m_{k_\gamma}-1}{2}\right]} \left\{ \left(\prod_{\varepsilon=1}^{\gamma} \frac{(-1)^{m_{k_\varepsilon}+1} c^{2w_\varepsilon} 2^{n_{k_\varepsilon}-2w_\varepsilon-1} (n_{k_\varepsilon}-w_\varepsilon-1)!}{w_\varepsilon! (2n_{k_\varepsilon}-2w_\varepsilon-m_{k_\varepsilon}-1)!} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{\varepsilon=1}^{\sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} (2n_{k_\varepsilon}-2w_\varepsilon-m_{k_\varepsilon})-\gamma+h} \psi(t, 0, \dots, 0) \right\}, \quad (446)$$

gdje smo radi kraćega pisanja stavili

$$h = \sum_{\varphi=1}^{r-\gamma} (m_{s_\varphi} - 2v_\varphi), \quad (447)$$

a $\psi(t, 0, \dots, 0)$ znači

$$[\psi(t, x_{k_1}, \dots, x_{k_\gamma})]_{x_{k_1}=\dots=x_{k_\gamma}=0},$$

gdje je ψ izraz u uglastoj zagradi u (140), (141), od kojega je odbačen produkt parametara x_{k_ε} . Ponovljenom primjenom formula (423), (424), (435) može se $\psi(t, 0, \dots, 0)$ izraziti linearno pomoću integrala oblika

$$P = \int_{X_2}^t y^M A_0(c \sqrt{t^2 - y^2}) dy \quad (448)$$

sa

$$X_2 = x_{s_1} + \dots + x_{s_{r-\gamma}}. \quad (449)$$

Pri tome možemo pretpostaviti, da je M tak broj, jer u slučaju lihoga M integrali (448) prema III (254), III (318) ne primose integrala za kanonski oblik. Nadomjestit ćemo dakle $\psi(t, 0, \dots, 0)$ u izrazu (446) integralom (448).

Prvi slučaj. Neka je

$$M = 4n, \quad (450)$$

$$\sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} (2n_{k_\varepsilon} - 2w_\varepsilon - m_{k_\varepsilon}) - \gamma + h = 2r = N - 2 \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} w_\varepsilon \quad (451)$$

sa

$$N = \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} (2n_{k_{\varepsilon}} - m_{k_{\varepsilon}}) - \gamma + h. \quad (452)$$

Uvrstimo li to u III (408), dobivamo

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{N-2 \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} w_{\varepsilon}} P &= \frac{(-1)^{\frac{M}{4} + \frac{N}{2} - \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} w_{\varepsilon}} M!}{2^{\frac{M}{2}} c^{\frac{M}{2} - N + 2 \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} w_{\varepsilon}} \left(\frac{M}{2}\right)!} t^{\frac{M}{2}} P_0 + \\ &+ \text{const. } t^{\frac{M}{2}} P_1 + \dots \end{aligned} \quad (453)$$

Ako se to uvrsti u (556), vidi se, da će se moći faktori $c^{-w_{\varepsilon}}$ kratiti i da pridolazi faktor $(-1)^{w_{\varepsilon}}$, čime je omogućena provedba sumacija po $w_1, \dots, w_{\gamma}$, koje su naznačene u (446), i to pomoću formule II (52). Stavimo li u II (52)

$$n = 2n_{k_{\varepsilon}} - m_{k_{\varepsilon}} - 1, \quad (454)$$

$$m = n_{k_{\varepsilon}} - m_{k_{\varepsilon}} - 1, \quad (455)$$

dobivamo

$$\begin{aligned} &\sum_{w_{\varepsilon}=0}^{\left[\frac{2n_{k_{\varepsilon}} - m_{k_{\varepsilon}} - 1}{2}\right]} \frac{(-1)^{w_{\varepsilon}} 2^{2n_{k_{\varepsilon}} - m_{k_{\varepsilon}} - 1 - 2w_{\varepsilon}} (n_{k_{\varepsilon}} - w_{\varepsilon} - 1)!}{w_{\varepsilon}! (2n_{k_{\varepsilon}} - m_{k_{\varepsilon}} - 1 - 2w_{\varepsilon})!} = \\ &= \frac{(-1)^{n_{k_{\varepsilon}} - m_{k_{\varepsilon}} - 1} 2^{2n_{k_{\varepsilon}} - 2m_{k_{\varepsilon}} - 1} \Gamma\left(n_{k_{\varepsilon}} - m_{k_{\varepsilon}} - \frac{1}{2}\right) \cdot m_{k_{\varepsilon}}!}{\sqrt{\pi} (2n_{k_{\varepsilon}} - m_{k_{\varepsilon}} - 1)!}, \end{aligned} \quad (456)$$

gdje uvjet $m \leq \frac{n-1}{2}$ sada znači

$$n_{k_{\varepsilon}} - m_{k_{\varepsilon}} - 1 \leq \frac{2n_{k_{\varepsilon}} - m_{k_{\varepsilon}} - 1}{2},$$

što je ispravno, jer $m_{k_{\varepsilon}}$ nije negativan.

Pišimo (456) u obliku

$$\left[\frac{2n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon} - 1}{2} \right] \sum_{w_\varepsilon=0}^{n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon} - 1} \frac{(-1)^{m_{k_\varepsilon} + w_\varepsilon + 1} 2^{n_{k_\varepsilon} - 2w_\varepsilon - 1} (n_{k_\varepsilon} - w_\varepsilon - 1)!}{w_\varepsilon! (2n_{k_\varepsilon} - 2w_\varepsilon - m_{k_\varepsilon} - 1)!} =$$

$$= \frac{(-1)^{n_{k_\varepsilon}} 2^{n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon} - 1} \Gamma\left(n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon} - \frac{1}{2}\right) \cdot m_{k_\varepsilon}!}{\sqrt{\pi} (2n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon} - 1)!} \quad (457)$$

i uvrstimo (453) i (457) u (446). Ako označimo

$$\Pi = \prod_{\varepsilon=1}^{\gamma} \frac{(-1)^{n_{k_\varepsilon}} 2^{n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon} - 1} \Gamma\left(n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon} - \frac{1}{2}\right) \cdot m_{k_\varepsilon}!}{\sqrt{\pi} (2n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon} - 1)!}, \quad (458)$$

dobivamo mjesto (446), u kojem smo ψ nadomjestili integralom (448), izraz

$$t^{\frac{M}{2}} P_0 \frac{(-1)^{\frac{M}{4} + \frac{N}{2}} M!}{2^{\frac{M}{2}} c^{\frac{M}{2} - N} \left(\frac{M}{2}\right)! (r - \gamma - 2)!} \Pi + \text{const. } t^{\frac{M}{2}} P_1 + \dots \quad (459)$$

Drugi slučaj. Neka je

$$M = 4n + 2, \quad (460)$$

$$N - 2 \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} w_\varepsilon = \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} (2n_{k_\varepsilon} - 2w_\varepsilon - m_{k_\varepsilon}) - \gamma + h = 2r + 1. \quad (461)$$

Služeći se ovaj put formulom III (411) dolazimo sasvim analognim načinom do izraza

$$t^{\frac{M}{2}} P_0 \frac{(-1)^{\frac{M-2}{2} + \frac{N-1}{2}} M!}{2^{\frac{M}{2}} c^{\frac{M}{2} - N} \left(\frac{M}{2}\right)! (r - \gamma - 2)!} \Pi + \text{const. } t^{\frac{M}{2}} P_1 + \dots \quad (462)$$

Treći slučaj. Neka je

$$M = 4n, \quad (463)$$

$$N - 2 \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} w_{\varepsilon} = \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} (2n_{k_{\varepsilon}} - 2w_{\varepsilon} - m_{k_{\varepsilon}}) - \gamma + h = 2r + 1. \quad (464)$$

Služimo se formulom III (409) i računamo ovaj put koeficijent od P_1 , pa dolazimo do oblika

$$t^{\frac{M}{2}+1} P_1 \frac{(-1)^{\frac{M}{4} + \frac{N-1}{2} + 1} M!}{2^{\frac{M}{2}+1} c^{\frac{M}{2}-N} \left(\frac{M}{2}\right)! (r-\gamma-2)!} \Pi + \text{const. } t^{\frac{M}{2}-1} P_0 + \dots \quad (465)$$

Četvrti slučaj. Neka je

$$M = 4n + 2, \quad (466)$$

$$N - 2 \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} w_{\varepsilon} = \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} (2n_{k_{\varepsilon}} - 2w_{\varepsilon} - m_{k_{\varepsilon}}) - \gamma + h = 2r. \quad (467)$$

Služimo se formulom III (410) i dolazimo do oblika

$$t^{\frac{M}{2}+1} P_1 \frac{(-1)^{\frac{M}{4} + \frac{N-1}{2}} M!}{2^{\frac{M}{2}+1} c^{\frac{M}{2}-N} \left(\frac{M}{2}\right)! (r-\gamma-2)!} \Pi + \text{const. } t^{\frac{M}{2}-1} P_0 + \dots \quad (468)$$

Prvi i drugi slučaj mogu se sažeti u jedan oblik. U oba slučaja je $\frac{M}{2} + N$ tak broj t , j.

$$\frac{M}{2} + N \equiv 0 \pmod{2}, \quad (469)$$

a ta zajednička pretpostavka može biti ostvarena samo prema (450), (451) prvoga slučaja ili prema (460), (461) drugoga slučaja. Vrijede li (450), (451), očito je

$$\frac{M}{4} + \frac{N}{2} \equiv -\frac{M}{4} + \frac{N}{2} \pmod{2}, \quad (470)$$

a, vrijede li (460), (461), to je

$$\frac{M-2}{4} + \frac{N-1}{2} \equiv -\frac{M}{4} + \frac{N}{2} \pmod{2}, \quad (471)$$

tako da se (459) i (462) mogu predložiti u zajedničkom obliku

$$t^{\frac{M}{2}} P_0 \frac{(-1)^{-\frac{M}{4} + \frac{N}{2}} M!}{2^{\frac{M}{2}} c^{\frac{M}{2} - N} \left(\frac{M}{2}\right)! (r - \gamma - 2)!} \prod + \text{const. } t^{\frac{M}{2}} P_1 + \dots \quad (472)$$

(Ne tvrdi se, da je konstanta pred $t^{\frac{M}{2}} P_1$ u (459) i (462) ista. Ta konstanta nas dalje ne zanima.)

Treći i četvrti slučaj imaju zajedničku pretpostavku, da je $\frac{M}{2} + N$ lih broj, t. j.

$$\frac{M}{2} + N \equiv 1 \pmod{2}, \quad (473)$$

a ta pretpostavka može biti ostvarena samo prema (463), (464) trećega slučaja ili prema (466), (467) četvrtoga slučaja. Ako vrijede (463), (464), dobivamo

$$\frac{M}{4} + \frac{N-1}{2} + 1 \equiv -\frac{M}{4} + \frac{N+1}{2} \pmod{2}, \quad (474)$$

a ako vrijede (466), (467), izlazi

$$\frac{M}{4} + \frac{N-1}{2} \equiv -\frac{M}{4} + \frac{N+1}{2} \pmod{2}, \quad (475)$$

tako da se (465), (468) mogu predložiti u zajedničkom obliku

$$t^{\frac{M}{2}+1} P_1 \frac{(-1)^{-\frac{M}{4} + \frac{N+1}{2}} M!}{2^{\frac{M}{2}+1} c^{\frac{M}{2} - N} \left(\frac{M}{2}\right)! (r - \gamma - 2)!} \prod + \text{const. } t^{\frac{M}{2}-1} P_0 + \dots \quad (476)$$

Za kasnije svrhe treba još pretresti predznak produkta (458). Neka je za izvjesne vrijednosti od ε , na pr. za $\varepsilon = 1, \dots, \delta$,

$$n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon} - 1 \geq 0 \quad (\varepsilon = 1, \dots, \delta), \quad (477)$$

dok je za sve ostale vrijednosti od ε

$$n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon} - 1 < 0 \quad (\varepsilon = \delta + 1, \dots, \gamma). \quad (478)$$

Razdvajamo onda produkt (458):

$$\Pi = \Pi_1 \Pi_2, \quad (479)$$

$$\Pi_1 = \prod_{\varepsilon=1}^{\delta} \frac{(-1)^{n_{k_\varepsilon}} 2^{n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon} - 1} \Gamma\left(n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon} - \frac{1}{2}\right) \cdot m_{k_\varepsilon}!}{\sqrt{\pi} (2n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon} - 1)!}, \quad (480)$$

$$\Pi_2 = \prod_{\varepsilon=\delta+1}^{\gamma} \frac{(-1)^{n_{k_\varepsilon}} 2^{n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon} - 1} \Gamma\left(n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon} - \frac{1}{2}\right) \cdot m_{k_\varepsilon}!}{\sqrt{\pi} (2n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon} - 1)!}. \quad (481)$$

S obzirom na (477) i II (84) može se pisati

$$\Pi_1 = \prod_{\varepsilon=1}^{\delta} \frac{(-1)^{n_{k_\varepsilon}} (2n_{k_\varepsilon} - 2m_{k_\varepsilon} - 2)! m_{k_\varepsilon}!}{2^{n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon} - 1} (2n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon} - 1)! (n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon} - 1)!}, \quad (482)$$

a s obzirom na (478) i II (85)

$$\Pi_2 = \prod_{\varepsilon=\delta+1}^{\gamma} \frac{(-1)^{m_{k_\varepsilon} + 1} 2^{m_{k_\varepsilon} - n_{k_\varepsilon} + 1} (m_{k_\varepsilon} - n_{k_\varepsilon} + 1)! m_{k_\varepsilon}!}{(2m_{k_\varepsilon} - 2n_{k_\varepsilon} + 2)! (2n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon} - 1)!}. \quad (483)$$

Prema tome je

$$\operatorname{sgn} \Pi_1 = (-1)^{\sum_{\varepsilon=1}^{\delta} n_{k_\varepsilon}}, \quad (484)$$

$$\operatorname{sgn} \Pi_2 = (-1)^{\gamma - \delta + \sum_{\varepsilon=\delta+1}^{\gamma} m_{k_\varepsilon}}, \quad (485)$$

iz čega izlazi predznak čitavoga produkta.

Prelazimo sada na dokaz, da su uvjeti stavka IV. 11. nužni, t. j. da u svim slučajevima, koji tim uvjetima nisu obuhvaćeni, kanonski oblik sadržava barem jedan integral.

a) Pretpostavimo, da vrijede uvjeti C) stavka IV. 11., samo s tom razlikom, da nisu svi parametri $x_1, \dots, x_q$ stavljeni jednako nuli, kako bi prema (394) trebalo biti, već da je jedan od tih parametara, na pr. x_1 , po volji, dok su svi drugi parametri uključivo $x_{q+1}, \dots, x_r$ stavljeni jednako nuli. Neka dakle vrijedi, da je $q > 1$ lih, neka vrijedi (393) i (395), a (394) neka je nadomješten sa

$$x_2 = x_3 = \dots = x_r = 0. \quad (486)$$

Budući da je x_1 jedini parametar, koji nije stavljen jednako nuli, s obzirom na (149), (150), (151) kao gornje granice integrala (382), (383) u kanonskom obliku dolazi u obzir samo t i $t - x_1$. Provest ćemo dokaz, da u kanonskom obliku ima sigurno integral s gornjom granicom t , t. j. sa $a = 0$, $b = x_1$. Takav se integral očito može pojaviti samo u članovima od (140), (141), gdje je x_1 sadržan među $x_{s_1}, \dots, x_{s_{r-\gamma}}$. No i $x_2, \dots, x_q$ moraju tu biti sadržani, jer inače dotični član zbog (393) i (348) otpada, kada se dotični parametar uzme jednak nuli, odnosno uopće nema toga člana, ako je dotični donji indeks jednak nuli, kako se razabira iz (140). Neka je dakle, recimo,

$$x_{s_1} = x_1, x_{s_2} = x_2, \dots, x_{s_q} = x_q. \quad (487)$$

Pretpostavimo najprije, da je $r - \gamma > q$ (488), t. j. da među x_{s_δ} ($\delta = 1, \dots, r - \gamma$) osim $x_1, \dots, x_q$ ima još jedan ili više parametara $x_{s_{q+1}}, \dots, x_{s_{r-\gamma}}$. Označimo prema tome

$$r - \gamma - q = \chi \geq 1. \quad (489)$$

Primijenimo na integral u drugom članu vitičaste zagrade u (140), (141) najprije operacije

$$S_{x_{s_\delta}}^{m_{s_\delta} - n_{s_\delta} - v_\delta} \quad (\delta = 2, \dots, q)$$

i stavimo dotične parametre jednako nuli. Budući da je $q \geq 3$, $r - \gamma > q$, $0 \leq 2v_\delta \leq m_{s_\delta}$, a vrijedi (393), to se lako vidi, da je uvjet (373), u kojemu sada φ prima vrijednosti od 2 do q , sigurno ispunjen, tako da dobivamo izraz (374), gdje φ i δ primaju vrijednosti od 2 do q , a X_H je nadomješten sa

$$\overline{X}_{2,q} = (\overline{X}_2)_{x_2 = \dots = x_q = 0} = x_{s_q+1} + \dots + x_{s_{r-\gamma}}, \quad (490)$$

t. j. dobivamo integral oblika

$$\int_{\overline{X}_{2,q}}^{t-X_1} (y - \overline{X}_{2,q})^{r-\gamma-2+2 \sum_{\varphi=2}^q (m_\varphi - n_\varphi - v_\varphi)} A_0(c \sqrt{(t-X_1)^2 - y^2}) dy. \quad (491)$$

Ako se na ovaj integral primijeni operacija $S_{x_1}^{m_1 - n_1 - v_1}$, dobiva se u analogiji s formulom (424) odnosno (434) i (435) sami integrali oblika

$$\int_{x_1 + \overline{X}_{2,q}}^{t-X_1} (y - \overline{X}_{2,q})^R A_0(c \sqrt{(t-X_1)^2 - y^2}) dy. \quad (492)$$

Treba pri tome svagdje eksponenat $r - \gamma - 2$ nadomjestiti eksponentom u (491), tako da je najveća vrijednost indeksa sumacije s u prvoj sumi (435)

$$r - \gamma - 3 + 2 \sum_{\varphi=2}^q (m_\varphi - n_\varphi - v_\varphi),$$

a u drugoj sumi eksponenat od $y - \overline{X}_{2,q}$ glasi

$$r - \gamma - 2 + 2 \sum_{\varphi=2}^q (m_\varphi - n_\varphi - v_\varphi) + 2s.$$

Očito je eksponenat R najviši u drugoj sumi za $v_1 = v_2 = \dots = v_q$, $s = m_1 - n_1$, dakle

$$\begin{aligned} R_{\max} &= r - \gamma - 2 + 2 \sum_{\varphi=2}^q (m_\varphi - n_\varphi) + 2(m_1 - n_1) = \\ &= r - \gamma - 2 + 2 \sum_{\varphi=1}^q (m_\varphi - n_\varphi). \end{aligned} \quad (493)$$

Primijenimo sada na integrale oblika (492) operatore

$$S_{x_\delta}^{m_{s_\delta} - n_{s_\delta} - v_\delta} \quad (\delta = q+1, \dots, r-\gamma)$$

i stavimo dotične parametre jednako nuli. S obzirom na (395), a u smislu (139) stavimo

$$S_{x_\delta}^{m_{s_\delta} - n_{s_\delta} - v_\delta} = D_{x_\delta}^{-m_{s_\delta} + n_{s_\delta} + v_\delta} \quad (494)$$

i nadomjestimo ih prema razlaganjima na početku točke 10. sa

$$\frac{2^{-m_{s_\delta} + n_{s_\delta} + v_\delta} (-m_{s_\delta} + n_{s_\delta} + v_\delta)!}{(-2m_{s_\delta} + 2n_{s_\delta} + 2v_\delta)!} \left(\frac{\partial}{\partial x_{s_\delta}} \right)^{-2m_{s_\delta} + 2n_{s_\delta} + 2v_\delta} \quad (495)$$

Formula (369) nije neposredno primjenljiva, jer donja granica integrala (492) nije $\bar{X}_{2,q}$, već $x_1 + \bar{X}_{2,q}$, tako da diferencijacije po donjoj granici integrala daju članove, koji ne otpadaju, kao što je to u slučaju formule (369). Ipak ti članovi ne sadržavaju više integrala, i jasno je, da će i sada uvjet analogan sa (370) biti dovoljan, da se dobije izraz bez integrala. Taj bi uvjet glasio

$$R < 2 \sum_{\delta=q+1}^{r-\gamma} (-m_{s_\delta} + n_{s_\delta} + v_\delta). \quad (496)$$

Prema (493) je

$$R \leq R_{\max} = r - \gamma - 2 + 2 \sum_{\varphi=1}^q (m_\varphi - n_\varphi). \quad (497)$$

Dalje je

$$\sum_{\delta=q+1}^{r-\gamma} (-m_{s_\delta} + n_{s_\delta}) \leq \sum_{\delta=q+1}^{r-\gamma} (-m_{s_\delta} + n_{s_\delta} + v_\delta). \quad (498)$$

S obzirom na (395) i (489) vrijedi

$$\sum_{\delta=q+1}^{r-\gamma} (-m_{s_\delta} + n_{s_\delta}) \geq \mathcal{N} \left[\frac{q+1}{2} + \sum_{\varphi=1}^q (m_\varphi - n_\varphi) \right], \quad (499)$$

dakle

$$2 \sum_{\varphi=1}^q (m_{s_{\varphi}} - n_{\varphi}) + 2 \sum_{\delta=q+1}^{r-\gamma} (m_{s_{\delta}} - n_{s_{\delta}}) \leq -\chi(q+1) - 2(\chi-1) \sum_{\varphi=1}^q (m_{\varphi} - n_{\varphi}) \leq \\ \leq -\chi(q+1) = -(r-\gamma-q)(q+1). \quad (500)$$

Razmotrimo li parabolu

$$y = -(r-\gamma-x)(x+1) \quad (501)$$

i stavimo $y = r-\gamma-2$ (502), izlazi

$$x_1 = \frac{r-\gamma-1}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2}{r-\gamma-1}} \right], \quad (503)$$

$$x_2 = \frac{r-\gamma-1}{2} \left[1 - \sqrt{1 + \frac{2}{r-\gamma-1}} \right]. \quad (504)$$

Budući da je q lih broj veći od jedan, i s obzirom na (445), izlazi

$$3 \leq q \leq r-\gamma-1, \quad (505)$$

dakle svakako $r-\gamma-1 > 0$ (506). Jasno je, da za $x_1 > x > x_2$ (507) vrijedi $y < r-\gamma-2$ (508). S obzirom na (506) vrijedi prema (503), (504) $x_1 > r-\gamma-1$ (509), $x_2 > 0$ (510), dakle se može na temelju (507) i (505) pisati

$$x_1 > r-\gamma-1 \geq q \geq 3 > 0 > x_2, \quad (511)$$

pa je stoga prema (501) i (508) za naš q

$$-(r-\gamma-q)(q+1) < r-\gamma-2 \quad (512)$$

Prema (497), (500), (512) i (498) vrijedi dakle

$$R = R_{\max} = r-\gamma-2 + 2 \sum_{\varphi=1}^q (m_{\varphi} - n_{\varphi}) < 2 \sum_{\delta=q+1}^{s-\gamma} (-m_{s_{\delta}} + n_{s_{\delta}}) \leq \\ \leq 2 \sum_{\delta=q+1}^{r-\gamma} (-m_{s_{\delta}} + n_{s_{\delta}} + v_{\delta}), \quad (513)$$

a to je traženi uvjet (496). Slučaj $r - \gamma > q$ dakle ne daje integrala za kanonski oblik. Razmatranje dakako vrijedi i za prvi član vitičaste zagrade u (140), (141), ako se stavi $\gamma = 0$. Pretpostavimo dakle sada

$$r - \gamma = q \geq 3. \quad (514)$$

($r - \gamma < q$ ne dolazi u račun, jer bi onda neki od parametara $x_1, \dots, x_q$ bili među $x_{k_1}, \dots, x_{k_\gamma}$, a taj slučaj smo već prije odbacili.) (514) određuje jednoznačno γ , a određuje i kombinaciju $(s_1, \dots, s_{r-\gamma})$, jer u njoj moraju biti sadržani brojevi $1, \dots, q$, t. j. ta kombinacija je identična s kombinacijom $(1, \dots, q)$. Jasno je, da je prema (490) sada $\bar{X}_{2,q} = 0$ (515). Integrali (492), koji potječu od članova druge sume (435), u kojoj je, kako smo spomenuli, $r - \gamma - 2$ nadomješten sa

$$r - \gamma - 2 + 2 \sum_{\varphi=2}^q (m_\varphi - n_\varphi - v_\varphi),$$

imaju svi lihe eksponente R , jer je zbog (514) sa q i $r - \gamma$ lih. Ti integrali prema III (254), III (318) ne prinose integrala za kanonski oblik. Među članovima prve sume (435) ima naprotiv i potencijâ s takim eksponentima. Najveća je vrijednost eksponenta s uz odabrane v_φ , kako smo spomenuli,

$$r - \gamma - 3 + 2 \sum_{\varphi=2}^q (m_\varphi - n_\varphi - v_\varphi),$$

a ta je tâka, jer je $r - \gamma$ lih i prima svoju najveću vrijednost za $v_2 = \dots = v_q = 0$, t. j. imamo za tâki R

$$R_{\text{tak max}} = M = r - \gamma - 3 + 2 \sum_{\varphi=2}^q (m_\varphi - n_\varphi) = q - 3 + 2 \sum_{\varphi=2}^q (m_\varphi - n_\varphi). \quad (516)$$

Na dotični integral treba u smislu (353) još primijeniti stanovite diferencijacije po t , tako da se radi o izrazu poput (446). Prema

(472) odnosno (476) dobivamo dakle za kanonski oblik ili $t^{\frac{M}{2}} P_0$

ili $t^{\frac{M}{2}+1} P_1$ s koeficijentom, koji je očito od nule različit (jer je i faktor, koji potječe iz (435) od nule različit), uz eventualno

još druge članove s nižim potencijama od t . Integrali (492) s manjim takim eksponentom R , dakle sa $R \leq M - 2$ (517), daju prema (472) i (476) članove s najvišom potencijom od t oblika

$$t^{\frac{M}{2}-1} P_0 \text{ odnosno } t^{\frac{M}{2}} P_1. \text{ Članovi } t^{\frac{M}{2}} P_0 \text{ ili } t^{\frac{M}{2}+1} P_1,$$

koje nam je dao integral s eksponentom M , sigurno su dakle jedini te vrste, pa budući da im se koeficijent razlikuje od nule, kako smo spomenuli, dokaz je time izvršen, da u kanonskom obliku ima barem jedan integral. To vrijedi pogotovu onda, ako koji od parametara $x_2, \dots, x_r$ nije stavljen jednako nuli.

b) Pretpostavimo, da je

$$m_k \geq n_k \quad (k = 1, \dots, q), \quad (518)$$

gdje je q lih broj, za koji ovaj put dopuštamo i vrijednost $q = 1$. (Za neke ili sve vrijednosti $1, \dots, q$ može dapače vrijediti $m_k \geq 2n_k$.) Neka dalje postoji barem jedna vrijednost $k = k_f > q$, za koju je

$$m_{k_f} - n_{k_f} > - \left[\frac{q+1}{2} + \sum_{k=1}^q (m_k - n_k) \right], \quad (519)$$

a najviše jedna vrijednost $k = k_g > q$, za koju je

$$m_{k_g} \geq 2n_{k_g}. \quad (520)$$

[Među vrijednostima $k = q + 1, \dots, r$ može biti takvih, za koje je $m_k \geq n_k$. Ako ima takva vrijednost ili ako "za jednu od njih vrijedi dapače (520), tada je tom vrijednošću već zadovoljen uvjet (519).] Konačno neka budu svi parametri stavljeni jednako nuli.

Dokazat ćemo, da u kanonskom obliku ima integrala. Uzmi-mo opet u razmatranje drugi izraz vitičaste zagrade u (140), (141). Jasno je najprije, da među $s_1, \dots, s_{r-\gamma}$ moraju biti sa-držani svi oni indeksi k , za koje je $m_k \geq 2n_k$, jer bi inače do-tični članovi za $x_k = 0$ u smislu (347) otpali, ako je $n_k > 0$, jer za njih vrijedi (348), a uopće ih nema, ako je $n_k = 0$, kako se vidi iz (140). Uzet ćemo povrh toga među $s_1, \dots, s_{r-\gamma}$ još i sve

one indekse k , za koje je $m_k \geq n_k$, ali $m_k < 2n_k$. Budući da su svi parametri stavljani jednako nuli, primjena će operatora $S_{s_\delta}^{m_{s_\delta} - n_{s_\delta} - v_\delta}$ prema (360) dati integral oblika

$$\int_0^t y^{r-\gamma-2+2 \sum_{\varphi=1}^{r-\gamma} (m_{s_\varphi} - n_{s_\varphi} - v_\varphi)} A_0 (c \sqrt{t^2 - y^2}) dy, \quad (521)$$

na koji u smislu (446) treba još primijeniti stanovite diferencijacije po t . Ako je $r - \gamma$ tak broj, bit će eksponentat u tom integralu tak, i budući da smo za $s_1, \dots, s_{r-\gamma}$ odabrali sve one vrijednosti, za koje je $m_{s_\varphi} \geq n_{s_\varphi}$, za $v_1 = \dots = v_{r-\gamma} = 0$ ovo je i najveći tak eksponentat, koji se može pojaviti. U smislu (472), (476) kanonski će oblik dakle sadržavati

$$t^{\frac{M}{2}} P_0 \text{ ili } t^{\frac{M}{2}+1} P_1$$

sa

$$M = r - \gamma - 2 + 2 \sum_{\varphi=1}^{r-\gamma} (m_{s_\varphi} - n_{s_\varphi}). \quad (522)$$

Ako je naprotiv $r - \gamma$ lih broj, eksponent će biti lih, i članovi (521) dakle prema III (254), III (318) ne prinosu integrala za kanonski oblik. U tom slučaju moramo potražiti članove s najvećim takim eksponentom pod znakom integracije. Zato moramo broj $r - \gamma$ ili povećati ili smanjiti. Treba dakle iz indeksa $k_1, \dots, k_\gamma$ preseliti još neke indekse među $s_1, \dots, s_{r-\gamma}$ ili iz ovih neke indekse preseliti među $k_1, \dots, k_\gamma$. Preseljenjem nekoga indeksa k_e u $s_1, \dots, s_{r-\gamma}$, za koji je $m_{k_e} < n_{k_e}$, povećava se $r - \gamma$ za 1, tako da se eksponent smanjuje za $2(n_{k_e} - m_{k_e}) - 1 \geq 1$, dok se preseljenjem nekoga indeksa s_δ , za koji je $m_{s_\delta} \geq n_{s_\delta}$, među $k_1, \dots, k_\gamma$ eksponent smanjuje za $2(m_{s_\delta} - n_{s_\delta}) + 1 \geq 1$. Budući da želimo smanjiti eksponent za što manje, svakako ćemo izvršiti samo jedno preseljenje, čime će se naš lihi eksponent smanjiti za lih broj, tako da će postati tak. Pri tom su dakako svi v_φ stavljani jednako nuli, jer konačni tak eksponent treba da bude što veći.

Ako se prebacuje jedan indeks iz $k_1, \dots, k_\gamma$ u $s_1, \dots, s_{r-\gamma}$, zvat ćemo to preseljenjem prve vrste. Pri tome se γ promijenio u γ_1 , tako da je $\gamma_1 = \gamma - 1$ (523). Prebacuje li se indeks iz $s_1, \dots, s_{r-\gamma}$ u $k_1, \dots, k_\gamma$, neka se to zove preseljenje druge vrste, a γ se pri tome mijenja u γ_2 , tako da je $\gamma_2 = \gamma + 1$ (524). Treba sada dokazati:

1) da uvijek postoji barem jedna mogućnost preseljenja, koja vodi do integrala, čiji se koeficijent razlikuje od nule;

2) da su onda, kad ima više mogućnosti preseljenja, koje vode do istoga najvećeg takog eksponenta, koeficijenti dotičnih istovrsnih integrala za kanonski oblik svi istoga predznaka, te se ne mogu međusobno ukinuti.

Ad 1). Neka ima osim (518) još daljih indeksa, za koje je $m_k \geq n_k$, a koje smo prema prije rečenom, uvrstili među $s_1, \dots, s_{r-\gamma}$. Mora ih biti tak broj, dakle barem dva, jer bi inače zbog lihoga q $r-\gamma$ bio tak, a taj slučaj smo već uzeli u račun. Od ta dva indeksa ili više njih može prema pretpostavkama najviše za jedan vrijediti $m_k \geq 2n_k$, dakle ima i barem jedan, za koji je $m_k \geq n_k$, ali $m_k < 2n_k$. Taj se posljednji indeks može preseliti među $k_1, \dots, k_\gamma$, da dotični članovi onda ne otpadnu. Eksponent je poslije preseljenja

$$\bar{M} = r - \gamma_2 - 2 + 2 \sum_{\varphi=1}^{r-\gamma_1} (m_{s_\varphi} - n_{s_\varphi}), \quad (525)$$

koji sigurno nije negativan, jer je $m_{s_\varphi} \geq n_{s_\varphi}$ za sve φ , pa budući da ima barem jedan indeks (518) (jer je $q \geq 1$), a bar je jedan dalji, koji nije sadržan u (518), ali je za nj $m_k \geq n_k$, preostao među $s_1, \dots, s_{r-\gamma}$, onda je $r - \gamma_2 \geq 2$. To preseljenje druge vrste dakle zaista vodi do člana (521), koji može pridonijeti integrala za kanonski oblik.

Ako naprotiv osim (518) nema nijednog indeksa, za koji je $m_k \geq n_k$, ipak prema pretpostavkama ima barem jedan indeks k_f za koji vrijedi (519). Taj se nalazi među $k_1, \dots, k_\gamma$, pa ćemo ga preseliti među $s_1, \dots, s_{r-\gamma}$. Budući da je sada $r - \gamma = q$, bit će $r - \gamma_1 = q + 1$, a eksponent će postati

$$\begin{aligned}\bar{M} &= r - \gamma_1 - 2 + 2 \sum_{\varphi=1}^{r-\gamma} (m_{s_\varphi} - n_{s_\varphi}) + 2(m_{k_f} - n_{k_f}) = \\ &= q - 1 + 2 \sum_{\varphi=1}^{r-\gamma} (m_{s_\varphi} - n_{s_\varphi}) + 2(m_{k_f} - n_{k_f}).\end{aligned}\quad (526)$$

Prema (519) vrijedi

$$m_{k_f} - n_{k_f} \geq - \left[\frac{q+1}{2} + \sum_{k=1}^q (m_k - n_k) \right] + 1 \quad (527)$$

ili

$$2(m_{k_f} - n_{k_f}) \geq -q + 1 - 2 \sum_{k=1}^q (m_k - n_k), \quad (528)$$

dakle je

$$N \geq q - 1 + 2 \sum_{\varphi=1}^{r-\gamma} (m_{s_\varphi} - n_{s_\varphi}) - q + 1 - 2 \sum_{k=1}^q (m_k - n_k) = 0. \quad (529)$$

Ni ovdje dakle eksponent ne može biti negativan, t. j. ovo preseljenje prve vrste daje član oblika (521), koji može pridonijeti integralâ za kanonski oblik. Time je pokazano, da uvijek ima barem jedno preseljenje, koje vodi do cilja.

Ad 2). Kako smo rekli, među $s_1, \dots, s_{r-\gamma}$ stavljeni su svi indeksi k za koje je $m_k \geq n_k$ (među kojima se nalaze i oni, za koje je dapače $m_k \geq 2n_k$), dok se svi drugi indeksi nalaze među $k_1, \dots, k_\gamma$. Za preseljenje prve vrste dolaze u račun oni od indeksa k između $k_1, \dots, k_\gamma$, za koje je izraz $2(n_k - m_k) - 1$ što manji, jer se za tu vrijednost smanjuje eksponent pod integralom (521). Za preseljenje druge vrste dolaze u račun indeksi s između $s_1, \dots, s_{r-\gamma}$, za koje je izraz $2(m_s - n_s) + 1$ što manji, jer se za toliko smanjuje rečeni eksponent, a osim toga mora biti $m_s < 2n_s$, jer inače poslije preseljenja svi članovi otpadaju, kako smo spomenuli.

Neka je μ_1 minimum izraza $2(n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon}) - 1$ ($\varepsilon = 1, \dots, \gamma$), a μ_2 minimum izraza $2(m_{s_\delta} - n_{s_\delta}) + 1$ ($\delta = 1, \dots, r - \gamma$), za koje je $m_{s_\delta} < 2n_{s_\delta}$. Ako je $\mu_1 < \mu_2$, dolaze u račun samo preseljenja prve vrste, ako je $\mu_1 > \mu_2$, samo preseljenja druge vrste, a ako je $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ dolaze u račun obje vrste preseljenja. Pretpostavit ćemo taj najopćenitiji slučaj. Neka izraz $2(n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon}) - 1$ primi taj minimum za nekoliko vrijednosti indeksa k_ε , na pr. za $k_\varepsilon = a, k_\varepsilon = b$ i t. d., t. j.

$$2(n_a - m_a) - 1 = 2(n_b - m_b) - 1 = \dots = \mu. \quad (530)$$

Izraz $2(m_{s_\delta} - n_{s_\delta}) + 1$ neka primi taj minimum za neke vrijednosti $s_\delta = \alpha, s_\delta = \beta$ i t. d., za koje je $m_{s_\delta} < 2n_{s_\delta}$, t. j.

$$2(m_\alpha - n_\alpha) + 1 = 2(m_\beta - n_\beta) + 1 = \dots = \mu. \quad (531)$$

Sva preseljenja pojedinih indeksa $a, b, \dots$ i $\alpha, \beta, \dots$ dovode do istoga najvećeg tâkog eksponenta

$$\bar{M} = r - \gamma - 2 + 2 \sum_{\varphi=1}^{r-\gamma} (m_{s_\varphi} - n_{s_\varphi}) - \mu. \quad (532)$$

Pita se najprije, da li će za integrale kanonskoga oblika, koji su pomnoženi najvećom potencijom od t , biti primjenljiva formula (472) ili (476). Označimo li u smislu (452), (447) sa N_1 i h_1 dotične izraze poslije preseljenja prve vrste indeksa a , a sa N_2 i h_2 , ove izraze poslije preseljenja druge vrste indeksa α i analogno dotične veličine γ_1 i γ_2 prema (523) i (524), očito je s obzirom na $v_\varphi = 0$

$$h_1 = \sum_{\varphi=1}^{r-\gamma} m_{s_\varphi} + m_a, \quad (533)$$

$$h_2 = \sum_{\varphi=1}^{r-\gamma} m_{s_\varphi} - m_\alpha, \quad (534)$$

$$\begin{aligned}
N_1 &= \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} (2n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon}) - (2n_a - m_a) - \gamma_1 + k_1 = \\
&= \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} (2n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon}) - (2n_a - m_a) - (\gamma - 1) + \sum_{\varepsilon=1}^{r-\gamma} m_{s_\varepsilon} + m_a = \\
&= N + 2(m_a - n_a) + 1,
\end{aligned} \tag{535}$$

$$\begin{aligned}
N_2 &= \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} (2n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon}) + (2n_a - m_a) - \gamma_2 + h_2 = \\
&= \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} (2n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon}) + 2n_a - m_a - (\gamma + 1) + \sum_{\varepsilon=1}^{r-\gamma} m_{s_\varepsilon} - m_a = \\
&= N - 2(m_a - n_a) - 1,
\end{aligned} \tag{536}$$

dakle

$$\frac{\overline{M}}{2} + N_1 - \left(\frac{\overline{M}}{2} + N_2 \right) = N_1 - N_2 = 2(m_a - n_a + m_a - n_a) + 2 \equiv 0 \pmod{2}, \tag{537}$$

pa stoga

$$\frac{\overline{M}}{2} + N_1 \equiv \frac{\overline{M}}{2} + N_2 \pmod{2}. \tag{538}$$

Prema tome vrijede ili za sva preseljenja (469) i (472) ili za sva preseljenja (473) i (476).

Treba sada pokazati, da je predznak članova s integralom $t^{\frac{\overline{M}}{2}}$ P_0 prema (472) odnosno s integralom $t^{\frac{\overline{M}}{2}+1}$ P_1 prema (476) poslije svih pojedinih preseljenja isti, tako da se ti članovi sigurno ne mogu ukidati. Taj se predznak sastoji od ovih faktora:

a) Faktor, koji potječe iz formule (360), iz koje smo dobili integrale oblika (521). U toj formuli (360) treba dakako staviti $h = r - \gamma$. Prema II (84) vrijedi za

$$m_{s_\delta} - n_{s_\delta} \geq 0, \tag{539}$$

$$\Gamma\left(m_{s_\delta} - n_{s_\delta} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi} (2m_{s_\delta} - 2n_{s_\delta})!}{2^{2m_{s_\delta} - 2n_{s_\delta}} (m_{s_\delta} - n_{s_\delta})!} \quad (540)$$

a za

$$m_a - n_a < 0 \quad (541)$$

prema II (85)

$$\Gamma\left(m_a - n_a + \frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^{n_a - m_a} \sqrt{\pi} 2^{2n_a - 2m_a} (n_a - m_a)!}{(2n_a - 2m_a)!} \quad (542)$$

Prema tome na temelju formule (360) predznak za slučaj preseljenja prve vrste, recimo indeksa a , ima oblik $(-1)^{E_1(a)}$, gdje je

$$E_1(a) = \sum_{\delta=1}^{r-\gamma} n_{s_\delta} + n_a + (n_a - m_a) = \sum_{\delta=1}^{r-\gamma} n_{s_\delta} + 2n_a - m_a, \quad (543)$$

dok je u slučaju preseljenja druge vrste, recimo indeksa a , taj eksponent od (-1)

$$E_1(a) = \sum_{\delta=1}^{r-\gamma} n_{s_\delta} - n_a. \quad (544)$$

β) Faktor, koji se pojavljuje u formulama (742) odnosno (476). Prema (472) bio bi eksponent od (-1) poslije preseljenja prve vrste indeksa a s obzirom na (535)

$$E_2(a) = -\frac{\overline{M}}{4} + \frac{N_1}{2} = -\frac{\overline{M}}{4} + \frac{N}{2} + m_a - n_a + \frac{1}{2}, \quad (545)$$

a poslije preseljenja druge vrste indeksa a s obzirom na (536)

$$E_2(a) = -\frac{\overline{M}}{4} + \frac{N_2}{2} = -\frac{\overline{M}}{4} + \frac{N}{2} - m_a + n_a - \frac{1}{2}. \quad (546)$$

Ako se primjenjuje (476), glasile bi te formule analogno

$$E_2(a) = -\frac{\overline{M}}{4} + \frac{N+1}{2} + m_a - n_a + \frac{1}{2}, \quad (547)$$

$$E_2(\alpha) = -\frac{\overline{M}}{4} + \frac{N+1}{2} - m_\alpha + n_\alpha - \frac{1}{2}. \quad (548)$$

Razumi je se, da su eksponenti (545), (546) cijeli brojevi, ako za $\frac{\overline{M}}{2} + N_1$ i $\frac{\overline{M}}{2} + N_2$ vrijedi uvjet (469), a eksponenti (547), (548) su cijeli, ako analogno vrijedi uvjet (473).

γ) Faktor (484). Poslije preseljenja prve vrste vrijedi za sve preostale indekse k_ϵ uvjet (477). Tih indeksa ima $\delta = \gamma_1 = \gamma - 1$, t. j. od prvotnih γ indeksa otpao je indeks α , tako da je eksponent od (-1)

$$E_3(\alpha) = \sum_{\epsilon=1}^{\gamma} n_{k_\epsilon} - n_\alpha. \quad (549)$$

Kod preseljenja druge vrste pridolazi među indekse k_ϵ indeks α , za koji (477) ne vrijedi, dakle $\delta = \gamma_2 - 1 = \gamma$ i eksponent od (-1) je

$$E_3(\alpha) = \sum_{\epsilon=1}^{\gamma} n_{k_\epsilon}. \quad (550)$$

δ) Faktor (485). Poslije preseljenja prve vrste ne vrijedi ni za koji od preostalih k_ϵ uvjet (478), tako da je $\delta = \gamma_1 = \gamma - 1$, dakle eksponent od (-1)

$$E_4(\alpha) = \gamma_1 - \delta + \sum_{\epsilon=\delta+1}^{\gamma_1} m_{k_\epsilon} = 0. \quad (551)$$

Poslije preseljenja druge vrste za jedini indeks α , koji je pridobio među k_ϵ , vrijedi uvjet (478), tako da je $\delta = \gamma_2 - 1 = \gamma$, i eksponent od (-1)

$$E_4(\alpha) = \gamma_2 - \delta + \sum_{\epsilon=\delta+1}^{\gamma_2} m_{k_\epsilon} = 1 + m_\alpha. \quad (552)$$

Ako je dakle primjenljiva formula (472), ukupni je eksponent od (-1) za slučaj preseljenja prve vrste prema (543), (545), (549), (551)

$$\begin{aligned}
E(a) &= E_1(a) + E_2(a) + E_3(a) + E_4(a) = \\
&= \sum_{\delta=1}^{r-\gamma} n_{s_\delta} + 2n_a - m_a - \frac{\overline{M}}{4} + \frac{N}{2} + m_a - n_a + \frac{1}{2} \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} n_{k_\varepsilon} - n_a + 0 = \\
&= \sum_{\delta=1}^{r-\gamma} n_{s_\delta} + \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} n_{k_\varepsilon} - \frac{\overline{M}}{4} + \frac{N}{2} + \frac{1}{2}, \quad (553)
\end{aligned}$$

a za preseljenje druge vrste prema (544), (546), (550), (552)

$$\begin{aligned}
E(a) &= E_1(a) + E_2(a) + E_3(a) + E_4(a) = \\
&= \sum_{\delta=1}^{r-\gamma} n_{s_\delta} - n_a - \frac{\overline{M}}{4} + \frac{N}{2} - m_a + n_a - \frac{1}{2} + \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} n_{k_\varepsilon} + 1 + m_a = \\
&= \sum_{\delta=1}^{r-\gamma} n_{s_\delta} + \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} n_{k_\varepsilon} - \frac{\overline{M}}{4} + \frac{N}{2} + \frac{1}{2}. \quad (554)
\end{aligned}$$

Kada je primjenljiva formula (476), dobivamo analogno, upotreбивši (547) odnosno (548) odnosno (545) odnosno (546), iste formule, samo je N nadomješten sa $N+1$. Svakako je

$$E(a) = E(a), \quad (555)$$

a budući da izrazi (553) i (554) uopće ne ovise o tome, da li smo preselili indeks a ili b i t. d. odnosno α ili β i t. d., bit će dakle

$$E(a) = E(b) = \dots = E(\alpha) = E(\beta) = \dots, \quad (556)$$

t. j. sva dopustiva preseljenja daju članove s istim predznakom. U slučaju primjenljivosti formule (472) osigurali smo dakle, da u kanonskom obliku postoji član oblika $t^{\frac{M}{2}} P_0$, a u slučaju primjenljivosti formule (476) da postoji član oblika $t^{\frac{M}{2}+1} P_1$. Time je izveden dokaz, da pod uvjetima b) ima integrala u kanonskom obliku. To vrijedi tim više, ako parametri nisu stavljeni jednako nuli, kako smo to pretpostavili.

c) Na temelju razlaganja pod a) i pod b) možemo sada izvesti dokaz, da su uvjeti stavka IV. 11. nužni, t. j. da u svim sluča-

jevima, gdje nijedan od tri uvjeta A), B), C) toga stavka nije zadovoljen, ima integrala u kanonskom obliku. Da dobijemo sve te slučajeve, razlikujemo ove mogućnosti:

1. Nema nijednoga indeksa k , za koji je $m_k \geq 2n_k$.
2. Ima jedan indeks, za koji je $m_k \geq 2n_k$.
3. Ima tak broj (veći od nule) takvih indeksa.
4. Ima lih broj veći od jedan takvih indeksa.

Ad 1. Da uvjet A) stavka IV. 11. ne bude zadovoljen, mora postojati indeks k_1 , za koji je

$$m_{k_1} \geq n_{k_1}. \quad (557)$$

Da uvjet B) ne bude zadovoljen, mora postojati jedan indeks k_2 , za koji je

$$m_{k_2} - n_{k_2} > -(m_{k_1} - n_{k_1} + 1). \quad (558)$$

Uvjet C) očito nije zadovoljen. Budući da (557), (558) odgovaraju pretpostavkama (518) i (519) za $q = 1$, taj je slučaj sadržan pod b). U kanonskom obliku dakle ima integrala.

Ad 2. Uvjeti A) i C) očito nisu zadovoljeni. Budući da iz $m_k \geq 2n_k$ izlazi $m_k \geq n_k$, postoji indeks, za koji vrijedi (557), tako da moramo tražiti, da postoji i indeks, koji zadovoljava (558), jer bi inače bio zadovoljen uvjet B). Time je slučaj opet sveden na razmatranje pod b). I ovdje dakle ima integrala u kanonskom obliku.

Ad 3. Ako je broj indeksa, za koje vrijedi $m_k \geq 2n_k$, jednak $q + 1$, gdje je q lih broj, za q indeksa vrijedi pogotovu (518), dok $(q + 1)$ -ti svakako zadovoljava (520) i ujedno (519). I ovaj slučaj se dakle svodi na razmatranje pod b), dakle ima integrala u kanonskom obliku.

Ad 4. Uvjeti A) i B) očito nisu zadovoljeni. Ako od uvjeta C) nije zadovoljen (395), onda to znači, da ima jedan indeks, za koji vrijedi (519), dok sa (393) nužno vrijedi i (518). Prema razlaganju pod b) dakle ima integrala u kanonskom obliku. Ako je naprotiv (395) zadovoljen, moramo pretpostaviti, da ima barem jedan indeks među $1, \dots, q$, za koji dotični parametar nije uzet jednak nuli, tako da je prekršen uvjet (394). Ovaj slučaj je raspravljen pod a), tako da i tu ima integrala u kanonskom obliku. Time su sve mogućnosti iscrpene, i dokaz stavka IV. 11. je izvršen.

12. Nekoliko specijalnih slučajeva integralnih teorema

Kao primjenu općih razmatranja odredit ćemo kanonski oblik najjednostavnijih integralnih teorema. Odabiramo za to kompozicije dviju Besselovih funkcija, kojima nijedan indeks nije veći od jedan. Da tekst bude kraći, stavit ćemo iznad znaka jednakosti broj formule, na kojoj se temelji dotična prijetvorba. Slučaj, da je koji parametar stavljen jednako nuli, napose će se navesti, ako kod toga nastaje neodređen oblik, pa je potreban granični prijelaz.

$$K_{0,0}^{1,1}(t; x_1, x_2) \stackrel{(129)}{=} \frac{\partial^2}{\partial t^2} S_{x_1} S_{x_2} \int_{x_1+x_2}^t A_0(c \sqrt{t^2 - y^2}) dy =$$

$$\stackrel{\text{II (187)}}{=} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} S_{x_1} S_{x_2} S_{j(x_1)} A_0(c \sqrt{t^2 - (x_1 + x_2)^2}) =$$

$$\stackrel{\text{II (188)}}{=} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^{t-x_1-x_2} \Phi(y) A_0(c \sqrt{t^2 - (y + x_1 + x_2)^2}) dy =$$

$$\stackrel{\text{II (194)}}{=} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{x_1+x_2}^t \Phi(y - x_1 - x_2) A_0(c \sqrt{t^2 - y^2}) dy, \quad (559)$$

$$\Phi(x) \stackrel{\text{II (189)}}{=} F_1(x) * F_2(x) * H(x), \quad (560)$$

$$F_1(x) \stackrel{\text{II (159), II (191)}}{=} x + x_1, \quad (561)$$

$$F_2(x) \stackrel{\text{II (159), II (191)}}{=} x + x_2, \quad (562)$$

$$H(x) \stackrel{\text{II (188)}}{=} 1. \quad (563)$$

Dakle

$$\Phi(y - x_1 - x_2) = \int_0^{y-x_1-x_2} \left[\int_0^\eta (\eta - \xi + x_1) (\xi + x_2) d\xi \right] d\eta. \quad (564)$$

Izračunavanje ovoga integrala daje

$$\Phi(y-x_1-x_2) = \frac{y^4}{24} - \frac{(x_1^2+x_2^2)y^2}{4} + \frac{(x_1^3+x_2^3)y}{3} - \frac{(x_1^2-x_2^2)^2}{8}. \quad (565)$$

Izvrši li se u (559) diferencijacija po t , izlazi:

$$\begin{aligned} & K_{0,0}^{1,1}(t; x_1, x_2) \stackrel{\text{III (9)}}{=} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \Phi(t-x_1-x_2) - \frac{c^2 t}{2} \int_{x_1+x_2}^t \Phi(y-x_1-x_2) A_1(c\sqrt{t^2-y^2}) dy \right\} = \\ & \stackrel{\text{III (9)}}{=} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(t-x_1-x_2) - \frac{c^2}{2} \int_{x_1+x_2}^t \Phi(y-x_1-x_2) A_1(c\sqrt{t^2-y^2}) dy - \\ & - \frac{c^2 t}{2} \Phi(t-x_1-x_2) + \frac{c^4 t^2}{8} \int_{x_1+x_2}^t \Phi(y-x_1-x_2) A_2(c\sqrt{t^2-y^2}) dy. \quad (566) \end{aligned}$$

Uvrsti li se ovdje (565), integrali se raspadaju u integrale oblika

$$\int_{x_1+x_2}^t y^m A_n(c\sqrt{t^2-y^2}) dy$$

sa $m=4, 2, 1, 0$ i $n=1, 2$. Ti se integrali mogu izraziti ovako:

$$\begin{aligned} & \int_{x_1+x_2}^t y^4 A_1(c\sqrt{t^2-y^2}) dy = \\ & \stackrel{\text{III (383)}}{=} \frac{2}{c^2} \left[t^3 - (x_1+x_2)^3 A_0(c\sqrt{t^2-(x_1-x_2)^2}) \right] - \\ & - \frac{6}{c^2} \int_{x_1+x_2}^t y^2 A_0(c\sqrt{t^2-y^2}) dy \stackrel{\text{III (255)}}{=} \frac{2t^3}{c^2} + \frac{6t}{c^4} - \\ & - \left[\frac{2(x_1+x_2)^3}{c^2} + \frac{6(x_1+x_2)}{c^4} \right] A_0(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}) - \end{aligned}$$

$$- \frac{3(x_1 + x_2) [t^2 - (x_1 + x_2)^2]}{c^2} A_1 (c \sqrt{t^2 - (x_1 + x_2)^2}) -$$

$$- \frac{6}{c^4} \int_{x_1+x_2}^t A_0 (c \sqrt{t^2 - y^2}) dy - \frac{3t^2}{c^2} \int_{x_1+x_2}^t A_1 (c \sqrt{t^2 - y^2}) dy, \quad (567)$$

$$\int_{x_1+x_2}^t y^2 A_1 (c \sqrt{t^2 - y^2}) dy \stackrel{\text{III (382)}}{=} \frac{2}{c^2} \left[t - (x_1 + x_2) A_0 (c \sqrt{t^2 - (x_1 + x_2)^2}) \right] -$$

$$- \frac{2}{c^2} \int_{x_1+x_2}^t A_0 (c \sqrt{t^2 - y^2}) dy, \quad (568)$$

$$\int_{x_1+x_2}^t y A_1 (c \sqrt{t^2 - y^2}) dy \stackrel{\text{III (384)}}{=} \frac{2}{c^2} \left[1 - A_0 (c \sqrt{t^2 - (x_1 + x_2)^2}) \right], \quad (569)$$

$$\int_{x_1+x_2}^t y^4 A_2 (c \sqrt{t^2 - y^2}) dy \stackrel{\text{III (382)}}{=} \frac{4}{c^2} \left[t^3 - (x_1 + x_2)^3 A_1 (c \sqrt{t^2 - (x_1 + x_2)^2}) \right] -$$

$$- \frac{24}{c^4} \left[t - (x_1 + x_2) A_0 (c \sqrt{t^2 - (x_1 + x_2)^2}) \right] + \frac{24}{c^4} \int_{x_1+x_2}^t A_0 (c \sqrt{t^2 - y^2}) dy, \quad (570)$$

$$\int_{x_1+x_2}^t y^3 A_2 (c \sqrt{t^2 - y^2}) dy \stackrel{\text{III (382)}}{=} \frac{4}{c^2} \left[t - (x_1 + x_2) A_1 (c \sqrt{t^2 - (x_1 + x_2)^2}) \right] -$$

$$- \frac{4}{c^2} \int_{x_1+x_2}^t A_1 (c \sqrt{t^2 - y^2}) dy, \quad (571)$$

$$\int_{x_1+x_2}^t y A_2 (c \sqrt{t^2 - y^2}) dy \stackrel{\text{III (384)}}{=} \frac{4}{c^2} \left[1 - A_1 (c \sqrt{t^2 - (x_1 + x_2)^2}) \right], \quad (572)$$

$$\int_{x_1+x_2}^t A_2 (c \sqrt{t^2 - y^2}) dy \stackrel{\text{III (336)}}{=} \frac{4}{c^2 t} - \frac{4(x_1 + x_2)}{c^2 t^2} A_1 (c \sqrt{t^2 - (x_1 + x_2)^2}) -$$

$$- \frac{8}{c^2 t^2} \int_{x_1+x_2}^t A_0 (c \sqrt{t^2 - y^2}) dy + \frac{4}{c^2 t^2} \int_{x_1+x_2}^t A_1 (c \sqrt{t^2 - y^2}) dy. \quad (573)$$

Pomoću tih izraza dolazi se konačno do kanonskoga oblika, koji glasi:

$$\begin{aligned}
 K_{0,0}^{1,1}(t; x_1, x_2) &= \frac{x_1 + x_2}{8} \left[t^2 + (x_1 - x_2)^2 + \frac{1}{c^2} \right] A_0(c \sqrt{t^2 - (x_1 + x_2)^2}) + \\
 &+ \frac{x_1 + x_2}{16} \left[t^2 - c^2 t^2 (x_1 - x_2)^2 + c^2 (x_1^2 - x_2^2)^2 - (x_1 + x_2)^2 \right] A_1(c \sqrt{t^2 - (x_1 + x_2)^2}) + \\
 &+ \left[\frac{t^2}{8} + \frac{c^2 (x_1^2 - x_2^2)^2}{8} - \frac{x_1^2 + x_2^2}{4} + \frac{1}{8c^2} \right] \int_{x_1 + x_2}^t A_0(c \sqrt{t^2 - y^2}) dy + \\
 &+ \left[\frac{t^2}{16} + \frac{c^2 t^2 (x_1^2 + x_2^2)}{8} \right] \int_{x_1 + x_2}^t A_1(c \sqrt{t^2 - y^2}) dy - \frac{t}{8c^2} - \frac{t(x_1^2 + x_2^2)}{4}. \quad (574)
 \end{aligned}$$

Slično se dobiva

$$K_{0,0}^{1,0}(t; x_1, x_2) \stackrel{(129)}{=} - \frac{\partial}{\partial t} S_{x_1} \int_{x_1 + x_2}^t A_0(c \sqrt{t^2 - y^2}) dy =$$

$$\stackrel{\text{II (187)}}{=} - \frac{\partial}{\partial t} S_{x_1} S_{j(x_1)} A_0(c \sqrt{t^2 - (x_1 + x_2)^2}) =$$

$$\stackrel{\text{II (188), II (194)}}{=} \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1 + x_2}^t \Phi(y - x_1 - x_2) A_0(c \sqrt{t^2 - y^2}) dy =$$

$$\stackrel{\text{III (9)}}{=} \Phi(t - x_1 - x_2) - \frac{c^2 t}{2} \int_{x_1 + x_2}^t \Phi(y - x_1 - x_2) A_1(c \sqrt{t^2 - y^2}) dy, \quad (575)$$

$$\Phi(x) = F_1(x) * H(x) = \int_0^x (\xi + x_1) d\xi, \quad (576)$$

$$\Phi(y - x_1 - x_2) = \frac{y^2}{2} - x_2 y - \frac{x_1^2 - x_2^2}{2}. \quad (577)$$

Uvrštenje u (575) daje uz pomoć od (567), (569):

$$\begin{aligned}
 & K_{0,0}^{1,0}(t; x_1, x_2) = \\
 & = \frac{(x_1 - x_2)t}{2} A_0(c \sqrt{t^2 - (x_1 + x_2)^2}) + \frac{t}{2} \int_{x_1+x_2}^t A_0(c \sqrt{t^2 - y^2}) dy + \\
 & + \frac{c^2(x_1^2 - x_2^2)t}{4} \int_{x_1+x_2}^t A_1(c \sqrt{t^2 - y^2}) dy - \frac{x_1^2 - x_2^2}{2}. \quad (578)
 \end{aligned}$$

Dalje dobivamo

$$\begin{aligned}
 & K_{1,0}^{1,1}(t; x_1, x_2) = \\
 (87) \quad & = \frac{2}{c^2 x_1} \left\{ \frac{\partial K_{0,0}^{1,1}(t; x_1, x_2)}{\partial x_1} + x_1(t - x_1) A_0(c \sqrt{(t - x_1)^2 - x_2^2}) \right\} = \\
 & (574), \text{III (9), III (11)} = \frac{x_1 - x_2}{c^2} A_0(c \sqrt{t^2 - (x_1 + x_2)^2}) + \\
 & + \frac{2(t - x_1)}{c^2} A_0(c \sqrt{(t - x_1)^2 - x_2^2}) - \\
 & - \frac{x_1 - x_2}{2} [t^2 - (x_1 + x_2)^2] A_1(c \sqrt{t^2 - (x_1 + x_2)^2}) + \\
 & + \left[(x_1^2 - x_2^2) - \frac{1}{c^2} \right] \int_{x_1+x_2}^t A_0(c \sqrt{t^2 - y^2}) dy + \\
 & + \frac{t^2}{2} \int_{x_1+x_2}^t A_1(c \sqrt{t^2 - y^2}) dy - \frac{t}{c^2}; \quad (579)
 \end{aligned}$$

$$K_{1,1}^{1,1}(t; x_1, x_2) =$$

$$(88) \quad = \frac{2}{c^2 x_2} \left\{ \frac{\partial K_{0,0}^{1,1}(t; x_1, x_2)}{\partial x_2} + x_2(t - x_2) A_1(c \sqrt{(t - x_2)^2 - x_1^2}) \right\} =$$

$$\begin{aligned}
(579), \text{III (9), III (11)} &= -\frac{2(x_1 + x_2)}{c^2} A_1(c \sqrt{t^2 - (x_1 + x_2)^2}) + \\
&+ \frac{2(t - x_1)}{c^2} A_1(c \sqrt{(t - x_1)^2 - x_2^2}) + \frac{2(t - x_2)}{c^2} A_1(c \sqrt{(t - x_2)^2 - x_1^2}) - \\
&- \frac{4}{c^2} \int_{x_1 + x_2}^t A_0(c \sqrt{t^2 - y^2}) dy; \quad (580)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{1,0}^{1,0}(t; x_1, x_2) &\stackrel{(87)}{=} \frac{2}{c^2 x_1} \left\{ \frac{\partial K_{0,0}^{1,0}(t; x_1, x_2)}{\partial x_1} + x_1 A_0(c \sqrt{(t - x_1)^2 - x_2^2}) \right\} = \\
(578), \text{III (9)} &= \frac{2}{c^2} A_0(c \sqrt{(t - x_1)^2 - x_2^2}) + t \int_{x_1 + x_2}^t A_1(c \sqrt{t^2 - y^2}) dy - \frac{2}{c^2}; \quad (581)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&K_{0,1}^{1,0}(t; x_1, x_2) = \\
(88) &= \frac{2}{c^2 x_2} \left\{ \frac{\partial K_{0,0}^{1,0}(t; x_1, x_2)}{\partial x_2} + (t - x_2) A_0(c \sqrt{(t - x_2)^2 - x_1^2}) \right\} = \\
(578), \text{III (9)} &= -\frac{2t}{c^2 x_2} A_0(c \sqrt{t^2 - (x_1 + x_2)^2}) + \\
&+ \left(\frac{2t}{c^2 x_2} - \frac{2}{c^2} \right) A_0(c \sqrt{(t - x_1)^2 - x_2^2}) - t \int_{x_1 + x_2}^t A_1(c \sqrt{t^2 - y^2}) dy + \frac{2}{c^2}; \quad (582)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&K_{1,1}^{1,0}(t; x_1, x_2) = \\
(88) &= \frac{2}{c^2 x_2} \left\{ \frac{\partial K_{1,0}^{1,0}(t; x_1, x_2)}{\partial x_2} + (t - x_2) A_0(c \sqrt{(t - x_2)^2 - x_1^2}) \right\} = \\
(581), \text{III (9)} &= -\frac{2t}{c^2 x_2} A_1(c \sqrt{t^2 - (x_1 + x_2)^2}) + \frac{2}{c^2} A_1(c \sqrt{(t - x_1)^2 - x_2^2}) + \\
&+ \frac{2(t - x_2)}{c^2 x_2} A_1(c \sqrt{(t - x_2)^2 - x_1^2}); \quad (583)
\end{aligned}$$

$$K_{0,0}^{0,0}(t; x_1, x_2) \stackrel{(69)}{=} \int_{x_1+x_2}^t \Lambda_0(c \sqrt{t^2 - y^2}) dy; \quad (584)$$

$$K_{1,0}^{0,0}(t; x_1, x_2) \stackrel{(87)}{=} \frac{2}{c^2 x_1} \left\{ \frac{\partial K_{0,0}^{0,0}(t; x_1, x_2)}{\partial x_1} + \Lambda_0(c \sqrt{(t-x_1)^2 - x_2^2}) \right\} =$$

$$\stackrel{(584)}{=} \frac{2}{c^2 x_1} \left\{ -\Lambda_0(c \sqrt{t^2 - (x_1+x_2)^2}) + \Lambda_0(c \sqrt{(t-x_1)^2 - x_2^2}) \right\}; \quad (585)$$

$$K_{1,1}^{0,0}(t; x_1, x_2) \stackrel{(88)}{=} \frac{2}{c^2 x_2} \left\{ \frac{\partial K_{1,0}^{0,0}(t; x_1, x_2)}{\partial x_2} + \Lambda_1(c \sqrt{(t-x_2)^2 - x_1^2}) \right\} =$$

$$\stackrel{(585), \text{III (9)}}{=} -\frac{2(x_1+x_2)}{c^2 x_1 x_2} \Lambda_1(c \sqrt{t^2 - (x_1+x_2)^2}) +$$

$$+ \frac{2}{c^2 x_1} \Lambda_1(c \sqrt{(t-x_1)^2 - x_2^2}) + \frac{2}{c^2 x_2} \Lambda_1(c \sqrt{(t-x_2)^2 - x_1^2}). \quad (586)$$

Stavi li se u kompozicijama (582), (583), (585), 586 $x_1 = 0$, odnosno $x_2 = 0$, odnosno oboje, granični prijelaz daje:

$$K_{0,1}^{1,0}(t; x_1, 0) = -\frac{2}{c^2} \Lambda_0[c(t-x_1)] - tx_1 \Lambda_1(c \sqrt{t^2 - x_2^2}) -$$

$$- \int_{x_1}^t \Lambda_1(c \sqrt{t^2 - y^2}) dy + \frac{2}{c^2}; \quad (587)$$

$$K_{1,1}^{1,0}(t; x_1, 0) = -\frac{4t}{c^2(t+x_1)} \Lambda_0(c \sqrt{t^2 - x_1^2}) +$$

$$+ \frac{2(t-x_1)}{c^2(t+x_1)} \Lambda_1(c \sqrt{t^2 - x_1^2}) + \frac{2}{c^2} \Lambda_1[c(t-x_1)]; \quad (588)$$

$$K_{1,0}^{0,0}(t; 0, x_2) = (t-x_2) \Lambda_1(c \sqrt{t^2 - x_2^2}); \quad (589)$$

$$K_{1,1}^{0,0}(t; 0, x_2) = -\frac{4}{c^2(t+x_2)} \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x_2^2}) - \\ - \frac{2(t-x_2)}{c^2 x_2(t+x_2)} \Lambda_1(c\sqrt{t^2-x_2^2}) + \frac{2}{c^2 x_2} \Lambda_1[c(t-x_2)]; \quad (590)$$

$$K_{1,1}^{0,0}(t; 0, 0) = -\frac{8}{c^2 t} [\Lambda_0(ct) - \Lambda_1(ct)]. \quad (591)$$

Formule za kompozicije, koje se iz navedenih mogu dobiti pomoću komutativnog zakona komponiranja, kao

$$K_{0,1}^{1,1}, K_{0,0}^{0,1}, K_{1,0}^{0,1}, K_{1,1}^{0,1}, K_{0,0}^{0,1}, K_{0,1}^{0,0},$$

nije potrebno posebno navesti.

Očito je (589) identičan sa I (148), dok (585) daje I (149), ako se stavi $x_2 = 0$. Vidi se dakle, da su teoremi I (148) i I (149), do kojih smo došli drugim putem već u I. dijelu, sadržani kao specijalni slučajevi u našim općim formulama.

Još ćemo na tim primjerima provjeriti ispravnost stavka IV. 11. Lako je vidjeti, da

$$K_{1,1}^{1,0}, K_{1,0}^{0,0} \text{ i } K_{1,1}^{0,0}$$

zadovoljavaju uvjet (390), pa zaista prema (583), (585), (586) u kanonskom obliku nema integrala, dok ih ima za

$$K_{0,0}^{1,1}, K_{1,0}^{1,1}, K_{1,1}^{1,1}, K_{0,0}^{1,0}, K_{1,0}^{1,0}, K_{0,1}^{1,0} \text{ i } K_{0,0}^{0,0},$$

kako pokazuju formule (574), (579), (580), (578), (581), (582), (584).

(Primljeno na sjednici Odjela za matematičke, fizičke i tehničke nauke dne 25. X. 1948).