

RAD JUGOSLAVENSKE AKADEMIJE ZNANOSTI I UMJETNOSTI
KNJIGA 271.

ODJEL ZA MATEMATIČKE, FIZIČKE I TEHNIČKE NAUKE
KNJIGA I.

UREDNIK:
AKADEMIK JOSIP LONČAR

JUGOSLAVENSKA AKADEMIJA ZNANOSTI I UMJETNOSTI

R A D

**JUGOSLAVENSKE AKADEMIJE
ZNANOSTI I UMJETNOSTI**



Z A G R E B

1 9 4 8

O PRIMJENI STATISTIČKIH METODA U ANALITIČKOJ KEMIJI

*(Prikazano na primjeru podzemne vode na području grada
Zagreba)*

U veoma malo radova pokušalo se do sada obraditi kemijsko-analitičke podatke pomoću statističkih (biometrijskih) metoda. To vrijedi naročito za područje anorganske analitičke kemije. Budući da je jedan od nas¹ imao prilike da se kroz desetak godina (1929.—1941.) bavi studijem podzemne vode na području grada Zagreba i prikupi veći broj analitičkih podataka, bilo je od vrijednosti, da se ovi podaci prouče statističkim metodama i tako proširi značenje ovih posljednjih i na anorganski materijal.

Analitički materijal, o kojem je riječ u ovom spisu, odnosi se na oko 340 ogledaka podzemne vode sa cijelog područja grada. Iz tog materijala uzeti su podaci za 5 sastojina i to: 1. za isparni ostatak, 2. cjelokupnu tvrdoću, 3. alkalinitet, 4. klor-ion i 5. nitrat-ion. Navedene sastojine podvrgnute su skupinskom promatranju, tj. sva plitka podzemna voda na području grada Zagreba promatrana je kao jedna (biološka) cjelina.

Skupinsko promatranje ovih sastojina pokazat će nam, u koliko se mjeri zagrebačke podzemne vode međusobno razlikuju, odnosno u koliko mjeri variraju od neke sredine. O stepenu različitosti obavijestit će nas standardna devijacija* σ (mjerilo za apsolutnu širinu varijacije), te koeficijent varijacije KV^* (mjerilo za relativnu širinu varijacije). Orijentaciona točka, oko koje ćemo određivati varijaciju, bit će aritmetička sredina M . Za sada ćemo pretpostaviti, da se razdioba vrijednosti oko M kreće po normalnoj krivulji distribucije, a to ćemo kasnije pokušati da verificiramo i grafičkim putem.

* Standardna devijacija $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x^2)}{n} - \left[\frac{\sum (x)}{n}\right]^2}$, gdje x = odklon od približne srednje vrijednosti svih sastojina jedne vrsti, n = broj određivanja te sastojine.

** $KV = \frac{100 \sigma}{M}$, gdje M = aritmetička sredina za količinu stanovite sastojine.

TABLICA 1.

Varijacione konstante za pet sastojina zagrebačkih podzemnih voda

Tekući broj	Sastojina	Aritmetička sredina	Standardna devijacija	Granice tipa		Granice vjerojatnosti		Koeficijent varijacije ‰	Broj analiza	Faktični ekstremi		
				gornje	donje	gornje	donje			n	gornji	donji
				$M + \sigma$	$M - \sigma$	$M + 3\sigma$	$M - 3\sigma$					
		M	σ	$M + \sigma$	$M - \sigma$	$M + 3\sigma$	$M - 3\sigma$	KV				
1.	Isparni ostatak mg/l	532 ± 7	189 ± 5	721	342	1099	neg.	$35,6 \pm 1,1$	321	1220	185	
2.	Tvrdoća, njem. stupnj.	$24,83 \pm 0,25$	$6,89 \pm 0,18$	31,72	17,93	45,51	4,17	$27,8 \pm 0,8$	344	49,25	9,21	
3.	Alkalinitet njem. stupnj.	$19,10 \pm 0,15$	$4,08 \pm 0,10$	23,18	15,02	31,33	6,87	$21,3 \pm 0,6$	344	33,86	8,41	
4.	Kloridi, mg/l Cl	$18,35 \pm 0,48$	$13,04 \pm 0,34$	31,39	5,31	57,47	neg.	$71,0 \pm 2,6$	344	83,6	0,0	
5.	Nitrati, mg/l N	$8,49 \pm 0,18$	$4,80 \pm 0,13$	13,29	3,68	22,89	neg.	$56,6 \pm 1,9$	330	26,0	0,1	

Tablica 1. pokazuje nam, da su zagrebačke podzemne vode karakterizirane prosječnim isparnim ostatkom od 532 mg/l, prosječnom tvrdoćom od 24,8 njem. stupnjeva, prosječnim alkalinitetom od 19,1 njem. stupnjeva, prosječnom količinom klorida od 18,3 mg/l Cl te prosječnim sadržajem nitrata od 8,5 mg/l N. Svi navedeni prosjeci su signifikantni.**

Ako u normalnoj krivulji distribucije količina jedne sastojine odredimo aritmetičku sredinu tih sastojina i njima pripadajuću standardnu devijaciju, možemo odrediti i granice, koje su tipične za tu sastojinu (granice tipičnih slučajeva), tako da aritmetičkoj sredini dodamo odnosno oduzmemo standardnu devijaciju. Granične točke tipične za neku sastojinu jesu prema tomu $M + \sigma$ i $M - \sigma$. Suma frekvencija (broj svih određivanja jedne sastojine) između navedenih graničnih točaka daje nam u normalnoj krivulji distribucije $2/3$ svih učinjenih određivanja jedne sastojine. Sve količine, koje se nalaze između $M + \sigma$ i $M - \sigma$ nazivamo tipičnima (tipovi). Takova klasifikacija prirodnija je i objektivnija od drugih vrsti klasifikacija, gdje se mjerilo bira po subjektivnim kriterijima. U tablici 1. su sve navedene standardne devijacije signifikantne.

Podzemne vode na području grada Zagreba imaju (prema računu iz tablice 1): isparni ostatak, čije se tipične vrijednosti kreću između 342 i 721 mg/l; tvrdoću s tipičnim vrijednostima između 18 i 32 njem. stupnja; tipični alkalinitet predstavljaju vrijednosti između 15 i 23 njem. stupnja; tip za kloride varira između 5 i 31 mg/l Cl, a za nitrata između 4 i 13 mg/l N.

Relativno varira najmanje alkalinitet, t. j. samo za 21%. U sve većem redu variraju: tvrdoća za 28%, isparni ostatak za 36%, nitrati za 57%, a kloridi što više za 71%. Uzrok ovog pojavi ima se pripisati činjenici, da su kloridi i nitrati najviše ovisni o lokalnim onečišćenjima (raspad fekalne i druge organske materije). Koeficijenti varijacije KV su također signifikantni. Iz veličine KV možemo zaključiti, da su spomenute vrijednosti (količine sastojina) vjerojatno podijeljene po uzoru na normalnu krivulju distribucije, izuzev možda one za nitrata i kloride.

Ako usporedimo računom dobivene granice, koje su vjerojatne za količine pojedinih sastojina s njihovim faktičnim ekstremima, dobivenim analizom, pokazuje se, da ove faktične vrijednosti kod svih pet sastojina prelaze gornje granice vjerojatnosti ($M + 3\sigma$), što se kodolikog broja ispitivanja — gdje se

** Signifikantnost neke statističke veličine (na pr. M ili KV) znači, da je ta veličina toliko utvrđena, da je sigurno, da se kod daljnjeg povećavanja broja ispitivanja ne će mijenjati preko granica trostruke vjerojatne pogreške.

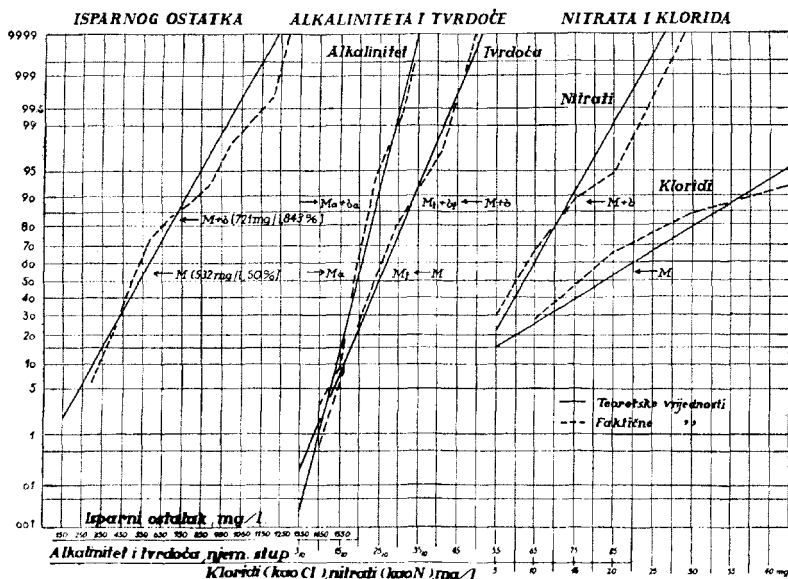
TABLICA 2.

Varijacioni redovi za tvrdoću, isparni ostatak, alkalinitet, kloride i nitrare zagrebačkih podzemnih voda u apsolutnoj frekvenciji i sa vrijednostima za apsolutni i procentualni sumarni poligon

1. Isparni ostatak				2. Tvrdoća				3. Alkalinitet				4. Kloridi				5. Nitrati			
Cen- tar raz- reda* mg/l	Frekvencija**			Cen- tar raz- reda u njem. stup.	Frekvencija			Cen- tar raz- reda u njem. stup.	Frekvencija			Cen- tar raz- reda u mg/l Cl	Frekvencija			Cen- tar raz- reda u mg/l N	Frekvencija		
	distri- bucije	sumarnog poligona			distri- bucije	sumarnog poligona			distri- bucije	sumarnog poligona			distri- bucije	sumarnog poligona			distri- bucije	sumarnog poligona	
		aps- lutno	0/ 0			aps- lutno	0/ 0			aps- lutno	0/ 0			aps- lutno	0/ 0			aps- lutno	0/ 0
150	2	2	0,6	5,0	2	2	0,6	7,5	9	9	2,6	5	95	95	28,4	2,5	98	98	29,7
250	19	21	6,5	15,0	75	77	22,4	12,5	28	37	10,8	15	125	220	65,9	7,5	124	222	67,3
350	47	68	21,2	25,0	203	280	81,4	17,5	171	208	60,5	25	61	281	84,1	12,5	72	294	89,1
450	100	168	52,3	35,0	55	335	97,4	22,5	118	326	94,8	35	28	309	92,5	17,5	18	312	94,5
550	72	240	74,8	45,0	9	344	100,0	27,5	16	342	99,4	45	14	323	96,7	22,5	17	329	99,7
650	31	271	84,4					32,5	2	344	100,0	55	7	330	98,8	27,5	1	330	100,0
750	13	284	88,5									65	4	334	100,0				
850	15	299	93,1																
950	16	315	98,1																
1050	3	318	99,1																
1150	2	320	99,7																
1250	1	321	100,0																

* Razred = izabrana skupina količina jedne sastojine u određenim jedinicama; centar razreda = aritmetička sredina između gornje i donje granice razreda; na pr. centar razreda u količini od 150 mg/l isparnog ostatka je sredina između 101 i 199 mg/l isparnog ostatka, koje su količine izabrane kao granice tog razreda.

** Frekvencija distribucije je broj svih faktičnih nalaza (određivanja), koji po svojoj veličini spadaju u dotični razred; frekvencija sumarnog poligona je broj svih određivanja od najnižeg do dotičnog razreda.



Sl. 1. Distribucijski integrali kemijskih sastojina zagrebačkih podzemnih voda

n kreće između 321 i 344 — smije dogoditi u nekoliko slučajeva. Vrijednosti, koje bi se kretale ispod $M - 3\sigma$, nije nađeno ni u jednom slučaju.

Da li će se neki distribucijski poligon* moći prilagoditi na normalnu krivulju distribucije, možemo najlakše ispitati grafičkim predočivanjem. U tu svrhu iznijet ćemo varijacione redove** i njima pripadajuće sumarne poligone, izražene u apsolutnim i procentualnim frekvencijama (vidi tablicu 2.).

Iz podataka navedenih u tablici 1. i 2. sastavili smo grafički prikaz teoretski i faktično dobivenog poligona zbroya određivanja (suma distribucije) spomenutih pet sastojina zagrebačke podzemne vode. Taj je prikaz učinjen u koordinacionom sustavu s aritmetičkom skalom na apscisi i sa skalom vjerojatnosti na ordinati. Na taj način dobivamo grafikone nacrtane u sl. 1. Iz

* Distribucijsni poligon dobivamo spajanjem točaka faktično nadjenih vrijednosti u koordinacionom sustavu.

** Varijacioni red = red broja određivanja raspoređen po veličini sastojina.

ovih se grafikona razabira, da se sve distribucije mogu smatrati normalnima, budući da se njihovi sumarni poligoni dobro prilagođuju na integral normalne krivulje distribucije.

U koliko su mjeri ispitivane sastojine zagrebačkih podzemnih voda povezane međusobno, pokazat će nam korelacioni koeficijenti. Što je naime povezanost nekih parova sastojina veća, to se korelacioni koeficijent više približava prema vrijednosti 1, i to prema + 1, ako s porastom jedne sastojine raste i količina druge sastojine, a prema — 1, ako se s porastom prve smanjuje količina druge sastojine. Korelacioni koeficijent kreće se dakle između + 1 i — 1. To se pak u grafičkom prikazu odražuje u većem ili manjem približavanju pravcu, koji prikazuje porast (odnosno padanje) količine jedne sastojine. Kad neki par sastojina nema međusobnih veza (i ako obje sastojine žive zajedno u istoj sredini, u našem slučaju vodi), korelacioni koeficijent približava se nuli. Njegov je simbol r , kojemu su prema tablici 1, dodani odgovarajući indeksi (1 2 prema tome naznačuje odnos isparnog ostatka i tvrdoće, 1 3 isp. ostatka i alkaliniteta i t. d.). Primijenimo li dakle tekuće brojeve iz tablice 1. kao indeksne brojeve, korelacioni koeficijenti našeg ispitivanja glasit će:

TABLICA 3.

Korelacioni koeficijenti* za isparni ostatak, cjelokupnu tvrdoću, alkalinitet, kloride i nitrate

$r_{12} = +0,82 \pm 0,01$	$n = 321$
$r_{13} = +0,72 \pm 0,02$	$n = 313$
$r_{14} = +0,74 \pm 0,02$	$n = 302$
$r_{15} = +0,45 \pm 0,03$	$n = 305$
$r_{23} = +0,71 \pm 0,02$	$n = 344$
$r_{24} = +0,62 \pm 0,02$	$n = 334$
$r_{25} = +0,57 \pm 0,03$	$n = 327$
$r_{34} = +0,60 \pm 0,02$	$n = 334$
$r_{35} = +0,54 \pm 0,03$	$n = 330$
$r_{45} = +0,54 \pm 0,03$	$n = 318$

Iz podataka u tablici 3. vidimo, da su međusobno najviše povezani isparni ostatak (1) i tvrdoća (2), budući da im je korelacioni koeficijent $r_{12} = + 0,82$. To znači: ako raste isparni

$$* \text{ Korelacioni koeficijent } r_{xy} = \frac{\frac{\sum(xy)}{n} - \left[\frac{\sum(x)}{n} \right] \cdot \left[\frac{\sum(y)}{n} \right]}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$$

ostatak, raste i tvrdoća, i obrnuto. U skupini naših sastojina najmanje su međusobno povezani isparni ostatak (1) i nitrati (5), budući da je r_{15} samo +0,45. Korelacioni koeficijent $r_{15} = +0,45$ smatramo srednje velikim, te stoga još uvijek možemo reći, da vrijedi pravilo, da će isparni ostatak porasti paralelno sa porastom nitrata, i obratno. Budući da su svi korelacioni koeficijenti pozitivni, to porast količine jedne sastojine slijedi porast količine druge sastojine. Pripisane vjerojatne pogreške pokazuju, da su svi korelacioni koeficijenti signifikantni.

Poredamo li korelacione koeficijente prema njihovoj veličini, dobivamo: r_{12} , r_{14} , r_{13} , r_{23} , r_{24} , r_{34} , r_{25} , r_{35} , r_{15} i r_{15} . Prema tome je isparni ostatak jako povezan ne samo sa tvrdoćom, već i s alkalinitetom i kloridima. To znači, da nam već samo poznavanje količina isparnog ostatka jedne vode na terenu grada Zagreba pruža istovremeno mogućnost zaključivanja i o tvrdoći, alkalinitetu te količini klorida i nitrata dotične vode. Da količine ovih sastojina otprilike prorekujemo iz poznavanja količine isparnog ostatka, treba nam regresiona tablica.

Ako srednju vrijednost tvrdoće, alkaliniteta, klorida i nitrata u koordinacionom sistemu vezemo za srednju vrijednost isparnog ostatka kao na osnovu, dobivamo ove jednadžbe:

TABLICA 4.

Regresione jednadžbe za tvrdoću, alkalinitet, kloride i nitratre
s obzirom na isparni ostatak

isparni ostatak (x_1) — tvrdoća (y_1) :	$y_1 = 3,003 + 6,136 x - 0,264 x^2$
isparni ostatak (x_1) — alkalinitet (y_2) :	$y_2 = 3,340 + 4,715 x - 0,261 x^2$
isparni ostatak (x_1) — kloridi (y_3) :	$y_3 = 2,844 + 0,731 x + 0,468 x^2$
isparni ostatak (x_1) — nitrati (y_4) :	$y_4 = -0,422 + 2,039 x - 0,020 x^2$

Ishodište svih gornjih jednadžbi (tabl. 4.) je isparni ostatak od 50 mg/l, kad je $x = 0$. Intervali računati su za skokove isparnog ostatka od po 10 mg. Kad poraste isparni ostatak za 10 mg/l, poraste x za 0,1. Na pr.: isparnom ostatku od 430 mg/l želimo odrediti pripadajuću tvrdoću. U tom slučaju je

$$x = (43 - 50) \cdot 0,1 = 3,8$$

Uvrstimo li ovaj x u jednadžbu za tvrdoću, dobivamo $y = 3,0 + 23,2 - 4,3 = 21,9^0$ njem. tvrdoće. Rezultate računanja, koji su vršeni u originalu sa do 4 do 5 decimala u gornjim jednadžbama, daje nam tablica 5. Otuda izvjesne razlike kod skraćenog računanja u poređenju sa tablicom.

TABLICA 5.
Regresije tvrdoće, alkaliniteta, klorida i nitrata
s obzirom na isparni ostatak.

	Isparni ostatak mg/l	Tvrdoća njem. stup.	Alkalinitet njem. stup.	Kloridi, Cl mg/l	Nitrati, N mg/l
	150	8,87	7,79	4,04	1,60
	160	9,43	8,21	4,21	1,80
	170	9,99	8,62	4,40	2,00
	180	10,53	9,03	4,59	2,20
	190	11,07	9,43	4,78	2,39
	200	11,61	9,82	4,99	2,59
	210	12,14	10,22	5,21	2,79
	220	12,67	10,60	5,44	2,99
	230	13,19	10,98	5,68	3,18
	240	13,71	11,36	5,92	3,38
	250	14,22	11,73	6,18	3,58
	260	14,72	12,09	6,44	3,77
	270	15,22	12,45	6,72	3,97
	280	15,72	12,81	7,00	4,16
	290	16,21	13,15	7,29	4,36
	300	16,69	13,50	7,60	4,55
	310	17,17	13,84	7,91	4,75
	320	17,64	14,17	8,23	4,94
	330	18,11	14,50	8,56	5,13
Donja granica tipa	340	18,58	14,82	8,90	5,33
	350	19,03	15,14	9,25	5,52
	360	19,49	15,45	9,61	5,65
	370	19,93	15,76	9,97	5,90
	380	20,37	16,06	10,35	6,09
	390	20,81	16,36	10,74	6,28
	400	21,24	16,65	11,13	6,47
	410	21,67	16,93	11,54	6,66
	420	22,09	17,22	11,95	6,85
	430	22,51	17,49	12,38	7,04
	440	22,92	17,76	12,81	7,23
	450	23,32	18,03	13,25	7,42
	460	23,72	18,29	13,70	7,61
	470	24,11	18,54	14,17	7,79
	480	24,50	18,79	14,64	7,98
	490	24,89	19,04	15,12	8,17
	500	25,27	19,28	15,61	8,36
	510	25,64	19,51	16,10	8,54

Tablica 5. (nastavak)

	Isparni ostatak mg/l	Tvrdoća njem. stup.	Alkalinitet njem. stup.	Kloridi, Cl mg/l	Nitriti, N mg/l
<i>M</i>	520	26,01	19,74	16,61	8,73
	530	26,37	19,96	17,13	8,91
	540	26,73	20,18	17,66	9,10
	550	27,08	20,40	18,19	9,28
	560	27,43	20,60	18,74	9,47
	570	27,77	20,81	19,29	9,65
	580	28,10	21,00	19,86	9,83
	590	28,44	21,20	20,43	10,02
	600	28,76	21,38	21,01	10,20
	610	29,08	21,57	21,61	10,38
	620	29,40	21,74	22,21	10,56
	630	29,71	21,91	22,82	10,74
	640	30,01	22,08	23,44	10,92
	650	30,31	22,24	24,07	11,10
	660	30,61	22,40	24,71	11,29
	670	30,89	22,55	25,36	11,46
	680	31,18	22,69	26,01	11,64
	690	31,46	22,83	26,68	11,82
	700	31,73	22,97	27,36	12,00
	710	32,00	23,10	28,04	12,18
Gornja granica tipa	720	32,26	23,22	28,74	12,36
	730	32,52	23,34	29,44	12,54
	740	32,77	23,46	30,16	12,71
	750	33,02	23,57	30,88	12,89
	760	33,26	23,67	31,61	13,07
	770	33,49	23,77	32,36	13,24
	780	33,72	23,86	33,11	13,42
	790	33,95	23,95	33,87	13,59
	800	34,17	24,03	34,64	13,77
	810	34,38	24,11	35,42	13,94
	820	34,59	24,18	36,21	14,11
	830	34,80	24,25	37,00	14,29
	840	35,00	24,31	37,81	14,46
	850	35,19	24,37	38,63	14,63
	860	35,38	24,42	39,45	14,81
	870	35,56	24,47	40,29	14,98
	880	35,74	24,51	41,13	15,15
	890	35,91	24,54	41,99	15,32
	900	36,08	24,57	42,85	15,49
	910	36,24	24,60	43,72	15,66

Tablica 5. (svršetak)

	Isparni ostatak mg/l	Tvrdoća njem. stup.	Alkalinitet njem. stup.	Kloridi, Cl mg/l	Nitrati, N mg/l
	920	36,40	24,62	44,61	15,83
	930	36,55	24,64	45,50	16,00
	940	36,70	24,65	46,40	16,17
	950	36,84	24,65	47,31	16,34
	960	36,97	24,65	49,06	16,51
	970	37,10		50,01	16,68
	980	37,23		50,96	16,84
	990	37,35		51,93	17,01
	1000	37,46		52,90	17,18
	1010	37,57		53,89	17,34
	1020	37,68		54,88	17,51
	1030	37,78		55,89	16,68
	1040	37,87		56,90	17,84
	1050	37,96		57,93	18,01
	1060	38,04		58,96	18,17
	1070	38,12		60,00	18,33
	1080	38,19		61,06	18,50
	1090	38,26		62,12	18,66
Gornja granica vjerojatnosti	1100	38,32		63,19	18,82
	1110	38,38		64,27	18,99
	1120	38,43		65,36	19,15
	1130	38,47		66,46	19,31
	1140	38,51		67,57	19,47
	1150	38,55		68,69	19,63
	1160	38,58		69,82	19,79
	1170	38,60		70,96	19,95
	1180	38,62		72,11	20,11
	1190	38,64		73,26	20,27
	1200	38,65		74,43	20,43
	1210	38,65		75,61	20,59
	1220	38,65		76,79	20,75

Budući da je za određivanje isparnog ostatka potrebno nekoliko sati, a alkalinitet se može titracijom odrediti za nekoliko minuta, to smo regresione jednadžbe izračunali i za odnose sastojina prema alkalinitetu. Tu se dakle možemo već samim alkalinitetom poslužiti kao osnovom za brzu orijentaciju o količinama drugih sastojina podzemne vode. U tu svrhu poslužiti ćemo se tablicom 6.

TABLICA 6.

Regresije isparnog ostatka, tvrdoće, klorida i nitrata
s obzirom na alkalinitet

	Alkalinitet njem. stup.	Isparni ostatak mg/l	Tvrdoća njem. stup.	Kloridi, Cl mg/l	Nitrati, N mg/l
Donja granica vjerojatnosti	7	213	11,0	5,4	2,5
	8	229	12,2	5,5	2,7
	9	247	13,3	5,7	2,9
	10	267	14,5	6,2	3,1
	11	288	15,6	6,8	3,4
	12	311	16,8	7,5	3,8
	13	335	17,9	8,4	4,3
	14	360	19,0	9,4	4,8
Donja granica tipa	15	387	20,2	10,6	5,3
	16	416	21,3	12,0	6,0
	17	446	22,5	13,5	6,7
<i>M</i>	18	477	23,6	15,2	7,4
	19	511	24,8	17,0	8,2
	20	545	25,9	19,0	9,1
	21	581	27,0	21,1	10,0
	22	619	28,2	23,4	11,0
Gornja granica tipa	23	658	29,3	25,8	12,1
	24	699	30,5	28,4	13,2
	25	741	31,6	31,1	14,4
	26	784	32,8	34,1	15,6
	27	829	33,9	37,1	16,9
	28	876	35,0	40,3	18,3
	29	924	36,2	43,7	19,7
	30	974	37,3	47,2	21,2
Gornja granica vjerojatnosti	31	1025	38,5	50,9	22,8
	32	1078	39,6	54,7	24,4
	33	1132	40,8	58,7	26,0
	34	1187	41,9	62,8	27,8
	35	1245	43,0	67,1	29,6

Osnovu ove tablice čine slijedeće regresione jednadžbe:

TABLICA 7.

Regresione jednadžbe za isparni ostatak, tvrdoću, kloride i nitrata
s obzirom na alkalinitet

alkalinitet (x_2) — isparni ostatak (y_5) :	$y_5 = 157,04 + 45,05 x + 18,81 x^2$
alkalinitet (x_2) — tvrdoća (y_6) :	$y_6 = 5,90 + 5,71 x$
alkalinitet (x_2) — kloridi (y_7) :	$y_7 = 6,74 + 3,28 x + 1,93 x^2$
alkalinitet (x_2) — nitrati (y_8) :	$y_8 = 2,60 + 0,67 x + 0,77 x^2$

Ishodište prednjih jednadžbi, izuzev nitrata, nalazi se kod 2,5 njem. stupnjeva alkaliniteta, u kojem je slučaju $x = 0$. Ko-

relirani podaci za isparni ostatak, tvrdoću i kloride računati su za svaki cijeli njem. stupanj alkaliniteta. Kad poraste alkalinitet za 1 njem. stupanj, poraste x za 0,2. Kod nitrata nalazimo ishodište kod 7,5 njem. stupnjeva alkaliniteta.

U tablicama 8. i 9. pokušali smo verificirati ove jednadžbe na 15 starijih analiza, od kojih su analize br. 1—5 objelodanjene već god. 1900.²⁾, one br. 6—10 god. 1929.³⁾, a one br. 11—15 god. 1934.⁴⁾. Istači treba ovdje, da je za primjere uzeto namjerice redom po pet prvih analiza navedenih u citiranim publikaci-

TABLICA 8.

Verificiranje tablice 5. na analizama iz god. 1900., 1929. i 1934.

Red. broj	Isparni ostatak mg/l	Cjelokupna tvrdoća njem. °		Alkalinitet njem. °		Kloridi, mg Cl/l		Nitrati, mg N/l		
		teor.	anal.	teor.	anal.	teor.	anal.	teor.	anal.	
1	486	25	22	18,9	—	15	7	8	—	Magazinska 3
2	509	28	22	21,2	—	20	102	10	—	Magazinska 8
3	497	25	36	19,1	—	15	101	8	1	Kačićeva 8
4	789	34	30	23,9	—	34	87	14	23	Jelačićev trg 20
5	489	25	24	19,0	—	15	23	8	0,3	Trnje 21
6	204	12	9	10	5	5	23	3	3	Kraljevac 2
7	452	23	25	18	22	13	5	7	3	Kustošija
8	591	28	27	21	22	20	13	10	3	"
9	692	31	31	23	23	27	28	14	3	Ilica 224
10	723	32	32	23	24	29	33	12	4	"
11	717	32	28	23	22	28	28	12	10	Botanički vrt bušotina 1
12	681	31	27	23	22	26	27	12	9	" 2
13	697	32	27	23	22	27	27	12	10	" 3
14	704	32	27	23	23	27	26	12	9	" "
15	724	32	28	23	22	29	27	12	10	" 5

TABLICA 9.

Verificiranje tablice 4. na analizama iz god. 1900., 1929. i 1934.

Red. broj	Alkalinitet, njem. °	Tvrdooća, njem. °		Isp. ostatak mg/l		Kloridi, mgCl/l		Nitrati, mgN/l		Ulica
		teor.	anal.	teor.	anal.	teor.	anal.	teor.	anal.	
6*	5	9	6	184	204	6	23	2	3	Kraljevac 2
7	22	28	25	619	452	23	5	11	3	Kustošija
8	22	28	27	619	591	23	13	11	3	"
9	23	29	31	658	692	26	28	12	3	Ilica 224
10	24	31	32	699	723	28	33	13	4	"
11	22	28	28	619	712	23	28	11	10	Botanički vrt bušotina 3
12	22	28	27	619	681	23	27	11	9	" 2
13	22	28	27	619	697	23	27	11	10	" 3
14	23	29	27	658	704	26	26	12	9	" 4
15	22	28	28	619	724	23	27	11	10	" 5

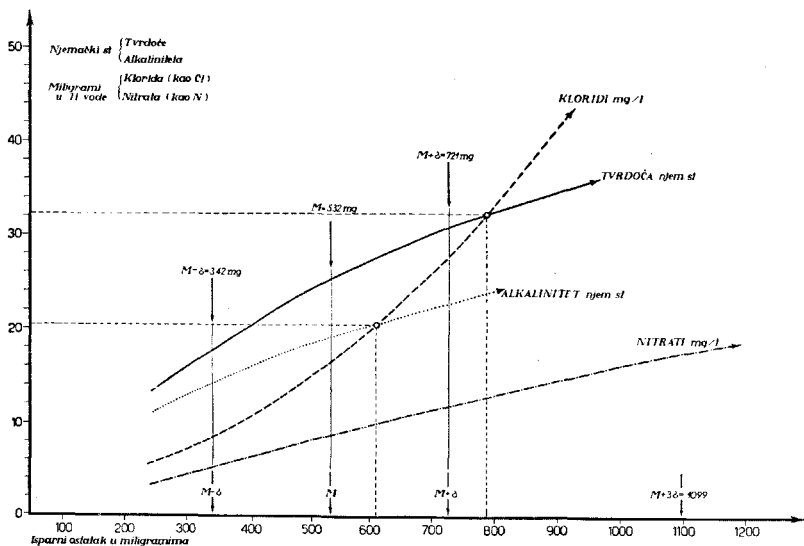
* Analize 1—5 ovdje nisu navedene, jer ne sadržavaju nalaz alkaliniteta.

jama. Pomoću regresionih tablica br. 5 i 6 dobiveni teoretski rezultati uspoređeni su tu s analitičkim podacima. Najmanju suglasnost s teoretskim nalazima pokazuju naravno analize iz god. 1900. Tu su razlike, što više, veoma znatne. (Ovu činjenicu treba pripisati raznim faktorima: bunari u još nekanaliziranim predjelima, razlike u analit. metodama; regresione tablice temelje se samo na novijim podacima od 1930. ovamo i t. d. Sudeći po kloridima u analizama br. 2—5, radi se ovdje o vodama, koje se nalaze na onečišćenom terenu). Što se tiče klorida, a još više nitrata, suglasnosti su općenito malene. Ovu su činjenicu pokazali i korelacioni koeficijenti računskim putem, a ona je i lako razumljiva, ako se ima u vidu, da su kloridi i nitrati najviše ovisni o lokalnim prilikama vodoopskrbnog objekta.

Slično kao što smo gore sastavili regresione tablice za isparni ostatak i alkalinitet, mogli bismo to učiniti i s ostalim sastojinama zagreb. podzemne vode. No budući da su druge sastojine povezane međusobno u manjoj mjeri, to bi se faktične

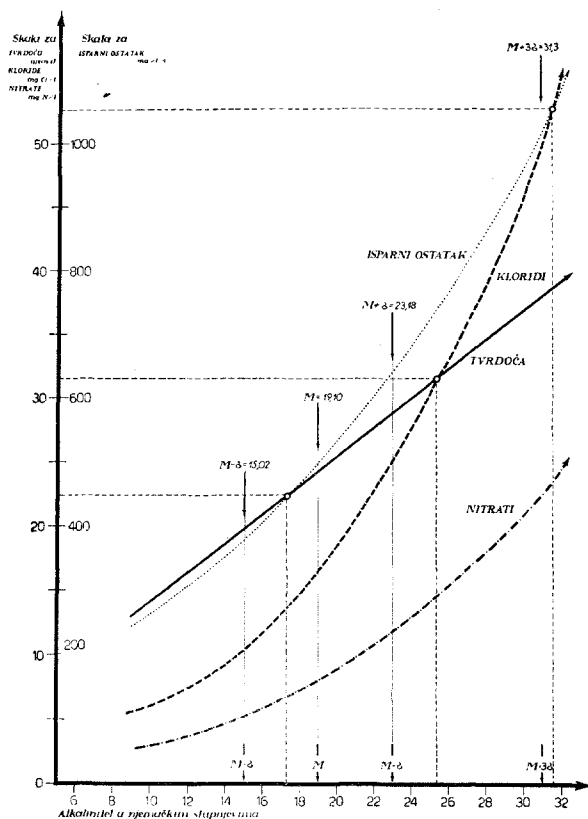
vrijednosti znatnije odvajale od onih, koje bismo dobili računom. Osim toga ne bi to moglo imati neke veće praktične vrijednosti, jer su metode za određivanje isparnog ostatka i alkaliniteta veoma sigurne, a određivanje alkaliniteta predstavlja pored toga jednu od najbržih metoda.

Želimo li se brzo orijentirati o međusobnim odnosima ispitanih kemijskih sastojaka podzemne vode na terenu grada Zagreba, mogu nam poslužiti i grafikoni u slikama 2. i 3., koji svoje



Sl. 2. Grafikoni prosječnih regresija tvrdoće, alkaliniteta, klorida i nitrata s obzirom na isparni ostatak

osnove nalaze u tablicama 5. i 6. Najčešće će trebati podaci, koji se nalaze između granica tipova, t. j. između $M + \sigma$ i $M - \sigma$. Zato su ove granice označene i u oba grafikona. Pored njih važne su i zanimljive granice teoretske vjerojatnosti ($M + 3\sigma$ te $M - 3\sigma$), koje su u grafikonima također ucrtane. Na područje između tipova otpada $\frac{2}{3}$ slučajeva. U tom području je vjerojatnost proricanja najveća, dok će daleko odavle na ekstremima s jednog i drugog kraja teoretski podaci znatnije odstupati od



Sl. 3. Grafikoni prosječnih regresija isp. ostatka, tvrdoće, klorida i nitrata s obzirom na alkalinitet

faktičnih vrijednosti. U tom istom području dopuštene su što više i linearne interpolacije. U grafikonima sl. 2. čini osnovu promatranja isparni ostatak, dok u grafikonima sl. 3. daje osnovu alkalinitet. Iz slike 2. razabiramo, da se s porastom isparnog ostatka tvrdoća i alkalinitet približavaju nekom maksi-

mumu, koji je karakterističan za zagrebačke podzemne vode ispod obronaka. Teoretski maksimum je tu gornja granica vjerojatnosti (kod tvrdoće oko 45°, kod alkaliniteta oko 31°). Količine klorida rastu naprotiv sve naglije, što isparni ostatak biva veći. To znači, da je kod voda veoma bogatih mineralnim sastojinama isparni ostatak uvjetovan relativno daleko više porastom klorida nego što je to slučaj kod mineralnim sastavom siromašnijih voda.

Grafikoni slike 3. pokazuju, da s porastom alkaliniteta raste tvrdoća linearno. Jednadžba pravca (vidi tabl. 6.) glasi:

$$t = 3 + 1,1 a$$

gdje t i a označuju tvrdoću odnosno alkalinitet izražene u njem. stupnjevima. Ako tu jednadžbu verificiramo na analizama nekih zagrebačkih podzemnih voda (vidi tabl. 8.) vidimo, da nam ona može dobro poslužiti.

Neku zanimljivost mogu u ovim grafikonima predstavljati i mjesta, na kojima se krivulje sijeku.

Sjecište krivulje tvrdoće i krivulje klorida u grafikonu slike 2 nalazi se na visini od oko 800 mg isparnog ostatka u 1 litri vode. Ordinata tog mjesta pokazuje na cca 34° njem. tvrdoće i isto toliko mg Cl/l. Ovo sjecište utvrđuje, da je kod voda, koje imaju manje od 800 mg/l isp. ostatka, tvrdoća, izražena u njem. stupnjevima, veća od miligrama Cl-iona iste vode. Ta se razlika kreće maksimalno do 10° njem. tvrdoće odnosno isto toliko mg Cl/l. Kod voda pak, koje su bogatije od 800 mg/l isp. ostatka, tvrdoća je u njem. stupnjevima manja od količine miligrama Cl/l. — Za sjecište krivulja alkaličnosti i klorida kod cca 610 mg/l isp. ostatka te 21,5° alkaličnosti odnosno 21,5 mg Cl/l vrijedi analogno. Maksimalna razlika između obje sastojine kod voda s manje isp. ostatka od 610 mg/l iznosi cca 6° alkaličnosti odnosno 6 mg/l Cl.

Praktično značenje ovih navoda može biti slijedeće: Ako znamo sjecište možemo bez regresionih jednadžbi, tablica i grafikona već iz podatka za kloride donekle ocijeniti tvrdoću, odnosno alkaličnost neke zagrebačke podzemne vode. I obrnuto: iz podataka za alkaličnost ili tvrdoću možemo donekle ocijeniti količinu klorida. Napr. voda glavnog sabirnog bunara vodovoda ima 15,4 mg Cl/l (dne 7. I. 1941.). Prema tome bi se tvrdoća njegove vode morala kretati između 24° i 34°, a alkaličnost između 15,5° i 21,5°. Analiza pokazuje pak faktično 27,6° tvrdoće i 18,7° alkaliniteta. Slično vrijedi za sve vode, koje imaju normalni sastav, t. j. koje nisu lokalno onečišćene.

Na grafikonu 5. imamo četiri sjecišta: krivulje tvrdoće i isp. ostatka sijeku se dva puta i to kod cca $6,5^0$ i kod $17,5^0$ alkaličnosti, odnosno kod cca 10 i 32 mg Cl/l te cca 200 i 640 mg/l isp. ostatka. Kod voda s više od $17,5^0$ alkaličnosti isp. ostatak u mg/l je 20 puta veći od tvrdoće izražene u njem. stupnjevima. Kod voda s alkaličnosti između $6,5$ i $17,5^0$ isp. ostatak je cca 20 puta veći od stupnjeva tvrdoće. Krivulje klorida i tvrdoće sijeku se kod cca 25^0 alkaličnosti i kod cca 32^0 tvrdoće odnosno 32 mg Cl/l. Kod voda s više od 25^0 alkaličnosti količina klorida (mg Cl/l) veća je od tvrdoće izražene u njem. stupnjevima. Kod voda s manje alkaličnosti tvrdoća je veća od klorida, a maksimalna razlika kreće se do cca 10^0 tvrdoće odnosno 10 mg Cl/l. Sjecište krivulja isp. ostatka i klorida kod cca 31^0 alkaličnosti te kod cca 1050 mg/l isp. ostatka odn. cca 52 mg Cl/l izlazi izvan granica vjerojatnosti i veli nam samo to, da je kod zagrebačkih podzemnih voda isparni ostatak uvijek veći od 20-erostrukog umnoška količine klorida, izražene u mg Cl/l. Razlika između mg Cl/l i ovog umnoška ne iznosi međutim nikad više od cca 160 mg/l isp. ostatka odnosno cca 8 mg Cl/l. Vice versa vrijedi ovo naravno za ocjenjivanje količine klorida iz količine isparnog ostatka. Kloridi treba da budu uvijek barem 20 puta manji od količine isparnog ostatka, ali kvocijent, koji dobivamo diobom miligrama isparnog ostatka sa 20, ne razlikuje se od faktičnih vrijednosti za više od 8 mg Cl/l.

Prilično dobro mogu se gore navedeni zaključci o sjecištima verificirati i na tablicama 8. i 9. Analize Bošnjakovića treba naravno i ovdje tretirati s velikim oprezom, jer se radi — kako već rekosmo — o lokalno onečišćenim bunarskim vodama staroga Zagreba bez kanalizacije.

* * *

Kako kod svih podataka dobivenih statističkim metodama, tako vrijedi i u ovim istraživanjima: podaci za količinu pojedinih sastojina vode, dobiveni pomoću regresionih jednadžbi ili tablica ili pomoću diagrama, predstavljaju naravno samo vjerojatne količine. Stvarne količine će donekle varirati od tih računom dobivenih podataka. Kod alkaliniteta i tvrdoće te će se varijacije kretati redovito u granicama od nekoliko stupnjeva na niže ili na više od onih dobivenih računom. Tek u iznimnim slučajevima oni će pokazivati veća odstupanja, što normalno ovisi o lokalnim prilikama vodnog objekta. Stvarnim količinama najviše će se približavati teoretski podaci dobiveni u granicama između tipova t. j. između $M + \sigma$ i $M - \sigma$, dok će ekstremi sve više od njih odstupati.

Slučajevi unutar granica tipova, kod kojih se analizom dobiveni podaci znatnije razlikuju od onih dobivenih na ovdje opisani način, zaslužuju posebnu pažnju. U sistemu podzemne vode, koja je u pitanju u ovom spisu, takovi slučajevi daju opravdanu sumnju, da je podzemna voda bilo lokalno onečišćena (kad su analitički podaci znatno viši od teoretskih) ili pak da je pod utjecajem pukotinske, izvorne vode (kad je sadržaj znatno siromašniji od onoga dobivenog računom). Znatnije razlike dobit će se i tamo, gdje u plitku vodu dotječe dublja podzemna voda. Statističkim metodama dobiveni podaci mogu se prema tome s uspjehom primijeniti i kod sanitarne analize pitke vode.

Zaključak

1) Podaci za isparni ostatak, cjelokupnu tvrdoću, alkalinitet, kloride i nitrate, dobiveni analizom ogledaka plitke podzemne vode na području grada Zagreba, podvrgnuti su skupinskom razmatranju uz primjenu statističkih (biometrijskih) metoda.

2) Korelacioni koeficijenti (tabl. 3.) navedenih sastojina pokazuju, da porastom količine jedne sastojine raste i količina druge sastojine. Naročito velika je povezanost isparnog ostatka sa ostalim sastojinama, a osobito sa tvrdoćom i alkalinitetom. Ako je poznata količina isparnog ostatka neke vode, može se u granicama pogrešaka zaključivati i količina drugih sastojina (tablica 4. i 5.).

3) Navedeno za isparni ostatak vrijedi također i za alkalinitet (tablica 6. i 7.). S porastom tvrdoće raste alkalinitet linearno (slika 3.). Jednadžba pravca glasi $t = 3 + 1,1 a$.

4) Računom dobiveni teoretski podaci verificirani su na analizama starijih publikacija (tablice 8. i 9.).

5) Određene su granice tipičnih slučajeva $M + \sigma$ i $M - \sigma$ za pojedine sastojine kao i gornje i donje granice vjerojatnosti $M + 3\sigma$ i $M - 3\sigma$ za pet navedenih sastojina (tablica 1).

6) Izračunate su regresione jednadžbe za pojedine sastojine obzirom na isparni ostatak i obzirom na alkalinitet. Pomoću ovih jednadžbi izvedene su regresione tablice, iz kojih se mogu dobiti podatci za pojedine sastojine, ako je poznat isparni ostatak odnosno alkalinitet dotične vode (tablice 5. i 7.).

7) Za brzu orijentaciju učinjeni su grafikoni pojedinih sastojina obzirom na isparni ostatak (slika 2.) te obzirom na alkalinitet (slika 3.). Svrāčena je pozornost na sjecišta krivulja u grafikonima i njihovo značenje.

8) Iz predloženog spisa vidljivo je, da se statističke metode mogu s uspjehom primijeniti i na razmatranje podataka dobivenih kemijskom analizom anorganskog materijala. Preduvjeti za takova razmatranja su isti kao i kod bioloških ispitivanja: veliki broj podataka, koji se odnosi na jednu istu u stvarnosti povezanu skupinu individua (u našem slučaju ogleđaka podzemne vode). Vjerojatno je, da bi se iste metode mogle s uspjehom primijeniti i na razmatranja anorganskog i organskog analitičkog materijala druge vrsti kao na pr. kod kemijskih analiza ruda, bilja, biogenih* proizvoda i t. d. Može se što više očekivati, da se takovim ispitivanjima nađu korelacije pojedinih sastojina, iz kojih se mogu izvesti zaključci o samoj genezi sastojina.

Iz zavoda za opću, anorg. i analit. kemiju Farmaceutskog fakulteta i Higijenskog zavoda u Zagrebu

LITERATURA

1. Iveković H.; Studije o podzemnoj vodi na području grada Zagreba: I. Podzemne vode na terenu grada Zagreba, Arhiv za hem. i farm., 3. 113. (1929.) II. Pitke vode na području grada Zagreba i okolice, Glasn. Centr. higij. zavoda 4. 107 (1929.); III. O uzroku stalnosti kemijskog sastava vode zagrebačkog vodovoda, Arhiv za hemiju i farm. 3. 179. (1929.); IV. — i Pauković N., Zagrebački vodovod i opskrba vodom sa terena botaničkog vrta, Tehn. list 16. 4. (1934.); 5. O prirodnim »toplrim« i »rudnim« vodama na području grada Zagreba, VPS. 7. 193. (1941.); VI. Citati iz starije literature o zagrebačkim vodama i kupalištima do god. 1877., VPS. 7. 214. (1941.); VII. Popis publikacija o zagrebačkim vodama i kupalištima, VPS. 7. 238. (1941.).
2. Bošnjaković F.; Voda zagrebačkog vodovoda, Zagreb. 1900. Šandor F., Opskrba vodom u Hrvatskoj i Slavoniji 1896.—1905. Zagreb 1907.
3. Vidi 1. II.
4. Vidi 1. IV.

* Kod nas su na tom području radili: A. Tavčar, Odnos između sadržaja masti i proteina u sjemenu soje, Poljopr. znanstv. smotra 7. (1943.); Biometrika u poljoprivredi, Zagreb 1946.; i F. Mikić, Der Übergang des Wassers aus der Frühjahrswende in die Milch, Milchwirtsch. Forschungen 21. 4. (1942.); Efetusin — novi domaći ekspektorans, Lij. Vj. 2. 1933. (sa Hercogom).

**CETVEROSTRUKI FOKUS UNIKURZALNIH
CIRKULARNIH KRIVULJA 3. REDA I NEKI OSOBITI
PRAMENVI TIH KRIVULJA.**

Neki pravac p , koji siječe jednostruku ravnalicu neke pravčaste plohe 3. reda u točki A , neka probada ovu plohu još i u točkama B i C . Probodišta B, C nalaze se na paru izvodnica ove plohe, koje se sijeku na njenoj dvostrukoj ravnalici, recimo u točki O . Sijječemo li sada našu plohu ravninama pravca p i sve te presječne krivulje centralno projiciramo iz točke O na bilo kakvu ravninu, dobit ćemo na toj ravnini pramen unikurzalnih krivulja 3. reda, određen dvostrukom točkom (tri elementa), trima jednostrukim točkama (projekcije točaka A, B, C), te tangentama u dvjema od tih točaka (u projekcijama točaka B, C). Sjecište F ovih tangenata je čvrsta točka ovoga pramena, jer su čvrste u njemu i spomenute tangente.

Mjesto bilo kakove pravčaste plohe 3. reda uzmimo sada Plückerov konoid, a pravac p neka se nalazi u neizmjereno dalekoj ravnini para minimalnih izvodnica toga konoida. Svezak njegovih ravnina bit će prema tome svezak usporednih ravnina. Točka O bit će ovdje neizmjereno daleka točka dvostrukog pravca ovog konoida, a to je, kao što znademo, ona njegova točka, kojom prolazi par njegovih minimalnih izvodnica.¹⁾ Odavle direktno slijedi poznata činjenica, da se svi presjeci Plückerova konoida projiciraju u smjeru dvostrukog pravca na direkcione ravnine kao cirkularne krivulje. Sijječemo li sada ovaj konoid sveskom usporednih ravnina neizmjereno dalekog pravca p i sve te presjeke u smjeru dvostrukog pravca projiciramo na bilo koju direkcionu ravninu, dobit ćemo na toj ravnini pramen cirkularnih krivulja 3. reda, koje imaju zajedničku dvostruku točku, neizmjereno daleku realnu točku i obje apsolutne točke s njihovim tangentama. Realno sjecište F ovih imaginarnih tangenata u apsolutnim točkama zove se četverostruki fokus.

¹⁾ Müller-Krames: Vorlesungen über darstellende Geometrie, Bd. III. str. 204.

Budući da su apsolutne točke i njihove imaginarne tangente zajedničke svim krivuljama ovog pramena, to će i ovo realno sjecište F biti zajednički četverostruki fokus svih cirkularnih krivulja ovog pramena.

Po jedna ravnina svakog sveska usporednih ravnina prolazi jednom izvodnicom Plückerova konoida. Presjek toga konoida s tom ravninom raspada se u spomenutu izvodnicu i neku elipsu, koja se u prije spomenuti pramen cirkularnih krivulja 3. reda projicira kao kružnica. Budući da je središte kružnice sjecište njenih tangenata u apsolutnim točkama, to će središte spomenute kružnice, u pramenu naših cirkularnih krivulja 3. reda roda nultoga, biti zajednički četverostruki fokus svih krivulja ovog pramena.

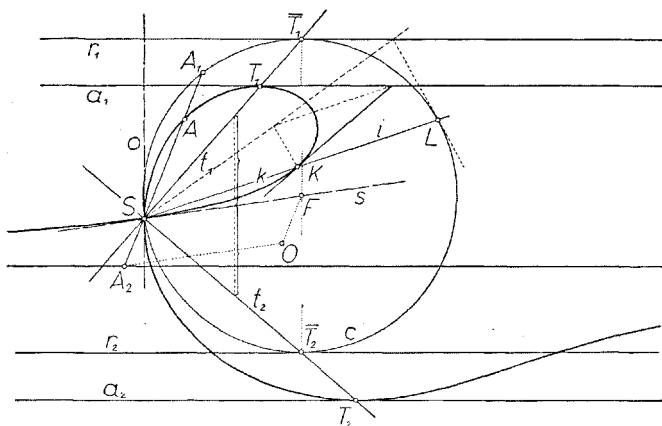
Kad svaku cirkularnu krivulju 3. reda roda nultoga možemo shvatiti kao projekciju nekog ravnog presjeka Plückerova konoida u smjeru dvostrukog pravca na jednu njegovu direkciju ravninu²⁾, tad pomoću gornjih razmatranja možemo na svakoj takovoj unikurzalnoj cirkularnoj krivulji 3. reda odrediti njen četverostruki fokus.

Neka je zadana unikurzalna cirkularna krivulja 3. reda k kao projekcija nekog presjeka Plückerova konoida u smjeru njegovog dvostrukog pravca na jednu direkciju ravninu (vidi sliku). Povučemo li tangente a_1, a_2 na tu krivulju, usporedne s njenom asimptomom, i njihova dirališta T_1, T_2 spojimo s dvostrukom točkom, tada su ove spojnice t_1, t_2 projekcije torzalnih pravaca toga Plückerova konoida, dakle okomitih jedan na drugom. Kod unikurzalnih cirkularnih krivulja 3. reda ove dvije spojnice moraju biti međusobno okomite³⁾. Uzmemo li sada sve presjeke našeg Plückerova konoida, čije su ravnine usporedne s ravninom zadanog presjeka, tada će njihova projekcija dati, kao što već znademo, pramen cirkularnih krivulja 3. reda sa zajedničkom dvostrukom točkom, realnom neizmjereno dalekom točkom, te apsolutnim točkama i njihovim tangentama. Tangente τ_1, τ_2 u sjecištima tih krivulja s pravcima t_1, t_2 bit će usporedne s pravcima a_1, a_2 , a razmak njihov bit će jednak razmaku pravaca a_1, a_2 , jer su parovi ovih tangenata tragovi tih usporednih ravnina u torzalnim ravninama, koje su kod Plückerova konoida usporedne. Sve krivulje ovog pramena imaju zajednički četverostruki fokus, a jedna između tih krivulja raspada se u kružnicu i pravac, koji prolazi dvostrukom točkom, a usporedan je s prav-

²⁾ Vidi moju radnju: Vanjska oznaka unikurzalne cirkularne krivulje 3. reda. Nast. Vjesnik, knj. L., str. 360.

³⁾ Vidi moju radnju: Cit. pod ²⁾.

cima a_1, a_2 . Središte ove kružnice c bit će dakle traženi četverostruki fokus F , a sama kružnica je projekcija presječne elipse s onom ravninom našeg sveska, koja prolazi onom izvodnicom našeg Plückerova konoida, koja je usporedna s pravcima a_1, a_2 . Rekli smo već, da ova kružnica c mora prolaziti dvostrukom točkom, a prema gornjemu mora sjeći pravce t_1, t_2 tako, da tangente r_1, r_2 na tu kružnicu, u tim sjecištima, budu usporedne s pravcima a_1, a_2 , a razmak tih tangenata da bude jednak razmaku onih pravaca a_1, a_2 . Povučemo li prema tome neki pravac okomito na tangente a_1, a_2 i raspolovimo udaljenost nje-



govih sjecišta s pravcima t_1, t_2 , a to polovište spojimo s dvostrukom točkom, tada se na toj spojnici nalazi središte F tražene kružnice c , odnosno četverostruki fokus cirkularne krivulje k . Udaljenost njegova od dvostruke točke na stranu vitice krivulje, jednaka je polovici razmaka tangenata a_1, a_2 , što slijedi iz gornjih razmatranja.

Uzdignemo li u dvostrukoj točki okomicu o na asimptotu, tada za pravce t_1, t_2, o i s vrijedi $(t_1 t_2 o s) = -1$, odnosno $\sphericalangle ot_1 = \sphericalangle t_1 s$, jer je kut pravaca t_1, t_2 pravi. Vidimo dakle, da ćemo dobiti četverostruki fokus svake unikurzalne cirkularne krivulje 3. reda ovako: dvostruku točku te krivulje spojimo s diralištima njenih tangenata a_1, a_2 usporednih s asimptotom i kroz nju povučemo okomicu o na te tangente, odnosno asimptotu. Prenesemo

li pravac o oko jedne ili druge ove spojnice simetrično na drugu stranu, tada na dobivenom pravcu leži četverostruki fokus na strani vitice, udaljen od dvostruke točke za polovicu udaljenosti tangenata a_1, a_2 .

Imamo li četverostruki fokus F neke cirkularne unikurzalne krivulje k 3. reda i oko nje, kroz njenu dvostruku točku, opisanu kružnicu c , tada se na temelju prostornih razmatranja može utvrditi zanimljiva veza ove kružnice s našom krivuljom k .

Svaku zraku dvostruke točke krivulje k možemo smatrati projekcijom jedne izvodnice Plückerova konoida. Neka takva izvodnica i siječe kružnicu c u točki L , a krivulju k u točki K . Budući da su ravnine presjeka k, c usporedne, to iz prostornih odnosa jasno slijedi, da točka L mora biti ispod pravca τ_1 upravo toliko, koliko je točka K ispod pravca a_1 . Pomoću ove činjenice može se vrlo jednostavno konstruirati svaka krivulja našeg pramena, ako mu je zadan zajednički smjer asimptota, dvostruka točka i četverostruki fokus. Tangente u pojedinim točkama mogu se dobiti također vrlo jednostavnim putem, koji se temelji na poznatim svojstvima Plückerova konoida. Na pr. presiječemo li tangentom kružnice c u točki L pravac τ_1 pa spojnicom toga sjecišta i dvostruke točke presiječemo usporednicu tangente kružnice c u točki L , povučenu točkom K , tada će nam ovim sjecištem povučena usporednica s pravcem KL sjeći pravac a_1 u točki, kojom prolazi tangenta krivulje k u točki K (vidi sliku!). Ova planimetrijska konstrukcija je projekcija prostornog određivanja presječne ravnina presjeka k s dirnom ravninom Plückerova konoida u točki K .

Uzmimo na krivulji k kao naprijed spomenutoj projekciji nekog ravnog presjeka Plückerova konoida, točku A i zrakom SA sijecimo kružnicu c i asimptotu krivulje k u točkama A_1, A_2 . Iz naših dosadanih razmatranja vidi se, da mora biti $A_1 A = SA_2$, što vrijedi i za sve točke krivulje k , jer su radi paralelnosti ravnina krivulja k i c u prostoru, kao presječnih ravnina spomenutog Plückerova konoida, jednake dužine AA_2, SA_1 u prostoru, dakle i njihove projekcije na našoj slici, a odatle slijedi i $A_1 A = SA_2$. Vidimo dakle, da izlazi ovaj već poznati stavak: Svaka unikurzalna cirkularna krivulja 3. reda je cisoida kružnice opisane oko njenog četverostrukog fokusa kroz dvostruku točku i njene asimptote, a za dvostruku točku kao pol.

Pomoću ovih naših prostornih i ravninskih razmatranja lako se može uvidjeti i to, kako svaku elipsoidnu unikurzalnu krivulju 3. reda, t. j. onu, koja ima običan par imaginarnih točaka u neizmjernosti, zgodnom afinom transformacijom (u prostoru

paralelnim projiciranjem) možemo prevesti u cirkularnu i obrnuto, isto kao što i svaku elipsu možemo projicirati u kružnicu i obrnuto. Osim toga odavle izlazi činjenica, da je svaka unikurzalna krivulja 3. reda s parom imaginarnih točaka u neizmjernosti cisoida⁴⁾ neke elipse, koja je dira u njenim imaginarnim neizmjereno dalekim točkama, te asimptote ove krivulje, a za dvostruku točku kao pol.

Konstruktivno odrediti ovakovu elipsu je vrlo lako. Spojimo dvostruku točku ove krivulje s diralištima T_1, T_2 njene neizmjereno daleke točke i tim spojnicama presijecimo njenu asimptotu. Prenesemo li na tim spojnicama njihov odsječak od asimptote do dvostruke točke od točaka T_1, T_2 u istom smjeru, tada dobivene točke $\bar{T}_1, \bar{T}_2$ (vidi sliku) leže na traženoj elipsi. Spojnica njihova je promjer te elipse, dok su njene tangente u tim točkama usporedne s asimptotom krivulje. S ovim i dvostrukom točkom krivulje ta je elipsa određena. Ako je još i spojnica T_1, T_2 okomita na asimptotu krivulje, postaje ta elipsa kružnicom, odnosno naša krivulja je cirkularna. Za cirkularne krivulje 3. reda roda nultoga vrijedi prema tome još i ovaj stavak:

Ako su spojnice dvostruke točke S s tangencijalnim točkama T_1, T_2 neizmjereno daleke točke neke unikurzalne krivulje 3. reda s parom imaginarnih točaka u neizmjernosti međusobno okomite, pa na te spojnice prenesemo od točaka T_1, T_2 njihov odsječak od asimptote do dvostruke točke u smjeru asimptota — dvostruka točka, tada će ova krivulja biti cirkularna samo onda, ako je spojnica dobivenih dviju točaka okomita na njenu asimptotu.

Iz ovoga stavka nam se nameće izravno novi konstruktivni postupak za određivanje četverostrukog fokusa, budući da je taj fokus polovište dužine T_1, T_2 .

U vezi s našim razmatranjima možemo lako riješiti pitanje, kada će se četverostruki fokus F nalaziti na krivulji k . Povučemo li dvostrukom točkom S usporednicu s asimptotom, tada će središte F kružnice c pasti na krivulju k samo onda, ako od te usporednice bude jednako udaljeno kao i asimptota, samo na suprotnu stranu. Ovo je, kao što znademo, poznata činjenica kod strofoide.⁵⁾

⁴⁾ K. Zahradnik: *Einheitliche Erzeugung der bekannten rationalen Kurven dritter Ordnung als Zissoidalen*, (Prager Ber., 1906). G. de Longchamps: *Sur les cubiques unicursales*, (Nouvelle Correspondance mathématique T. IV., 1878 i Progressó, T. I., 1891).

⁵⁾ H. Wieleitner: *Spezielle ebene Kurven*, str. 38.

Na temelju opisanih činjenica može se vrlo jednostavno konstruirati svaka unikurzalna cirkularna krivulja 3. reda, koja je zadana četverostrukim fokusom, dvostrukom točkom i dvima realnim točkama od kojih jedna može biti i u neizmjernosti.

Mi ćemo međutim sada promotriti pramen ovakvih krivulja, ako je on zadan četverostrukim fokusom (četiri elementa), dvostrukom točkom (tri elementa) i: a) jednom točkom u neizmjernosti, b) jednom točkom u konačnosti, c) jednom točkom, koja pada u dvostruku točku i d) jednom točkom, koja pada u četverostruki fokus.

a) Uzmimo na našoj slici da je pramen unikurzalnih cirkularnih krivulja 3. reda zadan četverostrukim fokusom F , dvostrukom točkom S i neizmjereno dalekom točkom krivulje k . Neizmjereno daleka točka daje nam smjer asimptote, a svaka asimptota određuje nam jednu krivulju tog pramena. Svaka krivulja ovog pramena može se odmah konstruirati, čim zadamo asimptotu, jer je poznata kružnica c . Među krivuljama ovog pramena nalaze se dvije sa šiljkom, jedna strofoida, a jedna se raspada u kružnicu i pravac, što se sve vrlo lako može razabrati iz naših ravničnih i prostornih razmatranja.

b) U ovom slučaju neka je naš pramen zadan opet točkama F , S i točkom A u konačnosti. Presijećemo li spojnicom SA kružnicu c u točki A_1 , pa na taj pravac prenesemo dužinu AA_1 od točke S na suprotnu stranu do točke A_2 , tada ovom točkom prolaze asimptote svih krivulja ovog pramena, jer znademo, da je na svakoj takovoj krivulji $A_1A = SA_2$. Svakom asimptotom u ovom pramenu određena je jedna krivulja toga pramena. Povučemo li na svaku ovu krivulju tangente usporedne s njenom asimptotom, tada je razmak tih parova tangenata opet jednak promjeru kružnice c . Povucimo unutar svakog ovakvog para usporednih tangenata s asimptotom simetralu. Radi paralelnosti ravnina krivulja k i c u prostoru svaki ovakav par tangenata a_1^1, a_1^2 možemo dobiti paralelnim pomicanjem para tangenata r_1^1, r_1^2 kružnice c u smjeru i veličini određenoj točkama AA_1 . Pomaknemo li kod svakog para i njegovu simetralu, tada sve te simetrale prolaze nekom točkom O , koja se od točke F nalazi isto tako daleko i u istom smjeru kao i točka A od točke A_1 , odnosno točka A_2 od točke S , t. j. $FO \neq A_1A$, jer kod svakog takovog pomaka točka F prelazi u točku O . Za ovakav pramen unikurzalnih cirkularnih krivulja 3. reda možemo prema tome napisati slijedeći stavak:

Kod pramena unikurzalnih cirkularnih krivulja 3. reda, koji je zadan točkom A , čine asimptote svih krivulja toga pramena

pramen pravaca, čiji se vrh A_2 nalazi na spojnici SA udaljen od točke S isto toliko kao točka A od sjecišta A_1 spojnice SA s kružnicom c , opisanom oko fokusa F s polumjerom FS , samo na suprotnu stranu. Tangente svih krivulja ovog pramena, usporodne s njihovom asimptotom, omataju neku kružnicu h , koja je jednaka kružnici c , a dobivena je paralelnim pomakom kružnice c u smjeru i udaljenosti točaka A_1 , A . Evidentno je, da dobivena kružnica h prolazi vrhom A_2 pramena asimptota.

Ako je točka A , kao osmi zajednički elemenat krivulja toga pramena, na viticama tih krivulja, tada unutar toga pramena ne postoji niti jedna krivulja sa šiljkom. Ako je pak ta točka na rastegnutim dijelovima tih krivulja, tada postoje u pramenu dvije krivulje sa šiljkom. Smjer njihovih asimptota dobit ćemo tako, da točku A_2 na spojnici SA prebacimo simetrično na drugu stranu, pa iz te točke povučemo tangente na kružnicu c . Prema tome da li su te tangente imaginarne ili realne, dobit ćemo gore navedena dva slučaja. Povučemo li naime paralelu s asimptotom simetrično s druge strane točke S , tada sjecišta te paralele s kružnicom c , spojena s točkom S , daju tangente krivulje k u točki S , jer ovim sjecištima (A_1) pripadne točke A padaju u točku S . Postane li ta paralelna sekanta kružnice c s asimptotom njena tangenta, onda te dvije tangentne krivulje k u dvostrukoj točki S padaju skupa, t. j. ta točka postaje šiljak. Ovakove realne tangente na kružnicu c postojati će samo onda, ako je vrh A_2 pramena asimptota unutar kružnice c , jer će vrh pramena paralela s tim asimptotama pasti u tom slučaju izvan kružnice c . U ovakovom pramenu unikurzalnih cirkularnih krivulja 3. reda postoji samo jedna strofoida, jer će samo u jednom slučaju biti fokus F i asimptota krivulje jednako udaljeni od paralele s asimptotom kroz dvostruku točku. Isto se tako u samo jednom slučaju raspada krivulja ovog pramena u pravac i kružnicu.

c) Padne li točka A u točku S , t. j. bude li mjesto točke A zadana jedna (od dviju mogućih) zajednička tangenta krivulja toga pramena u dvostrukoj točki, ne će se ništa bitno promijeniti. Točka A_1 je sjecište ove tangente kružnicom c , a točka A_2 se nalazi simetrično na suprotnoj strani. Sve ostalo je analogno kao u prošlom slučaju.

U ovom pramenu unikurzalnih cirkularnih krivulja 3. reda postoji uvijek jedna i samo jedna krivulja sa šiljkom, jer one u toč. b) spomenute tangente padaju ovdje skupa. Strofoida je u ovom pramenu također samo jedna, a i samo se jedna krivulja raspada u pravac i kružnicu.

d) Odaberemo li točku A tako, da padne u zajednički četverostruki fokus F , tada se cijeli problem mnogo pojednostavljuje. Sada su sve krivulje pramena strofoide, a vrh A_2 , kojim prolaze asimptote svih tih strofoida, dobit ćemo ako točku F na spojnici FS prebacimo simetrično na drugu stranu točke S , jer je u ovom slučaju $A = F$, a $A_1 F = FS = SA_2$. Središte O kružnice h poklapa se dakle s dvostrukom točkom S , a kod svake je strofoide dvostruka točka jednako udaljena od njenih tangenata usporednih s asimptotom. Vidimo dakle, da za ovakav pramen strofoida možemo izreći slijedeći stavak:

Zadamo li pramen kubnih strofoida zajedničkom dvostrukom točkom (tri elementa) i zajedničkim četverostrukim fokusom (pet elemenata), tada asimptote tih krivulja čine pramen pravaca, tako da dvostruka točka raspolavlja udaljenost vrha ovog pramena do zajedničkog fokusa. Tangente krivulja ovog pramena, usporedne s njihovom asimptotom, omataju kružnicu, koja prolazi zajedničkim četverostrukim fokusom, a središte joj je u zajedničkoj dvostrukoj točki.

Očito je, da je pramen ovih krivulja simetričan obzirom na spojnicu zadanih dviju točaka, pa prema tome u njemu postoji i jedna uspravna strofoida.

O CIRKULARNIM KRIVULJAMA 4. REDA RODA NULTOGA S NEIZMJERNO DALEKOM DVOSTRUKOM TOČKOM

Uvod. Razlika između cirkularnih i običnih necirkularnih krivulja bilo kojega reda oštro se zapaža u obliku njihovih jednadžbi, jer se u jednadžbi cirkularnih krivulja javlja poznati njen tipični dio (x^2+y^2) . Po vanjskom (grafičkom) obliku razlikuju se nacrtane ovakove krivulje mnogo manje. Očita se razlika vidi samo kod krivulja 2. reda, dok se već kod krivulja 3. reda to ne može tako lako raspoznati. Za cirkularne krivulje 3. reda roda nultoga, kao i neke 4. reda roda nultoga¹⁾ pokazano je, kojim uvjetima mora zadovoljavati njihov vanjski oblik, da one budu cirkularne. Kod unikurzalnih cirkularnih krivulja 4. reda bile su razmatrane samo one, koje imaju sve tri dvostruke točke u konačnosti. U ovoj radnji promatrat ćemo cirkularne unikurzalne krivulje 4. reda, koje imaju jednu neizmjerno daleku dvostruku točku. Potražiti ćemo uvjete, kojima mora zadovoljavati vanjski oblik ovakvih krivulja, da one budu cirkularne, a naći ćemo i jednostavan konstruktivni postupak za određivanje četverostrukog fokusa ovakvih krivulja.

1. Neka je kružnica l projekcija uspravnog kružnog valjka, a točka D_1 projekcija nekog pravca o usporednog s tim valjkom. Zamislimo taj valjak presječen ravninom u nekoj elipsi l , koja se također projicira u kružnicu l . Okomice spuštene iz svake točke ove presječne elipse na pravac o su izvodnice nekog uspravnog konoida 4. reda, čije neizmjerno daleke izvodnice čine par minimalnih pravaca. Tangente r_1, r_2 kružnice l neka su projekcije tragova $\bar{r}_1, \bar{r}_2$ presječne ravnine onog valjka u torzalnim ravninama našeg konoida, a prema tome su pravci t_1, t_2 projekcije torzalnih pravaca (vidi sliku). Pravac $i \parallel r_1, r_2$ je projekcija dvostruke izvodnice ovog konoida.

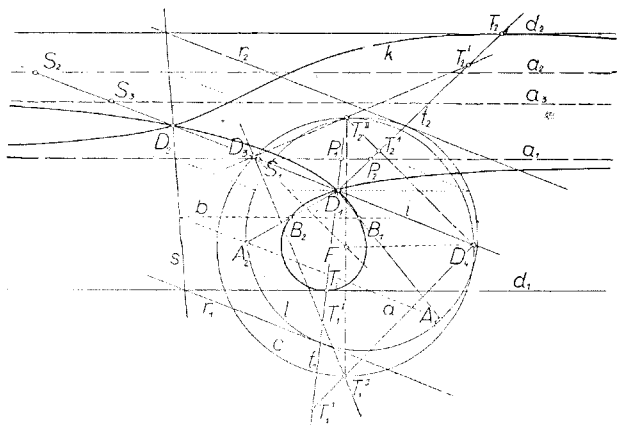
¹⁾ Vidi moje radnje a) i b): a) Vanjska oznaka unikurzalnih cirkularnih krivulja 3. reda (Nast. Vj., knj. L) i b) Krivulje i plohe 3. i 4. reda nastale pomoću kvadratne inverzije (izašlo ranije u Radu).

Uzmimo sada neku ravninu po volji, kojoj su tragovi u torzalnim ravninama konoida pravci $\bar{d}_1, \bar{d}_2$. Presječna s ravnina $(\bar{d}_1 \bar{d}_2)$, $(\bar{r}_1 \bar{r}_2)$ siječe dvostruku izvodnicu i u dvostrukoj točki $\bar{D}_2$ presječne krivulje $\bar{k}$ ovog konoida s ravninom $(\bar{d}_1 \bar{d}_2)$. Točka $\bar{D}_1$, t. j. probodište pravca o i ravnine $(\bar{d}_1 \bar{d}_2)$, bit će druga dvostruka točka krivulje $\bar{k}$, dok je treća takva točka neizmjerno daleko u smjeru tragova $\bar{d}_1, \bar{d}_2$. Ostale točke presječne krivulje dobit ćemo ovako: presijecimo naš konoid jednom direkcionom ravninom; pravci a, b neka su presječnice te ravnine s ravninama $(\bar{r}_1 \bar{r}_2)$ i $(\bar{d}_1 \bar{d}_2)$; izvodnice, čije su projekcije pravci $A_1 D_1, A_2 D_1$, a nalaze se u toj ravnini, sijeku presječnicu b u točkama B_1, B_2 , koje su točke probodišta tih izvodnica s ravninom $(\bar{d}_1 \bar{d}_2)$, dakle točke naše presječne krivulje $\bar{k}$. Analognim putem možemo dobiti sve ostale točke krivulje $\bar{k}$ kao i njene asimptote $\bar{a}_1, \bar{a}_2$. Iz same konstrukcije evidentno je, da su tragovi $\bar{d}_1, \bar{d}_2$ tangente krivulje $\bar{k}$, povučene na nju iz dvostruke neizmjerne daleke točke. Projekcija k krivulje $\bar{k}$ bit će cirkularna krivulja, jer smo je dobili projekcijom iz neizmjerne daleke točke dvostrukog pravca, kojom prolazi par minimalnih izvodnica, na jednu direkcionu ravninu.

2. Uzmimo svezak ravnina usporednih s ravninom $(\bar{d}_1 \bar{d}_2)$ našeg presjeka $\bar{k}$. U svakoj toj ravnini nalazi se neka presječna krivulja k_i našeg konoida, a projekcije k_i svih tih krivulja činit će pramen cirkularnih krivulja 4. reda. One krivulje ovog pramena, koje su projekcije presjeka onih ravnina, što prolaze jednom izvodnicom našeg konoida, bit će 3. reda. Budući da na takovom konoidu postoje dvije izvodnice, koje su usporedne s ravninom $(\bar{d}_1 \bar{d}_2)$, to će se dvije krivulje u našem pramenu k_i raspasti u ovakovu unikurzalnu cirkularnu krivulju 3. reda i projekciju jedne izvodnice.

Sve presječne krivulje $\bar{k}_i$ u svesku usporednih ravnina sijeku neizmjerne daleke minimalne izvodnice našeg konoida u iste dvije točke, koje se iz neizmjerne daleke točke dvostrukog pravca o projiciraju na našu ravninu projekcija u njene apsolutne točke. Odavle slijedi, da će sve krivulje k_i našega pramena, kao projekcije krivulja $\bar{k}_i$, imati zajednički četverostruki fokus F , jer se one dodiruju u apsolutnim točkama.

Kako u pramenu krivulja k_i postoje i dvije krivulje 3. reda, znat ćemo odrediti njihov zajednički četverostruki fokus, jer je to za ovakove krivulje 3. reda već poznato²⁾. Krivulje k_i našega pramena imaju tangente d_1, d_2 kao i asimptote a_1, a_2 konstantno jednako međusobno razmaknute, jer su ti pravci presječne ravnina krivulja k_i s torzanim ravninama i direkcionalnim ravninama položenim onim izvodnicama, koje su usporedne s ravninom (d_1, d_2). Cirkularna krivulja k_i pramena raspast će se u



pravac i krivulju 3. reda onda, ako asimptota a_1 , odnosno a_2 , ide točkom D_1 . Dvostruka točka D_2 past će u tom slučaju u točku D_3 , odnosno D_4 , na spojnici $D_1 D_2$, a to su u tom slučaju dvostruke točke onih raspadnutih krivulja 3. reda u pramenu k_i (vidi sliku).

Četverostruki fokus neke unikurzalne cirkularne krivulje 3. reda dobivamo tako, da dvostruku točku spojimo s tangencijalnim točkama njene realne neizmjereno daleke točke (te spojnice moraju biti okomite kod cirkularnih krivulja), te njom

²⁾ Vidi radnju c): Četverostruki fokus unikurzalnih cirkularnih krivulja 3. reda i neki osobiti pramenovi tih krivulja.

povućemo i okomicu na asimptotu. Preklopimo li ovu okomicu oko jedne ili druge spomenute spojnice simetrično na drugu stranu, pa na ovu prenesemo, od dvostruke točke, polovicu udaljenosti između tangenata te krivulje usporednih s asimptotom, na strani vitice, tada je dobivena točka četverostruki fokus te krivulje³⁾.

Na našoj unikurzalnoj cirkularnoj krivulji 3. reda k_i unutar pramena, kojoj je dvostruka točka D_3 , dobit ćemo tangencijalne točke T_1^I, T_2^I njene neizmjereno daleke realne točke tako, da dirališta T_1, T_2 krivulje k pomaknemo po pravcu t_1 , odnosno t_2 , u okomitom smjeru na pravce d_1, d_2, a_1, a_2 za udaljenost točke D_1 od asimptote a_1 . T. j. treba načiniti $T_1 T_1^I = P_1 D_1$, odnosno $T_2 T_2^I = P_2 D_1$ ako su točke P_1, P_2 sjecišta pravaca $t_1 = T_1 D_1, t_2 = T_2 D_1$ s asimptotom a_1 .

Spojnice $D_3 T_1^I$ i $D_3 T_2^I$ stoje okomito jedna na drugoj, odnosno bit će uvijek tada međusobno okomite, ako je krivulja k cirkularna, jer je u tom slučaju i naša reducirana unikurzalna krivulja 3. reda cirkularna. Na temelju malo prije opisanog postupka za konstrukciju četverostrukog fokusa unikurzalnih cirkularnih krivulja 3. reda, znat ćemo sada konstruirati i četverostruki fokus F naše krivulje k . Asimptota a_3 one reducirane krivulje 3. reda u pramenu k_i usporedna je naravski s pravcima a_1, a_2, d_1, d_2 .

Uzmemo li u pramenu k_i mjesto reducirane krivulje 3. reda s dvostrukom točkom D_3 onu s dvostrukom točkom D_4 , dobit ćemo istim konstruktivnim putem isti četverostruki fokus F , jer to uostalom, kao što znademo iz prostornog razmatranja, tako i mora biti.

Na temelju ove posljednje činjenice može se konstruktivni postupak za određenje četverostrukog fokusa naše unikurzalne cirkularne krivulje k 4. reda veoma pojednostavniti, a čitav postupak izraziti slijedećim stavkom:

Četverostruki fokus F neke unikurzalne cirkularne krivulje 4. reda s neizmjereno dalekom dvostrukom točkom dobit ćemo tako, da spojnicom $D_1 D_2$ konačnih dvostrukih točaka D_1, D_2 presijecemo njene asimptote u točkama S_1, S_2 i na tu spojnicu prenesemo dužine $S_1 D_1, S_2 D_1$ od točke D_2 u istom smjeru do točaka D_3 , odnosno D_4 . Četverostruki fokus F krivulje k bit će ona točka na strani njene vitice, koja je od točaka D_3, D_4 udaljena za polovicu udaljenosti između tangenata krivulje k usporednih s njenim asimptotama.

³⁾ Vidi radnju c).

Točke D_3 , D_4 dobit ćemo i tako, da od točke D_1 nanesimo dužine $S_1 D_2$ i $S_2 D_2$ u istom smjeru.

3. Kada bismo sa svakom pojedinom točkom krivulje k učinili isto kao s točkama T_1 , T_2 , t. j. potražili njima pridružene na isti način kao što smo našli točke T_1^I, T_2^I , tada bi sve te točke sačinjavale projekciju one krivulje u pravcu k_i , koja se je raspala u krivulju 3. reda i pravac. Odavle vidimo, da krivulja k može nastati kao cisoida ove cirkularne krivulje 3. reda i pravca a_1 za točku D_1 kao pol. Ova unikurzalna cirkularna krivulja 3. reda može opet nastati kao cisoida njene asimptote a_2 i kružnice c , koja prolazi njenom dvostrukom točkom D_3 , a središte joj je u zajedničkom četverostrukom fokusu F^4). Točke T_1^I, T_2^I su tangencijalne točke neizmjerne daleke točke ove krivulje, a na kružnici c pridružene su im točke T_1^{II}, T_2^{II} , u kojima su tangente kružnice c usporedne opet s pravcima d_1, d_2, a_1, a_2, a_3 .

Učinimo li sada s točkama T_1, T_2 istu dvostruku translaciju ($T_1, T_2 \rightarrow T_1^I, T_2^I \rightarrow T_1^{II}, T_2^{II}$) kao do sada, samo mjesto asimptote a_1 uzmemo asimptotu a_2 krivulje k , tada su dobivene točke T_1^I, T_2^I tangencijalne točke neizmjerne daleke točke one druge krivulje 3. reda, koja je nastala raspadanjem u pravcu k_i . Dvostruka točka ove krivulje je, kao što znademo, točka D_4 . Krivulja k može se prema tome smatrati cisoidom i ove cirkularne krivulje te pravca a_2 za pol D_1 . I ova krivulja 3. reda može se smatrati cisoidom, kao i ona malo prije, i to opet kružnice c i svoje asimptote a_1 tako, da je točkama T_1^I, T_2^I te krivulje pridružen na kružnici c isti par točaka T_1^{II}, T_2^{II} , jer su samo u tim točkama kružnice c njene tangente usporedne s pravcima d_1, d_2, a_1, a_2, a_3 i a_4 .

Kada bismo naš problem shvatili samo posve planimetrijski pa pretpostaviti da u pravcu k_i točka D_2 ostane čvrsta, dok točka D_1 putuje po spojnici $D_1 D_2$, tada se vrlo lako možemo uvjeriti, da će one dvije krivulje u tom pravcu, koje se raspadaju u krivulju 3. reda i pravac, imati iste dvostruke točke D_3, D_4 kao i isti četverostruki fokus F . U ovakvom slučaju samo bi pravci t_1, t_2 i točke T_1^I, T_2^I promijenili mjesta, dok bi spojnice $D_3 T_1^I, D_3 T_2^I, D_4 T_1^I, D_4 T_2^I$, kao i točke T_1^{II}, T_2^{II} ostale iste.

Prostorno gledajući, morali bismo tada našu krivulju k shvatiti kao projekciju presjeka nekog drugog uspravnog konoida, čiji se dvostruki pravac projicira u točku D_2 , dok bi točka D_1 bila projekcija probodišta dvostruke izvodnice toga konoida

⁴⁾ Vidi radnju c).

s ravninom presjeka. Usporedne ravnine s ravninom krivulje k sjekle bi ovaj novi konoid u krivuljama, kojih će okomite projekcije dati pramen unikurzalnih cirkularnih krivulja k_n , u kojima će se nove dvije krivulje raspasti u krivulju 3. reda i pravac.

Na temelju svega ovoga možemo za unikurzalne cirkularne krivulje 4. reda s jednom neizmjereno dalekom točkom napisati slijedeći stavak:

Imamo li neku unikurzalnu krivulju 4. reda k s jednom neizmjereno dalekom dvostrukom točkom, tada se može konstatirati, da li je ona cirkularna, na slijedeći način: Jednu konačnu dvostruku točku, recimo D_1 , spojimo s drugom takovom točkom D_2 i s dirnim točkama T_1, T_2 tangenata usporednih s asimptotama te krivulje, pa tim spojnicama presijecimo jednu asimptotu, recimo a_1 . Prenesemo li na tim spojnicama dužine između asimptote i točke D_1 , od točaka D_2, T_1, T_2 u istom smjeru, dobit ćemo na njima točke D_3, T_1^I, T_2^I . Uzmemo li mjesto asimptote a_1 asimptotu a_2 , dobit ćemo na istim spojnicama istim postupkom točke D_4, T_1^I, T_2^I . Spojnice $D_3 T_1^I, D_4 T_1^I$ neka se sijeku u točki T_1^{II} , a spojnice $D_3 T_2^I, D_4 T_2^I$ u točki T_2^{II} . Krivulja k bit će cirkularna onda, ako je

$$D_3 T_1^{II} \perp D_3 T_2^{II} \text{ i } D_4 T_1^{II} \perp D_4 T_2^{II}, \text{ a } T_1^{II} T_2^{II} \perp a_1, a_2.$$

Dužina $T_1^{II} T_2^{II}$ bit će osim toga jednaka razmaku tangenata krivulje k usporednih s asimptotama, dok je polovište te dužine, kao što već znamo, četverostruki fokus krivulje k .

4. Uzmimo neku unikurzalnu cirkularnu krivulju 4. reda s jednom neizmjereno dalekom dvostrukom točkom kao bazu uspravnog valjka 4. reda i u jednoj njenoj konačnoj dvostrukoj točki postavimo okomicu o paralelno s izvodnicama toga valjka. Presiječemo li taj valjak ravninom usporednom s asimptotama njegove cirkularne baze i u svakoj točki te presječne krivulje postavimo okomicu na pravac o , tada sve te okomice sačinjavaju uspravan konoid 4. reda. Neizmjereno daleki par izvodnica ovog konoida je par izotropnih pravaca, jer te izvodnice prolaze neizmjereno dalekim konjugirano kompleksnim parom točaka cirkularne baze našega valjka 4. reda, t. j. apsolutnim točkama. Vidimo dakle, da svaku unikurzalnu cirkularnu krivulju 4. reda, koja ima jednu neizmjereno daleku dvostruku točku, možemo smatrati projekcijom jednog presjeka dvaju uspravnih konoida, okomitom na direkcionu ravninu tih konoida. Na temelju ovoga, kao i svega naprijed izvedenoga, možemo napisati još i slijedeći stavak:

Švaka unikurzalna cirkularna krivulja 4. reda s jednom neizmjerljivo dalekom dvostrukom točkom može se dobiti kao cisoida svojih asimptota kao ravnalica i odgovarajuće dvostruke točke kao pola, te četiriju unikurzalnih cirkularnih krivulja 3. reda, od kojih po dvije prolaze jednom dvostrukom točkom, a sve skupa imaju zajednički četverostruki fokus sa zadanom krivuljom 4. reda.

Pomoću naših razmatranja i izvoda može se vrlo lako konstruktivno odrediti afina transformacija, primjenom koje možemo svaku elipsoidnu unikurzalnu krivulju 4. reda s jednom neizmjerljivo dalekom dvostrukom točkom prevesti u cirkularnu takvu krivulju i obrnuto. Evidentno je također, da se svaka elipsoidna (ona koja ima par imaginarnih točaka u neizmjernosti) unikurzalna krivulja 4. reda s neizmjerljivo dalekom dvostrukom točkom može smatrati cisoidom svojih asimptota i četiriju elipsoidnih unikurzalnih krivulja 3. reda, od kojih po dvije prolaze jednom konačnom dvostrukom točkom zadane krivulje, a sve četiri diraju tu zadanu krivulju u neizmjerljivo dalekim imaginarnim točkama.

ODREĐIVANJE NATRIJA KAO NATRIJEVA URANIL-MAGNEZIJEVA ACETATA

Metoda određivanja natrija kao natrijeva uranil-magnezijeva acetata, kako su je izradili Earle R. Caley i C. W. Foulk¹ te Ernest Kahane², spada danas među najbolje metode za direktno gravimetrijsko određivanje natrija. Njenu svestranu upotrebljivost pokazali su na mnogim primjerima Masayoshi Ishibashi i Haruo Kishi³, R. Dvorzak i A. Friedrich-Liebenberg⁴, Folke Nydahl⁵, R. Liegeois⁶ i dr. Pri tom određivanju nastaje talog sastava $\text{NaMg} \cdot 3 \text{UO}_2(\text{C}_2\text{H}_3\text{O}_2)_9 + \text{aq}$. O količini u talogu sadržane kristalne vode razilaze se pojedini pisci. Tako po A. Blanchetière-u⁷ i A. Krassilchik-u⁸ talog sadrži 9 H_2O , po E. Kahane-u 8 H_2O , po E. R. Caley-u i C. W. Foulk-u 6 1/2, a po S. Miholić-u⁹ 6 H_2O . N. Schoorl¹⁰ posvetio je tome pitanju naročitu pažnju i utvrdio, da je prvih šest molekula vode stalno, ali da talog povrh njih može da sadrži još nešto vode, koje količina zavisi o prilikama, pod kojim je talog nastao. N. Schoorl bio je prvi, koji je upozorio, da u slučaju, da se upotrebljava alkoholni reagens, u sastav molekule ulazi ne samo kristalna voda, već i kristalni alkohol i da u tom

¹ Journal Americ. Chem. Soc., **51**, 1664 (1929).

² Bull. soc. chim., [4], **47**, 382 (1930).

³ J. Chem. Soc. Japan, **56**, 357 (1935) cit. po Chemical Abstracts, **29**, 5038 (1935).

⁴ Microchim. Acta, **1**, 168 (1937) cit. po Chemical Abstracts, **31**, 7787 (1937).

⁵ Ann. Agr. Coll. Sweden, **6**, 37 (1937) cit. po Chemical Abstracts, **31**, 8429 (1937).

⁶ Ing. chim. **21**, 169 i 205 (1937) cit. po Chemical Abstracts, **32**, 2868 (1938).

⁷ Bull. soc. chim., [4], **33**, 807 (1923).

⁸ Compt. rend., **203**, 78 (1936).

⁹ Rad., **223**, 177 (1920).

¹⁰ Rec. trav. chim., **59**, 305 (1940) cit. po Chemical Abstracts, **35**, 4272 (1941).

slučaju talog sadrži 5 H_2O i 1 1/2 $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$. E. R. Caley i L. B. Rogers¹¹ potvrdili su, da talog sadrži kristalnog alkohola i odredili mu količinu (1 1/2 $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$).

Kako je molekularna težina nastalog spoja veoma velika (za bezvodni triacetat 1388.923), to je njegov sadržaj na natriju, a prema tome i koeficijent za preračunavanje na natrij malen (0,0153 po E. R. Caley-u i C. W. Foulk-u, 0,0150 po E. Kahane-u). Stoga je metoda naročito prikladna za mikroanalitičko određivanje malih količina natrija. Kod obaranja natrija služe se S. Miholić, te E. R. Caley i C. W. Foulk reagensom u vodenj¹², a E. Kahane u alkoholnoj otopini¹³. Premda je zbog velike molekularne težine izlučenog triacetata količina u spoju sadržane kristalne vode, odnosno alkohola, analitički gotovo irelevantna, jer faktor za talog sa 9 H_2O iznaša 0,0148, za 8 H_2O 0,0150, za 6 1/2 H_2O 0,0153, za 6 H_2O 0,154, a za 5 H_2O i 1 1/2 $\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$ 0,0149, to je ipak zbog važnosti same metode potrebno, da se konačno utvrdi točan sastav nastalog spoja, osobito s obzirom na različite reagense (u vodenj i alkoholnoj otopini), koji se u praksi upotrebljavaju.

Prije svega provjerena je još jednom sama metoda. Kemijski čist natrijev hlorid sušen je 3 sata kod 180° C, a zatim je odvagnuto 2,5419 g, otopljeno u vodi i nadolito na 500 ccm. Da se odredi sadržaj natrija u ovako priređenoj otopini, uzeto je po 25 ccm otopine i određen natrij kao natrijev sulfat. U četiri određivanja nađeno je suglasno, da 10 ccm otopine sadrže: 0,0200 g Na. Sad je 10 ccm ove otopine stavljeno u štaklenu zdjelicu, dodano 60 ccm Kahane-ovog reagensa i uz često miješanje ostavljeno 24 sata. Poslije toga filtriran je talog kroz porcelanski lončić za filtriranje, ispran najprije sa Kahane-ovim reagensom, a zatim sa 96%-nim alkoholom, sušen 2 sata kod 105° C i odvagnut.

Rezultate prikazuje Tabela I.

¹¹ Ind. and Eng. Chem. Anal. Ed., 15, 32 (1943).

¹² Otopina a: 85 g kristalizovanog uranilovog acetata, 60 g bezvodne octene kiseline i 500 ccm vode ugriju se na 70° C, dok se sve ne otopi. Otopina b: 500 g kristalizovanog magnezijevog acetata, 60 g bezvodne octene kiseline i 1000 ccm vode ugriju se na 70° C, dok se sve ne otopi. Obje se otopine sad pomiješaju i ohlade na 20° C. Nakon dva sata filtruje se tekućina u suhu bocu.

¹³ 32 g kristalizovanog uranilovog acetata i 100 g magnezijevog acetata otope se u 300 ccm vode, doda 20 ccm bezvodne octene kiseline i 500 ccm 90%-tnog alkohola, te grije na vodenj kupelji, dok se sve ne otopi. Sad se dopuni do 1000 ccm i ostavi neko vrijeme da stoji. Nakon toga se filtruje, da se odstrani izlučeni talog (Kahane-ov reagens).

TABELA I.

10 ccm otopine = 0,0200 g Na dalo je			
NaMg · 3 UO ₂ (C ₂ H ₃ O ₂) ₉ + aq	Na Faktor 0,0149	razlika	pogriješka u ‰
1.3246	0.0198	— 0.0002	— 1.01
1.3307	0.0199	— 0.0001	— 0.50
1.3249	0.0198	— 0.0002	— 1.01
1.3248	0.0198	— 0.0002	— 1.01
1.3284	0.0198	— 0.0002	— 1.01
Srednja vrijednost	0.0198	— 0.0002	— 0.91

Uzme li se u obzir mala količina upotrebijene otopine natrijeva klorida, podudaranje je dobro.

Dobiveni talozi sakupljeni su i promiješani te zatim podvrgnuti analizi. Određivanje uranila, magnezija i natrija izvršeno je tako, da je 0,5 g tvari otopljeno u 200 ccm vode, tekućina zakiseljena solnom kiselinom, dodano joj amonijeva klorida, uran oboren za vrela kao amonijev uranat, talog filtriran, žaren i vagnut kao U₃O₈. Filtrat isparen je sa koncentrovanom sumpornom kiselinom, žaren, ostatak otopljen u vreloj vodi, filtriran, otopina isparena i ponovno žarena. Time je određena suma magnezijeva i natrijeva sulfata. Sulfati su otopljeni u vodi i u otopini određen magnezij kao magnezijev pirofosfat. Odbivši vrijednost za magnezijev sulfat od sume sulfata dobivena je količina natrijeva sulfata. Acetat određen je destilacijom 0,25 g tvari sa fosfornom kiselinom u aparatu za mikrokjeldahl i octena kiselina hvatana u predlošku sa 25 ccm 1/10 n natrijeve lužine. Zbog teže hlapivosti octene kiseline potrebno je destilovati nešto dulje uz opetovani dodatak destilovane vode. Nepotrošena lužina titrirana je sa 1/10 n sumpornom kiselinom. Alkohol određen je po metodi Th. v. Fellenberg-a¹⁴ oksidacijom pomoću 1/10 n otopine kalijeva bihromata sa jakom sumpornom kiselinom kroz pola sata kod obične temperature, dodatkom kalijeva jodida, te titracijom izlučena

¹⁴ Mitt. Lebensm. Hyg., 18, 290 (1927).

joda pomoću 1/10 n otopine tiosulfata. Voda nije direktno određena, pošto se triacetat raspada kod jačeg zagrijavanja, već je izračunata iz diferencije.

Rezultate prikazuje Tabela II.

TABELA II.

	Nađeno analizom				Računom za formulu $\text{NaMg} \cdot 3 \text{UO}_2 (\text{C}_2\text{H}_3\text{O}_2)_9 +$ $\frac{1}{2} \text{C}_2\text{H}_5\text{OH} + 7\frac{1}{2} \text{H}_2\text{O}$
	1	2	3	Srednja vrijednost	
UO_2	52.58	52.59	52.53	52.57	52.35
Mg	1.54	1.53	1.43	1.50	1.57
Na	1.52	1.49	1.45	1.49	1.52
$\text{C}_2\text{H}_3\text{O}_2$	34.40	34.38	34.50	34.43	34.34
$\text{C}_2\text{H}_5\text{OH}$	1.48	1.42	1.38	1.43	1.49
H_2O	—	—	—	8.58	8.73

Iz Tabele II razabire se, da talog dobiven sa reagensom u alkoholnoj otopini odgovara formuli $\text{NaMg} \cdot 3 \text{UO}_2 (\text{C}_2\text{H}_3\text{O}_2)_9 + \frac{1}{2} \text{C}_2\text{H}_5\text{OH} + 7\frac{1}{2} \text{H}_2\text{O}$. Kako se dobiveni rezultat ne slaže sa onim, koji su dobili N. Schoorl, te E. R. Caley i L. B. Rogers, vidi se, da kristalni alkohol i kristalna voda ulaze u molekulu u raznim omjerima, što zavisi o prilikama, pod kojima je talog nastao i da mogu međusobno da se zamjenjuju u dosta širokim granicama. Kako je već istaknuto, te su oscilacije analitički beznačajne.

PRILOG IZVOĐENJU MAGNETIČKOGA MOMENTA ELEKTRONA I POZITRONA

Poznato je, da se u teoriji elektrona, koju je osnovao P. A. M. Dirac¹, može izvesti magnetički moment elektrona primjenom valnoga paketa C. G. Darwina² uz pretpostavku o odsutnosti izvanjega elektromagnetskoga polja. Ali kod ovoga izvoda primjenjene su — koliko mi je dosada poznato — specijalne četveroredne matrice, koje sastoje samo iz 4 od nule različita elementa (od ukupno 16 elemenata).

Prema tomu može se postaviti pitanje, da li je moguće konstruirati takove četveroredne hermitske matrice α_β , koje sastoje iz 8 od nule različitih elemenata, zadovoljuju Diracove uvjete $\alpha_\beta^2 = 1$, $\alpha_\beta \alpha_\gamma = \alpha_\gamma \alpha_\beta$ ($\beta, \gamma = 1, 2, 3, 4$, $\gamma \neq \beta$) i pomoću kojih se dakako zbog toga može izvesti magnetički moment elektrona.

Svrha je ove radnje, da pokaže, da se ovakove matrice doista mogu konstruirati, ujedno se pokazuje konstrukcija beskonačnog broja takovih matrica.

Možemo se naime lako osvjedočiti, da matrice

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 0, & \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2(n+1)}}, & 0, & -\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{2(n+1)}} \\ \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2(n+1)}}, & 0, & \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{2(n+1)}}, & 0 \\ 0, & \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{2(n+1)}}, & 0, & \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2(n+1)}} \\ -\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{2(n+1)}}, & 0, & \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2(n+1)}}, & 0 \end{pmatrix}$$

¹ P. A. M. Dirac, Die Prinzipien der Quantenmechanik, 1930. Original Diracovih radnja u Proc. Roy. Soc. od 1928 nije mi pristupačan.

² L. de Broglie, L'Électron magnétique, 1934, str. 170—177. C. Schaefer, Einf. in die theoret. Physik, III-2, 1937, str. 468—473.

$$\begin{aligned}
 a_2 = & \begin{vmatrix} 0, & -i \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2(n+1)}}, & 0, & i \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{2(n+1)}} \\ i \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2(n+1)}}, & 0, & i \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{2(n+1)}}, & 0 \\ 0, & -i \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{2(n+1)}}, & 0, & -i \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2(n-1)}} \\ -i \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{2(n+1)}}, & 0, & i \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2(n+1)}}, & 0 \end{vmatrix} \\
 a_3 = & \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2(n+1)}}, & 0, & \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{2(n+1)}}, & 0 \\ 0, & -\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2(n+1)}}, & 0, & \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{2(n+1)}} \\ \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{2(n+1)}}, & 0, & -\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2(n+1)}}, & 0 \\ 0, & \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{2(n+1)}}, & 0, & \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2(n+1)}} \end{vmatrix} \\
 a_4 = & \begin{vmatrix} -\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{2(n+1)}}, & 0, & \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2(n+1)}}, & 0 \\ 0, & -\frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{2(n+1)}}, & 0, & -\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2(n+1)}} \\ \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2(n+1)}}, & 0, & \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{2(n+1)}}, & 0 \\ 0, & -\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2(n+1)}}, & 0, & \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{2(n+1)}} \end{vmatrix}
 \end{aligned} \tag{1}$$

gdje n znači pozitivni broj po volji, zadovoljuju spomenute Diracove uvjete; za kontrolu navodim ovdje produkte $\alpha_1 \alpha_2$, $\alpha_2 \alpha_3$, $\alpha_1 \alpha_3$, $\alpha_1 \alpha_4$, $\alpha_2 \alpha_4$ i $\alpha_3 \alpha_4$:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 \alpha_2 &= \begin{vmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0-i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{vmatrix} & \alpha_1 \alpha_3 &= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} & \alpha_2 \alpha_3 &= \begin{vmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{vmatrix} \\
 \alpha_1 \alpha_4 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} & \alpha_2 \alpha_4 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} & \alpha_3 \alpha_4 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}
 \end{aligned} \quad (2)$$

Razlog, zašto moramo uzeti, da je broj n u matricama (1) pozitivan, jest u hermitizmu tih matrica; ujedno valja uzeti svuda $\sqrt{n}$, odnosno $\sqrt{2(n+1)}$ istoga predznaka³. Zanimljivo je spomenuti, da u matricama (1) možemo za n staviti i nulu; to je ujedno i jedan od najjednostavnijih oblika za te matrice s 8 od nule različitih elemenata⁴; drugi jednostavni oblik one po primaju, ako prijedemo na granicu $n \rightarrow \infty$; ovaj slučaj daje

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} & \alpha_2 &= \begin{vmatrix} 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \end{vmatrix} \\
 \alpha_3 &= \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} & \alpha_4 &= \begin{vmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}
 \end{aligned} \quad (3)$$

a lako se osvjedočimo, da su produkti matrica (3) sadržani u (2).

³ Kod toga mogu $\sqrt{n}$ i $\sqrt{2(n+1)}$ imati različite predznake.

⁴ Za $n = 1$ prelaze one u matrice sa 4 od nule različita elementa.

Pomoću »linearizovane« Hamilton-Jacobijeve relativističke diferencijalne jednačbe za jednu česticu izvan elektromagnetskog polja

$$\alpha_1 p_x + \alpha_2 p_y + \alpha_3 p_z + \alpha_4 m_0 c = 1 \frac{U}{c} \quad (4)$$

(gdje p_x , p_y i p_z znače komponente impulza, U energiju čestice, a, c brzinu svjetlosti u vakuumu) i poznatom zamjenom

$$p_x \rightarrow \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial x}, p_y \rightarrow \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial y}, p_z \rightarrow \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial z}, U \rightarrow \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial t}$$

dolazimo uz obzir na (1) do četiriju valno-mehaničkih jednačbi za komponente spinora:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2(n+1)}} \frac{h}{2\pi i} \left\{ (\sqrt{n+1}) \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x} - i \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} \right) + \right. \\ & \quad \left. + (\sqrt{n-1}) \left(-\frac{\partial \Psi_4}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi_4}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_3}{\partial z} \right) \right\} - \\ & - \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{2(n+1)}} m_0 c \Psi_1 + \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2(n+1)}} m_0 c \Psi_3 + \frac{h}{2\pi i c} \cdot \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = 0 \\ & \frac{1}{\sqrt{2(n+1)}} \frac{h}{2\pi i} \left\{ (\sqrt{n+1}) \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} \right) + \right. \\ & \quad \left. + (\sqrt{n-1}) \left(\frac{\partial \Psi_3}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi_3}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_4}{\partial z} \right) \right\} - \\ & - \frac{(\sqrt{n-1})}{\sqrt{2(n+1)}} m_0 c \Psi_2 - \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2(n+1)}} m_0 c \Psi_4 + \frac{h}{2\pi i c} \cdot \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} = 0 \\ & \frac{1}{\sqrt{2(n+1)}} \frac{h}{2\pi i} \left\{ (\sqrt{n-1}) \left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial x} - i \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} \right) + \right. \\ & \quad \left. + (\sqrt{n+1}) \left(\frac{\partial \Psi_4}{\partial x} - i \frac{\partial \Psi_4}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_3}{\partial z} \right) \right\} + \\ & + \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2(n+1)}} m_0 c \Psi_1 + \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{2(n+1)}} m_0 c \Psi_3 + \frac{h}{2\pi i c} \cdot \frac{\partial \Psi_3}{\partial t} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2(n+1)}} \cdot \frac{\hbar}{2\pi i} \left\{ (\sqrt{n}-1) \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x} - i \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_2}{\partial z} \right) + \right. \\ \left. + (\sqrt{n}+1) \left(\frac{\partial \Psi_3}{\partial x} - i \frac{\partial \Psi_3}{\partial y} - \frac{\partial \Psi_4}{\partial z} \right) - \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{2(n+1)}} m_0 c \Psi_2 + \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{2(n+1)}} m_0 c \Psi_4 + \frac{\hbar}{2\pi i c} \cdot \frac{\partial \Psi_4}{\partial t} = 0. \right.$$

Množimo li ove formule s $\frac{2\pi i}{\hbar}$ i onda redom s konjugirano kompleksnim komponentama $\check{\Psi}_1, \check{\Psi}_2, \check{\Psi}_3$ i $\check{\Psi}_4$ spinora, napišemo li dalje k (5) (nakon multiplikacije s $\frac{2\pi i}{\hbar}$) konjugirano kompleksno postavljene jednačbe i množimo li onda opet tako postavljene jednačbe s komponentama Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 i Ψ_4 spinora i zbrojimo sve ovdje spomenute jednačbe, dobivamo uz poznati način pisanja

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{\beta=1}^4 \check{\Psi}_{\beta} \Psi + \frac{\partial}{\partial x} (c \sum \check{\Psi}_{\beta} \alpha_1 \Psi) + \frac{\partial}{\partial y} (c \sum \check{\Psi}_{\beta} \alpha_2 \Psi) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} (c \sum \check{\Psi}_{\beta} \alpha_3 \Psi) = 0. \quad (6)$$

Iz ove jednačbe, koja je analogna formuli kontinuiteta, možemo odmah napisati formule za komponente statističke gustoće električne struje

$$j_x = \frac{\varepsilon c}{\sqrt{2(n+1)}} [(\sqrt{n}+1)(\check{\Psi}_1 \Psi_2 + \check{\Psi}_2 \Psi_1 + \check{\Psi}_3 \Psi_4 + \check{\Psi}_4 \Psi_3) + \\ + (\sqrt{n}-1)(-\check{\Psi}_1 \Psi_4 + \check{\Psi}_2 \Psi_3 + \check{\Psi}_3 \Psi_2 - \check{\Psi}_4 \Psi_1)] \\ j_y = \frac{\varepsilon c i}{\sqrt{2(n+1)}} [(\sqrt{n}+1)(-\check{\Psi}_1 \Psi_2 + \check{\Psi}_2 \Psi_1 - \check{\Psi}_3 \Psi_4 + \check{\Psi}_4 \Psi_3) + \\ + (\sqrt{n}-1)(\check{\Psi}_1 \Psi_4 + \check{\Psi}_2 \Psi_3 - \check{\Psi}_3 \Psi_2 - \check{\Psi}_4 \Psi_1)] \\ j_z = \frac{\varepsilon c}{\sqrt{2(n+1)}} [(\sqrt{n}+1)(\check{\Psi}_1 \Psi_1 - \check{\Psi}_2 \Psi_2 - \check{\Psi}_3 \Psi_3 + \check{\Psi}_4 \Psi_4) + \\ + (\sqrt{n}-1)(\check{\Psi}_1 \Psi_3 + \check{\Psi}_2 \Psi_4 + \check{\Psi}_3 \Psi_1 + \check{\Psi}_4 \Psi_2)], \quad (7)$$

gdje ε znači električni naboj čestice bez obzira na predznak.

Da iz ovih posljednjih jednadžbi dobijemo magnetički moment elektrona (odnosno pozitrona), zgodno je iz jednadžbi (5) dvije komponente spinora izraziti s drugim dvjema i onda uvrstiti u formule (7). U tu svrhu množimo treću jednadžbu (5) s $\sqrt{n+1}$ te je ovako množenu odbijmo od prve jednadžbe, koju prije toga množimo s $\sqrt{n-1}$; tako dobivamo u Newtonovoj približnosti $\left(\frac{U}{c} \doteq m_0 c\right)$

$$[\sqrt{2(n+1)} + \sqrt{n-1}] m_0 c \Psi_1 = \sqrt{2(n+1)} \cdot \frac{h}{2\pi i} \left[-\frac{\partial \Psi_4}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi_4}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_3}{\partial z} \right] + (\sqrt{n+1}) m_0 c \Psi_3. \quad (8)$$

Isto tako dobivamo zbrajanjem druge jednadžbe (5) množene s $\sqrt{n-1}$ sa četvrtom (koju prije toga množimo s $\sqrt{n+1}$) u Newtonovoj približnosti

$$[\sqrt{2(n+1)} + \sqrt{n-1}] m_0 c \Psi_2 = \sqrt{2(n+1)} \cdot \frac{h}{2\pi i} \left[\frac{\partial \Psi_3}{\partial x} + i \frac{\partial \Psi_3}{\partial y} + \frac{\partial \Psi_4}{\partial z} \right] - (\sqrt{n+1}) m_0 c \Psi_4. \quad (9)$$

S obzirom na Darwinov izraz za $\Psi_{3,4}$, koji pišemo za čas $t = 0$

$$\Psi_{3,4} = A_{3,4} \cdot e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{2R^2}} \cdot e^{\frac{2\pi i}{h}(p_x x + p_y y + p_z z)} = A_{3,4} \cdot P, \quad (10)$$

gdje je R t. zv. »praktički« polumjer valnoga paketa, daju jednadžbe (8) i (9) za komponente Ψ_1 i Ψ_2 spinora

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \left\{ \frac{\sqrt{2(n+1)}}{[\sqrt{2(n+1)} + \sqrt{n-1}]} \cdot \frac{1}{m_0 c} \left[A_4(-p_x + ip_y) + A_3 p_z + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{h}{2\pi} \cdot \frac{A_4(-ix - y) + A_3 iz}{R^2} \right] - \frac{\sqrt{n+1}}{[\sqrt{2(n+1)} + \sqrt{n-1}]} A_3 \Big\} P \quad (11) \\ \Psi_2 &= \left\{ \frac{\sqrt{2(n+1)}}{[\sqrt{2(n+1)} + \sqrt{n-1}]} \cdot \frac{1}{m_0 c} \left[A_3(p_x + ip_y) + A_4 p_z + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{h}{2\pi} \cdot \frac{A_3(ix - y) + A_4 iz}{R^2} \right] - \frac{\sqrt{n+1}}{[\sqrt{2(n+1)} + \sqrt{n-1}]} A_4 \Big\} P \end{aligned}$$

Uvrštavanjem izraza (10) i (11) za komponente spinora u jednadžbe (7) dobivamo za x -komponentu statističke gustoće električne struje

$$j_x = \frac{2\sqrt{2(n+1)}}{\sqrt{2(n+1)} + \sqrt{n-1}} \left\{ (\dot{A}_3 A_3 + \dot{A}_4 A_4) \varepsilon v_x + \frac{\varepsilon h}{4\pi m_0} \left[(\dot{A}_3 A_3 - \dot{A}_4 A_4) \frac{\partial}{\partial y} - \right. \right. \\ \left. \left. - i (\dot{A}_3 A_4 - \dot{A}_4 A_3) \frac{\partial}{\partial z} \right] \right\} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{R^2}}, \quad (12)$$

jer član

$$\varepsilon c (\dot{A}_3 A_4 + \dot{A}_4 A_3) \left[\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2(n+1)}} \left\{ 1 - \frac{(\sqrt{n+1})^2}{[\sqrt{2(n+1)} + \sqrt{n-1}]^2} \right\} - \right. \\ \left. - 2 \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{2(n+1)}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{2(n+1)} + \sqrt{n-1}} \right] e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{R^2}}$$

koji još dolazi iza izraza na desnoj strani od (12), otpada zbog identiteta

$$1 - \frac{(\sqrt{n+1})^2}{[\sqrt{2(n+1)} + \sqrt{n-1}]^2} - 2 \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{2(n+1)} + \sqrt{n-1}} = 0. \quad (13)$$

Isto tako dobivamo za j_y i j_z

$$j_y = \frac{2\sqrt{2(n+1)}}{\sqrt{2(n+1)} + \sqrt{n-1}} \left\{ (\dot{A}_3 A_3 + \dot{A}_4 A_4) \varepsilon v_y + \frac{\varepsilon h}{4\pi m_0} \left[(-\dot{A}_3 A_4 - \dot{A}_4 A_3) \frac{\partial}{\partial z} - \right. \right. \\ \left. \left. - (\dot{A}_3 A_3 - \dot{A}_4 A_4) \frac{\partial}{\partial x} \right] \right\} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{R^2}} \quad (14)$$

$$j_z = \frac{2\sqrt{2(n+1)}}{\sqrt{2(n+1)} + \sqrt{n+1}} \left\{ (\dot{A}_3 A_3 + \dot{A}_4 A_4) \varepsilon v_z + \frac{\varepsilon h}{4\pi m_0} \left[i (\dot{A}_3 A_4 - \dot{A}_4 A_3) \frac{\partial}{\partial x} - \right. \right. \\ \left. \left. - (-\dot{A}_3 A_4 - \dot{A}_4 A_3) \frac{\partial}{\partial y} \right] \right\} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{R^2}},$$

sve to dakako opet zbog iščezavanja člana na desnoj strani od (14) zbog identiteta (13).

Ako sada pomoću jednadžbi

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{4\pi} I_x &= \frac{2\sqrt{2(n+1)}}{\sqrt{2(n+1)} + \sqrt{n-1}} \cdot \frac{\epsilon h}{4\pi m_0 c} (-\dot{A}_3 A_4 - \dot{A}_4 A_3) \\ \frac{1}{4\pi} I_y &= \frac{2\sqrt{2(n+1)}}{\sqrt{2(n+1)} + \sqrt{n-1}} \cdot \frac{\epsilon h}{4\pi m_0 c} i (\dot{A}_3 A_4 - \dot{A}_4 A_3) \\ \frac{1}{4\pi} I_z &= \frac{2\sqrt{2(n+1)}}{\sqrt{2(n+1)} + \sqrt{n-1}} \cdot \frac{\epsilon h}{4\pi m_0 c} (\dot{A}_3 A_3 - \dot{A}_4 A_4) \end{aligned} \right\} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{R^2}} \quad (15)$$

definiramo vektor $\vec{I}$, dolazimo uz obzir na poznatu formulu iz elektromagnetizma

$$\vec{M} = \frac{1}{4\pi} \int \vec{I} d\tau$$

do ovog sustava jednadžbi

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{2\sqrt{2(n+1)}}{\sqrt{2(n+1)} + \sqrt{n-1}} \cdot \frac{\epsilon h}{4\pi m_0 c} (-\dot{A}_3 A_4 - \dot{A}_4 A_3) \int e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{R^2}} d\tau \\ M_y &= \frac{2\sqrt{2(n+1)}}{\sqrt{2(n+1)} + \sqrt{n-1}} \cdot \frac{\epsilon h}{4\pi m_0 c} i (\dot{A}_3 A_4 - \dot{A}_4 A_3) \int e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{R^2}} d\tau \\ M_z &= \frac{2\sqrt{2(n+1)}}{\sqrt{2(n+1)} + \sqrt{n-1}} \cdot \frac{\epsilon h}{4\pi m_0 c} (\dot{A}_3 A_3 - \dot{A}_4 A_4) \int e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{R^2}} d\tau, \end{aligned} \quad (16)$$

gdje se integrali protežu na čitav prostor. Ali sada treba još provesti normiranje i na osnovi jednadžbe (6) dolazimo s lakoćom do formule

$$\int \left(\sum_{\beta=1}^4 \dot{\Psi}_{\beta} \Psi_{\beta} \right) d\tau = 1, \quad (17)$$

gdje se integral proteže na čitav prostor i koja dalje nakon primjene od (10) i (11) i izostavljanja izraza, kod kojih dolazi $m_0 c$ i $m_0^2 c^2$ u nazivniku, daje

$$\left\{ 1 + \frac{(\sqrt{n+1})^2}{[\sqrt{2(n+1)} + \sqrt{n-1}]^2} \right\} (\dot{A}_3 A_3 + \dot{A}_4 A_4) \int e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{R^2}} d\tau = 1. \quad (18)$$

Zbog identiteta

$$\frac{(\sqrt{n+1})^2}{[\sqrt{2(n+1)} + \sqrt{n-1}]^2} + 1 = \frac{2\sqrt{2(n+1)}}{\sqrt{2(n+1)} + \sqrt{n-1}}$$

izlazi nakon primjene jednadžbe (18) na (16) odmah apsolutna vrijednost magnetičkoga momenta elektrona ($\varepsilon = -e$), a dakako i pozitrona (za koji je $\varepsilon = e$)

$$|\mathfrak{M}| = \frac{eh}{4\pi m_0 c}. \quad (19)$$

Potrebno je samo još da naglasim, da konstrukcija matrica s 8 od nule različitih elemenata, kakva je dana pod (1), nije jedina konstrukcija uz povoljni broj n , koja zadovoljuje Diracove uvjete i prema tomu vodi na magnetički momenat elektrona.

Dr. F. MIKIČ

KOREKCIJA HALLEY-EVE METODE SASTAVLJANJA TABLICA REDNICA UMIRANJA

Uvod

Tablice rednice umiranja¹ mogu se temeljiti, s obzirom na podrijetlo, na heterogenom materijalu. Primjena prikladne metode za njihov sastav ovisna je o tome, s kakvim se ishodnim materijalom raspolaže. Po Bortkiewicz² mogu se tablice računati:

1. na temelju broja umrlih,
2. na temelju broja umrlih i rođenih,
3. na temelju broja umrlih i živih.

Halley (H.), koji je sastavio prvu tablicu rednicu umiranja (za grad Breslau za petogodište 1687./1691.) upotrebio je broj umrlih određenog vremena, distribuiranih po dobnim skupinama. Priznaje se toj metodi, da je prikladna, kad se radi o stacionarnom pučanstvu, t. j. o pučanstvu ispitivanog razdoblja, u kojem se jednaki broj i rodi i umire, te u kojem su emigracija i imigracija u ravnoteži.

Budući da se dešava dosta rijetko, da bi se moglo obrađivati stacionarno pučanstvo, to ima i malo prilike primijeniti Halley-evu metodu nepromijenjenu. Kad bi se ona ipak primijenila, na pr. na progredijentnom pučanstvu, onda je opravdan prigovor, da bi konstruirana tablica davala lošiju sliku o životnim prilikama, nego što to istini odgovara. Uslijed progredijentnosti je dobná struktura umrlih, naime takva, da su starija godišta nesrazmjerno manje jaka, a mlada godišta jača, nego to odgovara strukturi žive populacije. Primjeni H. metode smeta to, što je u pojedinim godištimá umrlih različít intenzítet rađanja.

¹ Ježić-Kodrnja-Mikič, Oko značenja kože u vakcinaciji protiv antraksa; Arhiv Min. Polj. V./12., str. 14.; Beograd 1938.

² Bortkiewicz, Sterbetafeln: Handwörterbuch f. Staatswissenschaften VII. 1926., str. 1030.—1044., G. Fischer, Jena.

Druga metoda oslanja se osim na strukturu umrlih, još i na broj rođenih, koji se odnose na promatrano skupinu umrlih. Ovamo se ubraja Knappova anhaltska metoda kao i direktna metoda. Knappov postupak eliminira upliv mijenjanja intenziteta broja rođenih, te je primjenljiva samo za razdoblje, u kojem rednica umiranja nije izložena promjenama. O značenju direktne metode govoreno je već i na drugom mjestu³. Njoj se prigovara, da ima samo historijsku vrijednost te da ne uvažava migraciju, koja se u ispitanoj razdoblju događa. Direktom se metodom služio na pr. Hermann za Bavarsku.

Treća, savremena, metoda počinje mjerenjem pomora na aktualnoj populaciji. Uspoređuje se srednji broj živih s brojem umrlih jednake starosti u istoj vremenskoj jedinici. Metoda nam daje rezultate, koji odgovaraju aktualnim razdobljima.

Zadatak

Prilikom obrade materijala o umrlima u Halozama* za stoljeće 1831.—1930. željeli smo upoznati se sa životnim stanjem pučanstva u čitavom stoljeću kao cjelini. Primijenili smo prvobitnu metodu, koju smo po Bortkiewiczu upoznali djelomično kao Halley-evu. Postupali smo na ovaj način.

Iz distribucije umrlih po dobi iz tablice 1.** konstruirana je tablica 2. tako, da je suma umrlih postavljena kao početna populacija. Označili smo ju simbolom l_0^H (= broj živih po Halley-evoj metodi). To znači isto, kao da smo pretpostavili, da su se umrli jednog stoljeća rodili u isti mah. Odbijanjem pojedinih vrijednosti iz tabele 1, koje su s obzirom na dob homologne, dobiveni su dalji članovi populacije umrlih. Produžujemo odbijanjem dotle, dok se populacija nije iscrpila. Ovim postupkom po Halley-u dobili smo populaciju, kakova bi rezultirala, da je broj rođenih i umrlih bio jednakomjeran.

U daljem toku kombinirali smo H. metodu grafičkom interpolacijom. Takvim postupkom smo iz tabl. 2. dobili jednogođišnje dobne skupine funkcije l_x^H , populacije, umrle u razdoblju

³ F. Mikič, Tablice redoslijeda umiranja... Prirodoslovna istraživanja Kr. Jugoslavije XXI.; izdanje Jugoslav. akademije znanosti i umjetnosti, Zagreb 1938.

* Haloze su južni dio sreza Ptuj, s prilikama sličnim onima u Hrvatskom Zagorju.

** Osnovne podatke za tabl. 1. prikupio je školski upravitelj g. Jurančić.

Tablica 1.

Dobna struktura broja umrlih
u dvije župe u Haložama
1831.—1930.*

Dobne skupine u godinama starosti	U jednom sto- godištu umrlo je osoba obaju spolova
$x/x+n$	$S(d'_x)$
0,0— 0,9	2 340
1,0— 9,9	2 839
10,0—19,9	529
20,0—29,9	550
30,0—39,9	609
40,0—49,9	797
50,0—59,9	1 154
60,0—69,9	1 543
70,0—79,9	1 159
80,0—89,9	251
90,0—99,9	25
Zbroj umrlih	11 796

Tablica 2.

Populacija u dvije župe u Haložama
1831.—1930., konstruirana na temelju
distribucije broja umrlih iz tabl. 1.

Na početku dobne skupine (u godinama)	bilo je od 11796 umrlih još živih
	l_x^H
0,0	11 796
1,0	9 456
10,0	6 617
20,0	6 088
30,0	5 638
40,0	4 929
50,0	4 132
60,0	2 978
70,0	1 435
80,0	276
90,0	25

* Ove podatke sakupio je J. Jurančić, učitelj.

od 1831.—1930. Odbijanjem ovako dobivenih članova funkcije l_x^H dobivamo komplementarnu funkciju d'_x , broj umrlih u jednogodišnjim dobnim skupinama i to po formuli:

$$d'_x = l_x^H - l_{x+1}^H$$

Funkcije l_x^H i d'_x iz tablice 3. predstavljaju rezultate dosada opisanog postupka. Primjedbe Halley-evoj zamisli, koje smo iznijeli u uvodu i označili opravdanima, navele su nas na to, da razmišljamo o njejoj korekciji, što smo si postavili kao zadatak u ovoj studiji. Polazimo li sa stanovišta, da je struktura umrlih, kako ju daje funkcija d'_x tabl. 3., aktualna za ispitivano razdoblje, dok iz nje deducirana struktura živih (funkcija l_x^H tabl. 3.) nije aktualna za to isto razdoblje, slijedi, da moramo funkciju l_x^H tablice 3. aktualizirati, ako želimo tablici rednici umiranja dati sinhronizirano tumačenje. Znači, da imamo pored općenitog zadatka riješiti i specifičan zadatak, koji je ovisan o konkretnom materijalu (o Haložama).

Rješavanje zadatka

Rješavati zadatak općenito, znači tražiti metodu korekcije, koja će odgovarati potrebama svakog pojedinog slučaja ove vrsti. In concreto smo, međutim, rješavali zadatak najprije na određenom slučaju (Haloze), pa tek onda općenito. Stoga ćemo i tok misli opisati istim redom.

Učiniti tablicu rednicu umiranja aktualnom, znači populaciju l_x^H dobivenu po Halley-u korigirati s istovremenim brojem poroda. Tako se uvažava i karakter populacije s obzirom na progredijentnost. U slučaju Haloza rodilo se u jednom stoljeću 16093 djece, dok je u istom razdoblju umrlo samo 11796 osoba. Populacija je progredijentna i u svome dobnom sastavu sigurno različita od populacije postavljene po Halley-u. Sigurno je dalje, da su u tom stoljeću bile izložene smrti 16093 osobe. Te su se osobe rodile u razdoblju od 1831.—1930. U istom razdoblju umrle osobe mogle su se roditi već oko godine 1730. pa sve do godine 1930. Kod poroda promatramo razmak od 100 godina, dok promatramo kod pomora razmak od 200 godina. U prvom slučaju (porod) je broj rođenih osoba potpun. U drugom je slučaju (pomor) vremenski uzeto, dvostruki broj rođenih probran, naime tako, da je dio rođenih umro već u razdoblju od 1730.—1830., te da zbog toga nije mogao ući u promatranje.

Pretpostavljamo, da su se prilike rađanja i umiranja kroz čitavo stoljeće toliko izjednačile, da su bitno utjecale na dobnu strukturu pučanstva. Stoga bismo mogli uvažiti 16093 poroda kao osnovu za određivanje broja i dobne strukture pučanstva pod stacionarnim prilikama, t. j. pod uvjetima, po kojima sastavljamo tablicu rednicu umiranja.

Slijedeći ova razmatranja došli smo na pomisao, da usporedimo aktualnu populaciju od 16093 poroda s populacijom umrlih od 11796 osoba, dobivenu po Halley-u. Odnos

$$\begin{aligned} 16093 : 11796 &= 100 : x \\ x &= 73,3\% \end{aligned}$$

daje nam, da je populacija Haloza po Halley-u za 26,7% premalena, te da će se u utvrđenom opsegu nalaziti i pogreška po H. sastavljene tablice s obzirom na aktualnost. Uspoređenje pomora dojenčadi, postavljenim po obim metodama, daje nam odnos

$$\begin{aligned} 198,4\%_0 : 145,4\%_0 &= 100 : x \\ x &= 73,3\% \end{aligned}$$

koji je jednak odnosu spomenutih populacija, te nam potvrđuje, da smo na pravom putu. Istovremeno nas upućuje na to, da nam daje iznos od 73,3% tek korekcionni faktor za prvi član aktualne populacije.

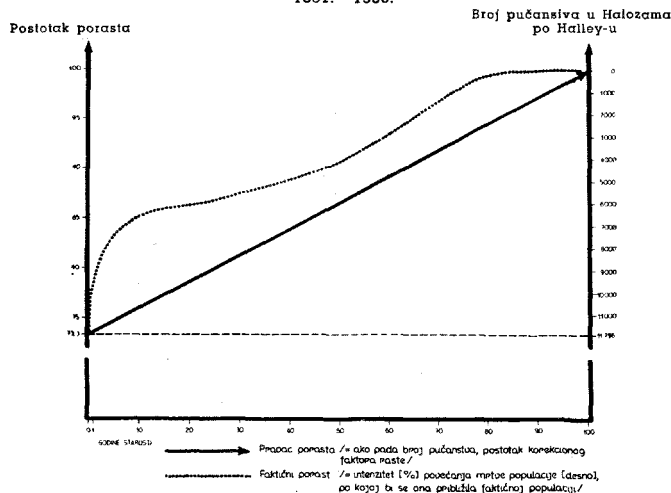
Pojavljuje se pitanje, kako treba korigirati ostale članove Halley-eve populacije. Kod određivanja čitave skupine korekcijskih faktora za H. populaciju bilo nam je jasno, da će H. populacija biti toliko bliže aktualnoj populaciji, što se više odalečuje od ishodišta, t. j. od nulte godine starosti. To znači, da će korekcionni faktor biti toliko bliži 100%, što bude bliži 100. godini. Prva pomisao bila je, da bi korekcijski faktor (k. f.) mogao rasti linearno. Sumnja, da bi porast k. f. mogao biti linearan, dala je povoda za dalje pitanje: a kakav je intenzitet porasta? Pomišljali smo na oblik sumacijske krivulje, pa smo tim putem došli do uvjerenja, da imade skupina korekcijskih faktora vrlo vjerojatno istu strukturu, kao što ju ima H. populacija, uz uvjet, da ju treba vezati na mjerilo 73,3% dalje do 100%. Grafikon 1. predočuje nam postupak.

ODREĐIVANJE KOREKCIJONNIH FAKTORA (k.f.)

za korekciju Halley-eve populacije

za Haloze

1831.—1930.



Grafikon 1.

Na apscisi označene su godine starosti. Na lijevoj su ordinati procenti porasta H. stanovništva rastući od dolje prema gore. Na desnoj ordinati je apsolutni broj H. pučanstva, ali rastući od gore prema dolje.

Mjerila na obim ordinatama usklađena su tako, da porastom procenta na lijevoj ordinati (od 73,3% prema 100%) pada u istom razmaku broj Haložana na desnoj ordinati (od 11796 prema nuli). Točke 73,3% i 11796, te točke 100% i nul, nalaze se u obje ordinate na istoj visini. U sva je tri slučaja (na apscisi i na obim ordinatama) mjerilo aritmetičko. U ovako priređen graf. ucrtamo prema mjerilu na desnoj ordinati vrijednosti iz tablice 2. Zatim očitamo odgovarajuće vrijednosti na lijevoj ordinati: njih smatramo kao najvjerniji izraz gibanja skupine korekcijskih faktora. Očitane k. faktore uvrstimo u tabl. 3. Što se više pomičemo od ishodišta prema 100. godini, upliv broja rođenih na strukturu pučanstva biva sve manji, dok upliv broja umrlih sa starošću sve više raste.

Graf. 1. je zoran prikaz podataka iz tablice 3., kolona 1., 2. i 4.

Općenito riješit ćemo zadatak na ovaj način.

Označimo simbolom r zbroj rođenih u ispitivanom razdoblju, simbolom l_0^H zbroj umrlih u istom razdoblju kao početnu populaciju (jednako zbroju umrlih u čitavom razdoblju), simbolom k_0 korekcijski faktor prvoga člana populacije l_x^H . Prvi član korekcije t. j. k_0 dobivamo relacijom

$$r : l_0^H = 100 : k_0$$

$$k_0 = \frac{l_0^H}{r} \cdot 100 \quad \dots \dots \dots (1)$$

Svaki slijedeći član korekcije je veći od prvoga člana k_0 . Što više pada l_x^H , toliko više raste k_x prema 100. Porast k_x od prvoga prema drugom članu na jedinicu populacije l_0^H iznosi:

$$\text{porast } k_0 \text{ na jedinicu} = \frac{100 - k_0}{l_0^H}.$$

Budući da je $l_0^H - l_1^H = d_0'$, porasti će k_0 u točki l_1^H za d_0' puta prednji iznos, naime, za:

$$d_0' \cdot \frac{100 - k_0}{l_0^H} = dif_{k_0} \quad \dots \dots \dots (2) \quad \bullet$$

Tablica 3.
Korekcija „Halley“-jevog pučanstva*
Haloze, 1831.—1930.

Jednogodišnje dobne skupine	Pučanstvo Haloze, sastavljeno po Halley-jevoj metodi, u kombinaciji sa grat. interpolacijom	Distribucija broja umrlih iz kolone 2: $l_x^H - l_{x+1}^H$	Korekcijski faktor k_x pokazuje, da do- stigne l_x^H samo . . . % faktične populacije	Populacija l_x^H korigirana sa faktorom k_x
$x/x + 1$	l_x^H	d'_x	k_x	$l_x^k = 100 \cdot \frac{l_x^H}{k_x}$
1	2	3	4	5
0,0—0,9	11 796	2 340	73,3	16 093
1,0—1,9	9 456	456	78,6	12 031
2,0—2,9	9 000	500	79,6	11 307
3,0—3,9	8 500	550	80,8	10 520
4,0—4,9	7 950	300	82,0	9 695
5,0—5,9	7 650	300	82,6	9 261
6,0—6,9	7 350	250	83,2	8 834
7,0—7,9	7 100	225	84,2	8 432
8,0—8,9	6 875	175	84,6	8 126
9,0—9,9	6 700	83	84,8	7 901
10,0—10,9	6 617	117	85,0	7 785
15,0—15,9	6 275	50	85,6	7 331
20,0—20,9	6 088	88	86,2	7 063
25,0—25,9	5 800	60	87,1	6 659
30,0—30,9	5 538	88	87,7	6 315
40,0—40,9	4 929	79	88,9	5 544
50,0—50,9	4 132	132	91,0	4 541
60,0—60,9	2 978	153	93,3	3 192
70,0—70,9	1 435	135	96,9	1 481
80,0—80,9	276	51	99,5	277
90,0—90,9	25	5	99,9	25
Zbroj	371 891	11 795		427 822

* Originalni podaci, neskraćeni, mogu se vidjeti kod autora.

Prema tome će biti

$$k_1 = k_0 + dif_{k_0} \dots \dots \dots (3)$$

Verificirajmo formulu za k_1 . Uvrstimo iz tab. 3. vrijednosti za d'_0 , k_0 i l_0^H i dobit ćemo, da je

$$dif_{k_0} = 2340 \cdot \frac{100\% - 73,3\%}{11796} = 2340 \cdot \frac{1}{11796} \cdot 26,7 = 5,30\%$$

a dalje, da je

$$k_1 = 73,3\% + 5,3\% = 78,6\%$$

Vrijednost, koja je u tablici 3. dobivena grafičkom interpolacijom, poklapa se računski dobivenom vrijednošću.

Po gornjem bio bi 3. član korekcije

$$k_2 = k_1 + dif_{k_1} = k_1 + d'_1 \cdot \frac{100 - k_1}{l_1^H} \dots (3a)$$

Verifikacijom iz tabl. 3. dobili bismo, da je

$$k_2 = 78,6 + 456 \cdot \frac{100 - 78,6}{9456} = 78,6 + 1,0 = 79,6,$$

što odgovara vrijednosti, dobivenoj grafičkom interpolacijom.

Formula za računanje svakog člana korekcionog faktora glasi dakle:

$$k_x = k_{x-1} + dif_{k_{x-1}} = k_{x-1} + d'_{x-1} \cdot \frac{100 - k_{x-1}}{l_{x-1}^H} \dots (4)$$

Napominjemo, da se nijedan daljni član ne može računski utvrditi, dok nije utvrđen prethodni član.

Zadatak, t. j. korekcija (k) Halley-evog pućanstva, se sada rješava po formuli:

$$l_x^k = 100 \cdot \frac{1}{k_x} \cdot l_x^H \dots (5)$$

Uspoređenje tablica

Formulama (4) i (5) riješili smo postavljeni zadatak općenito. Preostaje, da utvrdimo razlike u primjeni. S tog smo razloga izračunali tablice rednice umiranja na oba načina:

1. na temelju populacije, sastavljene po Halley-u,
2. na temelju populacije, sastavljene korekcijom Halley-eve populacije.

Uspoređenje obiju tablica pokazuje nam efekat, postignut različitim načinom računanja. Potvrđuje nam, da su opravdani prigovori H. metodi, koje smo naveli u uvodu. Primjer Haloza pokazuje nam, u kojoj su mjeri oni opravdani (v. tablice 4. i 5.).

Tablica 4.

Tablica rednica umiranja za Haloze, 1831.—1930*,

računana po Halley-jevoj metodi

Dob u godinama starosti	Na 1000 stanovnika iste starosti umiralo je	Broj preostalih živih, počev od 1000 živo- rođenih na početku pojedine jednogodi- šnje dobne skupine	Broj umrlih u pojedinoj dobnoj skupini s obzi- rom na x	Srednji broj preosta- lih živih iz kolone l_x	Odnos srednjeg broja živih prema broju umrlih	Zbroj srednjeg broja živih	Na 1000 stacionarne populacije umiralo je	Koliki broj godina ima netko iz skupine na početku vremena jač da očekuje
$x/x+1$	$1000 \cdot d_x^{H,H} / x$ $= 1000 q_x$	l_x	d_x	L_x	L_x/d_x	T_x	$1000 \cdot l_x / T_x$	e_x^0 / T_x
0,0-0,9	198,4	10 000	1 984	9 008	4,5	310 274	32,2	31,03
1,0-1,9	48,2	8 016	387	7 823	20,2	301 266	26,6	37,58
2,0-2,9	55,6	7 629	424	7 418	17,5	293 443	26,0	38,46
3,0-3,9	64,7	7 206	466	6 973	15,0	286 026	25,2	39,69
4,0-4,9	37,7	6 739	254	6 612	26,0	279 053	24,1	41,42
5,0-5,9	39,2	6 485	254	6 358	25,0	272 441	23,8	42,01
6,0-6,9	34,0	6 231	212	6 125	28,9	266 083	23,4	42,71
7,0-7,9	31,7	6 019	191	5 923	31,1	259 959	23,1	43,19
8,0-8,9	25,5	5 828	148	5 754	38,8	254 035	22,9	43,59
9,0-9,9	12,4	5 680	70	5 645	80,2	248 281	22,9	43,71
10,0-10,9	17,7	5 609	99	5 560	56,1	242 637	23,1	43,26
15,0-15,9	8,0	5 319	42	5 298	125,0	215 428	24,7	40,50
20,0-20,9	14,5	5 161	75	5 124	68,7	189 271	27,3	36,67
25,0-25,9	10,3	4 917	51	4 896	96,3	164 124	30,0	33,38
30,0-30,9	15,9	4 695	75	4 657	62,4	140 103	33,5	29,84
35,0-35,9	9,6	4 408	42	4 387	103,6	117 389	37,6	26,63
40,0-40,9	16,0	4 179	70	4 145	61,9	95 958	43,5	22,96
50,0-50,9	32,0	3 503	112	3 447	30,8	57 649	60,8	16,46
60,0-60,9	51,4	2 525	130	2 460	19,0	27 656	91,3	10,95
70,0-70,9	94,1	1 216	114	1 159	10,1	8 461	143,8	6,96
80,0-80,9	184,9	234	43	212	4,9	1 209	193,6	5,17
90,0-90,9	200,0	21	4	19	4,5	81	262,3	3,81

* Originalni podaci, neskraćeni, mogu se vidjeti kod autora.

Uspoređenja mogli bismo činiti sa svakom pojedinom funkcijom obiju tablica rednica umiranja. Smatramo međutim, da će biti najracionalnije, kad uspoređujemo samo funkcije e_x^0 kao krajnje i najdotjeranije relativne izraze tablica. Odnos*

$$e_{x_k}^0 : e_{x_H}^0 = 100 : x$$

* 1 Znak $e_{x_k}^0$ znači šanse na život, računane s korigiranom (= k) Halley-evom populacijom.

2 Znak $e_{x_H}^0$ znači šanse na život, računane s izvornom Halley-evom (= H.) populacijom.

prikazuje nam, u kolikoj se mjeri razlikuju funkcije e_x^0 tablica rednica umiranja, kad primjenjujemo kao osnovu mjerenja Halley-ovu ili korigiranu Halley-ovu populaciju. Tablica 6. i grafikon 3. prikazuju nam gibanje tih odnosa.

Vidimo, da zaostaje prvi član, po H. metodi dobivene vrijednosti za e_x^0 za aktualiziranom vrijednošću, u konkretnom slučaju za 14,21%, odnosno da postiže samo 85,79% od aktualiziranih 100%. U drugoj godini približi se H. vrijednost za

Tablica 5.

Tablica rednica umiranja za Haloze 1831.—1930.*

računana s korigiranim Halley-jevim pučanstvom

Dob u godinama starosti	Na 1000 stanovnika iste starosti umiralo je	Zbroj preostalih živih, počev od 10 000 živo- rođenih, na početku pojedine jednogodi- šnje dobae skupine	Broj umrlih u poje- dinoj dobnjoj skupini s obzirom na l_x	Srednji broj preosta- lih živih iz kolone l_x	Odnos srednjeg broja živih prema broju umrlih	Zbroj srednjeg broja živih	Na 1000 ljudi iz stacionarne popula- cije umiralo je	Koliki broj godina ima netko iz skupine na početku vremena još da očekuje
$x/x+1$	$1000 \cdot \frac{d_x}{l_x} \cdot \frac{l_x}{q_x}$	l_x	d_x	L_x	L_x/d_x	T_x	$1000 \cdot \frac{L_x}{T_x}$	$e_x^0 = \frac{T_x}{L_x}$
0,0- 0,9	145,4	10 000	1 454	9 273	6,4	361 725	27,6	36,17
1,0- 1,9	37,9	8 546	324	8 384	25,9	352 452	24,2	41,24
2,0- 2,9	44,2	8 222	364	8 040	22,1	344 068	23,9	41,85
3,0- 3,9	52,3	7 859	411	7 653	18,6	336 028	23,4	42,76
4,0- 4,9	30,9	7 448	230	7 332	31,8	328 374	22,7	44,09
5,0- 5,9	32,4	7 217	234	7 100	30,4	321 042	22,5	44,48
6,0- 6,9	28,3	6 983	198	6 885	34,8	313 942	22,2	44,95
7,0- 7,9	26,7	6 786	181	6 695	37,0	307 057	22,1	45,24
8,0- 8,9	21,5	6 605	142	6 534	45,9	300 362	22,0	45,48
9,0- 9,9	10,5	6 463	68	6 429	94,7	293 828	22,0	45,46
10,0-10,9	15,0	6 395	96	6 347	66,0	287 399	22,2	44,94
15,0-15,9	6,8	6 112	42	6 092	146,1	256 241	23,9	41,92
20,0-20,9	12,5	5 956	74	5 919	79,8	226 112	26,3	37,96
25,0-25,9	9,0	5 711	51	5 686	110,5	196 989	29,0	34,49
30,0-30,9	13,9	5 485	76	5 447	71,2	169 010	32,5	30,81
35,0-35,9	8,5	5 190	44	5 168	117,2	142 364	36,5	27,43
40,0-40,9	14,2	4 950	71	4 914	69,7	117 043	42,3	23,65
50,0-50,9	29,1	4 226	123	4 164	33,9	71 145	59,4	16,84
60,0-60,9	47,9	3 128	150	3 053	20,4	34 492	90,7	11,03
70,0-70,9	91,1	1 564	143	1 493	10,5	10 361	151,0	6,62
80,0-80,9	184,1	238	44	216	4,9	1 228	193,5	5,17
90,0-90,9	200,0	22	4	19	4,5	80	268,9	3,72

* Originalni podaci, neskrraćeni, mogu se vidjeti kod autora.

Tablica 6.

Odnosaj šansa na život*

$$e_{x_H}^o : e_{x_k}^o, \text{ Haloze 1831.—1930.}$$

$e_{x_H}^o$ — račun je izveden na temelju originalne Halley-jeve metode

$e_{x_k}^o$ — račun je izveden s korigiranom Halley-jevom populacijom

Procenat akomodacije $e_{x_H}^o$ na $e_{x_k}^o$ iznosi:

Početak dobne skupine u godinama starosti	Procenat akomodacije	Početak dobne skupine u godinama starosti	Procenat akomodacije
x	$100 \cdot e_{x_H}^o / e_{x_k}^o$	x	$100 \cdot e_{x_H}^o / e_{x_k}^o$
0,0	85,79	15,0	96,61
1,0	91,12	20,0	96,60
2,0	91,90	25,0	96,78
3,0	92,82	30,0	96,85
4,0	93,94	35,0	97,08
5,0	94,45	40,0	97,08
6,0	95,02	50,0	97,74
7,0	95,47	60,0	99,27
8,0	95,84	70,0	105,14
9,0	96,15	80,0	100,00
10,0	96,26	90,0	102,42

* Neskraćena tablica može se vidjeti kod autora.

e_x^o već na 91,12% aktualizirane vrijednosti. Brzina porasta odnosno akomodacije na aktualizirane vrijednosti biva sve manja te se oko 10. godine ustali na oko 96%. Porast akomodacije ipak nije čisto prestao, dok oko 63. godine ne dostiže 100%. Poslije 64. godine prelazi čak nešto 100%, čemu pripisujemo manje značenje s razloga, što je broj pučanstva u toj starosti znatno smanjen (na pr. u 76. godini 123% sa 775 osoba).

Verifikacije korekcije

Najodlučniji, možda i najbitniji odlomak ove studije pripada verifikaciji Halley-eve metode sastavljanja tablica rednica umiranja. O tome će ovisiti, u kojoj mjeri i pod kojim uvjetima ćemo moći primijeniti izniju korekciju.

Kao materijal za verifikaciju odabrali smo najprije američku tablicu rednicu umiranja za bijelce za razdoblje 1901.—1910.⁴ Iz Gloverovih podataka o originalnom materijalu (tabl. 173.) izračunali smo zbroju umrle dojenčadi pripadajući zbroj živorođenih relacijom:

$$\text{Zbroj živo-} : 359\,834 \quad (\text{t. j. zbroju umrle} = 1000 : 127,38 \quad (\text{t. j. pomor} \\ \text{rođenih} \quad \text{dojenčadi}) \quad \text{dojenčadi})$$

Rezultira, da je zbroj živorođenih = 2 824 886.

Relacija

$$2\,824\,886 : 1\,786\,656 \text{ (Zbroj svih umrlih 1901.—1910.)} = 100 : x$$

daje nam

$$x = 63,24701\%$$

što je ishodište za korekciju umrlog pučanstva u USA 1901./10., distribuiranog po H. metodi. Daljnji se korekcijski faktori ovog pučanstva razabiru iz tabl. 7., kolona 2. i grafa 2.

Tablica 7.

Korekcijski faktori*

za korekciju Halley-jeve populacije za USA 1901./10.
i za Hrvatsku i Slavoniju 1874./1926.

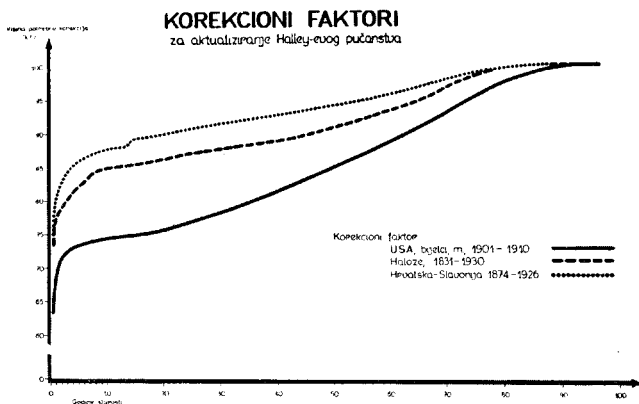
Dob u godinama	Korekcijski faktori za USA, m., bijelce, 1901./10.	Korekcijski faktori za Hrvatsku i Slavoniju 1874.—1926.	Dob u godinama	Korekcijski faktori za USA, m., bijelce, 1901./10.	Korekcijski faktori za Hrvatsku i Slavoniju 1874.—1926.	Dob u godinama	Korekcijski faktori za USA, m., bijelce, 1901./10.	Korekcijski faktori za Hrvatsku i Slavoniju 1874.—1926.
$x/x+1$	k_x	k_x	$x/x+1$	k_x	k_x	$x/x+1$	k_x	k_x
0,0-0,9	63,25	74,66	10,0-10,9	74,34	87,75	60,0-60,9	88,59	95,75
1,0-1,9	70,65	81,73	15,0-15,9	74,87	89,41	65,0-65,9	90,77	96,83
2,0-2,9	72,16	83,71	20,0-20,9	75,71	90,09	70,0-70,9	93,09	97,83
3,0-3,9	72,81	84,85	25,0-25,9	76,94	90,84	75,0-75,9	95,39	98,74
4,0-4,9	73,22	85,66	30,0-30,9	78,31	91,51	80,0-80,9	97,45	99,43
5,0-5,9	73,51	86,28	35,0-35,9	79,79	92,10	85,0-85,9	98,94	99,80
6,0-6,9	73,74	86,68	40,0-40,9	81,44	92,73	90,0-90,9	99,70	99,96
7,0-7,9	73,93	87,06	45,0-45,9	83,12	93,38	95,0-95,9	99,94	99,98
8,0-8,9	74,09	87,34	50,0-50,9	84,84	94,05			
9,0-9,9	74,22	87,56	55,0-55,9	86,67	94,86			

* Neskrraćena tablica može se vidjeti kod autora.

⁴ J. W. Glover, USA life tables 1890.—1910. (tablica 8.); Washington 1921.

U tablici 10. iznašamo odnošaje e_x^0 i $e_{x_k}^0$ za USA, bijelce, muške, 1901./10. kao i rezultate uspoređenja obaju redova šansa na život. Ostale funkcije tablica rednica umiranja, izračunane na oba načina, ispustili smo, da ne bi radnja bila prevelika.*

Iz tabl. 10., kol. 5. vidimo, da je skladnost obaju redova t. j. e_x^0 i $e_{x_k}^0$ za USA dosta visoka, jer počinje sa 93,25%; ali ona ipak nije 100%, što bismo očekivali u optimalnom slučaju. Skladnost koleba za malenkost oko 93% sve do 35. godine, nakon čega polako raste tako, da imamo oko 50. godine akomodaciju od oko 97%, koja se nakon 60. godine približuje već 100%. Poslije 85. godine akomodacija prelazi 100%, što može da potječe odatle, jer kod računanja osnova za $e_{x_k}^0$ tih godina nije primijenjena Wittsteinova formula.



Grafikon 2.

Razloge, da akomodacija aktualiziranih vrijednosti ($e_{0_k}^x$) nije 100-postotna, vidimo u tome, što se proteže broj promatranih generacija u USA samo na razdoblje od 10 godina. Stoga smo odlučili da tražimo, postoji li rješenje, t. j. bolja akomodacija kod primjene korekcija na većem razdoblju (kao što je bilo u slučaju Haloza). U tu svrhu smo si priredili ma-

* Originali stoje na uvid kod autora (Zagreb, Ministarstvo Narodnog Zdravlja).

terijal za Hrvatsku-Slavoniju za razdoblje od 1874.—1926. t. j. za 53 godine. Već korekcijski faktori za Halley-evu populaciju za Hrvatsku-Slavoniju pomenutog razdoblja daju nam interesantnu sličnost s korekcijskim faktorom za jedno stoljeće u Halozama (v. tab. 3. i 7. te graf. 2.); oni su si, naime, dosta blizu. Znači, da korekcija H.-populacije za velika razdoblja bolje aktualizira nego li za malena razdoblja.

Od 1874.—1926. godine rodilo se na području Hrvatske i Slavonije bez Međimurja i Kastva 4 811 051 živo dijete. U istom razdoblju umrlo je svega 3 592 137 ljudi. U tom vremenskom razmaku bilo je na području Hrvatske i Slavonije pet popisa stanovništva, naime, u godinama: 1880., 1890., 1900., 1910 i 1921. Iz distribucije ovog stanovništva i odgovarajućeg broja umrlih po jednogodišnjim dobnim skupinama sastavili smo dvije tablice rednice umiranja — jednu aktualnu, a drugu aktualiziranu. Rezultate tog rada prikazuju nam tabl. 7. i 8.

Usporedimo li funkcije e_x^0 i $e_{x_k}^0$ gornjih tablica (8. i 9.), vidimo, da su si pomenute vrijednosti vrlo blizu, što nam potvrđuje međusobni odnos njihovih korekcijskih faktora (v. tabl. 7.). Gore smo iznijeli dedukciju (iz grafa 2.), da dobivamo kod računanja s velikim razdobljima bolju korekciju na aktualnu (100%-nu) populaciju. Dodali bismo (na temelju grafa 3.), da dobivamo računanjem s velikim razdobljima i bolju akomodaciju na životna zbivanja u aktualnoj populaciji.

Dobivene rezultate o akomodaciji ipak ne smijemo uzeti apsolutno, t. j. za sve dobne skupine od 0.—100. godine i dalje, već samo relativno, naime — za sada — samo od 12. godine dalje. Za dobne skupine prije 12. godine vidimo iznimku; razdoblje od 10 godina (1901.—1910. u USA) kod funkcija e_x^0 , naime, bolje akomodira na aktualne vrijednosti nego razdoblja od 53 godine (1874.—1926. u Hrvatskoj i Slavoniji) i od 100 godina (1831.—1930. u Halozama). Dok je tok akomodacija (v. graf 3.) u Hrvatskoj i Slavoniji te u Halozama u skladu s općom dedukcijom, po kojoj računanje s većim razdobljima daje bolje rezultate, vidimo, da se krivulja za USA ne pokriva čisto s deduciranim očekivanjima. Kad tražimo razloge za spomenuti izuzetak, držimo, da nam je najbliže i najopravdanije mišljenje, da i pored naših napora nismo kadri upotrebom korekcije Halley-eve metode sastavljanja tablica rednica umiranja sasvim eliminirati upliv dobne strukture faktičnog pučanstva kao izraza za njezino biološko stanje. Progredijentna pučanstva, na pr. Haloze, te Hrvatska i Slavonija, u prvim godinama života akomodiraju se lošije na faktično stanje nego

Tablica 8.

Tablica rednica umiranja za Hrvatsku i Slavoniju 1874-1926

(aktuelna tablica)

Godine starosti	Prosječno pučanstvo u Hrv. i Slav. u razdoblju 1880-1920	U razdoblju od 1874-1926 umiralo je u Hrvatskoj i Slavoniji god. pros. osoba	Na 1000 stanovnika iste jednogod. dobne skupine umiralo je	Broj preostalih živih kod svake god. skupine od 100000 početnih živorođenih	Broj umrlih kod svake godišnje skupine od 100000 početnih živorođenih	Srednji broj živih iz kolone (5) l_x	Zbroj srednjeg broja živih u svakoj godišnjoj skupini	Odnos srednjeg broja živih prema broju umrlih	Obrok umiranja na 1000 osoba iz skupine preostalih živih	Koliko se godina žive može još nadati svaka godišnja skupina
$x/x+1$	D_x	Pp_x	$1000q_x$	l_x	d_x	L_x	T_x	l_x/d_x	$1000 \cdot l_x/T_x$	e_x^o
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
0,0—0,9	76 706	18 897,2	208,18	100 000	20 818	89 591	3 369 491	4,30	29,68	33,69
1,0—1,9	58 027	5 298,4	73,71	79 182	5 837	76 264	3 279 900	13,07	24,14	41,42
2,0—2,9	56 594	3 058,5	45,94	73 345	3 369	71 661	3 203 636	21,27	22,89	43,68
3,0—3,9	57 284	2 173,2	34,21	69 976	2 394	68 779	3 131 975	28,73	22,34	44,76
4,0—4,9	56 983	1 654,7	26,97	67 582	1 823	66 671	3 063 196	36,57	22,06	45,33
5,0—5,9	56 697	1 140,0	19,10	65 759	1 256	65 131	2 996 526	51,86	21,95	45,57
6,0—6,9	56 780	978,0	16,64	64 503	1 073	63 967	2 931 394	59,60	22,00	45,45
7,0—7,9	55 920	757,5	13,55	63 430	859	63 000	2 867 428	73,32	22,12	45,21
8,0—8,9	53 620	600,6	11,20	62 571	701	62 220	2 804 427	88,78	22,31	44,82
9,0—9,9	47 198	499,4	10,58	61 870	655	61 543	2 742 207	94,01	22,56	44,32
10,0—10,9	54 480	432,1	7,93	61 215	486	60 973	2 680 664	125,58	22,84	43,79
11,0—11,9	47 881	367,8	7,68	60 730	467	60 497	2 619 692	129,68	23,18	43,14
12,0—12,9	56 438	349,2	6,19	60 263	373	60 077	2 559 195	161,12	23,55	42,47
13,0—13,9	51 786	313,2	6,05	59 890	362	59 709	2 449 118	164,84	23,96	41,73
14,0—14,9	53 588	318,3	5,94	59 528	354	59 351	2 439 409	167,85	24,40	40,98
15,0—15,9	52 898	342,0	6,47	59 175	383	58 983	2 380 058	154,17	24,86	40,22
16,0—16,9	51 464	361,3	7,02	58 792	413	58 586	2 321 074	141,94	25,33	39,48
17,0—17,9	46 801	393,8	8,41	58 379	491	58 134	2 262 489	118,34	25,80	38,75
18,0—18,9	47 096	425,2	9,03	57 888	523	57 627	2 204 355	110,26	26,26	38,08
19,0—19,9	36 609	426,1	11,64	57 365	668	57 032	2 146 728	85,42	26,72	37,42
20,0—20,9	46 376	443,5	9,50	56 698	539	56 428	2 089 696	104,75	27,13	36,86
21,0—21,9	33 995	403,3	11,86	56 159	666	55 826	2 033 268	83,79	27,62	36,21
22,0—22,9	38 530	419,9	10,90	55 493	605	55 190	1 977 442	91,26	28,06	35,63
23,0—23,9	36 990	406,1	10,98	54 888	603	54 587	1 922 252	90,58	28,55	35,02
24,0—24,9	39 879	429,4	10,77	54 285	585	53 993	1 862 665	92,37	29,14	34,31
25,0—25,9	41 545	415,0	9,99	53 701	536	53 433	1 813 672	99,61	29,61	33,77
26,0—26,9	36 204	385,3	10,64	53 164	566	52 882	1 760 239	93,46	30,20	33,11
27,0—27,9	32 904	376,7	11,45	52 599	602	52 298	1 707 358	86,85	30,81	32,46
28,0—28,9	34 355	361,5	10,52	51 997	547	51 723	1 655 060	94,53	31,42	31,83
29,0—29,9	24 534	374,6	15,27	51 449	786	51 057	1 603 337	64,99	32,09	31,16
30,0—30,9	45 808	422,9	9,23	50 664	468	50 430	1 552 281	107,82	32,64	30,64
31,0—31,9	24 753	306,9	12,40	50 196	622	49 885	1 501 851	80,15	33,42	29,92
32,0—32,9	31 257	348,2	11,14	49 574	552	49 298	1 451 966	89,27	34,14	29,29
33,0—33,9	27 962	313,4	11,21	49 021	549	48 747	1 402 668	88,72	34,95	28,61
34,0—34,9	28 648	359,4	12,55	48 472	608	48 168	1 353 921	79,21	35,80	27,93

Tablica 8. (nastavak)

$x/x+1$	D_x	Pp_x	$1000q_x$	l_x	d_x	L_x	T_x	l_x/d_x	$1000 \cdot l_x/l_x$	e_x^o
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
35,0—35,9	35 842	394,9	11,02	47 864	527	47 600	1 305 753	90,26	36,66	27,28
36,0—36,9	29 772	359,9	12,09	47 337	572	47 050	1 258 153	82,22	37,62	27,58
37,0—37,9	26 160	350,8	13,41	46 764	627	46 451	1 211 103	74,07	38,61	25,90
38,0—38,9	28 711	349,9	12,19	46 137	562	45 856	1 164 652	81,56	39,61	25,24
39,0—39,9	21 041	425,3	20,21	45 575	921	45 114	1 118 796	48,97	40,74	24,55
40,0—40,9	44 045	470,2	10,68	44 654	477	44 415	1 073 681	93,17	41,59	24,04
41,0—41,9	20 546	321,4	15,64	44 177	691	43 832	1 029 266	63,43	42,92	23,30
42,0—42,9	26 270	372,7	14,19	43 486	617	43 178	985 434	69,99	44,13	22,66
43,0—43,9	21 802	324,1	14,87	42 869	637	42 550	942 257	66,77	45,50	21,98
44,0—44,9	24 421	400,7	16,41	42 232	693	41 885	899 706	60,45	46,94	21,30
45,0—45,9	29 480	436,6	14,81	41 539	615	41 231	857 821	67,02	48,42	20,65
46,0—46,9	22 499	363,8	16,17	40 924	662	40 593	816 590	61,34	50,12	19,95
47,0—47,9	19 604	370,6	18,90	40 262	761	39 881	775 997	52,40	51,88	19,27
48,0—48,9	22 229	368,9	16,60	39 501	656	39 173	736 116	59,76	53,66	18,64
49,0—49,9	16 454	470,7	28,61	38 845	1 111	38 290	696 943	34,46	55,74	17,94
50,0—50,9	37 546	576,9	15,37	37 734	580	37 444	658 653	64,58	57,29	17,46
51,0—51,9	16 075	392,3	24,40	37 154	907	36 701	621 209	40,48	59,81	16,72
52,0—52,9	19 924	468,8	23,53	36 248	853	35 821	584 508	42,00	62,01	16,13
53,0—53,9	17 080	446,6	26,15	35 395	925	34 932	548 687	37,74	64,51	15,50
54,0—54,9	17 864	488,8	27,36	34 469	943	33 998	513 755	36,05	67,09	14,90
55,0—55,9	22 703	570,2	25,12	33 526	842	33 195	479 757	39,32	69,88	14,31
56,0—56,9	17 980	539,5	30,01	32 684	981	32 194	446 652	32,83	73,17	13,67
57,0—57,9	14 105	494,1	35,03	31 703	1 111	31 148	414 459	28,04	76,49	13,07
58,0—58,9	14 776	502,1	33,98	30 593	1 040	30 073	383 311	28,93	79,81	12,53
59,0—59,9	11 210	608,3	54,26	29 553	1 604	28 751	353 238	17,93	83,66	11,95
60,0—60,9	27 990	828,0	29,58	27 949	827	27 536	324 487	33,30	86,13	11,61
61,0—61,9	10 106	488,3	48,32	27 123	1 311	26 467	296 950	20,20	91,34	10,95
62,0—62,9	12 235	571,5	46,71	25 812	1 206	25 209	270 483	20,91	95,43	10,48
63,0—63,9	10 124	552,5	54,57	24 606	1 343	23 935	245 274	17,82	100,32	9,97
64,0—64,9	10 175	616,1	60,55	23 264	1 409	22 559	221 339	16,02	105,10	9,51
65,0—65,9	12 685	690,6	54,44	21 855	1 190	21 260	198 779	17,87	109,95	9,10
66,0—66,9	9 227	560,1	60,70	20 665	1 254	20 038	177 519	15,97	116,41	8,59
67,0—67,9	7 702	571,8	74,24	19 411	1 441	18 690	157 481	12,87	123,26	8,11
68,0—68,9	7 108	533,1	75,00	17 970	1 348	17 296	138 781	12,83	129,47	7,72
69,0—69,9	5 237	560,1	106,95	16 622	1 778	15 733	121 495	8,85	136,81	7,31
70,0—70,9	13 658	796,1	58,29	14 844	865	14 412	105 762	16,66	140,35	7,12
71,0—71,9	4 152	453,8	109,30	13 979	1 528	13 215	91 351	8,65	153,02	6,53
72,0—72,9	4 986	496,0	99,48	12 451	1 239	11 832	78 136	9,55	159,35	6,28
73,0—73,9	3 778	473,9	125,44	11 213	1 406	10 509	66 304	7,47	169,11	5,91
74,0—74,9	3 588	466,7	130,07	9 806	1 276	9 168	55 795	7,19	175,75	5,69
75,0—75,9	4 722	526,3	111,46	8 531	951	8 055	46 626	8,47	182,96	5,47
76,0—76,9	3 060	413,9	135,26	7 580	1 025	7 067	38 571	6,89	196,51	5,09
77,0—77,9	2 376	348,9	146,84	6 555	962	6 073	31 504	6,31	208,05	4,81
78,0—78,9	2 242	357,3	159,37	5 592	891	5 146	25 431	5,77	219,89	4,55

Tablica 8. (nastavak)

$x/x+1$	D_x	Pp_x	$1000q_x$	l_x	d_x	L_x	T_x	l_x/d_x	$1000 \cdot \frac{l_x}{T_x}$	e_x^o
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)
79,0—79,9	1 461	290,4	198,77	4 701	934	4 234	20 284	4,53	231,75	4,32
80,0—80,9	3 728	396,5	106,36	3 766	401	3 566	16 051	8,90	234,66	4,26
81,0—81,9	885	196,4	221,92	3 366	747	2 992	12 485	4,01	269,60	3,71
82,0—82,9	914	207,2	226,70	2 619	594	2 322	9 492	3,91	275,90	3,62
83,0—83,9	648	165,3	255,09	2 025	517	1 767	7 170	3,42	282,45	3,54
84,0—84,9	684	160,8	235,09	1 509	355	1 331	5 403	3,75	279,20	3,58
85,0—85,9	755	154,3	204,37	1 154	236	1 036	4 072	4,39	283,39	3,53
86,0—86,9	467	109,5	234,48	918	215	810	3 036	3,76	302,42	3,31
87,0—87,9	306	76,8	250,98	703	176	615	2 225	3,48	315,83	3,17
88,0—88,9	277	64,5	232,85	526	123	465	1 611	3,79	326,83	3,06
89,0—89,9	180	46,9	260,56	404	105	351	1 146	3,34	352,53	2,84
90,0—90,9	342	53,7	157,02	299	47	275	794	5,87	375,93	2,66
91,0—91,9	48	20,9	435,42	252	110	197	519	1,80	484,88	2,06
92,0—92,9	41	18,3	446,34	142	63	110	322	1,74	441,06	2,27
93,0—93,9	39	13,2	338,46	79	27	65	212	2,46	371,46	2,69
94,0—94,9	36	11,5	319,44	52	17	44	146	2,63	355,46	2,81
95,0—95,9	52	11,9	228,85	35	8	31	103	3,87	344,92	2,90
96,0—96,9	27	7,9	292,59	27	8	23	71	2,92	382,95	2,61
97,0—97,9	23	5,1	221,74	19	4	17	48	4,01	402,54	2,48
98,0—98,9	17	4,5	264,71	15	4	13	31	3,28	487,84	2,05
99,0—99,9	14	3,2	228,57	11	3	10	18	3,87	622,05	1,61
100 i više	58	7,5	129,31	9	1	8	8	7,25		0,94
Nepoznato	11 24	23,9	21,26	7						
Ukupno	2 346 306	67 775,9	28,89							

pučanstva, koja se približuju stacionarnosti, na pr. USA. Prema tome nismo ni mi uspjeli potpuno eliminirati onaj faktor, koji nas je smetao kod primjene nepromjenjene Halley-eve metode, razlog, zbog kojeg smo prigovarali originalnoj Halley-evoj metodi, i koji nas je naveo, da pristupimo njezinoj korekciji.

Napominjemo, da smo namjerno uspoređivali aktualne i aktualizirane vrijednosti te aktualizirane s nekorigiranim vrijednostima, iako znamo, da treba ove dvije skupine kod primjene oštrijeg mjerila smatrati već diferenciranim, dakle, već heterogenim skupinama. Preostaje nam stoga, da izračunamo još tablice rednice umiranja po izvornoj Halley-evoj metodi za Hrvatsku i Slavoniju (1874.—1926.) te za USA (1901.—1910.), da bismo mogli razlikovati obje skupine i dobiti uvida u stepen njihovih heterogenosti. Rezultati su vidljivi iz tablice 10.; unijeli smo ih također u graf. 3.

Tablica 9.a

Osnove za računanje aktualizirane tablice rednice umiranja
za Hrvatsku i Slavoniju 1874.—1926.

Godine starosti	Populacija Hrvatske i Slavonije sastavljena po Halleyjevom distribucije zbroja umrlih za 1874./1926.	Populacija iz D_x^H korigirana sa fakto- rom k_x	Zbroj umrlih u Hrvat- skoj i Slavoniji od 1874.—1926. po dobi	Godine starosti	Populacija Hrvatske i Slavonije sastavljena po Halleyjevom distribucije zbroja umrlih za 1874./1926.	Populacija iz D_x^H korigirana sa fakto- rom k_x	Zbroj umrlih u Hrvat- skoj i Slavoniji od 1874./1926. po dobi
$x/x+1$	D_x^H	D_x^{Hk}	$S(P_{Px})$	$x/x+1$	D_x^H	D_x^{Hk}	$S(P_{Px})$
0,0-0,9	3 590 871	4 809 785	1 001 551	35,0-35,9	1 229 581	1 335 050	20 928
1,0-1,9	2 589 320	3 168 139	280 814	36,0-36,9	1 208 653	1 310 477	19 074
2,0-2,9	2 308 506	2 757 742	162 101	37,0-37,9	1 189 579	1 288 120	18 594
3,0-3,9	2 146 405	2 529 646	115 177	38,0-38,9	1 170 985	1 266 340	18 546
4,0-4,9	2 031 223	2 371 268	87 698	39,0-39,9	1 152 439	1 244 669	22 541
5,0-5,9	1 943 530	2 252 585	60 420	40,0-40,9	1 129 898	1 218 482	24 922
6,0-6,9	1 883 110	2 172 435	51 834	41,0-41,9	1 104 976	1 189 553	17 032
7,0-7,9	1 831 276	2 103 464	40 149	42,0-42,9	1 087 944	1 169 832	19 755
8,0-8,9	1 791 127	2 050 752	31 833	43,0-43,9	1 068 189	1 146 987	17 176
9,0-9,9	1 759 294	2 009 244	26 470	44,0-44,9	1 051 013	1 127 212	21 239
10,0-10,9	1 732 824	1 974 728	22 901	45,0-45,9	1 029 774	1 102 778	23 138
11,0-11,9	1 709 923	1 945 084	19 496	46,0-46,9	1 006 636	1 076 271	19 281
12,0-12,9	1 690 427	1 919 849	18 510	47,0-47,9	987 355	1 054 303	19 644
13,0-13,9	1 671 917	1 896 027	16 600	48,0-48,9	967 711	1 032 005	19 554
14,0-14,9	1 655 317	1 853 658	16 870	49,0-49,9	948 157	1 009 859	24 947
15,0-15,9	1 638 447	1 832 510	18 125	50,0-50,9	923 210	981 616	30 575
16,0-16,9	1 620 322	1 809 809	19 150	51,0-51,9	897 635	947 093	20 791
17,0-17,9	1 601 172	1 786 030	20 870	52,0-52,9	871 844	923 759	24 849
18,0-18,9	1 580 302	1 759 998	22 538	53,0-53,9	846 995	895 912	23 668
19,0-19,9	1 557 764	1 732 004	22 584	54,0-54,9	823 327	869 497	25 906
20,0-20,9	1 535 180	1 704 051	23 503	55,0-55,9	797 421	840 629	30 220
21,0-21,9	1 511 677	1 675 174	21 374	56,0-56,9	767 201	807 155	28 595
22,0-22,9	1 489 303	1 648 748	22 257	57,0-57,9	738 606	775 602	26 189
23,0-23,9	1 468 046	1 621 434	21 524	58,0-58,9	712 417	746 768	26 613
24,0-24,9	1 446 522	1 595 018	22 757	59,0-59,9	685 804	717 593	32 238
25,0-25,9	1 423 765	1 567 333	21 994	60,0-60,9	653 566	682 362	43 882
26,0-26,9	1 401 771	1 540 577	20 419	61,0-61,9	609 684	634 691	25 881
27,0-27,9	1 381 352	1 515 970	19 964	62,0-62,9	583 803	606 675	30 289
28,0-28,9	1 361 388	1 491 932	19 160	63,0-63,9	553 514	574 006	29 284
29,0-29,9	1 342 228	1 468 842	19 853	64,0-64,9	524 230	542 569	32 655
30,0-30,9	1 322 375	1 445 061	22 413	65,0-65,9	491 575	507 668	36 603
31,0-31,9	1 299 962	1 418 398	16 268	66,0-66,9	454 972	468 705	29 684
32,0-32,9	1 283 694	1 399 121	18 457	67,0-67,9	425 288	437 269	30 304
33,0-33,9	1 265 237	1 377 204	16 608	68,0-68,9	394 984	405 278	28 257
34,0-34,9	1 248 629	1 357 500	19 048	69,0-69,9	366 727	375 591	29 688

Tablica 9.a (nastavak)

$x/x+1$	D_x^H	D_x^{Hk}	$S(P_{P_x})$	$x/x+1$	D_x^H	D_x^{Hk}	$S(P_{P_x})$
70,0-70,9	337 039	344 515	42 192	85,0-85,9	32 320	32 385	8 180
71,0-71,9	294 847	300 558	24 049	86,0-86,9	24 140	24 176	5 806
72,0-72,9	270 798	275 621	26 289	87,0-87,9	18 334	18 352	4 071
73,0-73,9	244 509	248 434	25 115	88,0-88,9	14 263	14 271	3 420
74,0-74,9	219 394	222 554	24 737	89,0-89,9	10 843	10 848	2 487
75,0-75,9	194 657	197 141	27 894	90,0-90,9	8 356	8 359	2 846
76,0-76,9	166 763	168 584	21 937	91,0-91,9	5 510	5 512	1 110
77,0-77,9	144 826	146 200	18 489	92,0-92,9	4 400	4 401	969
78,0-78,9	126 337	127 355	18 939	93,0-93,9	3 431	3 432	698
79,0-79,9	107 398	108 112	15 389	94,0-94,9	2 733	2 734	609
80,0-80,9	92 009	92 536	21 015	95,0-95,9	2 124	2 124	631
81,0-81,9	70 994	71 303	10 410	96,0-96,9	1 493	1 493	419
82,0-82,9	60 584	60 815	10 980	97,0-97,9	1 074	1 074	270
83,0-83,9	49 604	49 763	8 763	98,0-98,9	804	804	238
84,0-84,9	40 841	40 947	8 521	99,0-99,9	566	566	170
				100,0-	396	396	396

U grafu 3. uspoređujemo aktualne vrijednosti za e^0 sa homoložnim vrijednostima, izračunanim po izvornoj Halley-jevoj metodi ($e_{x_H}^0$) i po korigiranoj Halley-evoj metodi ($e_{x_k}^0$). Uspoređenja odnose se na USA, na Hrvatsku-Slavoniju i na Haloze. Možemo zaključiti:

a) aktualizirane vrijednosti ($e_{x_k}^0$) bolje akomodiraju na aktualne vrijednosti (e^0) nego li one, izračunane po originalnoj Halley-evoj metodi ($e_{x_H}^0$), što znači, da imade postupak za konstrukciju korigirane H. populacije svoje značenje (usporedite na grafu 3. krivulju 1. s krivuljom 2. te krivulju 3. s krivuljom 4.);

b) aktualizirane vrijednosti $e_{x_k}^0$ daju prema $e_{x_H}^0$ toliko bolje rezultate, što je računano razdoblje, kao jedinica, veće; $e_{x_H}^0 \cdot \frac{1}{e_{x_k}^0}$. 100 je, naime, kod podataka za USA manja, a kod podataka za Hrvatsku i Slavoniju veća; kod USA radi se o 10-godišnjem, a kod Hrvatske i Slavonije o 53-godišnjem razdoblju (usporedite na grafu 3. krivulju 5. s krivuljom 6., ev. još krivulju 5. s krivuljom 7.);

Tablica 9.b

Tablica rednica umiranja za Hrvatsku i Slavoniju, 1874.—1926.*

Aktualizirana tablica

Godine starosti	Na 1000 stanovnika aktualizirane populacije, prema starosti, žnje dobne skupine umireto je (iz kol. 3)	Broj preostalih živih kod svake jednogodišnje dobne skupine od 100.000 početnih živorođenih	Broj umirlih u pojedinoj dobnoj skupini iz kolone l_x	Srednji broj preostalih živih iz kolone l_x	Zbroj srednjeg broja živih u svakoj dobnoj skupini	Odnos srednjeg broja živih prema broju umirlih	Obrok umiranja na 1000 osoba iz skupine preostalih živih	Koliko se godina života može još nadati svaka god. skupina
$x/x+1$	$1000 q_x$	l_x	d_x	L_x	T_x	L_x/d_x	$1000 \cdot l_x/T_x$	e_x^0
0,0-0,9	208,23	100 000	20 823	89 588	2 971 337	4,30	33,65	29,71
1,0-1,9	88,64	79 177	7 018	75 668	2 881 748	10,78	27,48	36,40
2,0-2,9	58,78	72 159	4 242	70 038	2 806 080	16,51	25,72	38,89
3,0-3,9	45,53	67 917	3 092	66 371	2 736 042	21,46	24,82	40,28
4,0-4,9	36,98	64 825	2 397	63 626	2 669 671	26,54	24,28	41,18
5,0-5,9	26,82	62 427	1 674	61 590	2 606 045	36,78	23,95	41,75
6,0-6,9	23,86	60 753	1 450	60 028	2 544 455	41,41	23,88	41,88
7,0-7,9	19,09	59 303	1 132	58 738	2 484 426	51,89	23,87	41,89
8,0-8,9	15,52	58 172	903	57 720	2 425 689	63,92	23,98	41,70
9,0-9,9	13,17	57 269	754	56 891	2 367 969	75,41	24,18	41,35
10,0-10,9	11,60	56 514	655	56 186	2 311 077	85,73	24,45	40,89
15,0-15,9	9,89	53 792	532	53 526	2 035 714	100,60	26,42	37,84
20,0-20,9	13,79	50 743	700	50 394	1 773 995	72,00	28,60	34,96
25,0-25,9	14,03	47 405	665	47 072	1 528 643	70,76	31,01	32,25
30,0-30,9	15,51	44 321	687	43 977	1 299 478	63,97	34,11	29,32
35,0-35,9	15,68	41 461	650	41 136	1 085 205	63,29	38,21	26,17
40,0-40,9	20,45	38 349	784	37 957	885 579	48,39	43,30	23,09
50,0-50,9	31,15	31 762	989	31 267	534 466	31,61	59,43	16,83
60,0-60,9	64,31	22 893	1 472	22 157	259 584	15,05	88,19	11,34
70,0-70,9	122,47	12 066	1 478	11 327	86 204	7,67	139,97	7,14
80,0-80,9	227,10	3 353	762	2 973	14 585	3,90	229,93	4,35
90,0-90,9	340,47	307	104	254	980	2,44	312,77	3,20

* Neskraćena tablica može se vidjeti kod autora.

c) za Haloze nemamo aktualnih e_x^0 , već samo aktualizirane ($e_{x_k}^0$); one odgovaraju akomodaciji vrijednosti $e_{x_H}^0$ na $e_{x_k}^0$ za Hrvatsku i Slavoniju; s obzirom na veće razdoblje (100 godina), aktualizirani podaci za Haloze se vjerojatno bolje približuju aktualnim vrijednostima za e_x^0 nego oni za Hrvatsku-Slavoniju (53 god.); približnu sliku dobivamo uspoređenjem akomodacija $e_{x_H}^0$ na $e_{x_k}^0$ obiju geografskih jedinica.

Tablica 10.

Uspoređenje funkcija e_x^0 , $e_{x_k}^0$ i $e_{x_H}^0$ *

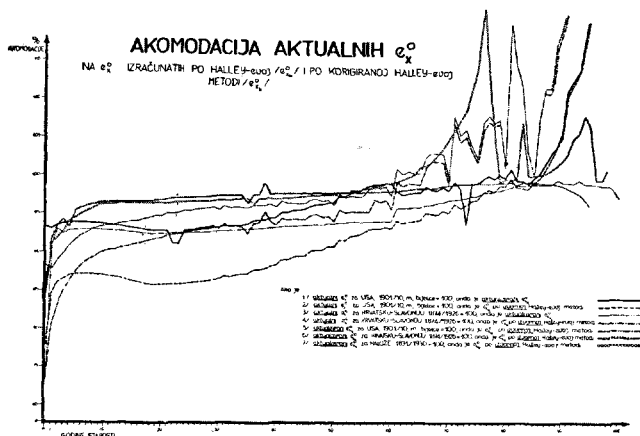
(šanse na život)

za USA 1901./10, te za Hrvatsku i Slavoniju 1874./1926.

Dob u godinama starosti $x/x+1$	USA, 1901.—1910., m., bijelci						Hrvatska i Slavonija 1874.—1926.					
	Aktualni e_x^0	Aktualizirani $e_{x_k}^0$	Po Halley-ju $e_{x_H}^0$	Ako je aktualni $e_x^0 = 100$, onda je		Ako je aktualizirani $e_{x_k}^0 = 100$, onda je $e_{x_H}^0 =$	Aktualni e_x^0	Aktualizirani $e_{x_k}^0$	Po Halley-ju $e_{x_H}^0$	Ako je aktualni $e_x^0 = 100$, onda je		Ako je aktualizirani $e_{x_k}^0 = 100$, onda je $e_{x_H}^0 =$
				aktualizirani $e_{x_k}^0 =$	$e_{x_H}^0 =$					aktualizirani $e_{x_k}^0 =$	$e_{x_H}^0 =$	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0,0	49,32	45,99	38,31	93,25	77,68	83,30	33,69	29,71	24,87	88,19	73,82	83,71
1,0	55,48	51,63	46,84	93,06	84,43	90,72	41,42	36,40	33,30	87,88	80,40	91,48
2,0	56,19	52,56	48,35	93,54	86,05	91,99	43,68	38,89	36,29	89,03	83,08	93,31
3,0	55,97	52,44	48,50	93,69	86,65	92,49	44,76	40,28	38,00	89,99	84,90	94,34
4,0	55,46	52,03	48,23	93,81	86,96	92,70	45,33	41,18	39,12	90,84	86,30	93,20
5,0	54,82	51,44	47,75	93,83	87,10	92,83	45,57	41,75	39,86	91,62	87,47	95,47
6,0	54,11	50,77	47,16	93,83	87,16	92,89	45,45	41,88	40,13	92,15	88,29	95,82
7,0	53,34	50,04	46,51	93,81	87,19	92,94	45,21	41,89	40,25	92,66	89,03	96,08
8,0	52,54	49,26	45,79	93,76	87,15	92,96	44,82	41,70	40,14	93,04	89,56	96,26
9,0	51,71	48,46	45,03	93,72	87,08	92,92	44,32	41,35	39,86	93,30	89,94	96,40
10,0	50,86	47,62	44,24	93,63	86,98	92,90	43,79	40,89	39,46	93,38	90,11	96,50
15,0	46,50	43,32	40,11	93,16	86,26	92,59	40,22	37,84	36,60	94,08	91,00	96,72
20,0	42,39	39,37	36,40	92,87	85,87	92,46	36,86	34,96	33,88	94,85	91,92	96,91
25,0	38,59	35,85	33,20	92,90	86,03	92,61	33,77	32,25	31,34	95,50	92,80	97,18
30,0	34,80	32,46	30,14	93,27	86,61	92,85	30,64	29,32	28,55	95,69	93,18	97,37
35,0	31,12	29,18	27,16	93,77	87,27	93,08	27,28	26,17	25,26	95,93	92,59	96,52
40,0	27,55	26,08	24,37	94,66	88,45	93,44	24,04	23,09	22,56	96,05	93,84	97,70
50,0	20,59	19,93	18,72	96,79	90,92	93,93	17,46	16,83	16,47	96,39	94,33	97,86
60,0	14,17	14,06	13,23	99,22	93,37	94,10	11,61	11,34	11,14	97,67	95,95	98,24
70,0	8,96	8,82	8,56	98,44	95,54	97,05	7,12	7,14	7,07	100,28	99,30	99,02
80,0	5,07	5,08	5,02	100,20	99,01	98,82	4,26	4,35	4,33	102,11	101,64	99,54
90,0	2,90	3,08	3,07	106,21	105,86	99,68	2,66	3,20	3,17	120,30	119,17	99,06

* Originalni podaci, neskrraćeni, mogu se vidjeti kod autora.

Tim dedukcijama (tabl. 10. i graf 3.) dovoljno je jasno dokazano, da postavljena korekcija H. populacije za računanje tablica rednica umiranja daje točnije i aktualnom vremenu bliže vrijednosti negoli originalna H. metoda, te da u velikoj mjeri eliminira upliv dobne strukture (biološki tip) umrlog



Grafikon 3.

pučanstva. Rješenje postavljenog zadatka ipak nije moglo biti zaključeno bez ostatka; daljnjem radu će preostati, da se nađe još bolja metoda za određivanje korekcijskih faktora, čime bi se i ostale funkcije tablice rednice umiranja mogle dalje približiti vrijednostima, dobivenim na osnovu aktualnih populacija.

Pregled

Pri svršetku ove studije bit će dobro da dademo — bez obzira na genezu istraživanja — kratak pregled njezinih bitnih momenata.

Prilikom raznih statističkih ispitivanja materijal nije uvijek tako priređen, da bi se iz njega mogle sastavljati tablice rednice umiranja, koje bi imale aktualno značenje. Ovdje je iznijet slučaj, gdje su kao osnova za sastav tablice slijedeća dva elementa:

1. dobna distribucija zbroja umrlih određenog razdoblja,
2. zbroj živorođenih u razdoblju kao kod umrlih.

Vidimo, da nema onog elementa, koji je također potreban za sastav aktualne tablice rednice umiranja, naime, dobne distribucije populacije, koja joj pripada.

Iz dobne distribucije umrlih daje se sastaviti populacija, kao što je to učinio Halley za grad Breslau za razdoblje 1687.—1691., kad je sastavljao prvu tablicu rednicu umiranja. Metodu njegovog rada iznijeli smo na praktičnom primjeru u tablicama 1. i 2. Uzeli smo zbroj umrlih u jednom stoljeću (1831.—1930.) u Halozama, uvaživši njihovu dobnu strukturu u tom stoljeću.

$$\text{Zovimo zbroj svih umrlih} = \sum_0^n (d'_x) = l_0^H.$$

Znak d'_x je znak za zbroj umrlih u pojedinoj dobnoj skupini.

Zbroj svih umrlih $\sum_0^n (d'_x)$ je ujedno početni član ovako izgrađene populacije, naime l_0^H . Budući da je Halley bio među prvim, koji je sastavljao na ovaj način osnove za tablice rednice umiranja, uveli smo kraticu i smatrali l_0^H prvim članom »Halley-eve« populacije. Daljnji članovi Halley-eve populacije dobiveni su odbijanjem umrlih po dobnim skupinama tako, da je na pr.

$$l_0^H - d'_0 = l_1^H.$$

Višegodišnje dobne skupine umrlih, iz kojih je bio sastavljen niz brojeva kolone d'_x , rastavili smo na jednogodišnje dobne skupine grafičkim putem i to iz grafa za Halley-evu populaciju (l_x^H).

Originalna Halley-eve populacija upotrebljiva je i daje osnovu za aktualne tablice rednice umiranja samo u iznimnom slučaju, naime, kad je populacija stacionarna. Taj se slučaj dešava u prirodi, gdje je sve u gibanju, vrlo rijetko, ili još točnije, takav je slučaj upravo izuzetak. U prirodi je pučanstvo progresivno ili regresivno, treće je, da se pučanstvo približuje stacionarnosti. Općenito uzeto, pučanstvo je progresivno, kad je broj rođenih veći od broja umrlih, a regresivno, kad je broj umrlih veći od broja rođenih. Prvo je danas češći slučaj na selu, a drugo u gradu. Možda bi se Halley-eve originalna metoda mogla u većoj mjeri primijeniti za gradove, jer bi se slučaj približavanja stacionarnosti našao prije nego na selu.

To nam je dalo povoda, da uvažimo još zbroj živorođenih — pogotovu, gdje takav podatak postoji — te da pristupimo korekciji Halley-eve populacije.

Odnos zbroja živorođenih i umrlih istog razdoblja daje nam prvi član korekcijskog faktora H. populacije (16093 : 11796 = 100 : 73,3). Na temelju prvog člana smo odredili ostale članove najprije grafički, kako nam to prikazuje graf. 1. Umjesto linear-nog gibanja korekcijskog faktora, koji se s porastom starosti giblje u konkretnom slučaju od 73,3% prema 100%, uzeli smo strukturu u H. populaciji kao mjerilo za gibanje korekcijskih faktora. Što se više iscrpljuje brojčana snaga H. populacije, to se jače smanjuje upliv broja rođenih i to se više približuje li-nearnom pravcu gibanja.

Računanje čitavog niza korekcijskih faktora teklo je nakon određivanja prvog člana po formuli:

$$k_x = k_{x-1} + d'_{x-1} \cdot \frac{100 - k_{x-1}}{l''_{x-1}} \dots \dots \dots (4)$$

Tu znači:

k_x = korekcijski faktor za dob x ,

k_{x-1} = korekcijski faktor prethodnog člana, t. j. za dob $x-1$

d'_{x-1} = broj umrlih u dobnoj skupini prethodnog člana,

l''_{x-1} = Halley-eva populacija u dobnoj skupini prethodnog člana.

Kratica je uvedena za formulu:

$$d'_{x-1} \cdot \frac{100 - k_{x-1}}{l''_{x-1}} = dif_{k_{x-1}}$$

t. j. diferencija od k od $x-1$, što znači diferencija korekcijskih faktora sadanjeg (x) i prethodnog ($x-1$) člana.

Računanje prvog korekcijskog člana, kako smo ga konkretno izrazili gore, ima formulu:

$$k_0 = \frac{l''_0}{r} \cdot 100 \dots \dots \dots (1)$$

Tu znači:

k_0 = prvi član niza korekcijskih faktora,

l''_0 = prvi član niza jednogodišnjih dobnih skupina Halley-eve populacije,

r = zbroj rođenih ispitivanog razdoblja.

Tablica 3. prikazuje nam na primjeru Haloza za 1831.—1930. godinu, kako se korigira Halley-eva populacija; u toj izvedbi dodani su svi navedeni elementi, naime, l''_x , d'_x , k_x . U istoj

tablici nalazi se i korigirana Halley-eva populacija, koja je dobivena formulom:

$$100 \cdot \frac{1}{k_x} \cdot l_x^H \dots \dots \dots (5)$$

Time smo postavljeni zadatak riješili. Preostaje nam da verificiramo korekciju Halley-eve metode.

Najprije smo usporedili efekt naše korekcijske metode sa efektom Halley-eve metode. Izračunali smo po obim metodama tablice rednice umiranja za Haloze za stoljeće (1831.—1930.), od kojih nam je prva korigirana metoda dala aktualizirane rezultate (tabl. 5.), a druga, originalna H. metoda vrijednosti (tabl. 4.), za koje se ne može tvrditi, da su dovoljno točne. Ispoređivale su se samo funkcije e_x^0 kao najdotjeraniji izraz tablica rednica umiranja. Uzelo se, da su pojedini članovi funkcije e_x^0 aktualizirane tablice, t. j. $e_{x_k}^0 = 100$; zatim se pitalo, koliki je odgovarajući iznos izvorne, »Halley-eve« tablice, naime, $e_{x_H}^0$. Odgovor daje tablica 6., gdje su vrijednosti

$$100 \cdot \frac{e_{x_H}^0}{e_{x_k}^0}. \text{ Među inim, daje nam odgovor i graf. 3.}$$

Rezultat je, da originalna Halley-eva metoda daje vrijednosti za e_x^0 , koje se odvajaju od aktualiziranih, počev sa devijacijama od 14% (1. član) pa sve na manje (2. član je 9%, 3. član 8%), dok ne postignu 100%, t. j. devijaciju od 0%.

Zbog eliminiranja svake zabune u prosuđivanju i tumačenju rezultata naše korekcijske metode učinili smo za daljnju verifikaciju još dva pokusa. Prvi je pokus izvršen s američkim materijalom, za koji je aktualna tablica već publicirana (USA, 1901./1910., muški, bijelci — računata po Gloveru), dok je drugi pokus učinjen s domaćim materijalom (Hrvatska-Slavonija, 1874.—1926., oba spola).

Najprije smo iz jednogodišnjih dobnih skupina zbroja umrlih sastavili Halley-eve populacije za obje skupine (za Hrvatsku-Slavoniju v. tabl. 9., kolona 2.; za USA podatke nismo iznijeli). U daljem toku rada smo izračunali korekcijske faktore za USA i Hrvatsku-Slavoniju, koje smo prikazali tablicom 7. i grafom 2. Iz njihovog gibanja opravdano naslućujemo — zaključiti još ne ćemo —, da su velika razdoblja manje potrebna korekcije nego malena razdoblja.

Najzad smo izračunali slijedeće tablice rednice umiranja:

1. aktualiziranu, za USA (v. tabl. 10., kol. 3.),
2. po originalnoj Halley-evoj metodi, za USA (v. tabl. 10., kol. 4.),
3. aktualnu, za Hrvatsku-Slavoniju (na danas uobičajen način iz podataka o popisu pučanstva i broja umrlih; v. tabl. 8.),
4. aktualiziranu, za Hrvatsku i Slavoniju (v. tabl. 9.),
5. po originalnoj Halley-evoj metodi, za Hrvatsku i Slavoniju (v. tabl. 10. kol. 10.).

Iz njih smo uspoređivali samo funkcije e_x^0 i to:

- a) aktualne s aktualiziranimima (e_x^0 i $e_{x_k}^0$),
- b) aktualne s Halley-evima (e_x^0 i $e_{x_H}^0$),
- c) aktualizirane sa Halley-evima ($e_{x_k}^0$ i $e_{x_H}^0$),

što se vidi iz tabl. 10. i grafa 3.

Zaključak

Na temelju ovih ispitivanja zaključujemo, da je primjena korigirane H. metode kao osnove za sastav aktualiziranih tablica rednica umiranja opravdana prvenstveno tamo, gdje raspolažemo s distribucijom umrlih po dobi kroz što dulji period vremena, na pr. za nekih 100 godina, time, da istodobno znamo i za zbroj živorođenih u istom razdoblju. Metoda korekcije je to manje primjenljiva, što je razdoblje promatranja kraće od 100 godina, odnosno tamo, gdje se može upotrebiti aktualna metoda.

Mnoge naše župe raspolažu s podacima o rođenima i umrlima, koji se odnose na zadnjih 200 godina i više. Stoga će nam diskutirana metoda, u pomanjkanju ostalih demografskih podataka, napose popisa pučanstva, moći da posluži za ispitivanja naših seoskih prilika u raznim predjelima naše zemlje. Napor, koji se ulaže za sastav pojedine tablice, nije tako velik, da ga pojedini ispitivači ne bi mogli podnijeti, a i rezultati napora bi odgovarali uloženom trudu.

Najzad je korigirana II. metoda vrlo prikladna za uspoređivanja prilika u pojedinim stoljećima među sobom, uzevši stoljeće kao cjelinu. Prednost ispitivanja jednog stoljeća kao cjeline bi bila prije svega u tome:

1. što takvih ispitivanja do danas još nema,
2. što bi time raširili naš horizont na veća razdoblja,
3. što bi ekstrapolacija sekularnih podataka za buduće gibanje značila mnogo više nego oni podaci, s kojima raspolažemo danas.

Rezultati, koje nam može donijeti korigirana Halley-eva metoda, približuju nas brzim koracima onim visokim možda i najvišim ciljevima, koje želimo postići statističkim proučavanjima, naime, da možemo na velika vremenska razdoblja predviđati sklop događaja, koji se kriju iza statistički promatranih gibanja kvantitativnih vrijednosti.

JEDNA VRST INTEGRALNIH TEOREMA BESSELOVIH FUNKCIJA

RAZNE RELACIJE IZMEĐU BESSELOVIH FUNKCIJA

U ovom se dijelu nastavlja izlaganje pomoćnih stavaka potrebnih za kasnija razmatranja. Najprije ćemo podsjetiti na neke poznate relacije između Besselovih funkcija i zatim razviti niz novih relacija za te funkcije. Smatramo, da većina tih rezultata zaslužuje i samostalan interes bez obzira na njihovu kasniju primjenu.

1. Nekoliko temeljnih relacija između Besselovih funkcija

Definiramo funkciju $A_n(z)$ uključujući slučaj, gdje n ne mora biti cio pozitivan broj, već može biti bilo kakav kompleksan broj s izuzetkom cijelih negativnih brojeva:

$$A_n(z) = \Gamma(n+1) \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} J_n(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{r! \Gamma(n+r+1)} \left(\frac{iz}{2}\right)^{2r}. \quad (1)$$

Zbog faktora $\Gamma(n+1)$ funkcija bi za cijelo negativno n postala neizmjerena, dok naprotiv definicija za $J_n(z)$

$$J_n(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r! \Gamma(n+r+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2r} \quad (2)$$

vrijedi i za taj slučaj, ako se uzme u obzir, da otpadaju članovi, za koje je gama-funkcija u nazivniku neizmjerena. Lako se iz toga razabira, da je za cijelo n

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z), \quad (3)$$

kako je to dobro poznato.

Iz poznatih relacija¹

$$J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z) - J_{n-1}(z), \quad (4)$$

$$\frac{d}{dz} z^{-n} J_n(z) = -z^{-n} J_{n+1}(z) \quad (5)$$

lako je s pomoću (1) izvesti nekoliko relacija za funkcije $\Lambda_n(z)$:

$$\Lambda_{n+1}(cz) = \frac{4n(n+1)}{c^2 z^2} [\Lambda_n(cz) - \Lambda_{n-1}(cz)] \quad (6)$$

$$\Lambda_{n+1}(c\sqrt{f(z)}) = \frac{4n(n+1)}{c^2 f(z)} [\Lambda_n(c\sqrt{f(z)}) - \Lambda_{n-1}(c\sqrt{f(z)})] \quad (7)$$

$$\frac{d}{dz} \Lambda_n(cz) = -\frac{c^2 z}{2(n+1)} \Lambda_{n+1}(cz) \quad (8)$$

$$\frac{d}{dz} \Lambda_n(c\sqrt{f(z)}) = -\frac{c^2}{4(n+1)} \frac{df(z)}{dz} \Lambda_{n+1}(c\sqrt{f(z)}). \quad (9)$$

Iz (8) i (6), odnosno iz (9) i (7) proizlazi:

$$\frac{d}{dz} \Lambda_n(cz) = -\frac{2n}{z} [\Lambda_n(cz) - \Lambda_{n+1}(cz)] \quad (10)$$

$$\frac{d}{dz} \Lambda_n(c\sqrt{f(z)}) = -\frac{nf'(z)}{f(z)} [\Lambda_n(c\sqrt{f(z)}) - \Lambda_{n+1}(c\sqrt{f(z)})]. \quad (11)$$

Spominjemo još formule²

$$J'_n(z) = -\frac{n}{z} J_n(z) + J_{n-1}(z) \quad (12)$$

$$J'_n(z) = \frac{n}{z} J_n(z) - J_{n+1}(z) \quad (13)$$

i Besselovu diferencijalnu jednadžbu³, koju zadovoljavaju funkcije $J_n(z)$:

$$z^2 \frac{d^2 y}{dz^2} + z \frac{dy}{dz} + (z^2 - n^2) y = 0. \quad (14)$$

¹ G. N. Watson: A treatise on the theory of Bessel functions, Cambridge, University Press 1922, § 3'2 (str. 45). Ovo ćemo djelo kratko citirati sa »Watson«.

² Watson, 3'2 (3), (4).

³ Watson, 3'1 (1).

Sve ove formule nije teško provjeriti uvrštenjem izraza (2), a one vrijede za bilo kakvo kompleksno n , s izuzetkom negativnih cijelih vrijednosti od n u formulama za funkcije $A_n(z)$.

Dajemo još izvod jedne dalje relacije. Uvrstivši u (14) $J_n(z)$ odnosno $J_{-n}(z)$ dobijemo:

$$z^2 J_n''(z) + z J_n'(z) + (z^2 - n^2) J_n(z) = 0 \quad (15)$$

$$z^2 J_{-n}''(z) + z J_{-n}'(z) + (z^2 - n^2) J_{-n}(z) = 0. \quad (16)$$

Pomnoži li se (15) sa $J_{-n}(z)$, (16) sa $J_n(z)$ i odbiju li se dobivene jednačbe, može se rezultat pisati u obliku

$$\frac{d}{dz} \{ z [J_n(z) J_{-n}'(z) - J_{-n}(z) J_n'(z)] \} = 0, \quad (17)$$

dakle⁴

$$z [J_n(z) J_{-n}'(z) - J_{-n}(z) J_n'(z)] = C. \quad (18)$$

Uvrštenje izraza (12) i (13) daje

$$\begin{aligned} z \left\{ J_n(z) \left[\frac{n}{z} J_{-n}(z) + J_{-n-1}(z) \right] - J_{-n}(z) \left[\frac{n}{z} J_n(z) - J_{n+1}(z) \right] \right\} = \\ = z [J_{n+1}(z) J_{-n}(z) + J_{-n-1}(z) J_n(z)] = C. \end{aligned} \quad (19)$$

Prema (2) vrijedi:

$$J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \left[\frac{1}{\Gamma(n+1)} + O(z^2) \right] \quad (20)$$

$$J_{n+1}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{n+1} \left[\frac{1}{\Gamma(n+2)} + O(z^2) \right] \quad (21)$$

$$J_{-n}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \left[\frac{1}{\Gamma(-n+1)} + O(z^2) \right] \quad (22)$$

$$J_{-n-1}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-n-1} \left[\frac{1}{\Gamma(-n)} + O(z^2) \right]. \quad (23)$$

⁴ Watson, 3'12 (1).

Uvrste li se ti izrazu u (19), to izlazi:

$$z \left[J_{n+1}(z) J_{-n}(z) - J_{-n-1}(z) J_n(z) \right] = \frac{z^2}{2} \left[\frac{1}{\Gamma(n+2) \Gamma(-n+1)} + \right. \\ \left. + O(z^2) \right] + 2 \left[\frac{1}{\Gamma(n+1) \Gamma(-n)} + O(z^2) \right] = \frac{2}{\Gamma(n+1) \Gamma(-n)} + O(z^2). \quad (24)$$

Prema t. zv. drugom svojstvu gama-funkcije možemo pisati

$$\frac{2}{\Gamma(n+1) \Gamma(-n)} = \frac{2 \sin[(n+1)\pi]}{\pi}, \quad (25)$$

gdje ne treba izuzeti cijele vrijednosti od n , jer za te vrijednosti obje strane od (25) iščezavaju.

Stavimo li u (24) $z = 0$, to je time određena konstanta C u (19), pa izlazi⁵

$$z \left[J_{n+1}(z) J_{-n}(z) + J_{-n-1}(z) J_n(z) \right] = \frac{2 \sin[(n+1)\pi]}{\pi}. \quad (26)$$

Ta relacija vrijedi dakle i za cijele vrijednosti od n , što se u ostalom uviđa lako i graničnim prijelazom, kod kojega n teži cijeloj vrijednosti, ili primjenom formule (3).

2. Lommelovi polinomi i relacija između triju Besselovih funkcija

Za t. zv. Lommelove polinome daje Watson ovaj izraz⁶:

$$R_{m,v}(z) = \sum_{n=0}^{\left[\frac{m}{2} \right]} \frac{(-1)^n (m-n)! \Gamma(v+m-n) \left(\frac{z}{2} \right)^{-m+2n}}{n! (m-2n)! \Gamma(v+n)}, \quad (27)$$

gdje drugi indeks v može značiti bilo kakav kompleksan broj, dok je m cio pozitivan broj ili nula. Za slučaj negativnog cijelog v napominje se, da po potrebi treba u jednom dijelu polinoma zamijeniti kvocijent

$$\frac{\Gamma(v+m-n)}{\Gamma(v+n)} \text{ kvocijentom } (-1)^m \frac{\Gamma(-v-n+1)}{\Gamma(-v-m+n+1)}.$$

⁵ Watson, §2 (7).

⁶ Watson, §61 (3); Lommel, Math. Ann. IV. (1871) str. 108—111; Archiv der Math. und Physik XXXVII (1861) str. 354—355.

Za negativne cijele vrijednosti prvog indeksa definiraju se Lommelovi polinomi s pomoću relacije⁷

$$R_{-m, \nu}(z) = (-1)^{m-1} R_{m-2, 2-\nu}(z) \quad (28)$$

s dodatkom $R_{-1, \nu}(z) = 0$ (28a).

Mi ćemo izrazu (27) dati takav oblik, da će svi spomenuti slučajevi biti obuhvaćeni. Osim toga ćemo promijeniti oznaku tako, da ćemo staviti $R_{m, \nu} = M_{\nu+m, \nu-1}$ (29).

Neka su dakle a, b dva kompleksna broja, kojim je razlika realan cio broj, i neka je

$$r = |a-b| \quad (30), \quad \operatorname{sgn}(a-b) = \frac{a-b}{r}. \quad (31)$$

Dalje se služimo oznakom

$$(\alpha)_m = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+m-1); (\alpha)_0 = 1, \quad (32)$$

za koju očito vrijedi $(\alpha)_m = (-1)^m (-\alpha-m+1)_m$ (32a).

Onda zovemo Lommelovim polinomom izraz

$$M_{a, b}(z) = \operatorname{sgn}(a-b) \sum_{n=0}^{\left[\frac{r-1}{2}\right]} \frac{(-1)^n (r-n-1)! \left(\frac{a+b-r}{2} + n + 1\right)_{r-2n-1}}{\left(\frac{z}{2}\right)^{r-2n-1} n! (r-2n-1)!}. \quad (33)$$

S obzirom na to, da je

$$\frac{(r-n-1)!}{(r-2n-1)!} = (r-2n)_n, \quad (33a)$$

može se taj izraz pisati i ovako:

$$M_{a, b}(z) = \operatorname{sgn}(a-b) \sum_{n=0}^{\left[\frac{r-1}{2}\right]} \frac{(-1)^n (r-2n)_n \left(\frac{a+b-r}{2} + n + 1\right)_{r-2n-1}}{\left(\frac{z}{2}\right)^{r-2n-1} n!}. \quad (33b)$$

Za slučaj $r = 0$, t. j. $a = b$, možemo smatrati, da suma nema uopće članova, pa staviti $M_{a, a}(z) = 0$ (34).

⁷ Watson, 9'63 (9), (8).

U literaturi se susreću osim Lommelove oznake $R_{m,v}$ još dvije oznake za te polinome, i to Nielsenova⁸ $R^{v,m}$ i oznaka P_m^v , koju upotrebljavaju Graf i Crelier⁹.

Te razne oznake povezane su međusobno formulama

$$R_{m,v} = R^{v-1,m} = P_m^{v-1} = M_{m+v,v-1} \quad (35)$$

$$R^{v,m} = P_m^v = R_{m,v+1} = M_{m+v+1,v} \quad (36)$$

$$M_{a,b} = R_{a-b-1,b+1} = R^{b,a-b-1} = P_{a-b-1}^b, \quad (37)$$

pri čemu smo za kraće pisanje ispustili argumenat z , što ćemo učiniti i u mnogim daljim formulama. Vidi se, da se Nielsenova i Graf-Crelierova oznaka uopće bitno ne razlikuju, a u Lommelovoj je samo jedan indeks promijenjen za jednu jedinicu. Naša je oznaka naprotiv bitno drukčija.

Jedina je prednost starih oznaka po našem mišljenju ta, da je jedan indeks realan cio broj, dok drugi smije biti bilo kakav kompleksan broj, što se može u oznaci dovesti do izražaja time, da se za cijeli broj pišu slova n ili m , koja ponajviše služe za takvu svrhu, dok se za kompleksni indeks stavlja koje grčko slovo. U našoj novoj oznaci oba su indeksa općenito kompleksni brojevi, ali se mora jednom za uvijek istaknuti, da im razlika može biti samo realan cio broj (uključivo nule).

Prednosti nove oznake nastojat ćemo pokazati usporedbom niza najvažnijih relacija za Lommelove polinome pisanih starom Lommelovom i novom našom oznakom.

Treba najprije provjeriti, da je definicija (33), (34) identična s definicijom (27), (28), (28a), ako se uzme u obzir (35) odnosno (37).

Uvrstimo dakle prema (37) u našu definiciju (33) $a = m + v$ (38), $b = v - 1$ (39) i pretpostavimo $m + 1 = a - b > 0$ (40). Dobijemo

$$M_{m+v,v-1}(z) = \sum_{n=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{(-1)^n (m-n)! (v+n)_{m-2n}}{\left(\frac{z}{2}\right)^{m-2n} n! (m-2n)!}. \quad (41)$$

Prema (32) i (32a) je očito

$$(\alpha)_m = \frac{\Gamma(\alpha + m)}{(\alpha)} = (-1)^m \frac{\Gamma(-\alpha + 1)}{\Gamma(-\alpha - m + 1)}. \quad (42)$$

⁸ N. Nielsen: Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen, Teubner, Leipzig 1904. Ovo djelo ćemo kratko citirati sa »Nielsen«.

⁹ Watson, 9'62 na kraju paragrafa.

Ako je a realan cio broj, to će u slučaju $-m+1 \leq a \leq 0$ (43) gama-funkcije u nazivnicima od (42) biti neizmjerne, dok će brojnici biti konačni, tako da je lijeva strana jednaka nuli u skladu sa (32). Za $a \leq -m$ (44) imat će prvi razlomak u (42) neodređeni oblik $\frac{\infty}{\infty}$, dok će drugi dati konačnu vrijednost, a za $a \geq 1$ (45) drugi će razlomak u (42) imati neodređeni oblik $\frac{\infty}{\infty}$, a prvi će dati konačnu vrijednost. Dobijemo dakle

$$(\nu+n)_{m-2n} = \frac{\Gamma(\nu+m-n)}{\Gamma(\nu+n)} = (-1)^{m-2n} \frac{\Gamma(-\nu-n+1)}{\Gamma(-\nu-m+n+1)}, \quad (46)$$

gdje treba prema potrebi uzeti jedan ili drugi oblik, pa je time dokazano, da je pod uvjetom (40) zaista $M_{m+\nu, \nu-1} = R_{m, \nu}$ (47), kako to tvrdimo u (35).

Za $m=-1$ (48), dakle prema (40) za $a=b$ (49), dobijemo zbog (34), da je relacija (28a) zadovoljena.

Treba još provjeriti, da se naša definicija (33) slaže sa (28). U tu svrhu najprije primjećujemo, da je u smislu (32a)

$$\left(\frac{a+b-r}{2} + n + 1\right)_{r-2n-1} = (-1)^{r-2n-1} \left(\frac{-a-b-r}{2} + n + 1\right)_{r-2n-1}. \quad (50)$$

Uvrsti li se to u (33) i uoči, da je

$$\operatorname{sgn}(a-b) = -\operatorname{sgn}[(-a) - (-b)], \quad (51)$$

to se uviđa, da vrijedi

$$M_{a,b} = (-1)^r M_{-a,-b}. \quad (52)$$

Stavimo sad $a=-m+\nu$ (53), $b=\nu-1$ (54), dakle

$$M_{-m+\nu, \nu-1} = (-1)^{-m+1} M_{m-\nu, 1-\nu}. \quad (55)$$

To bi u smislu (37) dalo

$$R_{-m, \nu} = (-1)^{m-1} R_{m-2, 2-\nu}, \quad (56)$$

što je identično sa (28). Time je dakle dokazano, da je naša definicija (33), (34) Lommelovih polinoma identična s definicijama (27), (28), (28a), ako su oznake odabrane kao u relacijama (35), (37).

Vidi se, da naša definicija obuhvaća u jednom obliku sve slučajeve, a prednost nove oznake se već očitovala u prozirnoj relaciji (52), koja u staroj oznaci ima ponešto čudni oblik (28).

Jedan pogled na (33) dostaje, da se uvidi relacija

$$M_{a,b} = -M_{b,a}, \quad (57)$$

pa se u kombinaciji sa (52) može pisati

$$M_{a,b} = (-1)^{a-b} M_{-a,-b} = -M_{b,a} = (-1)^{a-b-1} M_{-b,-a}, \quad (58)$$

čemu u staroj oznaci odgovaraju manje pregledne poznate relacije¹⁰⁾

$$\begin{aligned} R_{m,v} &= (-1)^{m-1} R_{-m-2,2-v} = -R_{-m-2,v+m+1} = \\ &= (-1)^m R_{m,-v-m+1}. \end{aligned} \quad (59)$$

Poznato je, da se Lommelovi polinomi mogu shvatiti kao općene hipergeometrijske funkcije i to, ako upotrebimo Pochhammerovu oznaku

$$\begin{aligned} {}_pF_q(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p; \varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_q; z) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n (\alpha_2)_n \dots (\alpha_p)_n}{n! (\varrho_1)_n (\varrho_2)_n \dots (\varrho_q)_n} z^n, \end{aligned} \quad (60)$$

vrijedi¹¹⁾

$$R_{m,v} = (v)_m \left(\frac{z}{2}\right)^{-m} {}_2F_3\left(\frac{1-m}{2}, -\frac{m}{2}; -m, 1-v-m; -z^2\right), \quad (61)$$

pri čemu m ne smije biti negativno. Nije teško provjeriti, da se taj red prekida poslije konačnog broja članova i da je identičan sa (27). Za $m < -1$ mora se najprije upotrebiti (28). Za $m = -1$ formula nije upotrebiva, a Lommelov polinom je prema (28a) jednak nuli.

Dajemo analogon formule (61) s našim novim oznakama, i to u obliku, koji nije ograničen na $m \geq 0$, t. j. na $a-b \geq 1$. Taj oblik glasi:

$$\begin{aligned} M_{a,b} = \operatorname{sgn}(a-b) \left(\frac{2-r+a+b}{2}\right)_{r-1} \left(\frac{z}{2}\right)^{1-r} {}_2F_3\left(\frac{2-r}{2}, \frac{1-r}{2}; \right. \\ \left. \frac{2-r+a+b}{2}, 1-r, \frac{2-r-a-b}{2}; -z^2\right). \end{aligned} \quad (62)$$

¹⁰ Watson, 9'63 (10).

¹¹ Watson, 9'61 (5).

Nije teško izračunati, da je ova formula za $a - b \geq 1$ istovjetna sa (61), dok za $a - b \leq -1$ daje očito isto, što bi dao analogni izraz za $M_{b,a}$, samo s protivnim predznakom, jer je u tom slučaju $\operatorname{sgn}(a - b) = -1$. To se slaže sa (57). Formula (62) ne da se primijeniti jedino u slučaju $a = b$, koji odgovara slučaju $m = -1$. Lommelov polinom je tada prema (34) jednak nuli.

Prelazimo sada na opću relaciju između triju Besselovih funkcija, kojima se indeksi razlikuju za cijele brojeve. Watson prvi daje tu relaciju u općem obliku¹²⁾

$$J_{\nu+n}(z) R_{p-m-1, \nu+m+1}(z) + J_{\nu+p}(z) R_{m-n-1, \nu+n+1}(z) + J_{\nu+m}(z) R_{n-p-1, \nu+p+1}(z) = 0. \quad (63)$$

Watson dokazuje ovu formulu na temelju nekih relacija između Lommelovih polinoma. Mi ćemo ići obratnim putem i dokazati formulu (63) izravno potpunom indukcijom na temelju formule rekurzije (4) za Besselove funkcije, a zatim iz (63) izvesti vrlo jednostavno niz relacija za Lommelove polinome. Ovaj put je računski nešto dulji, ali daje bolji uvid u međusobnu ovisnost tih raznih relacija.

Formula (63) dobiva u našoj novoj oznaci pregledni oblik

$$J_a M_{b,c} + J_b M_{c,a} + J_c M_{a,b} = 0. \quad (64)$$

Upada u oči, da koeficijent svake Besselove funkcije ovisi samo o indeksima ostalih dviju Besselovih funkcija. To se naravno može vidjeti i iz oblika (63), ako ga se pažljivo pogleda. Drugi i treći član lijeve strane od (64) nastaju iz prvog člana cikličkom permutacijom indeksa.

Kompleksni brojevi a, b, c moraju biti takvi, da su im razlike realni cijeli brojevi ili nula. Ako je $a = b = c$, bit će zbog (34) sva tri koeficijenta jednaka nuli i relacija (64) postaje trivijalna. Ako je na pr. $a = b \neq c$, (64) prelazi u

$$J_a M_{a,c} + J_a M_{c,a} = 0, \quad (65)$$

što je zbog (57) ispravno. Možemo dakle pretpostaviti

$$a \neq b \neq c \neq a. \quad (66)$$

Osim toga ne će biti smanjenje općenitosti, ako pretpostavimo

$$a - b > 0, \quad b - c > 0, \quad \text{dakle} \quad a - c > 0. \quad (67)$$

¹²⁾ Watson, 9'64 (8).

U protivnom slučaju postoji naime još ovih pet mogućnosti:

$$b - c > 0, c - a > 0, \text{ dakle } b - a > 0 \quad (68)$$

$$c - a > 0, a - b > 0, \text{ dakle } c - b > 0 \quad (69)$$

$$b - a > 0, a - c > 0, \text{ dakle } b - c > 0 \quad (70)$$

$$c - b > 0, b - a > 0, \text{ dakle } c - a > 0 \quad (71)$$

$$a - c > 0, c - b > 0, \text{ dakle } a - b > 0. \quad (72)$$

Vidimo, da uvjete (68) i (69) dobijemo iz uvjeta (67) cikličkom permutacijom brojeva a, b, c , dok se uvjeti (70), (71), (72) dobiju iz (64) necikličkom permutacijom, a međusobno opet prelaze jedan u drugi cikličkom permutacijom.

Lijeva strana relacije (64) je invarijantna s obzirom na cikličke permutacije brojeva a, b, c , dok kod necikličke permutacije zbog (57) mijenja svoj predznak. Sama relacija (64) je dakle invarijantna spram bilo kakvih permutacija brojeva a, b, c . Ako dakle vrijedi koji od uvjeta (68) do (72), treba samo prikladno permutirati oznaku brojeva a, b, c , pa će u novoj oznaci uvjet primiti oblik (67), pri čemu je relacija (64) zadržala svoj oblik. Možemo se dakle ograničiti na slučaj (67).

Stavimo li

$$p = |b - c|; q = |c - a|; r = |a - b|, \quad (73)$$

to je prema (33)

$$M_{b,c} = \operatorname{sgn}(b - c) \sum_{n=0}^{\left[\frac{p-1}{2}\right]} \frac{(-1)^n (p - n - 1)! \left(\frac{b + c - p}{2} + n + 1\right)_{p-2n-1}}{\left(\frac{z}{2}\right)^{p-2n-1} n! (p - 2n - 1)!} \quad (74)$$

$$M_{c,a} = \operatorname{sgn}(c - a) \sum_{n=0}^{\left[\frac{q-1}{2}\right]} \frac{(-1)^n (q - n - 1)! \left(\frac{c + a - q}{2} + n + 1\right)_{q-2n-1}}{\left(\frac{z}{2}\right)^{q-2n-1} n! (q - 2n - 1)!} \quad (75)$$

S obzirom na (67) možemo sad uvrstiti u (74), (75), (33) za p, q, r vrijednosti $p = b - c, q = a - c, r = a - b$ (76), čime te formule prelaze u oblik

$$M_{b,c} = \sum_{n=0}^{\left[\frac{b-c-1}{2}\right]} \frac{(-1)^n (b - c - n - 1)! (c + n + 1)_{b-c-2n-1}}{\left(\frac{z}{2}\right)^{b-c-2n-1} n! (b - c - 2n - 1)!} \quad (77)$$

$$M_{c,a} = -M_{a,c} = - \sum_{n=0}^{\left[\frac{a-c-1}{2}\right]} \frac{(-1)^n (a-c-n-1)! (c+n+1)_{a-c-2n-1}}{\left(\frac{z}{2}\right)^{a-c-2n-1} n! (a-c-2n-1)!} \quad (78)$$

$$M_{a,b} = \sum_{n=0}^{\left[\frac{a-b-1}{2}\right]} \frac{(-1)^n (a-b-n-1)! (b+n+1)_{a-b-2n-1}}{\left(\frac{z}{2}\right)^{a-b-2n-1} n! (a-b-2n-1)!}, \quad (79)$$

a relaciju (64) pišemo u obliku

$$J_a M_{b,c} - J_b M_{a,c} + J_c M_{a,b} = 0, \quad (80)$$

tako da je razlika između prvog i drugog indeksa Lommelovog polinoma u sva tri člana lijeve strane pozitivna.

Uzmemo li za brojeve a, b, c vrijednosti $b+1, b, b-1$, glasi (80)

$$J_{b+1} M_{b,b-1} - J_b M_{b+1,b-1} + J_{b-1} M_{b+1,b} = 0. \quad (81)$$

Lako se vidi, da je

$$M_{b,b-1} = M_{b+1,b} = 1 \quad (82), \quad M_{b+1,b-1} = \frac{b}{\frac{z}{2}} = \frac{2b}{z}, \quad (83)$$

dakle

$$J_{b+1} - \frac{2b}{z} J_b + J_{b-1} = 0, \quad (84)$$

što je identično sa (4). Formula rekurzije (4) Besselovih funkcija prema tome je specijalan slučaj relacije (80).

Opetovanom primjenom formule (84) lako je dobiti jednakosti

$$J_{b+2} - J_b \left[\frac{b(b+1)}{\left(\frac{z}{2}\right)^2} - 1 \right] + J_{b-1} \frac{b+1}{\frac{z}{2}} = 0 \quad (85)$$

$$J_{b+1} \frac{b-1}{\frac{z}{2}} - J_b \left[\frac{(b-1)b}{\left(\frac{z}{2}\right)^2} - 1 \right] + J_{b-2} = 0 \quad (86)$$

$$J_{b+2} \frac{b-1}{\frac{z}{2}} - J_b \left[\frac{(b-1)b(b+1)}{\left(\frac{z}{2}\right)^3} - \frac{2b}{\frac{z}{2}} \right] + J_{b-2} \frac{b+1}{\frac{z}{2}} = 0 \quad (87)$$

Budući da je

$$M_{b+2,b} = \frac{b+1}{\frac{z}{2}}, \quad (88)$$

$$M_{b,b-2} = \frac{b-1}{\frac{z}{2}}, \quad (89)$$

$$M_{b+2,b-1} = \frac{b(b+1)}{\left(\frac{z}{2}\right)^2} - 1, \quad (90) \quad M_{b+1,b-2} = \frac{(b-1)b}{\left(\frac{z}{2}\right)^2} - 1, \quad (91)$$

$$M_{b+2,b-2} = \frac{(b-1)b(b+1)}{\left(\frac{z}{2}\right)^3} - \frac{2b}{\frac{z}{2}}, \quad (92)$$

to su i (85), (86), (87) specijalni slučajevi relacije (80), pa ih možemo pisati u obliku

$$J_{b+2} M_{b,b-1} - J_b M_{b+2,b-1} + J_{b-1} M_{b+2,b} = 0 \quad (93)$$

$$J_{b+1} M_{b,b-2} - J_b M_{b+1,b-2} + J_{b-2} M_{b+1,b} = 0 \quad (94)$$

$$J_{b+2} M_{b,b-2} - J_b M_{b+2,b-2} + J_{b-2} M_{b+2,b} = 0. \quad (95)$$

Na temelju (81), (93), (94), (95) provest ćemo dokaz relacije (80) potpunom indukcijom.

Pretpostavimo, da za neko cijelo $s \geq 1$ vrijede relacije

$$J_{b+s} M_{b,b-1} - J_b M_{b+s,b-1} + J_{b-1} M_{b+s,b} = 0, \quad (96)$$

$$J_{b+s+1} M_{b,b-1} - J_b M_{b+s+1,b-1} + J_{b-1} M_{b+s+1,b} = 0. \quad (97)$$

Za $s=1$ te su relacije identične sa (81), (93) i prema tome ispravne. Dokažemo li, da iz njih izlazi

$$J_{b+s+2} M_{b,b-1} - J_b M_{b+s+2,b-1} + J_{b-1} M_{b+s+2,b} = 0, \quad (98)$$

to smo time dokazali potpunom indukcijom, da (96) vrijedi za svako $s \geq 1$ ¹³.

¹³ Ovu relaciju daje i P. Schafheitlin: Die Theorie der Besselschen Funktionen, Teubner 1908, str. 17 (6). I on provodi potpunu indukciju, ali na nešto drukčiji način. Opću formulu (80) ne izvodi, već samo spominje na str. 19, da mora postojati linearna relacija između triju Besselovih funkcija, kojim se indeksi razlikuju za cijele brojeve, a koeficijenti relacije su cijele (racionalne) funkcije argumenta.

Iz (81) izlazi

$$J_{b+s+2} - J_{b+s+1} \frac{b+s+1}{\frac{z}{2}} + J_{b+s} = 0. \quad (99)$$

Eliminacija veličina J_{b+s} i J_{b+s+1} iz (96), (97), (99) daje

$$J_{b+s+2} M_{b,b-1} - J_b \left(\frac{b+s+1}{\frac{z}{2}} M_{b+s+1,b-1} - M_{b+s,b-1} \right) + \\ + J_{b-1} \left(\frac{b+s+1}{\frac{z}{2}} M_{b+s+1,b} - M_{b+s,b} \right) = 0. \quad (100)$$

Na temelju (77) daje jednostavan račun, da vrijedi

$$\frac{b+s+1}{\frac{z}{2}} M_{b+s+1,b-1} - M_{b+s,b-1} = M_{b+s+2,b-1}. \quad (101)$$

Kod provedbe verifikacije zgodno je u izrazu (79) kvocijent faktoriijela nadomjestiti prema

$$\frac{(a-b-n-1)!}{(a-b-2n-1)!} = (a-b-2n)_n, \quad (102)$$

kao što odgovara formulama (33a), (33b), i analogno učiniti u svim sumama. Ne treba onda paziti na to, kolika je gornja granica u pojedinim sumama, jer članovi s prevelikim n sadržavaju faktor nula, pa automatski otpadaju. To vrijedi i za ostale verifikacije u toku dokaza.

Ako se u (101) piše $b+1$ umjesto b i $s-1$ umjesto s , dobije se

$$\frac{b+s+1}{\frac{z}{2}} M_{b+s+1,b} - M_{b+s,b} = M_{b+s+2,b-1}. \quad (103)$$

Uvrsti li se (101) i (103) u (100), izlazi (98), pa je time dokazano, da (96) vrijedi za svako $s \geq 1$.

Pretpostavimo dalje, da za neko $s \geq 1$ vrijede relacije

$$J_{b+s} M_{b,b-2} - J_b M_{b+s,b-2} + J_{b-2} M_{b+s,b} = 0, \quad (104)$$

$$J_{b+s+1} M_{b,b-2} - J_b M_{b+s+1,b-2} + J_{b-2} M_{b+s+1,b} = 0. \quad (105)$$

Za $s=1$ ove su relacije identične sa (94), (95) i prema tome ispravne. Moramo opet pokazati, da se može provesti povišenje od s .

Eliminiramo li iz (104), (105), (99) veličine J_{b+s} i J_{b+s+1} , dobijemo

$$J_{b+s+2} M_{b,b-2} - J_b \left(\frac{b+s+1}{\frac{z}{2}} M_{b+s+1,b-2} - M_{b+s,b-2} \right) + \\ + J_{b-2} \left(\frac{b+s+1}{\frac{z}{2}} M_{b+s+1,b} - M_{b+s,b} \right) = 0. \quad (106)$$

Ako se u (101) piše $b-1$ umjesto b i $s+1$ umjesto s , izlazi

$$\frac{b+s+1}{\frac{z}{2}} M_{b+s+1,b-2} - M_{b+s,b-2} = M_{b+s+2,b-2}. \quad (107)$$

Uvrštenje izraza (107) i (103) u (105) daje

$$J_{b+s+2} M_{b,b-2} - J_b M_{b+s+2,b-2} + J_{b-2} M_{b+s+2,b} = 0. \quad (108)$$

Povišenje od s je time provedeno, pa je dokazano, da relacija (100) vrijedi za svako $s \geq 1$.

Pretpostavimo sad, da za neko $t \geq 1$ vrijede relacije

$$J_{b+s} M_{b,b-t} - J_b M_{b+s,b-t} + J_{b-t} M_{b+s,b} = 0, \quad (109)$$

$$J_{b+s} M_{b,b-t-1} - J_b M_{b+s,b-t-1} + J_{b-t} M_{b+s,b} = 0. \quad (110)$$

Za $t=1$ te su relacije identične sa (96) i (104), koje su već dokazane. Treba pokazati, da je moguće povišenje od t .

Iz (81) izlazi

$$J_{b-t} - J_{b-t-1} \frac{b-t-1}{\frac{z}{2}} + J_{b-t-2} = 0. \quad (111)$$

Eliminacija veličina J_{b-t} i J_{b-t-1} iz (109), (110), (111) daje

$$J_{b+s} \left(\frac{b-t-1}{\frac{z}{2}} M_{b,b-t-1} - M_{b,b-t} \right) - \\ - J_b \left(\frac{b-t-1}{\frac{z}{2}} M_{b+s,b-t-1} - M_{b+s,b-t} \right) + J_{b-t-2} M_{b+s,b} = 0. \quad (112)$$

Analogno kao kod (101) može se na temelju (77) računom provjeriti, da vrijedi

$$\frac{b-t-1}{\frac{z}{2}} M_{b, b-t-1} - M_{b, b-t} = M_{b, b-t-2}. \quad (113)$$

Dalje, ako se pišu $b+s$ umjesto b i $t+s$ umjesto t , izlazi

$$\frac{b-t-1}{\frac{z}{2}} M_{b+s, b-t-1} - M_{b+s, b-t} = M_{b+s, b-t-2}. \quad (114)$$

Uvrsti li se (113) i (114) u (112), dobije se

$$J_{b+s} M_{b, b-t-2} - J_b M_{b+s, b-t-2} + J_{b-t-2} M_{b+s, b} = 0. \quad (115)$$

Time je povišenje od t provedeno i dokazano, da relacija (109) vrijedi za svako $t \geq 1$. Budući da je (109) samo drukčije napisana relacija (80), to je time cijeli dokaz proveden.

Zabilježimo za nas najvažniji specijalni slučaj relacije (64), a to je $a=n$, $b=1$, $c=0$:

$$\begin{aligned} J_n(z) &= J_1(z) M_{n,0}(z) - J_0(z) M_{n,1}(z) = \\ &= J_1(z) \sum_{s=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{(-1)^s (n-s-1)! (s+1)_{n-2s-1}}{\left(\frac{z}{2}\right)^{n-2s-1} s! (n-2s-1)!} - \\ &- J_0(z) \sum_{s=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} \frac{(-1)^s (n-s-2)! (s+2)_{n-2s-2}}{\left(\frac{z}{2}\right)^{n-2s-2} s! (n-2s-2)!}. \quad (116) \end{aligned}$$

Uvrstimo li

$$(s+1)_{n-2s-1} = (s+1)(s+2)\dots(n-s-1) = \frac{(n-s-1)!}{s!} \quad (117)$$

$$(s+2)_{n-2s-2} = (s+2)(s+3)\dots(n-s-1) = \frac{(n-s-1)!}{(s+1)!}, \quad (118)$$

dobijemo formulu (116) u obliku

$$\begin{aligned} J_n(z) &= J_1(z) \sum_{s=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{(-1)^s [(n-s-1)!]^2}{\left(\frac{z}{2}\right)^{n-2s-1} (s!)^2 (n-2s-1)!} - \\ &- J_0(z) \sum_{s=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} \frac{(-1)^s (n-s-2)! (n-s-1)!}{\left(\frac{z}{2}\right)^{n-2s-1} s! (s+1)! (n-2s-2)!}. \quad (119) \end{aligned}$$

Potpunosti radi navest ćemo važni specijalni slučaj polucijelih indeksa, koji se u literaturi izvodi neovisno od opće relacije (64). Stavimo li jedan put

$$a = k + \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = -\frac{1}{2}, \quad (120)$$

a drugi put

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{1}{2}, \quad c = -\left(k + \frac{1}{2}\right), \quad (121)$$

to izlaze relacije

$$J_{k+\frac{1}{2}} M_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} + J_{\frac{1}{2}} M_{-\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} + J_{-\frac{1}{2}} M_{k+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = 0, \quad (122)$$

$$J_{\frac{1}{2}} M_{-\frac{1}{2}, -(k+\frac{1}{2})} + J_{-\frac{1}{2}} M_{-(k+\frac{1}{2}), \frac{1}{2}} + J_{-\frac{1}{2}} M_{k+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} = 0, \quad (123)$$

koje se s pomoću poznatih jednakosti¹⁴

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z \quad (124), \quad J_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z \quad (125)$$

moгу dovesti u oblik

$$J_{k+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \sin z \sum_{s=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{(-1)^s (2k-2s)!}{(2z)^{k-2s} (k-2s)! (2s)!} - \right. \\ \left. - \cos z \sum_{s=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \frac{(-1)^s (2k-2s-1)!}{(2z)^{k-2s-1} (k-2s-1)! (2s+1)!} \right\} \quad (126)$$

$$J_{-(k+\frac{1}{2})}(z) = (-1)^k \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \cos z \sum_{s=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{(-1)^s (2k-2s)!}{(2z)^{k-2s} (k-2s)! (2s)!} + \right. \\ \left. + \sin z \sum_{s=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \frac{(-1)^s (2k-2s-1)!}{(2z)^{k-2s-1} (k-2s-1)! (2s+1)!} \right\}, \quad (127)$$

gdje k znači cio pozitivan broj.

¹⁴ Vidi na pr. Watson, 3'4 (3), (6).

Stavimo li

$$n = \pm \left(k + \frac{1}{2}\right), \quad (128)$$

to se ove dvije formule mogu sažeti u jednu:

$$J_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \sin \left[z - \frac{\pi}{4} (2n - 2k - 1) \right] \sum_{s=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{(-1)^s (2k - 2s)!}{(2z)^{k-2s} (k - 2s)! (2s)!} - \right. \\ \left. - \cos \left[z - \frac{\pi}{4} (2n - 2k - 1) \right] \sum_{s=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \frac{(-1)^s (2k - 2s - 1)!}{(2s)^{k-2s-1} (k - 2s - 1)! (2s + 1)!} \right\}. \quad (129)$$

U literaturi se te formule susreću u nešto drugim oblicima^{15, 16}, koji se mogu lako svesti na (129).

Prelazimo sada na to, da iz opće formule (64) izvedemo na kratak način poznatu opću tročlanu relaciju između Lommelovih polinoma. U tu svrhu pišemo formulu (64) u četiri razna oblika:

$$J_b M_{c,d} + J_c M_{d,b} + J_d M_{b,c} = 0 \quad (130)$$

$$J_a M_{c,d} - J_c M_{d,a} + J_d M_{a,c} = 0 \quad (131)$$

$$J_a M_{b,d} + J_b M_{d,a} + J_d M_{a,b} = 0 \quad (132)$$

$$J_a M_{b,c} + J_b M_{c,a} + J_c M_{a,b} = 0. \quad (133)$$

Uvjet snošljivosti za te četiri homogene jednadžbe s nepoznanicama J_a, J_b, J_c, J_d ima oblik četverořredne determinante stavljene jednako nuli. Pomnoži li se drugi i četvrti redak te determinante sa -1 i upotrebi (57), to ona postaje koso simetrična, a takva se determinanta može predočiti kao kvadrat cijelog racionalnog izraza njezinih elemenata¹⁷:

$$\begin{vmatrix} 0 & M_{c,d} & M_{d,b} & M_{b,c} \\ M_{c,d} & 0 & M_{d,a} & M_{a,c} \\ M_{b,d} & M_{d,a} & 0 & M_{a,b} \\ M_{b,c} & M_{c,a} & M_{a,b} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & M_{c,d} - M_{b,d} M_{b,c} \\ -M_{c,d} & 0 & M_{a,d} M_{c,a} \\ M_{b,d} - M_{a,d} & 0 & M_{a,b} \\ -M_{b,c} - M_{c,a} - M_{a,b} & 0 \end{vmatrix} = \\ = (M_{a,b} M_{c,d} + M_{c,a} M_{b,d} + M_{b,c} M_{a,d})^2 = 0. \quad (134)$$

¹⁵ Watson, 3.4 (2), (5). R. O. Kuzmin: Besselijske funkcije, Glavna redakcija inženjerske literature, Leningrad-Moskva, 1935, str. 59.

¹⁶ Gray, Mathews and MacRobert: A treatise on Bessel functions, Macmillan and Co., London, 1931, str. 18.

¹⁷ G. Kowalewski: Einführung in die Determinantentheorie, Veit u. Co., Leipzig 1909, str. 134, stavak 40.

Dobili smo dakle opću tročlanu relaciju

$$M_{a,b} M_{c,d} + M_{c,a} M_{b,d} + M_{b,c} M_{a,d} = 0 \quad (135)$$

između Lommelovih polinoma, gdje se drugi i treći član lijeve strane dobije iz prvog člana cikličkom permutacijom prvih triju indeksa.

U staroj oznaci ta relacija glasi¹⁸

$$R_{a,r} R_{n-m-1, r+m+1} + R_{p,r} R_{m-n-1, r+n+1} + R_{m,r} R_{n-p-1, r+p+1} = 0. \quad (136)$$

Treba ovdje primijetiti, da je relacija (135) izvedena na temelju (64), a ova je dokazana potpunom indukcijom iz formule rekursije (4) odnosno (84). Nikakvo drugo svojstvo Besselovih funkcija nije kod dokaza upotrebjeno. Stoga se kod toga dokaza može operirati i nizom veličina $\dots, Z_{b-2}, Z_{b-1}, Z_b, Z_{b+1}, Z_{b+2}, \dots$, koje zadovoljavaju (84), pa su na temelju te formule rekursije određene kao funkcije od z , ako su, recimo, zadane dvije susjedne tih veličina kao bilo kako odabrane funkcije od z . Mogli bismo primjerice upotrebiti i same Lommelove polinome $\dots, M_{b-2,d}, M_{b-1,d}, M_{b,d}, M_{b+1,d}, M_{b+2,d}, \dots$ koji također zadovoljavaju (84), kako izlazi odmah iz (135), a dalo bi se to i izravno pokazati uvrštenjem definicije Lommelovih polinoma. Ovako proveden dokaz doveo bi izravno do (135), jer relacija (64) već ima taj oblik, kad se u njoj Besselove funkcije nadomjesto Lommelovim polinomima. Relacija (135) je dakle dokazana bez primjene kakvih specijalnih svojstava Besselovih funkcija. Isto to će vrijediti za sve relacije između Lommelovih polinoma, koje izvodimo, a u njima se ne pojavljuju Besselove funkcije. U literaturi su naprotiv kod izvoda svojstava Lommelovih polinoma često upotrebljene relacije, koje uključuju specijalna svojstva Besselovih funkcija.

Neki poznati specijalni slučajevi od (135)^{19, 20} lako se dobiju spomoću (82), (83) i (57) i znatno su pregledniji u novoj oznaci.

Izvest ćemo sad neke poznate relacije, u kojima se pojavljuju prve derivacije Lommelovih polinoma.

Za $a \neq b$ lako je spomoću definicije (33b) verificirati relaciju

$$M'_{a,b} + M'_{a+1,b+1} = \frac{a+b+1}{z} (M_{a,b} - M_{a+1,b+1}), \quad (137)$$

gdje akcenti znače derivacije po z . Za $a = b$ relacija (147) vrijedi zbog (34).

¹⁸ Watson, 9'64 (6). Relacija je tako dokazana na drugi način.

¹⁹ Watson, 9'64 (1), (2), (3); 9'63 (1), (2), (3).

²⁰ Nielsen, str. 34 (11). Tamo su provedene oznake s gornjim indeksima prema našim formulama (35), (36).

Smanjenjem indeksa a, b za jednu jedinicu dobijemo

$$M'_{a,b} - M'_{a-1,b-1} = \frac{-a-b+1}{z} (M_{a,b} - M_{a-1,b-1}). \quad (138)$$

Dalje dokazujemo relaciju

$$M'_{a,b} - M'_{a+1,b-1} = \frac{a-b+1}{z} (M_{a,b} + M_{a+1,b-1}). \quad (139)$$

Ovdje se verifikacija na temelju (33b), (102) najprije provodi uz pretpostavku

$$a - b > 0. \quad (140)$$

Zatim se vidi, da je zbog (34), (82), (83) relacija (139) ispravna i za $a - b = 0$, $a - b = -1$ i $a - b = -2$. Relacija time vrijedi za $a - b \geq -2$ (141). Pišemo li $a - 1$ mjesto a i $b + 1$ mjesto b , to dobijemo

$$M'_{a,b} - M'_{a-1,b+1} = \frac{-a+b+1}{z} (M_{a,b} + M_{a-1,b+1}), \quad (142)$$

a (141) prelazi u $(a - 1) - (b + 1) \geq -2$ ili $a - b \geq 0$ (143). Izmjena oznaka a i b daje spomoću (57) opet (139) sa $a - b \leq 0$ (144), dakle (139) vrijedi bez ograničenja. Vraćanjem prijašnjih oznaka dolazimo natrag na relaciju (138), koja dakle također vrijedi bez ograničenja.

Ako ε_1 i ε_2 svako za sebe može značiti $+1$ ili -1 , možemo relacije (137), (138), (139), (142) sažeti u oblik

$$\varepsilon_1 M'_{a,b} + \varepsilon_2 M'_{a+\varepsilon_1,b+\varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_1 a + \varepsilon_2 b + 1}{z} (\varepsilon_1 M_{a,b} - \varepsilon_2 M_{a+\varepsilon_1,b+\varepsilon_2}). \quad (145)$$

Formule bi u starim oznakama glasila²¹

$$R'_{m,v} + R'_{m,v+1} = \frac{m+2v}{z} (R_{m,v} - R_{m,v+1}) \quad (146)$$

$$R'_{m,v} + R'_{m,v-1} = \frac{-m-2v+2}{z} (R_{m,v} - R_{m,v-1}) \quad (147)$$

$$R'_{m,v} - R'_{m+2,v-1} = \frac{m+2}{z} (R'_{m,v} + R_{m+2,v-1}) \quad (148)$$

$$R'_{m,v} - R'_{m-2,v+1} = \frac{-m}{z} (R_{m,v} + R_{m-2,v+1}) \quad (149)$$

²¹ Formule (148), (149) spominje Nielsen, str. 37 (8), (9). Oznaka je tamo provedena s gornjim indeksima, prema našim formulama (35), (36).

odnosno u sažetom obliku

$$\varepsilon_1 R'_{m, \nu} + \varepsilon_2 R'_{m+\nu_1-\nu_2, \nu+\nu_2} = \frac{\varepsilon_1(m+\nu) + \varepsilon_2(\nu-1) + 1}{z} (\varepsilon_1 R_{m, \nu} - \varepsilon_2 R_{m+\nu_1-\nu_2, \nu+\nu_2}). \quad (150)$$

Vidi se na prvi pogled, da se simetrija i međusobna srodnost tih relacija mnogo bolje ističu u novoj oznaci.

Želimo li Lommelov polinom izraziti spomoću derivacija takvih polinoma, možemo u (139) sniziti a za jedan, odnosno povisiti b za jedan i dobivene jednakosti zbrojiti. Izlazi

$$M'_{a-1, b} - M'_{a, b-1} + M'_{a, b+1} - M'_{a+1, b} = \frac{a-b}{z} (M_{a-1, b} + M_{a+1, b} + M_{a, b+1} + M_{a, b-1}), \quad (151)$$

a ako desnu stranu pretvorimo spomoću relacija

$$\frac{2b}{z} M_{a, b} = M_{a, b+1} + M_{a, b-1} \quad (135a)$$

$$\frac{2a}{z} M_{a, b} = M_{a-1, b} + M_{a+1, b}, \quad (135b)$$

koje izlaze iz (135) na temelju (82), (83) i (57), dobijemo

$$\frac{2(a^2-b^2)}{z^2} M_{a, b} = M'_{a-1, b} - M'_{a, b-1} + M'_{a, b+1} - M'_{a+1, b}. \quad (152)$$

Treba li izraziti derivaciju Lommelova polinoma spomoću takvih polinoma, može se postupati ovako: diferenciranjem se dobiva iz (135a), (135b):

$$-\frac{2b}{z^2} M_{a, b} + \frac{2b}{z} M'_{a, b} = M'_{a, b+1} + M'_{a, b-1} \quad (153)$$

$$-\frac{2a}{z^2} M_{a, b} + \frac{2a}{z} M'_{a, b} = M'_{a-1, b} + M'_{a+1, b}. \quad (154)$$

Odbijemo li drugu jednakost od prve, dobijemo

$$\frac{2(a-b)}{z^2} M_{a, b} - \frac{2(a-b)}{z} M'_{a, b} = M'_{a, b+1} + M'_{a, b-1} - M'_{a-1, b} - M'_{a+1, b}. \quad (155)$$

Nadomjestimo li prvi i četvrti član desne strane u smislu (139), a drugi i treći član u smislu (142) te dijelimo sa $\frac{a-b}{z}$, to izlazi

$$M'_{a,b} = \frac{1}{z} M_{a,b} + \frac{1}{2} (M_{a,b-1} + M_{a-1,b} - M_{a,b+1} - M_{a+1,b}). \quad (156)$$

Do istog rezultata se dolazi, ako se (153) i (154) zbroje i upotrebe formule (137), (138). Iz (156), (135a) i (135b) možemo eliminirati $M_{a,b-1}$ i $M_{a-1,b}$ ili $M_{a,b-1}$ i $M_{a+1,b}$ ili $M_{a,b+1}$ i $M_{a-1,b}$ ili $M_{a,b+1}$ i $M_{a+1,b}$, pa dobijemo četiri relacije:

$$M'_{a,b} = \frac{a+b+1}{z} M_{a,b} - M_{a,b+1} - M_{a+1,b} \quad (157)$$

$$M'_{a,b} = \frac{-a+b+1}{z} M_{a,b} + M_{a-1,b} - M_{a,b+1} \quad (158)$$

$$M'_{a,b} = \frac{a-b+1}{z} M_{a,b} + M_{a,b-1} - M_{a+1,b} \quad (159)$$

$$M'_{a,b} = \frac{-a-b+1}{z} M_{a,b} + M_{a,b-1} + M_{a-1,b}. \quad (160)$$

Te se relacije daju sažeti u

$$M'_{a,b} = \frac{\varepsilon_1 a + \varepsilon_2 b + 1}{z} M_{a,b} - \varepsilon_1 M_{a+\varepsilon_1, b} - \varepsilon_2 M_{a, b+\varepsilon_2}. \quad (161)$$

U starim oznakama te su formule²² manje pregledne.

Lommelovi polinomi zadovoljavaju diferencijalnu jednačbu, koja za polinom $y = R_{m,r}(z)$ glasi u starim oznakama²³

$$(\vartheta + m)(\vartheta + 2\nu + m - 2)(\vartheta - 2\nu - m)(\vartheta - m - 2)y + \\ + 4z^2 \vartheta(\vartheta + 1)y = 0, \quad (162)$$

pri čemu je upotrebljen simbol

$$\vartheta = z \frac{d}{dz}. \quad (163)$$

²² Watson, 9'63 (6), (5), (4), (7). Formule su tamo drukčije dokazane.

²³ Watson, 9'61 (6). Dokaz je tamo drukčije proveden.

U novim oznakama ta diferencijalna jednadžba glasi za polinom $y = M_{a,b}(z)$:

$$(\vartheta + a - b - 1)(\vartheta + a + b - 1)(\vartheta - a - b - 1)(\vartheta - a + b - 1)y + 4z^2\vartheta(\vartheta + 1)y = 0. \quad (164)$$

Da je dokažemo, pišemo relacije (157), (158), (159), (160) u obliku

$$M'_{a,b} = \frac{a+b+1}{z} M_{a,b} - M_{a,b+1} - M_{a+1,b} \quad (165)$$

$$M'_{a+1,b} = \frac{-a+b}{z} M_{a+1,b} + M_{a,b} - M_{a+1,b+1} \quad (166)$$

$$M'_{a,b+1} = \frac{a-b}{z} M_{a,b+1} + M_{a,b} - M_{a+1,b+1} \quad (167)$$

$$M'_{a+1,b+1} = \frac{-a-b-1}{z} M_{a+1,b+1} + M_{a+1,b} + M_{a,b+1}. \quad (168)$$

Derivacije polinoma, koje se pojavljuju kod postupene primjene operacija propisanih u diferencijalnoj jednadžbi, nadomještavamo uvijek prema posljednjim formulama, pa tako redom dobivamo:

$$(\vartheta - a - b - 1) M_{a,b} = -z M_{a,b+1} - z M_{a+1,b} \quad (169)$$

$$(\vartheta + a + b - 1)(\vartheta - a - b - 1) M_{a,b} = -2z^2 M_{a,b} + 2z^2 M_{a+1,b+1} - 2az M_{a,b+1} - 2bz M_{a+1,b} \quad (170)$$

$$(\vartheta + a - b - 1)(\vartheta + a + b - 1)(\vartheta - a - b - 1) M_{a,b} = -2(3a+b+2)z^2 M_{a,b} + 2(a-b)z^2 M_{a+1,b+1} + [4z^3 - 4a(a-b)z] M_{a,b+1} + 4z^3 M_{a+1,b} \quad (171)$$

$$(\vartheta - a + b - 1)(\vartheta + a - b - 1)(\vartheta + a + b - 1)(\vartheta - a - b - 1) M_{a,b} = [8z^4 - 4(a+b+2)(a+b+1)z^2] M_{a,b} - 8z^4 M_{a+1,b+1} + 4(2a+3)z^3 M_{a,b+1} + 4(2b+3)z^3 M_{a+1,b} \quad (172)$$

$$(\vartheta + 1) M_{a,b} = (a+b+2) M_{a,b} - z M_{a,b+1} - z M_{a+1,b} \quad (173)$$

$$4z^2\vartheta(\vartheta + 1) M_{a,b} = [-8z^4 + 4(a+b+2)(a+b+1)z^2] M_{a,b} + 8z^4 M_{a+1,b+1} - 4(2a+3)z^3 M_{a,b+1} - 4(2b+3)z^3 M_{a+1,b}. \quad (174)$$

Jasno je, da je svejedno, kojim redom primjenjujemo simboličke faktore prvog člana lijeve strane jednadžbe (164), pa je stoga ta diferencijalna jednadžba na temelju (172) i (174) dokazana.

Zabilježimo još jedan specijalni slučaj opće tročlane relacije (135). Stavimo li u njoj

$$a = m + \frac{1}{2}, \quad b = -m - \frac{1}{2}, \quad c = \frac{1}{2}, \quad d = -\frac{1}{2}, \quad (175)$$

to izlazi zbog (82)

$$M_{-m-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} M_{m+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} + M_{\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}} M_{-m-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} = -M_{m+\frac{1}{2}, -m-\frac{1}{2}} \quad (176)$$

ili upotrebom od (58)

$$M_{m+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^2 + M_{m+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}}^2 = (-1)^m M_{m+\frac{1}{2}, -m-\frac{1}{2}}, \quad (177)$$

što u staroj oznaci glasi²⁴

$$R_{m-1, \frac{3}{2}}^2 + R_{m, \frac{1}{2}}^2 = (-1)^m R_{2m, \frac{1}{2}-m}. \quad (178)$$

Konačno još neke relacije, koje uključuju Besselove funkcije:

Iz (64) dobiju se kao specijalni slučajevi spomoću (82) jednakosti:

$$J_a = J_{b+1} M_{a,b} + J_b M_{b+1,a}, \quad (179)$$

$$J_{-a} = J_{-b-1} M_{-a,-b} + J_{-b} M_{-b-1,-a}, \quad (180)$$

ili s obzirom na (58)

$$(-1)^{a-b-1} J_{-a} = J_{-b-1} M_{a,b} - J_{-b} M_{b+1,a}. \quad (181)$$

Pomnoži li se (179) sa J_{-b} a (180) sa J_b i zbroje li se dobivene jednakosti, to izlazi

$$J_a J_{-b} + (-1)^{a-b-1} J_{-a} J_b = M_{a,b} (J_{b+1} J_{-b} - J_{-b-1} J_b) \quad (182)$$

ili zbog (26)

$$J_a J_{-b} + (-1)^{a-b-1} J_{-a} J_b = M_{a,b} \frac{\sin [(b+1)\pi]}{\pi z}. \quad (183)$$

²⁴ Watson, 9⁶² (8). Tamo je dokaz proveden kvadriranjem i zbrajanjem naših relacija (188), (189), dakle upotrebom specijalnih svojstava (124), (125) Besselovih funkcija.

U staroj oznaci ovo glasi²⁵

$$J_{\nu+m} J_{-\nu+1} + (-1)^m J_{-\nu-m} J_{\nu-1} = R_{m,\nu} \frac{\sin \nu \pi}{\pi z}. \quad (184)$$

Za $a = -b$, dakle $a - b = 2a$ mora a biti polucio realan broj. Stavimo li

$$a = m + \frac{1}{2}, b = -m - \frac{1}{2}, 2a = 2m + 1, \quad (185)$$

to (183) glasi

$$J_{m+\frac{1}{2}}^2 + J_{-m-\frac{1}{2}}^2 = M_{m+\frac{1}{2}, -m-\frac{1}{2}} \frac{2(-1)^m}{\pi z} \quad (186)$$

ili²⁶

$$J_{m+\frac{1}{2}}^2 + J_{-m-\frac{1}{2}}^2 = R_{2m, \frac{1}{2}, -m} \frac{2(-1)^m}{\pi z}. \quad (187)$$

Spominjemo dva specijalna slučaja formule (64), koja na temelju (124), (125), (58) glase²⁷

$$J_{m+\frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \sin z M_{m+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} - \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \cos z M_{m+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}} \quad (188)$$

$$(-1)^m J_{-m-\frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \cos z M_{m+\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} + \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} \sin z M_{m+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}. \quad (189)$$

Kvadriranjem i zbrajanjem te upotrebom od (187) opet se dolazi na relaciju (177), kako je spomenuto u bilješci²⁴.

Da zaokružimo ovaj prikaz svojstava Lommelovih polinoma, dat ćemo još ukratko svezu s teorijom verižnih razlomaka, koja je u načelu poznata²⁸. Služit ćemo se pri tom našom novom oznakom, dok će oznake za verižne razlomke biti iste kao u Perronovu djelu²⁹.

²⁵ Watson, 9'61 (2).

²⁶ Watson, 9'62 (4).

²⁷ Watson, 9'62 (7).

²⁸ Watson, 9'6; 9'64. Tamo se citira Crelier: *Annali di mat.* (2) XXIV (1896) od str. 136 dalje. Autor nije imao uvida u taj rad.

²⁹ O. Perron: *Die Lehre von den Kettenbrüchen*. Teubner, Leipzig u. Berlin 1929. Ovo ćemo djelo citirati sa »Perron«.

Definiramo³⁰

$$A_{r,\lambda} = K \begin{pmatrix} a_{\lambda+1}, a_{\lambda+2}, \dots, a_{\lambda+r} \\ b_{\lambda}, b_{\lambda+1}, \dots, b_{\lambda+r} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} b_{\lambda} & -1 & 0 & 0 & 0 \dots \\ a_{\lambda+1} & b_{\lambda+1} & -1 & 0 & 0 \dots \\ 0 & a_{\lambda+2} & b_{\lambda+2} & -1 & 0 \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (190)$$

$$A_{r,0} = A_r \quad (191), \quad B_{r,\lambda} = A_{r-1,\lambda+1} \quad (192)$$

$$A_{-1,\lambda} = 1, B_{-1,\lambda} = 0, A_{0,\lambda} = b_{\lambda}, B_{0,\lambda} = 1, B_{1,\lambda} = b_{\lambda+1}. \quad (193)$$

Ako među varijablama $x_0, x_1, x_2, \dots$ postoje jednačbe³¹

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= b_0 x_1 + a_1 x_2 \\ x_1 &= b_1 x_2 + a_2 x_3 \\ &\dots \dots \dots \\ x_r &= b_r x_{r+1} + a_{r+1} x_{r+2} \end{aligned} \right\}, \quad (194)$$

vrijedi³²

$$x_{\lambda} = A_{r-1,\lambda} x_{r+\lambda} + a_{r+\lambda} A_{r-2,\lambda} x_{r+\lambda+1} \quad (195)$$

$$x_{\lambda+1} = B_{r-1,\lambda} x_{r+\lambda} + a_{r+\lambda} B_{r-2,\lambda} x_{r+\lambda+1}, \quad (196)$$

a $\frac{x_0}{x_1}$ se može predočiti kao verižni razlomak³³

$$\frac{x_0}{x_1} = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \dots + \frac{a_{r-1}}{b_{r-1}} + \frac{a_r}{x_r : x_{r+1}}. \quad (197)$$

Dalje vrijedi relacija³⁴

$$\begin{aligned} B_{r-1,\lambda} A_{r+\lambda+1} &= B_{r+\lambda-1,\lambda} A_{r+\lambda-1} + \\ &+ (-1)^{r-1} a_{r+1} a_{r+2} \dots a_{r+\lambda} B_{\lambda-1,\lambda+r} A_{r-1}. \end{aligned} \quad (198)$$

Povisi li se indeks svih a_{λ}, b_{λ} za q , to se prema (190), (191) povisuju drugi indeksi izraza $A_{r,\lambda}, B_{r,\lambda}$ za q , t. j. iz njih postaje $A_{r,\lambda+q}, B_{r,\lambda+q}$, a prema (191) postaje $A_{r,q}$ iz $A_r = A_{r,0}$. Relacija (198) dobiva oblik

³⁰ Perron, str. 14 (23), (23a), str. 6 (9), str. 11 (15), str. 15 (25).

³¹ Perron, str. 12 (21).

³² Perron, str. 14.

³³ Perron, str. 13.

³⁴ Perron, str. 18 (36).

$$\begin{aligned}
B_{r-1, \mu+q} A_{\mu+r+\lambda-1, q} &= \\
&= B_{r+\lambda-1, \mu+q} A_{\mu+r-1, q} + (-1)^{r-1} a_{\mu+q+1} a_{\mu+q+2} \dots \\
&\dots a_{\mu+q+r} B_{\lambda-1, \mu+r+q} A_{\mu-1, q}.
\end{aligned} \quad (199)$$

Stavimo li

$$a_\lambda = -1 \quad (\lambda = 0, 1, 2, \dots) \quad (200)$$

$$b_\lambda = \frac{2(\lambda+1)}{z} \quad (\lambda = 0, 1, 2, \dots) \quad (201)$$

$$x_\lambda = J_\lambda(z) \quad (\lambda = 0, 1, 2, \dots), \quad (202)$$

to formula rekurzije Besselovih funkcija

$$J_{\lambda-1} = \frac{2\lambda}{z} J_\lambda - J_{\lambda+1} \quad (\lambda = 0, 1, 2, \dots) \quad (203)$$

postaje identična s jednadžbama (194), tako da prema (195) mora vrijediti

$$J_\lambda = A_{r-1, \lambda} J_{r+\lambda} - A_{r-2, \lambda} J_{r+\lambda+1} \quad (204)$$

ili

$$J_{r+\lambda+1} A_{r-2, \lambda} - J_{r+\lambda} A_{r-1, \lambda} + J_\lambda = 0. \quad (205)$$

Usporedba sa (64) pokazuje, da mora biti

$$A_{r-2, \lambda} = M_{r+\lambda, \lambda}, \quad A_{r-1, \lambda} = M_{r+\lambda+1, \lambda} \quad (206)$$

ili s obzirom na (190), (200), (201)

$$M_{r, \lambda} = A_{r-\lambda-2, \lambda} = K \begin{pmatrix} -1, & -1, \dots, -1 \\ \frac{2(\lambda+1)}{z}, & \frac{2(\lambda+2)}{z}, \dots, \frac{2(r-1)}{z} \end{pmatrix}. \quad (207)$$

pa su time Lommelovi polinomi izraženi kao kontinuantе.

S obzirom na (200), (192) dobije se iz (199)

$$\begin{aligned}
A_{r-2, \mu+q+1} A_{\mu+r+\lambda-1, q} &= \\
&= A_{r+\lambda-2, \mu+q+1} A_{\mu+r-1, q} - A_{\lambda-2, \mu+r+q+1} A_{\mu-1, q}
\end{aligned} \quad (208)$$

ili prema (207)

$$\begin{aligned}
M_{\mu+q+r+1, \mu+q+1} M_{\mu+r+\lambda+q+1, q} &= \\
&= M_{\mu+r+\lambda+q+1, \mu+q+1} M_{\mu+r+q+1, q} - \\
&- M_{\mu+r+\lambda+q+1, \mu+r+q+1} M_{\mu+q+1, q}.
\end{aligned} \quad (209)$$

Stavimo li u ovoj formuli

$$\begin{aligned}\mu + \varrho + \nu + 1 &= m, & \mu + \varrho + 1 &= n, \\ \mu + \nu + \lambda + \varrho + 1 &= p, & \varrho &= q,\end{aligned}\quad (210)$$

to izlazi

$$M_{m,n} M_{p,q} = M_{p,n} M_{m,q} - M_{p,m} M_{n,q}, \quad (211)$$

što se zbog (58) slaže sa (64). Indeksi su ovdje cijeli brojevi.

Dalje ne ulazimo u svezu Lommelovih polinoma s verižnim razlomcima.

3. Izrazi za m -te derivacije funkcija $A_n(c\sqrt{t^2-z^2})$ i $A_n[c(t-z)]$.

Prema (8) i (9) vrijedi

$$\frac{\partial}{\partial z} A_n[c(t-z)] = \frac{c^2(t-z)}{2(n+1)} A_{n+1}[c(t-z)] \quad (212)$$

i

$$\frac{\partial}{\partial z} A_n(c\sqrt{t^2-z^2}) = \frac{c^2 z}{2(n+1)} A_{n+1}(c\sqrt{t^2-z^2}). \quad (213)$$

Diferenciramo li (212) m puta, dobijemo očito članove oblika $a(t-z)^n A_{n+q}[c(t-z)]$, ako kod diferenciranja A -funkcije derivaciju uvijek izrazimo prema (212). Ako smo do jednog od tih članova došli time, da smo u bilo kojem poretку diferencirali po potenciji od $t-z$ svega w puta, a po A -funkciji svega $m-w$ puta, i ako uočimo, da diferenciranje po potenciji od $t-z$ snižava njezin eksponent za jednu jedinicu, a diferenciranje A -funkcije povišuje za jednu jedinicu eksponent potencije i red A -funkcije, to je jasno, da dotični član ima oblik $(-1)^w a_w (t-z)^{m-2w} A_{n+m-w}[c(t-z)]$. Dobivamo dakle

$$\frac{\partial^m}{\partial z^m} A_n[c(t-z)] = \sum_{w=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} (-1)^w a_w (t-z)^{m-2w} A_{n+m-w}[c(t-z)]. \quad (214)$$

Gornja granica sume je određena time, da eksponent potencije od $t-z$ ne može postati negativan. Sasvim analogno razmatranje može se provesti na temelju (213), pa se dolazi do relacije

$$\frac{\partial^m}{\partial z^m} A_n(c\sqrt{t^2-z^2}) = \sum_{w=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} a_w z^{m-2w} A_{n+m-w}(c\sqrt{t^2-z^2}), \quad (215)$$

gdje su a_w isti koeficijenti kao u (214). Da te koeficijente odredimo, provest ćemo ovo razmatranje. Razvijemo $A_n(c\sqrt{t^2 - z^2})$ prema (1) po $c\sqrt{t^2 - z^2}$ u red potencija i nadomjestimo potencije od $t^2 - z^2$ njihovim binomnim razvojem:

$$A_n(c\sqrt{t^2 - z^2}) = n! \sum_{w=0}^{\infty} \frac{(-1)^w \left(\frac{c}{2}\right)^{2w} \sum_{v=0}^w (-1)^v \binom{w}{v} t^{2w-2v} z^{2v}}{w! (n+w)!} \quad (216)$$

ili

$$A_n(c\sqrt{t^2 - z^2}) = n! \sum_{w=0}^{\infty} \sum_{v=0}^w \frac{(-1)^{w+v} \left(\frac{c}{2}\right)^{2w} t^{2w-2v} z^{2v}}{v! (w-v)! (n+w)!} \quad (217)$$

Razlikujući slučajeve takog i lihog m stavljamo u prvom slučaju $m = 2r$ (218), a u drugom slučaju $m = 2r + 1$ (219). Diferenciramo li (217) m puta, dobijemo prema (218) odnosno (219)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{2r}}{\partial z^{2r}} A_n(c\sqrt{t^2 - z^2}) = \\ & = n! \sum_{w=r}^{\infty} \sum_{v=r}^w \frac{(-1)^{w+v} \left(\frac{c}{2}\right)^{2w} (2v)! t^{2w-2v} z^{2v-2r}}{(2v-2r)! v! (w-v)! (n+w)!}, \quad (220) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{2r+1}}{\partial z^{2r+1}} A_n(c\sqrt{t^2 - z^2}) = \\ & = n! \sum_{w=r+1}^{\infty} \sum_{v=r+1}^w \frac{(-1)^{w+v} \left(\frac{c}{2}\right)^{2w} (2v)! t^{2w-2v} z^{2v-2r-1}}{(2v-2r-1)! v! (w-v)! (n+w)!}. \quad (221) \end{aligned}$$

Uvedemo li sad nove indekse sumacije

$$\bar{v} = v - r - 1 \quad (222), \quad \bar{w} = w - r - 1, \quad (223)$$

to izlazi:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{2r}}{\partial z^{2r}} A_n(c\sqrt{t^2 - z^2}) = \\ & = n! \left(\frac{c}{2}\right)^{2r} \sum_{w=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\bar{w}} \frac{(-1)^{w+\bar{v}} \left(\frac{c}{2}\right)^{2\bar{w}} (2v+2r)! t^{2\bar{w}-2\bar{v}} z^{2\bar{v}}}{(2v)! (v+r)! (w-v)! (n+r+w)!}, \quad (224) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{2r+1}}{\partial z^{2r+1}} A_n(c\sqrt{t^2 - z^2}) = \\ & = n! \left(\frac{c}{2}\right)^{2r+1} \sum_{\bar{w}=0}^{\infty} \sum_{\bar{v}=0}^{\bar{w}} \frac{(-1)^{\bar{w}+\bar{v}} \left(\frac{c}{2}\right)^{2\bar{w}+1} (2\bar{v} + 2r + 2)! t^{2\bar{w}-2\bar{v}} z^{\bar{v}+1}}{(2\bar{v} + 1)! (\bar{v} + r + 1)! (\bar{w} - \bar{v})! (n + r + \bar{w} + 1)!}. \end{aligned} \quad (225)$$

Stavimo $z = t$:

$$\left\{ \frac{\partial^{2r}}{\partial z^{2r}} A_n(c\sqrt{t^2 - z^2}) \right\}_{z=t} = n! \left(\frac{c}{2}\right)^{2r} \sum_{w=0}^{\infty} \frac{(-1)^w \left(\frac{c}{2}\right)^{2w} A_w t^{2w}}{(n + r + w)!}, \quad (226)$$

gdje je

$$A_w = \sum_{v=0}^w \frac{(-1)^v (2v + 2r)!}{(2v)! (v + r)! (w - v)!} \quad (227)$$

i

$$\left\{ \frac{\partial^{2r+1}}{\partial z^{2r+1}} A_n(c\sqrt{t^2 - z^2}) \right\}_{z=t} = n! \left(\frac{c}{2}\right)^{2r+1} \sum_{w=0}^{\infty} \frac{(-1)^w \left(\frac{c}{2}\right)^{2w+1} B_w t^{2w+1}}{(n + r + w + 1)!}, \quad (228)$$

gdje je

$$B_w = \sum_{v=0}^w \frac{(-1)^v (2v + 2r + 2)!}{(2v + 1)! (v + r + 1)! (w - v)!}. \quad (229)$$

U predašnjem dijelu ove radnje je dokazano:

$$\begin{aligned} A_w &= 0 & \text{za } w > r \\ A_w &= \frac{(-1)^w 2^{2w} (2r)!}{(2w)! (r - w)!} & \text{za } w \leq r \end{aligned} \quad (230)$$

$$\begin{aligned} B_w &= 0 & \text{za } w > r \\ B_w &= \frac{(-1)^w 2^{2w+1} (2r + 1)!}{(2w + 1)! (r - w)!} & \text{za } w \leq r. \end{aligned} \quad (231)$$

Uvrštenje u (226) i (228) daje

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial^{2r}}{\partial z^{2r}} A_n(c\sqrt{t^2 - z^2}) \right\}_{z=t} = \\ & = n! \left(\frac{c}{2}\right)^{2r} (2r)! \sum_{w=0}^r \frac{c^{2w} t^{2w}}{(2w)! (r - w)! (n + r + w)!}, \end{aligned} \quad (232)$$

$$\left\{ \frac{\partial^{2r+1}}{\partial z^{2r+1}} A_n(c\sqrt{t^2 - z^2}) \right\}_{z=t} =$$

$$= n! \left(\frac{c}{2}\right)^{2r+1} (2r+1)! \sum_{w=0}^r \frac{c^{2w+1} t^{2w+1}}{(2w+1)! (r-w)! (n+r+w+1)!} \quad (233)$$

Uvedemo li nov indeks sumacije i to $\bar{w} = r - w$ (234), to možemo obje formule sažeti u jednu upotreblivši (218), (219):

$$\left\{ \frac{\partial^n}{\partial z^n} A_n(c\sqrt{t^2 - z^2}) \right\}_{z=t} = n! \left(\frac{c}{2}\right)^m m! \sum_{w=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{c^{m-2w} t^{m-2w}}{(m-2w)! w! (n+m-w)!} \quad (235)$$

Stavimo li u (215) $z = t$ i uočimo, da je prema (1) $A_n(0) = 1$ (236), to izlazi

$$\left\{ \frac{\partial^m}{\partial z^m} A_n(c\sqrt{t^2 - z^2}) \right\}_{z=t} = \sum_{w=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} a_w t^{m-2w} \quad (237)$$

Poredba od (235) i (237) daje tražene koeficijente a_w :

$$a_w = \frac{n! m! c^{2m-2w}}{2^m w! (m-2w)! (m+n-w)!} \quad (238)$$

Uvrstimo li to u (214) i (215), dobijemo konačno:

$$\frac{\partial^m}{\partial z^m} A_n[c(t-z)] =$$

$$= \sum_{w=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{(-1)^w n! m! c^{2m-2w} (t-z)^{m-2w} A_{n+m-w}[c(t-z)]}{2^m w! (m-2w)! (n+m-w)!}, \quad (239)$$

$$\frac{\partial^m}{\partial z^m} A_n(c\sqrt{t^2 - z^2}) = \sum_{w=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{n! m! c^{2m-2w} z^{m-2w} A_{n+m-w}(c\sqrt{t^2 - z^2})}{2^m w! (m-2w)! (n+m-w)!} \quad (240)$$

Stavimo li u (240) $z = i\bar{t}$, $t = i\bar{z}$, (241), pa naknadno opet ispuštimo poteze nad z i t , to dobijemo:

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m} A_n(c\sqrt{t^2-z^2}) =$$

$$= \sum_{w=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{(-1)^{m-w} n! m! c^{2m-2w} t^{m-2w} A_{n+m-w}(c\sqrt{t^2-z^2})}{2^m w! (m-2w)! (n+m-w)!}. \quad (242)$$

Zanimljive su još dvije relacije, koje istina kasnije ne ćemo trebati. Budući da se u (224) i (225) radi o apsolutno konvergentnim redovima, to možemo članove poredati kako hoćemo. Uvedemo li dakle mjesto w novi indeks sumacije $\bar{w} = w + v$ (243), to izlazi

$$\frac{\partial^{2r}}{\partial z^{2r}} A_n(c\sqrt{t^2-z^2}) =$$

$$= n! \left(\frac{c}{2}\right)^{2r} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{\left(\frac{c}{2}\right)^{2v} (2v+2r)! z^{2v}}{(2v)! (v+r)!} \sum_{w=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\bar{w}} \left(\frac{c}{2}\right)^{2\bar{w}} t^{2\bar{w}}}{w! (n+r+v+w)!} \right), \quad (244)$$

$$\frac{\partial^{2r+1}}{\partial z^{2r+1}} A_n(c\sqrt{t^2-z^2}) =$$

$$= n! \left(\frac{c}{2}\right)^{2r+1} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\frac{\left(\frac{c}{2}\right)^{2v+1} (2v+2r+2)! z^{2v+1}}{(2v+1)! (v+r+1)!} \sum_{w=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\bar{w}} \left(\frac{c}{2}\right)^{2\bar{w}} t^{2\bar{w}}}{w! (n+r+v+w+1)!} \right) \quad (245)$$

ili s obzirom na (1):

$$\frac{\partial^{2r}}{\partial z^{2r}} A_n(c\sqrt{t^2-z^2}) =$$

$$= n! \left(\frac{c}{2}\right)^{2r} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{c}{2}\right)^{2v} (2v+2r)! z^{2v}}{(2v)! (v+r)! (n+r+v)!} A_{n+r+v}(ct), \quad (246)$$

$$\frac{\partial^{2r+1}}{\partial z^{2r+1}} A_n(c\sqrt{t^2-z^2}) =$$

$$= n! \left(\frac{c}{2}\right)^{2r+1} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{c}{2}\right)^{2v+1} (2v+2r+2)! z^{2v+1}}{(2v+1)! (v+r+1)! (n+r+v+1)!} A_{n+r+v+1}(ct). \quad (247)$$

Ove su formule razvoji po potencijama od z , a mogu se shvatiti i kao Neumannovi razvoji³⁵ po varijabli t .

³⁵ Watson, 1611.

4. Redukcija integrala $\int_X^t x^n A_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx$.

Ako u (6) stavimo $n=1$, $z=\sqrt{t^2-x^2}$ i jednakost pomnožimo sa x^n , dobijemo

$$x^n A_0(c\sqrt{t^2-x^2}) = x^n A_1(c\sqrt{t^2-x^2}) + \\ + \frac{c^2 x^{n+2}}{8} A_2(c\sqrt{t^2-x^2}) - \frac{c^2 t^2 x^n}{8} A_2(c\sqrt{t^2-x^2}). \quad (248)$$

Dalje izlazi iz (9)

$$x A_{n+1}(c\sqrt{t^2-x^2}) = \frac{2(n+1)}{c^2} \frac{\partial}{\partial x} A_n(c\sqrt{t^2-x^2}) \quad (249)$$

i prema tome parcijalnom integracijom

$$\int_X^t x^n A_1(c\sqrt{t^2-x^2}) dx = \\ = \frac{2t^{n-1}}{c^2} - \frac{2X^{n-1}}{c^2} A_0(c\sqrt{t^2-X^2}) - \frac{2(n-1)}{c^2} \int_X^t x^{n-2} A_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx, \quad (250) \\ \int_X^t x^{n+2} A_2(c\sqrt{t^2-X^2}) dx = \\ = \frac{4t^{n+1}}{c^2} - \frac{4X^{n+1}}{c^2} A_1(c\sqrt{t^2-X^2}) - \frac{4(n+1)}{c^2} \int_X^t x^n A_1(c\sqrt{t^2-x^2}) dx = \\ = \frac{4t^{n+1}}{c^2} - \frac{4X^{n+1}}{c^2} A_1(c\sqrt{t^2-X^2}) - \frac{8(n+1)t^{n-1}}{c^4} + \\ + \frac{8(n+1)X^{n-1}}{c^4} A_0(c\sqrt{t^2-X^2}) + \frac{8(n+1)(n-1)}{c^4} \int_X^t x^{n-2} A_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx, \quad (251)$$

$$\int_X^t x^n A_2(c\sqrt{t^2-x^2}) dx = \frac{4t^{n-1}}{c^2} - \frac{4X^{n-1}}{c^2} A_1(c\sqrt{t^2-X^2}) - \frac{8(n-1)t^{n-3}}{c^4} + \\ + \frac{8(n-1)X^{n-3}}{c^4} A_0(c\sqrt{t^2-X^2}) + \frac{8(n-1)(n-3)}{c^4} \int_X^t x^{n-4} A_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx. \quad (252)$$

Pri tome za $n \geq 4$ vrijede sve tri relacije (250), (251), (252). Za $n = 3$ otpada u (252) zadnji član, dok ostale dvije jednakosti vrijede nepromijenjeno, za $n = 2$ relacija (250) vrijedi nepromijenjeno, isto tako (251), dok umjesto (252) dolazi

$$\int_X^t x^2 A_2(c\sqrt{t^2-x^2}) dx = \\ = \frac{4t}{c^2} - \frac{4X}{c^2} A_1(c\sqrt{t^2-X^2}) - \frac{4}{c^2} \int_X^t A_1(c\sqrt{t^2-x^2}) dx. \quad (253)$$

Za $n = 1$ u (250) otpada zadnji član, isto tako u (251), dok u (252) otpadaju zadnja tri člana.

Integriramo li (248) po x od X do t i nadomjestimo integrale na desnoj strani s pomoću (250), (251), (252), odnosno (253), dobijemo za $n = 1$:

$$\int_X^t x A_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx = \frac{t^2-X^2}{2} A_1(c\sqrt{t^2-X^2}), \quad (254)$$

za $n = 2$:

$$\int_X^t x^2 A_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx = \frac{1}{c^2} \int_X^t A_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx + \frac{t^2}{2} \int_X^t A_1(c\sqrt{t^2-x^2}) dx + \\ + \frac{X(t^2-X^2)}{2} A_1(c\sqrt{t^2-X^2}) + \frac{X}{c^2} A_0(c\sqrt{t^2-X^2}) - \frac{t}{c^2}, \quad (255)$$

za $n = 3$, uzevši još u obzir (254),

$$\int_X^t x^3 A_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx = \frac{4}{c^2} \int_X^t x A_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx - \frac{2(t^2-X^2)}{c^2} A_0(c\sqrt{t^2-X^2}) + \\ + \frac{X^2(t^2-X^2)}{2} A_1(c\sqrt{t^2-X^2}) = \\ = \left(\frac{2}{c^2} + \frac{X^2}{2}\right)(t^2-X^2) A_1(c\sqrt{t^2-X^2}) - \frac{2(t^2-X^2)}{c^2} A_0(c\sqrt{t^2-X^2}), \quad (256)$$

za $n \geq 4$:

$$\begin{aligned} \int_X^t x^n \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx &= \frac{(n-1)^2}{c^2} \int_X^t x^{n-2} \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx - \\ &- \frac{(n-1)(n-3)t^2}{c^2} \int_X^t x^{n-1} \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx - \frac{(n-1)X^{n-3}(t^2-X^2)}{c^2} \Lambda_0(c\sqrt{t^2-X^2}) + \\ &+ \frac{X^{n-1}(t^2-X^2)}{2} \Lambda_1(c\sqrt{t^2-X^2}). \end{aligned} \quad (257)$$

Razmotrimo sad nešto općenitije slijed veličina $Q_0, Q_1, Q_2, \dots$, od kojih su prve četiri, t. j. Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 , zadane, dok su ostale određene jednadžbom rekurzije

$$Q_n = \frac{(n-1)^2}{c^2} Q_{n-2} - \frac{(n-1)(n-3)t^2}{c^2} Q_{n-1} + (n-1)X^{n-3}R + X^{n-3}T, \quad (258)$$

gdje su R i T zadane veličine. Jasno je, da Q_1 i Q_3 određuju sve Q_n s lihim n , dok Q_0 i Q_2 određuju sve Q_n s takim n . Stavimo li za liho n

$$n = 2m + 1, \quad (259)$$

to (258) dobiva oblik

$$Q_{2m+1} = \frac{4m^2}{c^2} Q_{2m-1} - \frac{4m(m-1)t^2}{c^2} Q_{2m-3} + 2mX^{2m-2}R + X^{2m-2}T. \quad (260)$$

Za tako n stavimo $n = 2m$ (261) i dobijemo umjesto (258)

$$Q_{2m} = \frac{(2m-1)^2}{c^2} Q_{2m-2} - \frac{(2m-1)(2m-3)t^2}{c^2} Q_{2m-4} + (2m-1)X^{2m-3}R + X^{2m-3}T. \quad (262)$$

Prema rečenom (258) vrijedi za $n \geq 4$, tako da (260) i (262) vrijede za $m \geq 2$.

Tvrdimo, da za $m \geq 2$ vrijede ove direktne formule:

$$\begin{aligned} Q_{2m+1} &= Q_1 \sum_{s=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s} m! (m-s-1)! (m-s+1)! t^{2s}}{(m-2s)! (s-1)! (s+1)! c^{2m-2s}} + \\ &+ Q_3 \sum_{s=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s-2} m! (m-s-1)! (m-s)! t^{2s}}{(m-2s-1)! s! (s+1)! c^{2m-2s-2}} + \end{aligned}$$

$$+ \sum_{\substack{r+s \leq m \\ r, s \\ r \geq 2 \\ s \geq 0}} \left(R + \frac{T}{2r} \right) \frac{(-1)^s 2^{2m-2r-2s+1} m! (m-r-s)! (m-s)! X^{2r-2} t^{2s}}{(m-r-2s)! (r-1)! s! (r+s)! c^{2m-2r-2s}}, \quad (263)$$

$$Q_{2m} = Q_0 \sum_{s=1}^{\left[\frac{m}{2} \right]} \frac{s (-1)^s (2m)! (2m-2s+1)! t^{2s}}{(m-s) 2^{2m-2s} m! (m-2s)! (2s+1)! c^{2m-2s}} +$$

$$+ Q_2 \sum_{s=0}^{\left[\frac{m-1}{2} \right]} \frac{(-1)^s (2m)! (2m-2s-1)! t^{2s}}{2^{2m-2s-1} m! (m-2s-1)! (2s+1)! c^{2m-2s-2}} +$$

$$+ \sum_{\substack{r+s \leq m \\ r, s \\ r \geq 2 \\ s \geq 0}} \left(R + \frac{T}{2r-1} \right) \frac{(-1)^s (m-r-s)! (2m)! (r-1)! (2m-2s)! (r+s)! X^{2r-3} t^{2s}}{2^{2m-2r-2s+1} (m-r-2s)! m! (2r-2)! (m-s)! (2r+2s)! s! c^{2m-2r-2s}}. \quad (264)$$

Stavimo li u tim formulama $m=2$, to je lako vidjeti, da se za taj slučaj podudaraju s formulama (260), (262), t. j. glase:

$$Q_5 = \frac{16}{c^2} Q_3 - \frac{8t^2}{c^2} Q_1 + 4X^2R + X^2T, \quad (265)$$

$$Q_4 = \frac{9}{c^2} Q_2 - \frac{3t^2}{c^2} Q_0 + 3XR + XT. \quad (266)$$

Dalje za $m=3$ formule (260) i (262) uz primjenu od (265) i (266) daju:

$$Q_7 = Q_5 \left(\frac{576}{c^4} - \frac{24t^2}{c^2} \right) - \frac{288t^2}{c^4} Q_3 + R \left(\frac{144X^4}{c^2} + 6X^4 \right) + T \left(\frac{36X^2}{c^2} + X^4 \right), \quad (267)$$

$$Q_8 = Q_2 \left(\frac{225}{c^4} - \frac{15t^2}{c^2} \right) - \frac{75t^2}{c^4} Q_0 + R \left(\frac{75X}{c^2} + 5X^3 \right) + T \left(\frac{25X}{c^2} + X^3 \right). \quad (268)$$

Lako je vidjeti, da i (263) i (264) za $m=3$ daju te iste izraze. Formule (263), (264) ispravne su dakle za $m=2$ i $m=3$. Treba još dokazati, da za $m \geq 4$ zadovoljavaju jednadžbe rekurzije (260), (262). Provest ćemo taj dokaz najprije za (263).

Uvrstimo izraz (263) u (260) i uzmimo najprije u obzir članove sa Q_1 . Dobijemo

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s} m! (m-s-1)! (m-s+1)! t^{2s}}{(m-2s)! (s-1)! (s+1)! c^{2m-2s}} = \\ &= \frac{4m^2}{c^2} \sum_{s=1}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s-2} (m-1)! (m-s-2)! (m-s)! t^{2s}}{(m-2s-1)! (s-1)! (s+1)! c^{2m-2s-2}} + \\ &+ \frac{2m(2m-2)}{c^2} \sum_{s=\frac{m}{2}}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s-2} (m-2)! (m-s-2)! (m-s)! t^{2s}}{(m-2s)! (s+2)! s! c^{2m-2s-2}}, \quad (269) \end{aligned}$$

pri čemu smo u zadnjoj sumi stavili $s = s - 1$ i naknadno ispuštili potez nad s . Time je postignuto, da eksponent od t u općem članu svih triju suma bude isti. Pretpostavimo sad

$$2 \leq s \leq \frac{m-1}{2} \quad (270)$$

i svedimo opće članove suma na zajednički nazivnik

$$(m-2s)! (s-1)! (s+1)! c^{2m-2s}.$$

Brojnici onda daju

$$\begin{aligned} & (-1)^s 2^{2m-2s} m! (m-s-1)! (m-s+1)! t^{2s} = \\ &= 4m^2 (m-2s) (-1)^s 2^{2m-2s-2} (m-1)! (m-s-2)! (m-s)! t^{2s} + \\ &+ 2m(2m-2) (-1)^s (s-1)(s+1) 2^{2m-2s-2} (m-2)! (m-s-2)! (m-s)! t^{2s}. \quad (271) \end{aligned}$$

Podijelimo li sa $(-1)^s 2^{2m-2s} m! (m-s-2)! (m-s)! t^{2s}$, dobijemo

$$(m-s-1)(m-s+1) = m(m-2s) + (s-1)(s+1), \quad (272)$$

što je ispravno. Za $s=1$ posljednja suma ne prinosi ništa, a ostale dvije daju

$$- \frac{2^{2m-2} m! (m-2)! m! t^2}{(m-2)! 0! 2! c^{2m-2}} = - \frac{4m^2 2^{2m-4} (m-1)! (m-3)! (m-1)! t^2}{(m-3)! 0! 2! c^{2m-2}}, \quad (273)$$

što je ispravno. Za slučaj takog m može biti $s = \frac{m}{2} = p$; pa u tom slučaju prva suma desno u (269) ne prinosi ništa, a druge dvije daju

$$\frac{(-1)^p 2^{2p} (2p)! (p-1)! (p+1)! t^{2p}}{0! (p-1)! (p+1)! c^{2p}} =$$

$$= \frac{4p(4p-2)(-1)^p 2^{2p-2} (2p-2)! (p-2)! p! t^{2p}}{0! (p-2)! p! c^{2p}}, \quad (274)$$

što je ispravno. Jednakost (269) dakle vrijedi.

Uzmimo sad u obzir članove sa Q_3 :

$$\sum_{s=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s-2} m! (m-s-1)! (m-s)! t^{2s}}{(m-2s-1)! s! (s+1)! c^{2m-2s-2}} +$$

$$+ \frac{4m^2}{c^2} \sum_{s=0}^{\left[\frac{m-2}{2}\right]} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s-4} (m-1)! (m-s-2)! (m-s-1)! t^{2s}}{(m-2s-2)! s! (s+1)! c^{2m-2s-4}} +$$

$$+ \frac{2m(2m-2)}{c^2} \sum_{s=1}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s-4} (m-2)! (m-s-2)! (m-s-1)! t^{2s}}{(m-2s-1)! (s-1)! s! c^{2m-2s-4}}. \quad (275)$$

I ovdje smo u zadnjoj sumi stavili $s = s-1$ i umjesto s opet pisali s . Neka je

$$1 \leq s \leq \frac{m-2}{2}. \quad (276)$$

Svedemo li opće članove na nazivnik

$$(m-2s-1)! s! (s+1)! c^{2m-2s-2},$$

to brojnici daju

$$(-1)^s 2^{2m-2s-2} m! (m-s-1)! (m-s)! t^{2s} =$$

$$= (m-2s-1) 4m^2 (-1)^s 2^{2m-2s-4} (m-1)! (m-s-2)! (m-s-1)! t^{2s} +$$

$$+ 2m(2m-2)s(s+1)(-1)^s 2^{2m-2s-4} (m-2)! (m-s-2)! (m-s-1)! t^{2s}. \quad (277)$$

Razdijelimo sa $(-1)^s 2^{2m-2s-2} m! (m-s-2)! (m-s-1)! t^{2s}$, pa dobijemo

$$(m-s-1)(m-s) = (m-2s-1)m + s(s+1), \quad (278)$$

što je ispravno.

Za $s=0$ dobijemo

$$\frac{2^{2m-2} m! (m-1)! m!}{(m-1)! 0! 1! c^{2m-2}} = \frac{4m^2 2^{2m-4} (m-1)! (m-2)! (m-1)!}{(m-2)! 0! 1! c^{2m-2}}, \quad (279)$$

što je ispravno.

Za slučaj lihog m može biti $s = \frac{m-1}{2} = p$, pa dobijemo

$$\frac{(-1)^p 2^{2p} (2p+1)! p! (p+1)! t^{2p}}{0! p! (p+1)! c^{2p}} =$$

$$= \frac{2(2p+1) 4p (-1)^p 2^{2p-2} (2p-1)! (p-1)! p! t^{2p}}{0! (p-1)! p! c^{2p}}, \quad (280)$$

što je ispravno. Jednakost (275) dakle vrijedi.

Uzmimo dalje u obzir članove sa R :

$$\sum_{\substack{r+s \leq m \\ r, s \\ r \geq 2 \\ s \geq 0}} \frac{(-1)^s 2^{2m-2r-2s+1} m! (m-r-s)! (m-s)! X^{2r-2} t^{2s}}{(m-r-2s)! (r-1)! s! (r+s)! c^{2m-2s}} =$$

$$= \frac{4m^2}{c^2} \sum_{\substack{r+s \leq m-1 \\ r, s \\ r \geq 2 \\ s \geq 0}} \frac{(-1)^s 2^{2m-2r-2s-1} (m-1)! (m-r-s-1)! (m-s-1)! X^{2r-2} t^{2s}}{(m-r-2s-1)! (r-1)! s! (r+s)! c^{2m-2s-2}} +$$

$$+ \frac{4m(m-1)}{c^2} \sum_{\substack{r+s \leq m \\ r, s \\ r \geq 2 \\ s \geq 1}} \frac{(-1)^s 2^{2m-2r-2s-1} (m-2)! (m-r-s-1)! (m-s-1)! X^{2r-2} t^{2s}}{(m-r-2s)! (r-1)! (s-1)! (r+s-1)! c^{2m-2s-2}} +$$

$$+ 2m X^{2m-2}, \quad (281)$$

gdje u zadnjoj sumi opet stavljamo $s = s-1$ i zatim mjesto s pišemo s .

Neka je

$$2 \leq r \leq m-3 \quad (282) \quad 1 \leq s \leq \frac{m-r-1}{2}, \quad (283)$$

$$\text{dakle} \quad r+2s \leq m-1. \quad (284)$$

Svedimo opće članove suma u (281) na zajednički nazivnik $(m-r-2s)! (r-1)! s! (r+s)! c^{2m-2s}$. Brojnici daju

$$(-1)^s 2^{2m-2r-2s+1} m! (m-r-s)! (m-s)! X^{2r-2} t^{2s} =$$

$$= 4m^2 (m-r-2s) (-1)^s 2^{2m-2r-2s-1} (m-1)! (m-r-s-1)! (m-s-1)! X^{2r-2} t^{2s} +$$

$$+ 4m(m-1)s(r+s) (-1)^s 2^{2m-2r-2s-1} (m-2)! (m-r-s-1)! (m-s-1)! X^{2r-2} t^{2s}. \quad (285)$$

Dioba sa $(-1)^s 2^{2m-2r-2s+1} m! (m-r-s-1)! (m-s-1)! X^{2r-2} t^{2s}$ daje

$$(m-r-s)(m-s) = m(m-r-2s) + s(r+s), \quad (286)$$

što je ispravno. Neka je dalje

$$2 \leq r \leq m-1 \quad (287), \quad s = 0. \quad (288)$$

Dobijemo

$$\frac{2^{2m-2r+1} m! (m-r)! m!}{(m-r)! (r-1)! 0! r!} = \frac{4m^2 2^{2m-2r-1} (m-1)! (m-r-1)! (m-1)!}{(m-r-1)! (r-1)! 0! r!}, \quad (289)$$

što je ispravno. Ako je

$$r+2s=m, \quad r=m-2s \quad (290), \quad r \geq 2, \quad s \geq 1, \quad (291)$$

izlazi

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^s 2^{2s+1} m! s! (m-s)!}{0! (m-2s-1)! s! (m-s)!} = \\ & = \frac{4m(m-1)(-1)^s 2^{2s-1} (m-2)! (s-1)! (m-s-1)!}{0! (m-2s-1)! (s-1)! (m-s-1)!}, \quad (292) \end{aligned}$$

što je ispravno. Ako je konačno

$$r=m, \quad s=0, \quad (293)$$

to imamo

$$\frac{2m! 0! m! X^{2m-2}}{0! (m-1)! 0! m!} = 2m X^{2m-2}, \quad (294)$$

što je ispravno. Formula (281) dakle vrijedi.

Članovi sa T daju istu jednakost (281), samo što su opći članovi suma podijeljeni sa $2r$, a zadnji član desne strane jednakosti podijeljen je sa $2m$. Očito i tu račun potvrđuje ispravnost. Time je konačno dokazana formula (281).

Postupak za dokaz formule (264) sasvim je analogan.

Uvrstimo (264) u (262) i uzmimo u obzir članove sa Q_0 :

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{(-1)^s s (2m)! (2m-2s+1)! t^{2s}}{(m-s) 2^{2m-2s} m! (m-2s)! (2s+1)! c^{2m-2s}} = \\ & = \frac{(2m-1)^2}{c^3} \sum_{s=1}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \frac{(-1)^s s (2m-2)! (2m-2s-1)! t^{2s}}{(m-s-1) 2^{2m-2s-2} (m-1)! (m-2s-1)! (2s+1)! c^{2m-2s-2}} + \\ & + \frac{(2m-1)(2m-3)}{c^2} \sum_{s=2}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{(-1)^s (s-1) (2m-4)! (2m-2s-1)! t^{2s}}{(m-s-1) 2^{2m-2s-2} (m-2)! (m-2s)! (2s-1)! c^{2m-2s-2}}. \quad (295) \end{aligned}$$

Pretpostavimo (270) i svedimo opće članove na nazivnik

$$(m-s)(m-s-1)2^{2m-2s}m!(m-2s)!(2s+1)!c^{2m-2s}.$$

Brojnici daju

$$\begin{aligned} & (m-s-1)(-1)^s s(2m)!(2m-2s+1)!t^{2s} = \\ & = (2m-1)^2(m-s)s^2 m(m-2s)(-1)^s s(2m-2)!(2m-2s-1)!t^{2s} + \\ & + (2m-1)(2m-3)(m-s)2^2 m(m-1)2s(2s+1)(-1)^s \cdot \\ & \cdot (s-1)(2m-4)!(2m-2s-1)!t^{2s}. \end{aligned} \quad (296)$$

Dioba sa $(-1)^s s(2m)!(2m-2s)!$ daje

$$(m-s-1)(2m-2s+1) = (m-2s)(2m-1) + (s-1)(2s+1), \quad (297)$$

što je ispravno.

Za $s=1$ izlazi iz (295)

$$\begin{aligned} & - \frac{1 \cdot (2m)!(2m-1)!t^2}{(m-1)2^{m-2}m!(m-2)!3!c^{2m-2}} = \\ & = - \frac{(2m-1)^2 1(2m-2)!(2m-3)!t^2}{(m-2)2^{2m-4}(m-1)!(m-3)!3!c^{2m-2}}, \end{aligned} \quad (298)$$

što je ispravno. Za slučaj takog m može biti $s = \frac{m}{2} = p$, i dobijemo

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^p p(4p)!(2p+1)!t^{2p}}{p \cdot 2^{2p}(2p)!0!(2p+1)!c^{2p}} = \\ & = \frac{(4p-1)(4p-3)(-1)^p(p-1)(4p-4)!(2p-1)!t^{2p}}{(p-1)2^{2p-2}(2p-2)!0!(2p-1)!c^{2p}}, \end{aligned} \quad (299)$$

što je ispravno. Jednakost (295) dakle vrijedi.

Članovi sa Q_2 daju:

$$\begin{aligned} & \sum_{s=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \frac{(-1)^s(2m)!(2m-2s-1)!t^{2s}}{2^{2m-2s-1}m!(m-2s-1)!(2s+1)!c^{2m-2s-2}} = \\ & = \frac{(2m-1)^2}{c^2} \sum_{s=0}^{\left[\frac{m-2}{2}\right]} \frac{(-1)^s(2m-2)!(2m-2s-3)!t^{2s}}{2^{2m-2s-3}(m-1)!(m-2s-2)!(2s+1)!c^{2m-2s-4}} + \\ & + \frac{(2m-1)(2m-3)}{c^2} \sum_{s=1}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \frac{(-1)^s(2m-4)!(2m-2s-3)!t^{2s}}{2^{2m-2s-3}(m-2)!(m-2s-1)!(2s-1)!c^{2m-2s-4}}. \end{aligned} \quad (300)$$

Pretpostavimo (276) i svedimo opće članove na nazivnik $2^{2m-2s-1} m! (m-2s-1)! (2s+1)! c^{2m-2s-2}$. Brojnici daju

$$\begin{aligned} & (-1)^s (2m)! (2m-2s-1)! t^{2s} = \\ & = (2m-1)^2 2^2 m(m-2s-1) (-1)^s (2m-2)! (2m-2s-3)! t^{2s} + \\ & + (2m-1) (2m-3) 2^2 m(m-1) 2s(2s+1) (-1)^s (2m-4)! (2m-2s-3)! t^{2s}. \end{aligned} \quad (301)$$

Dioba sa $(-1)^s (2m)! (2m-2s-3)!$ daje

$$(2m-2s-2) (2m-2s-3) = 2(m-2s-1) (2m-1) + 2s(2s+1), \quad (302)$$

što je ispravno. Za $s=0$ proizlazi iz (300)

$$\frac{(2m)! (2m-1)!}{2^{2m-1} m! (m-1)! 1! c^{2m-2}} = \frac{(2m-1)^2 (2m-2)! (2m-3)!}{2^{2m-3} (m-1)! (m-2)! 1! c^{2m-2}}, \quad (303)$$

što je ispravno. Za slučaj lihog m može biti $s = \frac{m-1}{2} = p$, pa dobijemo

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^p (4p+2)! (2p+1)! t^{2p}}{2^{2p+1} (2p+1)! 0! (2p+1)! c^{2p}} = \\ & = \frac{(4p+1) (4p-1) (-1)^p (4p-2)! (2p-1)! t^{2p}}{2^{2p-1} (2p-1)! 0! (2p-1)! c^{2p}}. \end{aligned} \quad (304)$$

što je ispravno. Jednakost (300) dakle vrijedi.

Članovi sa R daju:

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{r+s \leq m \\ r, s \\ r \geq 2 \\ s \geq 0}} \frac{(-1)^s (m-r-s)! (2m)! (r-1)! (2m-2s)! (r+s)! X^{2r-3} t^{2s}}{2^{2m-2r-2s+1} (m-r-2s)! m! (2r-2)! (m-s)! (2r+2s)! s! c^{2m-2r-2s}} = \\ & = \frac{(2m-1)^2}{c^3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{r+2s \leq m-1 \\ r, s \\ r \geq 2 \\ s \geq 0}} \frac{(-1)^s (m-r-s-1)! (2m-2)! (r-1)! (2m-2s-2)! (r+s)! X^{2r-3} t^{2s}}{2^{2m-2r-2s-1} (m-r-2s-1)! (m-1)! (2r-2)! (m-s-1)! (2r+2s)! s! c^{2m-2r-2s-2}} + \\ & + \frac{(2m-1) (2m-3)}{c^3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{r+2s \leq m \\ r, s \\ r \geq 2 \\ s \geq 1}} \frac{(-1)^s (m-r-s-1)! (2m-4)! (r-1)! (2m-2s-2)! (r+s-1)! X^{2r-3} t^{2s}}{2^{2m-2r-2s-1} (m-r-2s)! (m-2)! (2r-2)! (m-s-1)! (2r+2s-2)! (s-1)! c^{2m-2r-2s-2}} + \\ & + (2m-1) X^{2m-3}. \end{aligned} \quad (305)$$

Neka vrijedi (282), (283), (284), pa svedimo opće članove na nazivnik

$$(-1)^s 2^{2m-2r-2s+1} (m-r-2s)! m! (2r-2)! (m-s)! (2r+2s)! s! c^{2m-2r-2s}.$$

Brojnici daju

$$\begin{aligned} & (-1)^s (m-r-s)! (2m)! (r-1)! (2m-2s)! (r+s)! X^{2r-3} t^{2s} = \\ & = (2m-1)^2 2^2 (m-r-2s) m(m-s) (-1)^s (m-r-s-1)! (2m-2)! \cdot \\ & \quad \cdot (r-1)! (2m-2s-2)! (r+s)! X^{2r-3} t + \\ & + (2m-1)(2m-3) 2^2 m(m-1)(m-s)(2r+2s)(2r+2s-1)s(-1)^s \cdot \\ & \cdot (m-r-s-1)! (2m-4)! (r-1)! (2m-2s-2)! (r+s-1)! X^{2r-3} t^{2s}. \quad (306) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dioba sa } & (-1)^s (m-r-s-1)! (2m)! (r-1)! (2m-2s-2)! (r+s)! \cdot \\ & \cdot X^{2r-3} t^{2s} \text{ daje } (m-r-s)(2m-2s)(2m-2s-1) = \\ & = (2m-1)2(m-r-2s)(m-s) + 2(m-s)(2r+2s-1)s, \quad (307) \end{aligned}$$

što je ispravno. Pretpostavimo li dalje (287), (288), to dobijemo

$$\begin{aligned} & \frac{(m-r)! (2m)! (r-1)! (2m)! r! X^{2r-3}}{2^{2m-2r+1} (m-r)! m! (2r-2)! m! (2r)! 0! c^{2m-2r}} = \\ & = \frac{(2m-1)^2 (m-r-1)! (2m-2)! (r-1)! (2m-2)! r! X^{2r-3}}{2^{2m-2r-1} (m-r-1)! (m-1)! (2r-2)! (m-1)! (2r)! 0! c^{2m-2r}}, \quad (308) \end{aligned}$$

što je ispravno. Ako vrijedi (290), (291), izlazi

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^s s! (2m)! (m-2s-1)! (2m-2s)! (m-s)! X^{2m-4s-3} t^{2s}}{2^{2s+1} 0! m! (2m-4s-2)! (m-s)! (2m-2s)! s! c^{2s}} = \\ & = \frac{(2m-1)(2m-3)(-1)^s (s-1)! (2m-4)! (m-2s-1)! (2m-2s-2)! (m-s-1)! X^{2r-3} t^{2s}}{2^{2s-1} 0! (m-2)! (2m-4s-2)! (m-s-1)! (2m-2s-2)! (s-1)! c^{2s}}, \quad (3) \end{aligned}$$

što je ispravno. Pretpostavimo li konačno (293), to imamo

$$\frac{0! (2m)! (m-1)! (2m)! m! X^{2m-3}}{2 \cdot 0! m! (2m-2)! m! (2m)! 0!} = (2m-1) X^{2m-3}, \quad (310)$$

što je ispravno. Formula (305) dakle vrijedi.

Članovi sa T daju istu jednakost (305), samo što su opći članovi suma podijeljeni sa $2r-1$, a zadnji član desne strane jednakosti podijeljen je sa $2m-1$. Očito i ovdje račun potvrđuje ispravnost.

Time je konačno i formula (264) dokazana.

Stavimo sad

$$Q_n = \int_X^t x^n \Lambda_0 (c \sqrt{t^2 - x^2}) dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (311)$$

$$R = -\frac{t^2 - X^2}{c^2} \Lambda_0 (c \sqrt{t^2 - X^2}) \quad (312)$$

$$T = X^2 \frac{t^2 - X^2}{2} \Lambda_1 (c \sqrt{t^2 - X^2}) \quad (313)$$

i prema (311), (254), (255), (256)

$$Q_0 = \int_X^t \Lambda_0 (c \sqrt{t^2 - x^2}) dx \quad (314)$$

$$Q_1 = \frac{t^2 - X^2}{2} \Lambda_1 (c \sqrt{t^2 - X^2}) \quad (315)$$

$$Q_2 = \frac{1}{c^2} \int_X^t \Lambda_0 (c \sqrt{t^2 - x^2}) dx + \frac{t^2}{2} \int_X^t \Lambda_1 (c \sqrt{t^2 - x^2}) dx + \\ + \frac{X(t^2 - X^2)}{2} \Lambda_1 (c \sqrt{t^2 - X^2}) + \frac{X}{c^2} \Lambda_0 (c \sqrt{t^2 - X^2}) - \frac{t}{c^2} \quad (316)$$

$$Q_3 = \left(\frac{2}{c^2} + \frac{X^2}{2} \right) (t^2 - X^2) \Lambda_1 (c \sqrt{t^2 - X^2}) - \frac{2(t^2 - X^2)}{c^2} \Lambda_0 (c \sqrt{t^2 - X^2}) \quad (317)$$

Uvrstimo li (311), (312), (313) u (258), dobijemo prvotnu jednadžbu rekurzije (257), pa prema tome uvrštenje izraza (311) do (317) u formule (263), (264) mora dati direktne formule za redukciju integrala

$$\int_X^t x^n \Lambda_0 (c \sqrt{t^2 - x^2}) dx.$$

Uvrstimo spomenute izraze najprije u (263). Tvrdimo, da se dobivena formula može dovesti u oblik

$$\int_X^t x^{2m+1} \Lambda_0 (c \sqrt{t^2 - x^2}) dx = \\ = \frac{t^2 - X^2}{2} \left\{ \Lambda_1 (c \sqrt{t^2 - X^2}) \right\}.$$

$$\sum_{\substack{r+s \leq m \\ r, s \\ r \geq 0 \\ s \geq 0}} \frac{(-1)^s 2^{2m-2r-2s} m! (m-r-s)! (m-s)! X^{2r} t^{2s}}{(m-r-2s)! r! s! (r+s)! c^{2m-2r-2s}}$$

$$\begin{aligned}
& - \Lambda_0 (c \sqrt{t^2 - X^2}) \cdot \\
& \cdot \sum_{\substack{r+s \leq m-1 \\ r, s \\ r \geq 0 \\ s \geq 0}} \frac{(-1)^s 2^{2m-2r-2s} m! (m-r-s-1)! (m-s)! X^{2r} t^{2s}}{(m-r-2s-1)! r! s! (r+s+1)! c^{2m-2r-2s}} \Bigg\} \\
& \text{za } m \geq 1. \quad (318)
\end{aligned}$$

Uvrštenje naime daje ponajprije oblik

$$\begin{aligned}
& \int_X^t x^{2m+1} \Lambda_0 (c \sqrt{t^2 - x^2}) dx = \\
& = \frac{t^2 - X^2}{2} \left\{ \Lambda_1 (c \sqrt{t^2 - X^2}) \sum_{s=1}^{\left[\frac{m}{2} \right]} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s} m! (m-s-1)! (m-s+1)! t^{2s}}{(m-2s)! (s-1)! (s+1)! c^{2m-2s}} + \right. \\
& + \Lambda_1 (c \sqrt{t^2 - X^2}) \sum_{s=0}^{\left[\frac{m-1}{2} \right]} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s} m! (m-s-1)! (m-s)! t^{2s}}{(m-2s-1)! s! (s+1)! c^{2m-2s}} + \\
& + \Lambda_1 (c \sqrt{t^2 - X^2}) \sum_{s=0}^{\left[\frac{m-1}{2} \right]} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s-2} m! (m-s-1)! (m-s)! X^2 t^{2s}}{(m-2s-1)! s! (s+1)! c^{2m-2s-2}} \\
& - \Lambda_0 (c \sqrt{t^2 - X^2}) \sum_{s=0}^{\left[\frac{m-1}{2} \right]} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s} m! (m-s-1)! (m-s)! t^{2s}}{(m-2s-1)! s! (s+1)! c^{2m-2s}} \\
& \quad \left. - \Lambda_0 (c \sqrt{t^2 - X^2}) \cdot \right. \\
& \cdot \sum_{\substack{r+s \leq m-1 \\ r, s \\ r \geq 1 \\ s \geq 0}} \frac{(-1)^s 2^{2m-2r-2s} m! (m-r-s-1)! (m-s)! X^{2r} t^{2s}}{(m-r-2s-1)! r! s! (r+s+1)! c^{2m-2r-2s}} + \\
& \quad \left. + \Lambda_1 (c \sqrt{t^2 - X^2}) \cdot \right. \\
& \cdot \sum_{\substack{r+s \leq m \\ r, s \\ r \geq 2 \\ s \geq 0}} \frac{(-1)^s 2^{2m-2r-2s} m! (m-r-s)! (m-s)! X^{2r} t^{2s}}{(m-r-2s)! r! s! (r+s)! c^{2m-2r-2s}} \Bigg\}, \quad (319)
\end{aligned}$$

pri čemu smo u predzadnjoj sumi stavili $r = \bar{r} + 1$ i naknadno pisali opet r mjesto $\bar{r}$ te zasad pretpostavili $m \geq 2$.

Zbrojimo li prvu i drugu sumu izraza (319), to nije teško dokazati, da vrijedi:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{s=1}^{\left[\frac{m}{2} \right]} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s} m! (m-s-1)! (m-s+1)! t^{2s}}{(m-2s)! (s-1)! (s+1)! c^{2m-2s}} + \\
 & + \sum_{s=0}^{\left[\frac{m-1}{2} \right]} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s} m! (m-s-1)! (m-s)! t^{2s}}{(m-2s-1)! s! (s+1)! c^{2m-2s}} = \\
 & = \sum_{s=0}^{\left[\frac{m}{2} \right]} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s} m! [(m-s)!]^2 t^{2s}}{(m-2s)! (s!)^2 c^{2m-2s}}. \quad (320)
 \end{aligned}$$

Ako je naime

$$1 \leq s \leq \frac{m-1}{2} \quad (321)$$

i ako svedemo opće članove suma u (320) na zajednički nazivnik $(m-2s)! s! (s+1)! c^{2m-2s}$, to brojnici daju

$$\begin{aligned}
 & s(-1)^s 2^{2m-2s} m! (m-s-1)! (m-s+1)! t^{2s} + \\
 & + (m-2s)(-1)^s 2^{2m-2s} m! (m-s-1)! (m-s)! t^{2s} = \\
 & = (s+1)(-1)^s 2^{2m-2s} m! [(m-s)!]^2 t^{2s}. \quad (322)
 \end{aligned}$$

Dioba sa $(-1)^s 2^{2m-2s} m! (m-s-1)! (m-s)! t^{2s}$ daje

$$(m-s+1)s + m - 2s = (m-s)(s+1), \quad (323)$$

što je ispravno. Ako je $s=0$, dobijemo

$$\frac{2^{2m} m! (m-1)! m!}{(m-1)! 0! 1! c^{2m}} = \frac{2^{2m} m! (m!)^2}{m! (0!)^2 c^{2m}}, \quad (324)$$

što je ispravno. Za slučaj, da je m tak broj, možemo još staviti $s = \frac{m}{2} = p$, pa dobijemo

$$\frac{(-1)^p 2^{2p} (2p)! (p-1)! (p+1)! t^{2p}}{0! (p-1)! (p+1)! c^{2p}} = \frac{(-1)^p 2^{2p} (2p)! (p!)^2 t^{2p}}{0! (p!)^2 c^{2p}}, \quad (325)$$

što je ispravno. Jednakost (320) dakle vrijedi.

Sad možemo usporediti (318) sa (319). Članovi prve sume u (318), za koje je $r \geq 2$, daju zadnju sumu u (319). Članovi prve sume u (318), za koje je $r = 1$, daju treću sumu u (319). Članovi prve sume u (318), za koje je $r = 0$, daju zbroj prve i druge sume u (319) u obliku (320). Članovi druge sume u (318), za koje je $r \geq 1$, daju predzadnju sumu u (319). Članovi druge sume u (318), za koje je $r = 0$, daju četvrtu sumu u (319). Time je formula (318) dokazana. Ona vrijedi za $m \geq 2$, kao formula (263), iz koje je proizašla, a i za $m = 1$, kako pokazuje poredba sa (256).

Uvrstimo li (312), (313), (314), (316) u (264), to se dobiveni izraz može dovesti u oblik

$$\begin{aligned}
 & \int_X^t x^{2m} \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx = \\
 &= \int_X^t \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx \sum_{s=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{(-1)^s (2m)! (2m-2s)! t^{2s}}{2^{2m-2s} m! (m-2s)! (2s)! c^{2m-2s}} + \\
 &+ \int_X^t \Lambda_1(c\sqrt{t^2-x^2}) dx \sum_{s=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \frac{(-1)^s (2m)! (2m-2s-1)! t^{2s+2}}{2^{2m-2s} m! (m-2s-1)! (2s+1)! c^{2m-2s-2}} + \\
 &+ X \Lambda_0(c\sqrt{t^2-X^2}) \sum_{s=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \frac{(-1)^s (2m)! (2m-2s-1)! t^{2s}}{2^{2m-2s-1} m! (m-2s-1)! (2s+1)! c^{2m-2s}} + \\
 &+ (t^2-X^2) \Lambda_0(c\sqrt{t^2-X^2}). \\
 &\sum_{\substack{r+s \leq m \\ r, s \\ r \geq 2 \\ s \geq 0}} \frac{(-1)^{s+1} (m-r-s)! (2m)! (r-1)! (2m-2s)! (r+s)! X^{2r-3} t^{2s}}{2^{2m-2r-2s+1} (m-r-2s)! m! (2r-2)! (m-s)! (2r+2s)! s! c^{2m-2r-2s+2}} + \\
 &+ (t^2-X^2) \Lambda_1(c\sqrt{t^2-X^2}). \\
 &\sum_{\substack{r+s \leq m \\ r, s \\ r \geq 1 \\ s \geq 0}} \frac{(-1)^s (m-r-s)! (2m)! r! (2m-2s)! (r+s)! X^{2r-1} t^{2s}}{2^{2m-2r-2s+1} (m-r-2s)! m! (2r)! (m-s)! (2r+2s)! s! c^{2m-2r-2s}} + \\
 &+ \sum_{s=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \frac{(-1)^{s+1} (2m)! (2m-2s-1)! t^{2s+1}}{2^{2m-2s-1} m! (m-2s-1)! (2s+1)! c^{2m-2s}} \quad \text{za } m \geq 2. \quad (326)
 \end{aligned}$$

Da se to uvidi, zbrojimo najprije izraze, koje daju Q_0 i prvi član izraza (316) za Q_2 :

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{s(-1)^s (2m)! (2m-2s+1)! t^{2s}}{(m-s) 2^{2m-2s} m! (m-2s)! (2s+1)! c^{2m-2s}} + \\ & + \frac{1}{c^2} \sum_{s=1}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \frac{(-1)^s (2m)! (2m-2s-1)! t^{2s}}{2^{2m-2s} m! (m-2s)! (2s)! c^{2m-2s}} = \\ & = \sum_{s=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{(-1)^s (2m)! (2m-2s)! t^{2s}}{2^{2m-2s} m! (m-2s)! (2s)! c^{2m-2s}}. \end{aligned} \quad (327)$$

U svrhu dokaza ove relacije pretpostavimo (321) i sredimo opće članove suma u (327) na nazivnik

$$(m-s) 2^{2m-2s} m! (m-2s)! (2s+1)! c^{2m-2s}.$$

Brojnici daju:

$$\begin{aligned} & s(-1)^s (2m)! (2m-2s+1)! t^{2s} + \\ & + (m-s) 2(m-2s) (-1)^s (2m)! (2m-2s-1)! t^{2s} = \\ & = (m-s) (2s+1) (-1)^s (2m)! (2m-2s)! t^{2s}. \end{aligned} \quad (328)$$

Dioba sa $(-1)^s (2m)! (2m-2s)! t^{2s}$ daje

$$s(2m-2s+1) + (m-2s) = (m-s)(2s+1), \quad (329)$$

što je ispravno. Ako je $s=0$, dobijemo

$$\frac{(2m)! (2m-1)!}{2^{2m-1} m! (m-1)! 1! c^{2m}} = \frac{(2m)! (2m)!}{2^{2m} m! m! 0! c^{2m}}, \quad (330)$$

što je ispravno. U slučaju, da je m tak broj, može biti

$$s = \frac{m}{2} = p, \text{ što daje}$$

$$\frac{p(-1)^p (4p)! (2p+1)! t^{2p}}{p 2^{2p} (2p)! 0! (2p+1)! c^{2p}} = \frac{(-1)^p (4p)! (2p)! t^{2p}}{2^{2p} (2p)! 0! (2p)! c^{2p}}, \quad (331)$$

što je ispravno. Relacija (327) dakle vrijedi.

Izrazi, koji potječu od Q_0 i od prvog člana izraza za Q_2 , daju prema tome prvu sumu u (326). Drugi član izraza za Q_2 daje drugu sumu u (326). Treći član izraza za Q_2 daje članove pete sume u (326), za koje je $r = 1$. Četvrti član izraza za Q_2 daje treću sumu u (326). Peti član izraza za Q_2 daje šestu (zadnju) sumu u (326). Suma, koja je pomnožena sa R , odgovara četvrtoj sumi u (326), a suma pomnožena sa T odgovara članovima pete sume u (326), za koje je $r \geq 2$. Formula (326) je time dokazana i vrijedi za $m \geq 2$, kao formula (264), iz koje je proizašla.

$$5. \text{ Redukcija integrala } \int_X^t \Lambda_n(c \sqrt{t^2 - x^2}) dx.$$

Za kraću oznaku stavljamo

$$P_n = \int_X^t \Lambda_n(c \sqrt{t^2 - x^2}) dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (332)$$

Uvrstimo li u (7) $t^2 - x^2$ mjesto $f(z)$, snizimo n za jednu jedinicu, pomnožimo jednakost sa $t^2 - x^2$ i integriramo od X do t , to proizlazi

$$\begin{aligned} t^2 P_n - \int_X^t x^2 \Lambda_n(c \sqrt{t^2 - x^2}) dx &= \\ &= \frac{4n(n-1)}{c^2} P_{n-1} - \frac{4n(n-1)}{c^2} P_{n-2}. \end{aligned} \quad (333)$$

Parcijalna integracija na temelju (9) daje:

$$\begin{aligned} \int_X^t x^2 \Lambda_n(c \sqrt{t^2 - x^2}) dx &= \left\{ \frac{2n}{c^2} x \Lambda_{n-1}(c \sqrt{t^2 - x^2}) \right\}_{x=X}^{x=t} - \frac{2n}{c^2} P_{n-1} = \\ &= \frac{2nt}{c^2} - \frac{2nX}{c^2} \Lambda_{n-1}(c \sqrt{t^2 - X^2}) - \frac{2n}{c^2} P_{n-1}. \end{aligned} \quad (334)$$

Uvrstimo li to u (333), izlazi jednadžba rekurzije

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{2n(2n-3)}{c^2 t^2} P_{n-1} - \frac{4n(n-1)}{c^2 t^2} P_{n-2} - \\ &- X \frac{2n}{c^2 t^2} \Lambda_{n-1}(c \sqrt{t^2 - X^2}) + 2t \frac{n}{c^2 t^2}. \end{aligned} \quad (335)$$

S pomoću nje dobije se lako

$$P_2 = \frac{4}{c^2 t^2} P_1 - \frac{8}{c^2 t^2} P_0 - X \frac{4}{c^2 t^2} \Lambda_1 (c \sqrt{t^2 - X^2}) + 2t \frac{2}{c^2 t^2}, \quad (336)$$

$$P_3 = \left(\frac{72}{c^4 t^4} - \frac{24}{c^2 t^2} \right) P_1 - \frac{144}{c^4 t^4} P_0 - X \frac{6}{c^2 t^2} \Lambda_2 (c \sqrt{t^2 - X^2}) - \\ - X \frac{72}{c^4 t^4} \Lambda_1 (c \sqrt{t^2 - X^2}) + 2t \left(\frac{36}{c^4 t^4} + \frac{3}{c^2 t^2} \right). \quad (337)$$

Tvrdimo, da je za $n \geq 2$ općenito

$$P_n = A_n P_1 + B_n P_0 + X \sum_{r=1}^{n-1} C_{n,r} \Lambda_r (c \sqrt{t^2 - X^2}) + 2t D_n \quad (338)$$

ili

$$\int_X^t \Lambda_n (c \sqrt{t^2 - x^2}) dx = A_n \int_X^t \Lambda_1 (c \sqrt{t^2 - x^2}) dx + B_n \int_X^t \Lambda_0 (c \sqrt{t^2 - x^2}) dx + \\ + X \sum_{r=1}^{n-1} C_{n,r} \Lambda_r (c \sqrt{t^2 - X^2}) + 2t D_n, \quad (339)$$

gdje znači:

$$A_n = \sum_{s=1}^{\left[\frac{n+1}{2} \right]} \frac{(-1)^{s+1} 2^{2s-2} n! (2n-2s)!}{(n-2s+1)! (2s-2)! (ct)^{2n-2s}} \quad (340)$$

$$B_n = \sum_{s=1}^{\left[\frac{n}{2} \right]} \frac{(-1)^s 2^{2s} n! (2n-2s-1)!}{(n-2s)! (2s-1)! (ct)^{2n-2s}} \quad (341)$$

$$C_{n,r} = \sum_{s=0}^{\left[\frac{n-r-1}{2} \right]} \frac{(-1)^{s+1} 2^{2s+1} n! (n-r-s-1)! (2n-2s-2)! (r+s)!}{r! s! (n-r-2s-1)! (n-s-1)! (2r+2s)! (ct)^{2n-2r-2s}} \quad (342)$$

$$D_n = \sum_{s=1}^{n-1} \frac{n! (2n-2s-2)!}{s! (n-s-1)! (ct)^{2n-2s}} + \sum_{s=1}^{\left[\frac{n-1}{2} \right]} \frac{(-1)^{s+1} 2^{2s} n! (2n-2s-2)!}{(2s)! (n-2s-1)! (ct)^{2n-2s}}. \quad (343)$$

U zadnjem izrazu otpada za $n=2$ druga suma.

U svrhu dokaza treba se najprije uvjeriti, da te formule za $n=2$ i $n=3$ daju izraze (336), (337). Dalje ih treba uvrstiti u jednadžbu rekurzije (335). Uzmimo najprije u obzir članove sa P_1 , t. j. članove, koji potječu od izraza (340):

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \frac{(-1)^{s+1} 2^{2s-2} n! (2n-2s)!}{(n-2s+1)! (2s-2)! (ct)^{2n-2s}} = \\ &= \frac{2n(2n-3)}{c^2 t^2} \sum_{s=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^{s+1} 2^{2s-2} (n-1)! (2n-2s-2)!}{(n-2s)! (2s-2)! (ct)^{2n-2s-2}} - \\ &- \frac{4n(n-1)}{c^2 t^2} \sum_{s=2}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \frac{(-1)^s 2^{2s-4} (n-2)! (2n-2s-2)!}{(n-2s+1)! (2s-4)! (ct)^{2n-2s-2}}, \quad (344) \end{aligned}$$

pri čemu smo u zadnjoj sumi stavili $s = s-1$ i naknadno pisali opet s mjesto s . Pretpostavimo

$$2 \leq s \leq \frac{n}{2} \quad (345)$$

i svedimo opće članove na zajednički nazivnik

$$(n-2s+1)! (2s-2)! (ct)^{2n-2s}.$$

Brojnici onda daju

$$\begin{aligned} & (-1)^{s+1} 2^{2s-2} n! (2n-2s)! = \\ &= 2n(2n-3)(n-2s+1)(-1)^{s+1} 2^{2s-2} (n-1)! (2n-2s-2)! - \\ &- 4n(n-1)(2s-2)(2s-3)(-1)^s 2^{2s-4} (n-2)! (2n-2s-2)!. \quad (346) \end{aligned}$$

Dioba sa $(-1)^{s+1} 2^{2s-2} n! (2n-2s-2)!$ daje

$$(2n-2s)(2n-2s-1) = 2(2n-3)(n-2s+1) + (2s-2)(2s-3), \quad (347)$$

što je ispravno. Ako je $s=1$, dobijemo

$$\frac{n! (2n-2)!}{(n-1)! 0! (ct)^{2n-2}} = \frac{2n(2n-3)(n-1)! (2n-4)!}{(n-2)! 0! (ct)^{2n-2}}, \quad (348)$$

što je ispravno. Ako je n lih broj, može biti $s = \frac{n+1}{2} = p$,

pa dobijemo

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^{p+1} 2^{2p-2} (2p-1)! (2p-2)!}{0! (2p-2)! (ct)^{2p-2}} = \\ & = \frac{4 (2p-1) (2p-2) (-1)^{p+1} 2^{2p-4} (2p-3)! (2p-4)!}{0! (2p-4)! (ct)^{2p-2}}, \quad (349) \end{aligned}$$

što je ispravno.

Analogno uzmimo sad u obzir članove sa P_0 , t. j. one, koji potječu od izraza (341):

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^s 2^{2s} n! (2n-2s-1)!}{(n-2s)! (2s-1)! (ct)^{2n-2s}} = \\ & = \frac{2n(2n-3)}{c^2 t^2} \sum_{s=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{(-1)^s 2^{2s} (n-1)! (2n-2s-3)!}{(n-2s-1)! (2s-1)! (ct)^{2n-2s-2}} - \\ & - \frac{4n(n-1)}{c^2 t^2} \sum_{s=2}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^{s-1} 2^{2s-2} (n-2)! (2n-2s-3)!}{(n-2s)! (2s-3)! (ct)^{2n-2s-2}}. \quad (350) \end{aligned}$$

Pretpostavimo

$$2 \leq s \leq \frac{n-1}{2} \quad (351)$$

i svedimo na zajednički nazivnik $(n-2s)! (2s-1)! (ct)^{2n-2s}$. Brojnici daju

$$\begin{aligned} & (-1)^s 2^{2s} n! (2n-2s-1)! = \\ & = 2n(2n-3) (n-2s) (-1)^s 2^{2s} (n-1)! (2n-2s-3)! - \\ & - 4n(n-1) (2s-1) (2s-2) (-1)^{s-1} 2^{2s-2} (n-2)! (2n-2s-3)!. \quad (352) \end{aligned}$$

Dioba sa $(-1)^s 2^{2s} n! (2n-2s-3)!$ daje

$$\begin{aligned} & (2n-2s-1) (2n-2s-2) = 2(2n-3) (n-2s) + \\ & + (2s-1) (2s-2), \quad (353) \end{aligned}$$

što je ispravno. Za $s=1$ izlazi

$$-\frac{2^2 n! (2n-3)!}{(n-2)! 1! (ct)^{2n-2}} = -\frac{2n(2n-3) 2^2 (n-1)! (2n-5)!}{(n-3)! 1! (ct)^{2n-2}}, \quad (354)$$

što je ispravno. Ako je n tak broj, može biti $s = \frac{n}{2} = p$, pa izlazi

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^p 2^{2p} (2p)! (2p-1)!}{0! (2p-1)! (ct)^{2p}} = \\ & = -\frac{8p(2p-1) (-1)^{p-1} 2^{2p-2} (2p-2)! (2p-3)!}{0! (2p-3)! (ct)^{2p}}, \quad (355) \end{aligned}$$

što je ispravno.

Uzmimo dalje u obzir članove, koji potječu od (342) za jedno stanovito r . Pretpostavimo ponajprije

$$1 \leq r \leq n-3. \quad (356)$$

Dobijemo

$$\begin{aligned} & \sum_{s=0}^{\left[\frac{n-r-1}{2}\right]} \frac{(-1)^{s+1} 2^{2s+1} n! (n-r-s-1)! (2n-2s-2)! (r+s)!}{r! s! (n-r-2s-1)! (n-s-1)! (2r+2s)! (ct)^{2n-2r-2s}} = \\ & = \frac{2n(2n-3)}{c^2 t^2} \cdot \\ & \cdot \sum_{s=0}^{\left[\frac{n-r-2}{2}\right]} \frac{(-1)^{s+1} 2^{2s+1} (n-1)! (n-r-s-2)! (2n-2s-4)! (r+s)!}{r! s! (n-r-2s-2)! (n-s-2)! (2r+2s)! (ct)^{2n-2r-2s-2}} = \\ & = \frac{4n(n-1)}{c^2 t^2} \cdot \\ & \cdot \sum_{s=1}^{\left[\frac{n-r-1}{2}\right]} \frac{(-1)^s 2^{2s-1} (n-2)! (n-r-s-2)! (2n-2s-4)! (r+s-1)!}{r! (s-1)! (n-r-2s-1)! (n-s-2)! (2r+2s-2)! (ct)^{2n-2r-2s-2}}. \quad (357) \end{aligned}$$

Neka je

$$1 \leq s \leq \frac{n-r-2}{2}, \quad (358)$$

i svedimo opće članove na nazivnik

$r! s! (n-r-2s-1)! (n-s-1)! (2r+2s)! (ct)^{2n-2r-2s}$. Broj-
nici daju

$$\begin{aligned} & (-1)^{s+1} 2^{2s+1} n! (n-r-s-1)! (2n-2s-2)! (r+s)! = \\ & = 2n(2n-3)(n-r-2s-1)(n-s-1)(-1)^{s+1} \cdot \\ & \cdot 2^{2s+1} (n-1)! (n-r-s-2)! (2n-2s-4)! (r+s)! - \\ & - 4n(n-1)s(n-s-1)(2r+2s)(2r+2s-1)(-1)^s \cdot \\ & \cdot 2^{2s-1} (n-2)! (n-r-s-2)! (2n-2s-4)! (r+s-1)!. \quad (359) \end{aligned}$$

Dioba sa

$$\begin{aligned} & (-1)^{s+1} 2^{2s+2} (n-s-1)n! (n-r-s-2)! (2n-2s-4)! (r+s)! \\ & \text{daje} \\ & (n-r-s-1)(2n-2s-3) = (2n-3)(n-r-2s-1) + \\ & + s(2r+2s-1), \quad (360) \end{aligned}$$

što je ispravno. Za $s=0$ dobijemo

$$\begin{aligned} & - \frac{2n!(n-r-1)!(2n-2)!r!}{r!0!(n-r-1)!(n-1)!(2r)!(ct)^{2n-2r}} = \\ & = - \frac{2n(2n-3)2(n-1)!(n-r-2)!(2n-4)!r!}{r!0!(n-r-2)!(n-2)!(2r)!(ct)^{2n-2r}}, \quad (361) \end{aligned}$$

što je ispravno. Ako je $n-r-1$ tak broj, može biti

$$s = \frac{n-r-1}{2} = p, \text{ pa dobijemo}$$

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^{p+1} 2^{2p+1} (2p+r+1)!p!(2p+2r)!(r+p)!}{r!p!0!(p+r)!(2r+2p)!(ct)^{2p+2}} = \\ & = \frac{4(2p+r+1)(2p+r)(-1)^{2p+1} 2^{2p-1} (2p+r-1)!(p-1)!(2p+2r-2)!(r+p-1)!}{r!(p-1)!0!(p+r-1)!(2r+2p-2)!(ct)^{2p+2}}, \quad (362) \end{aligned}$$

što je ispravno. Ako je $r=n-2$ (363), otpada zadnja suma,
a u ostalim je moguća samo vrijednost $s=0$, pa dobijemo

$$\begin{aligned} & - \frac{2n!1!(2n-2)!(n-2)!}{(n-2)!0!1!(n-1)!(2n-4)!(ct)^4} = \\ & = - \frac{2n(2n-3)2(n-1)!0!(2n-4)!(n-2)!}{(n-2)!0!0!(n-2)!(2n-4)!(ct)^4}, \quad (364) \end{aligned}$$

što je ispravno. Ako je $r = n - 1$ (365), dobijemo samo sumu na lijevoj strani sa $s = 0$, ali prema jednadžbi rekurzije (335) pridolazi još na desnoj strani sumand $-\frac{2n}{c^2 t^2}$, dakle

$$-\frac{2n! 0! (2n-2)! (n-1)!}{(n-1)! 0! 0! (n-1)! (2n-2)! (ct)^2} = -\frac{2n}{c^2 t^2}, \quad (366)$$

što je ispravno. Time su članovi, koji potječu od (342), uzeti u obzir. Svi ostali članovi, koji dakle potječu od (343), daju:

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^{n-1} \frac{n! (2n-2s-2)!}{s! (n-s-1)! (ct)^{2n-2s}} + \sum_{s=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{(-1)^{s+1} 2^{2s} n! (2n-2s-2)!}{(2s)! (n-2s-1)! (ct)^{2n-2s}} = \\ & = \frac{2n(2n-3)}{c^2 t^2} \sum_{s=1}^{n-2} \frac{(n-1)! (2n-2s-4)!}{s! (n-s-2)! (ct)^{2n-2s-2}} + \\ & + \frac{2n(2n-3)}{c^2 t^2} \sum_{s=1}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} \frac{(-1)^{s+1} 2^{2s} (n-1)! (2n-2s-4)!}{(2s)! (n-2s-2)! (ct)^{2n-2s-2}} - \\ & - \frac{4n(n-1)}{c^2 t^2} \sum_{s=2}^{n-2} \frac{(n-2)! (2n-2s-4)!}{(s-1)! (n-s-2)! (ct)^{2n-2s-2}} - \\ & - \frac{4n(n-1)}{c^2 t^2} \sum_{s=2}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{(-1)^s 2^{2s-2} (n-2)! (2n-2s-4)!}{(2s-2)! (n-2s-1)! (ct)^{2n-2s-2}} + \frac{n}{c^2 t^2} \\ & (n=4, 5, 6, \dots). \quad (367) \end{aligned}$$

Zadnja suma otpada za $n=4$.

Za $s=1$ (368) dobijemo

$$\begin{aligned} & \frac{n! (2n-4)!}{1! (n-2)! (ct)^{2n-2}} + \frac{2^2 n! (2n-4)!}{2! (n-3)! (ct)^{2n-2}} = \\ & = \frac{2n(2n-3)(n-1)! (2n-6)!}{1! (n-3)! (ct)^{2n-2}} + \frac{2n(2n-3) 2^2 (n-1)! (2n-6)!}{2^2 (n-4)! (ct)^{n-2}}. \quad (369) \end{aligned}$$

Svedimo na nazivnik $2(n-2)! (ct)^{2n-2}$. Brojnice daju

$$\begin{aligned} & 2n! (2n-4)! + (n-2) 2^2 n! (2n-4)! = \\ & = 2(n-2) 2n (2n-3) (n-1)! (2n-6)! + \\ & + (n-2) (n-3) 2n (2n-3) 2^2 (n-1)! (2n-6)! \quad (370) \end{aligned}$$

Dioba sa $2n! (2n-4) (2n-6)!$ daje

$$(2n-5) + 2(n-2)(2n-5) = (2n-3) + 2(n-3)(2n-3), \quad (371)$$

što je ispravno.

Za $s \geq 2$ (372) uzmimo najprije u obzir samo prvu sumu lijevo i prvu i treću sumu desno u jednakosti (367). Zajednički nazivnik će biti $s! (n-s-1)! (ct)^{2n-2s}$, a pretpostavlja se

$$2 \leq s \leq n-2. \quad (373)$$

Brojnici daju

$$n! (2n-2s-2)! = 2n(2n-3)(n-s-1)(n-1)! (2n-2s-4)! - \\ - 4n(n-1)s(n-s-1)(n-2)! (2n-2s-4)! \quad (374)$$

Dioba sa $n! (2n-2s-2) (2n-2s-4)!$ daje

$$n-2s-3 = (2n-3)-2s, \quad (375)$$

što je ispravno. Za $s=n-1$ treba uzeti u obzir i zadnji član u (367):

$$\frac{n! 0!}{(n-1)! 0! (ct)^2} = \frac{n}{c^2 t^2}. \quad (376)$$

I ovo je ispravno.

Uzmimo sad u obzir drugu sumu lijevo i drugu i četvrtu sumu desno u (367) i pretpostavimo

$$2 \leq s \leq \frac{n-2}{2}. \quad (377)$$

Zajednički nazivnik je $(2s)! (n-2s-1)! (ct)^{2n-2s}$, a brojnici daju

$$(-1)^{s+1} 2^{2s} n! (2n-2s-2)! = \\ = 2n(2n-3)(n-2s-1)(-1)^{s+1} 2^{2s} (n-1)! (2n-2s-4)! - \\ - 4n(n-1)2s(2s-1)(-1)^s 2^{2s-2} (n-2)! (2n-2s-4)!. \quad (378)$$

Dioba sa $(-1)^{s+1} 2^{2s+1} n! (2n-2s-4)!$ daje

$$(n-s-1)(2n-2s-3) = (2n-3)(n-2s-1) + s(2s-1), \quad (379)$$

što je ispravno. Za slučaj, da je $n-1$ tak broj, može biti $s = \frac{n-1}{2} = p$, pa druga suma lijevo i četvrta suma desno u (367) daju

$$\begin{aligned}
& \frac{(-1)^{p+1} 2^{2p} (2p+1)! (2p)!}{(2p)! 0! (ct)^{2p+2}} = \\
& = - \frac{4 (2p+1) 2p (-1)^p 2^{2p-2} (2p-1)! (2p-2)!}{(2p-2)! 0! (ct)^{2p+2}}, \quad (380)
\end{aligned}$$

što je ispravno. Time je cijeli dokaz proveden.

6. Redukcija integrala $\int_X x^m \Lambda_n (c \sqrt{t^2 - x^2}) dx$.

Izvršimo li na temelju (9) parcijalnu integraciju

$$\begin{aligned}
\int_X^t x^m \Lambda_n (c \sqrt{t^2 - x^2}) dx &= \frac{2n}{c^2} \left\{ t^{m-1} - X^{m-1} \Lambda_{n-1} (c \sqrt{t^2 - X^2}) \right\} - \\
&- \frac{2n(m-1)}{c^2} \int_X^t x^{m-2} \Lambda_{n-1} (c \sqrt{t^2 - x^2}) dx \quad (381)
\end{aligned}$$

dovoljan broj puta, dolazimo bez poteškoća do ovih formula:

a) za $m = 2r$ i $r \leq n$:

$$\begin{aligned}
& \int_X^t x^{2r} \Lambda_n (c \sqrt{t^2 - x^2}) dx = \\
&= \sum_{s=1}^r \frac{(-1)^{s+1} n! (2r)! (r-s)!}{c^{2s} (n-s)! r! (2r-2s+1)!} \left\{ t^{2r-2s+1} - X^{2r-2s+1} \Lambda_{n-s} (c \sqrt{t^2 - X^2}) \right\} + \\
&+ (-1)^r \frac{n! (2r)!}{c^{2r} (n-r)! r!} \int_X^t \Lambda_{n-r} (c \sqrt{t^2 - x^2}) dx. \quad (382)
\end{aligned}$$

Integral na desnoj strani može se dalje izraziti s pomoću (339).

b) za $m = 2r$ i $r > n$:

$$\begin{aligned}
& \int_X^t x^{2r} \Lambda_n (c \sqrt{t^2 - x^2}) dx = \\
&= \sum_{s=1}^n \frac{(-1)^{s+1} n! (2r)! (r-s)!}{c^{2s} (n-s)! r! (2r-2s+1)!} \left\{ t^{2r-2s+1} - X^{2r-2s+1} \Lambda_{n-s} (c \sqrt{t^2 - X^2}) \right\} + \\
&+ (-1)^n \frac{n! (2r)! (r-n)!}{c^{2n} r! (2r-2n)!} \int_X^t x^{2r-2n} \Lambda_0 (c \sqrt{t^2 - x^2}) dx. \quad (383)
\end{aligned}$$

Integral na desnoj strani može se dalje izraziti s pomoću (326).

c) za $m = 2r + 1$ i $r < n$:

$$\int_x^t x^{2r+1} A_n (c \sqrt{t^2 - x^2}) dx =$$

$$= \sum_{s=1}^{r+1} \frac{(-1)^{s+1} 2^{2s-1} n! r!}{c^{2s} (n-s)! (r-s+1)!} \{t^{2r-2s+3} - X^{2r-2s+3} A_{n-s} (c \sqrt{t^2 - X^2})\}. \quad (384)$$

d) za $m = 2r + 1$ i $r \geq n$:

$$\int_x^t x^{2r+1} A_n (c \sqrt{t^2 - x^2}) dx =$$

$$= \sum_{s=1}^n \frac{(-1)^{s+1} 2^{2s-1} n! r!}{c^{2s} (n-s)! (r-s+1)!} \{t^{2r-2s+2} - X^{2r-2s+2} A_{n-s} (c \sqrt{t^2 - X^2})\} +$$

$$+ (-1)^n \frac{2^{2n} n! r!}{c^{2n} (r-n)!} \int_x^t x^{2r-2n+1} A_0 (c \sqrt{t^2 - x^2}) dx. \quad (385)$$

Integral na desnoj strani može se dalje izraziti s pomoću (318).

$$7. \text{ Derivacije po } t \text{ integrala } \int_x^t x^n A_n (c \sqrt{t^2 - x^2}) dx.$$

Služeći se kraticom (332) tvrdimo, da vrijedi

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} P_0 = f_n(t) P_0 + g_n(t) P_1 + \dots \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (386)$$

gdje je za $r = 0, 1, 2, \dots$

$$f_{2r}(t) = (-1)^r c^{2r} \quad (387)$$

$$g_{2r}(t) = 0 \quad (388)$$

$$f_{2r+1}(t) = 0 \quad (389)$$

$$g_{2r+1}(t) = \frac{(-1)^{r+1} c^{2r+2} t}{2}, \quad (390)$$

a točkice na desnoj strani od (386) znače članove, koji ne sadržavaju integrala. Jednakost (386) je očito ispravna za $n = 0$, što

odgovara $r=0$ u (387), (388). Pretpostavimo, da je ispravna za neko n i diferencirajmo jednakost po t . S pomoću (9) dobijemo

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \{f_n(t) P_0 + g_n(t) P_1 + \dots\} = \\ & = f'_n(t) P_0 + f_n(t) - \frac{c^2 t}{2} f_n(t) P_1 + g'_n(t) P_1 + g_n(t) - \frac{c^2 t}{4} g_n(t) P_2 + \dots \quad (391) \end{aligned}$$

Uvrstimo li (336), izlazi

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \{f_n(t) P_0 + g_n(t) P_1 + \dots\} = \\ & = \left[f'_n(t) + \frac{2}{t} g_n(t) \right] P_0 + \left[g'_n(t) - \frac{c^2 t}{2} f_n(t) - \frac{1}{t} g_n(t) \right] P_1 + \dots \quad (392) \end{aligned}$$

Prema tome funkcije $f_n(t)$, $g_n(t)$ zadovoljavaju jednadžbe rekurzije

$$f_{n+1}(t) = f'_n(t) + \frac{2}{t} g_n(t), \quad (393)$$

$$g_{n+1}(t) = g'_n(t) - \frac{c^2 t}{2} f_n(t) - \frac{1}{t} g_n(t). \quad (394)$$

Lako je uvjeriti se, da izrazi (387), (388), (389), (390) zadovoljavaju ove jednadžbe rekurzije, čime je dokaz proveden.

Tvrdimo dalje, da vrijedi

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} (tP_1) = \varphi_n(t) P_0 + \psi_n(t) P_1 + \dots \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (395)$$

gdje je za $r = 0, 1, 2, \dots$

$$\varphi_{2r}(t) = 0 \quad (396)$$

$$\psi_{2r}(t) = (-1)^r c^{2r} t \quad (397)$$

$$\varphi_{2r+1}(t) = (-1)^r 2c^{2r} \quad (398)$$

$$\psi_{2r+1}(t) = 0. \quad (399)$$

Iz (389), (390) izlazi za $r=0$

$$\frac{\partial}{\partial t} P_0 = -\frac{c^2}{2} t P_1 + \dots, \quad (400)$$

dakle

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} (tP_1) = -\frac{2}{c^2} \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} P_0 + \dots = -\frac{2}{c^2} [f_{n+1}(t) P_0 + g_{n+1}(t) P_1] + \dots \quad (401)$$

ili

$$\varphi_n(t) = -\frac{2}{c^2} f_{n+1}(t) \quad (402)$$

$$\psi_n(t) = -\frac{2}{c^2} g_{n+1}(t), \quad (403)$$

čime je dokaz proveden.

Ograničimo li se na članove najviših potencija od t , koji su pomnoženi sa P_0 ili P_1 , to dobijemo na temelju (326), (386) i (395):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{2r}}{\partial t^{2r}} \int_x^t x^{1n} \Lambda_j(c \sqrt{t^2 - x^2}) dx &= \frac{(-1)^n (4n)!}{2^{2n} c^{2n} (2n)!} \left\{ t^{2n} \frac{\partial^{2r}}{\partial t^{2r}} P_0 + \right. \\ &+ 4nr t^{2n-1} \frac{\partial^{2r-1}}{\partial t^{2r-1}} P_0 - \frac{n(2n+1)}{2} t^{2n-1} \frac{\partial^{2r}}{\partial t^{2r}} (tP_1) - \\ &- nr(2n+1)(2n-1) t^{2n-2} \frac{\partial^{2r-1}}{\partial t^{2r-1}} (tP_1) \Big\} + \dots = \frac{(-1)^n (4n)!}{2^{2n} c^{2n} (2n)!} \left\{ (-1)^r c^{2r} t^{2n} P_0 + \right. \\ &+ (-1)^r 2nrc^{2r} t^{2n} P_1 - (-1)^r \frac{n(2n+1)}{2} c^{2r} t^{2n} P_1 - \\ &- (-1)^{r-1} 2nr(2n+1)(2n-1) c^{2r-2} t^{2n-2} P_0 \Big\} + \dots = \\ &= \frac{(-1)^{n+r} (4n)!}{2^{2n} c^{2n-2r} (2n)!} \left\{ t^{2n} P_0 + \frac{n(4r-2n-1)}{2} t^{2n} P_1 \right\} + \dots \quad (404) \\ \frac{\partial^{2r+1}}{\partial t^{2r+1}} \int_x^t x^{1n} \Lambda_j(c \sqrt{t^2 - x^2}) dx &= \frac{(-1)^n (4n)!}{2^{2n} c^{2n} (2n)!} \left\{ t^{2n} \frac{\partial^{2r+1}}{\partial t^{2r+1}} P_0 + \right. \\ &+ 2n(2r+1) t^{2n+1} \frac{\partial^{2r}}{\partial t^{2r}} P_0 - \frac{n(2n+1)}{2} t^{2n-1} \frac{\partial^{2r+1}}{\partial t^{2r+1}} (tP_1) - \\ &- \frac{n(2r+1)(2n+1)(2n-1)}{2} t^{2n-2} \frac{\partial^{2r}}{\partial t^{2r}} (tP_1) \Big\} = \\ &= \frac{(-1)^n (4n)!}{2^{2n} c^{2n} (2n)!} \left\{ (-1)^{r+1} \frac{1}{2} c^{2r+2} t^{2n+1} P_1 + \right. \\ &+ (-1)^r 2n(2r+1) c^{2r} t^{2n-1} P_0 + (-1)^{r+1} n(2n+1) c^{2r} t^{2n-1} P_0 + \end{aligned}$$

$$+ (-1)^{r+1} \frac{n(2r+1)(2n+1)(2n-1)}{2} c^{2r} t^{2n-1} P_1 \Big\} + \dots =$$

$$= \frac{(-1)^{n+r} (4n)!}{2^{2n} c^{2n-2r} (2n)!} \left\{ n(4r-2n+1) t^{2n-1} P_0 - \frac{c^2}{2} t^{2n+1} P_1 \right\} + \dots \quad (405)$$

$$\frac{\partial^{2r}}{\partial t^{2r}} \int_X^t x^{2n+2} \Lambda_j(c \sqrt{t^2 - x^2}) dx =$$

$$= \frac{(-1)^n (4n+2)!}{2^{2n+2} c^{2n+2} (2n+1)!} \left\{ 2(n+1)(2n+1) t^{2n} \frac{\partial^{2r}}{\partial t^{2r}} P_0 + \right.$$

$$+ 8nr(n+1)(2n+1) t^{2n-1} \frac{\partial^{2r-1}}{\partial t^{2r-1}} P_0 + c^2 t^{2n+1} \frac{\partial^{2r}}{\partial t^{2r}} (tP_1) +$$

$$\left. + 2r(2n+1) c^2 t^{2n} \frac{\partial^{2r-1}}{\partial t^{2r-1}} (tP_1) \right\} + \dots =$$

$$= \frac{(-1)^n (4n+2)!}{2^{2n+2} c^{2n+2} (2n+1)!} \left\{ (-1)^r 2(n+1)(2n+1) c^{2r} t^{2n} P_0 + \right.$$

$$+ (-1)^r 4nr(n+1)(2n+1) c^{2r} t^{2n} P_1 + (-1)^r c^{2r+2} t^{2n+2} P_1 +$$

$$\left. + (-1)^{r-1} 4r(2n+1) c^{2r} t^{2n} P_0 \right\} + \dots =$$

$$= \frac{(-1)^{n+r} (4n+2)!}{2^{2n+2} c^{2n-2r+2} (2n+1)!} \left\{ 2(2n+1)(n-2r+1) t^{2n} P_0 + \right.$$

$$\left. + c^2 t^{2n+2} P_1 \right\} + \dots \quad (406)$$

$$\frac{\partial^{2r+1}}{\partial t^{2r+1}} \int_X^t x^{2n+2} \Lambda_j(c \sqrt{t^2 - x^2}) dx =$$

$$= \frac{(-1)^n (4n+2)!}{2^{2n+2} c^{2n+2} (2n+1)!} \left\{ 2(n+1)(2n+1) t^{2n} \frac{\partial^{2r+1}}{\partial t^{2r+1}} P_0 + \right.$$

$$+ 4n(n+1)(2n+1)(2r+1) t^{2n-1} \frac{\partial^{2r}}{\partial t^{2r}} P_0 +$$

$$\left. + c^2 t^{2n+1} \frac{\partial^{2r+1}}{\partial t^{2r+1}} (tP_1) + (2n+1)(2r+1) c^2 t^{2n} \frac{\partial^{2r}}{\partial t^{2r}} (tP_1) \right\} + \dots =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(-1)^n (4n+2)!}{2^{2n+2} c^{2n+2} (2n+1)!} \left\{ (-1)^{r+1} (n+1) (2n+1) c^{2r+2} t^{2n+1} P_1 + \right. \\
&+ (-1)^r 4n (n+1) (2n+1) (2r+1) c^{2r} t^{2n-1} P_0 + (-1)^r 2 c^{2r+2} t^{2n+1} P_0 + \\
&\left. + (-1)^r (2n+1) (2r+1) c^{2r+2} t^{2n+1} P_1 \right\} + \dots = \\
&= \frac{(-1)^{n+r} (4n+2)!}{2^{2n+2} c^{2n-2r} (2n+1)!} \left\{ 2 t^{2n+1} P_0 + (2n+1) (2r-n) t^{2n+1} P_1 \right\} + \dots \quad (407)
\end{aligned}$$

Radi boljeg pregleda ponavljamo rezultate zadnjih četiriju pre-tvorbi:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^{2r}}{\partial t^{2r}} \int_x^t x^{1n} \Lambda_0 (c \sqrt{t^2 - x^2}) dx = \\
&= \frac{(-1)^{n+r} (4n)!}{2^{2n} c^{2n-2r} (2n)!} \left\{ t^{2n} P_0 + \frac{n(4r-2n-1)}{2} t^{2n} P_1 \right\} + \dots \quad (408)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^{2r+1}}{\partial t^{2r+1}} \int_x^t x^{1n} \Lambda_0 (c \sqrt{t^2 - x^2}) dx = \\
&= \frac{(-1)^{n+r} (4n)!}{2^{2n} c^{2n-2r} (2n)!} \left\{ n(4r-2n+1) t^{2n-1} P_0 - \frac{c^2}{2} t^{2n+1} P_1 \right\} + \dots \quad (409)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^{2r}}{\partial t^{2r}} \int_x^t x^{1n+2} \Lambda_0 (c \sqrt{t^2 - x^2}) dx = \\
&= \frac{(-1)^{n+r} (4n+2)!}{2^{2n+2} c^{2n-2r+2} (2n+1)!} \left\{ 2(2n+1) (n-2r+1) t^{2n} P_0 + c^2 t^{2n+2} P_1 \right\} + \dots \quad (410)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^{2r+1}}{\partial t^{2r+1}} \int_x^t x^{1n+2} \Lambda_0 (c \sqrt{t^2 - x^2}) dx = \\
&= \frac{(-1)^{n+r} (4n+2)!}{2^{2n+2} c^{2n-2r} (2n+1)!} \left\{ 2 t^{2n+1} P_0 + (2n+1) (2r-n) t^{2n+1} P_1 \right\} + \dots \quad (411)
\end{aligned}$$



HOMOGENE MREŽE RAVNINE

U V O D

Problem, koji će biti razmatran u ovoj raspravi, ima svoj historijski početak još u starom vijeku u geometriji Grka. U XIII. knjizi svojih »Elemenata«¹ daje Euklid uz definiciju pravilnih poliedara i dokaz njihove egzistencije, daje njihove konstrukcije, istražuje njihova metrička svojstva i na kraju pokazuje, da osim pet promatranih ne može biti više pravilnih poliedara. No ti pravilni poliedri, koje su Grci zvali i Platonovim ili kozmičkim tjelesima, bili su poznati u Grčkoj još mnogo prije Euklida. Kako su stari Grci bili u prvom redu umjetnici, koji su u svakoj filozofskoj i naučnoj spoznaji tražiti i estetski momenat, to je razumljivo, da su baš oni stvorili pojam pravilnog poliedra. Čini se, da je problem pravilnog poliedra bio prvi put postavljen u školi Pitagorinoj; sigurno je naime, da ih pitagorovci poznaju već svih pet.² Poznato je, kako su grčki filozofi doveli u vezu nauku o pravilnim poliedrima s Demokritovom atomistikom, dajući atomima pojedinih elemenata, pa i cijelom svemiru, oblike pravilnih tjelesa. Iako su dakle regularni poliedri sigurno bili poznati dva stoljeća prije Euklida, prvi potpuni geometrijski dokaz njihove egzistencije nalazi se istom u njegovim »Elementima«. Koliki je u Grka bio interes za problem pravilnih poliedara, možemo vidjeti po tome, što su različiti matematičari iza Euklida dodali »Elementima« još dvije knjige, koje sadržavaju otkrića o pravilnim poliedrima iza Euklida. No i kasnije, pa sve do najnovijeg vremena, vraćali su regularni poliedri na sebe interes, pa su se tim problemima bavili i mnogi istaknuti matematičari osamnaestog i devetnaestog stoljeća, tako na pr. među ostalima: Legendre, L'Huilier, Cauchy, Sohncke, Jacobi i t. d.

¹ Oswald's Klassiker der exakten Wissenschaften, Bd. 243, C. Thaer: Die Elemente von Euklid V., Leipzig 1937., str. 84.—99.

² H. G. Zeuthen: Geschichte der Mathematik. Kopenhagen 1896., str. 34.

Problem pravilnih poliedara može se na više različitih načina proširiti. Tako E. Steinitz³ nabraja ovih pet mogućnosti proširenja:

1. Uvjeti pravilnosti ploha i uglova mogu se zamijeniti malo širim uvjetima. (To je već učinio Arhimed i našao sve moguće poliedre s pravilnim ploham a različite vrste i kongruentnim uglovima, koje danas zovemo Arhimedovim poliedrima. Kepler je istraživao poliedre polarne Arhimedovima, t. j. poliedre kongruentnih ploha i pravilnih uglova. Sve su to »polupravilni poliedri«. U novije je vrijeme učinjeno daljnje proširenje u tom smislu, pa su istraživani općenitiji istoplošni i istougli poliedri.)

2. Uvjeti pravilnosti mogu se proširiti od običnih Eulerovih poliedara i na poliedre više vrste. Dolazimo tako od Platonovih do regularnih poliedara više vrste.

3. Proširenje s obzirom na višedimenzionalnu geometriju daje problem regularnih tjelesa ili politopa u R_n .

4. Proširenje s obzirom na neeuklidske geometrije daje problem regularne razdiobe hiperbolične, parabolične, sferne i eliptične ravnine.

5. Proširenje s obzirom na topologiju daje probleme, kod kojih se mjesto metričkih pravilnosti traže samo stanovite pravilnosti s obzirom na poredaj poliedarskih elemenata.

Kombinacijama ovih različitih gledišta za mogućnost proširenja problema regularnih poliedara dolazimo do novih geometrijskih problema.

Tako je problem homogenih i pravilnih homogenih mreža u ravnini, koji će biti predmetom ove radnje, zapravo nastao proširenjem problema regularnih poliedara u smislu točke 1., 4. i 5. od gore navedenih Steinitzovih mogućnosti.

Neke osnovne ideje tako proširenog problema mogu se naći već u starom vijeku. Rješenjem problema pravilnih poliedara riješen je dakako i problem razdiobe kugline plohe u pravilne sukladne sferne poligone, a onda nije ništa prirodnije, nego da se taj problem proširi i na ravninu. I doista u petom stoljeću prije n. e. bila je pitagorovcima poznata mogućnost razdiobe ravnine u pravilne sukladne trokute, četverokute i šesterokute.⁴ U jednom ornamentu,⁵ koji je zacijelo još egipatskog podrijetla,

³ Encyklopädie der Math. Wiss., Bd. III., 1. T., 2. H., Heft 9. E. Steinitz: Polyeder und Raumteilungen, str. 101.

⁴ Zeuthen: str. 35. i M. Cantor: Geschichte der Mathematik I., str. 177.

⁵ Vidi sl. 1. na str. 81. u A. Speiser: Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung. II. Aufl., Berlin 1927.

a koji je nađen u Izidinom hramu u Pompejima, može se razabrati pravilna homogena mreža R [3, 4, 6, 4] (vidi sliku na kraju ove radnje.) Samo taj ornamenat možemo sigurno smatrati više proizvodom umjetničke inspiracije negoli svjesne geometrijske spoznaje. No od tada pa sve do gotovo najnovijeg vremena nije u tom smislu nađeno ništa novo. Istom početkom devetnaestog stoljeća problem postaje opet aktualan, kada se njime počinju baviti neki matematičari u Francuskoj. Do njihovih originalnih radova nisam mogao doći, ali o tom Brückner⁶ potanje referira: L'Huilier je promatrao gore spomenute pitagorovske razdiobe ravnine kao granične slučajeve regularnih poliedara. Gergonne⁷ promatra analogno granični slučaj Arhimedovih poliedara, ali izvodi to nepotpuno i previda mnoge slučajeve polupravnih razdioba euklidske ravnine. »Potpuno rješenje problema« — kako kaže Brückner — daje istom Badoureaux⁸, ali, ako doista Brückner ispravno navodi sve rezultate, onda ni Badoureaux ne daje sva rješenja problema, jer i on previda neke moguće slučajeve.

Jednu malu bilješku o pravilnim i polupravnim mrežama u euklidskoj ravnini možemo čitati i kod Schoutea⁹, no on tu citira Brücknera i navodi iste nepotpune rezultate.

Dakako da je u svim ovim radovima problem postavljen još čisto elementarno planimetrijski.

U novije vrijeme, a naročito u posljednjih dvadesetak godina, opaža se pojačani interes za problem razdiobe ravnine u poligone i za probleme ovomu srodne.

Poticaji za izraživanja u tom smjeru došli su s tri različite strane. I za to mi se čini najzgodnijim, da se ovi noviji radovi podijele u tri skupine već prema tome, odakle je poticaj došao.

U I. skupinu mogli bismo ubrojiti radove, kojima je neposredni poticaj dao Hilbert u svom znamenitom predavanju »Mathematische Probleme«, koje je održao 1900. na internacionalnom kongresu matematičara u Parizu. Radovi ove skupine jesu na pr. [3], [6] i [8]¹⁰.

⁶ M. Brückner: *Vielecke und Vielflache. Theorie und Geschichte.* Leipzig 1900., str. 158.

⁷ Gergonne's *Annales*, Bd. 9., 1818./19., str. 321.

⁸ Badoureaux: *Mémoire sur les figures isoscèles.* *Compt. Rend. XLIX.*, 1878., str. 93.

⁹ Schoute: *Mehrdimensionale Geometrie.* 1902.—1905. Bd. II., str. 151.

¹⁰ Brojevi u uglastim zgradama odnose se na literaturu navedenu na svršetku ove radnje.

U II. skupinu možemo ubrojiti radove, koji su potaknuti težnjom, da se riješe stanoviti kristalografski problemi. To su na pr. radovi [4], [5], [11] i [13], a donekle i [10].

Konačno III. skupinu sačinjavali bi oni radovi, koji sadrže nastojanja, da se problemi razdiobe prošire i s obzirom na neeuuklidske geometrije. To su na pr. radovi [1], [7], [9] i [12].

Ovdje ćemo ukratko referirati o najvažnijima od tih radova i to po redu prema skupinama, u koje smo ih svrstali.

I. skupina. Svi radovi ove skupine jesu prilozi rješenju osamnaestog od spomenutih Hilbertovih matematskih problema: »Nastaje pitanje, postoje li i takvi poliedri, koji nisu fundamentalna područja grupa gibanja, ali pomoću kojih je ipak moguće podesnim slaganjem kongruentnih egzemplara potpuno ispuniti cijeli prostor.«

Prvi veći pokušaj, da se dođe bliže rješenju ovog problema u R_3 , daje K. Reinhardt u svom radu [6]. Konačno rješenje tog problema u R_2 daje istom H. Heesch [3], dok za R_n ($n \geq 3$) nalazi rješenje K. Reinhardt [8]. Ova rješenja daju jesni odgovor na gornje pitanje za $n \geq 2$.

Nas će ovdje najviše interesirati Reinhardtov rad [6]. Tu je naime vrlo široko zahvaćen problem razdioba euklidske ravnine u poligone. U I. dijelu postavljene su za elemente takvih razdioba na osnovu općih planimetrijskih i topoloških razmatranja vrlo općenite relacije. U II. dijelu primijenjene su te relacije na razdiobe, koje bi odgovarale našim Q -mrežama i za tako specijalizirane relacije dana je tablica, koja sadrži sva numerička rješenja. Dalje se K. Reinhardt ne obazire na to, da postavljene relacije daju samo nužne uvjete traženih razdioba, pa ne ispituje mogućnost geometrijske realizacije svakog rješenja napose, ali potanje ispituje mogućnosti razdiobe ravnine na kongruentne šesterokute i peterokute, pa postavlja sve tipove tih mnogokuta, za koje postoji mogućnost takve razdiobe ravnine.

II. skupina. Radovi ove skupine polaze od nekih problema postavljenih u teoriji strukture kristala. No prema riječima A. Šubnikova [13]: »Za postignuće ovog cilja meni se čini neophodnim riješiti jednu čisto geometrijsku zadaću — zadaću ispunjavanja ravnine i prostora osobitim poligonima i poliedrima, koje ću nazvati planatomima i stereoatomima...« U ravnini bi to odgovaralo prema našoj terminologiji — kako slijedi iz daljnjeg izlaganja — problemu određenja svih mogućih R -mreža parabolične ravnine, koje se odlikuju tim posebnim

svojstvom, da za svaka dva povoljna čvorišta postoji pomak mreže s preklapanjem ili bez preklapanja, koji prevodi jedno čvorište u drugo, a uz to mreža kao cjelina samu sebe pokriva. Da riješi taj zadatak, Šubnikov polazi od Eulerove poliedarske formule i pomoću nje izvodi nužni uvjet za tražene mreže. Zatim uzima Šubnikov sve kristalografske grupe ravnine i pomoću regularnog sistema ekvivalentnih točaka izvodi za svaku pojedinu grupu sve moguće mreže traženog svojstva na taj način, da spaja točke toga sistema po određenim pravilima. Pritom mu rješenja nužnih uvjeta služe samo kao potvrda, da se spomenutim konstrukcijama doista iscrpljuju svi mogući slučajevi traženih razdioba.

F. Laves [4] dolazi do problema, koji je dualan onomu A. Šubnikova, t. j. on traži sve topološki različite tipove Q -mreža parabolične ravnine. Topološko-planimetrijskim zaključcima nalazi nužne uvjete, koji se i opet u svojoj biti podudaraju s nužnim uvjetima Reinhardta i Šubnikova. Zatim Laves za svako od rješenja ovih nužnih uvjeta napose ili pokazuje crtanjem, da se dade geometrijski realizirati, ili — za manji dio rješenja — dokazuje, da su razdiobe ravnine, koje bi njima odgovarale, topološki nemoguće.

Ovdje ćemo spomenuti i rad H. Heescha [2], koji zapravo po sadržaju ne spada u ovu skupinu radova, ali se nadovezuje na prednji rad F. Lavesa. Tu H. Heesch istražuje broj mogućih topoloških pravilnih razdioba zatvorenih ploha i ovisnost broja mogućih razdioba o suvislosti te plohe.

U radu [5] postavlja W. Nowacki za cilj istražiti svojstva i mogućnosti izvođenja svih homogenih razdioba prostora na »područja djelovanja«. Usput Nowacki poopćuje taj problem na R_n i osobito temeljito promatra slučaj $n=2$. Tako on problem razdiobe ravnine osvjetljuje sa svih strana, a uz to daje sintezu i enciklopedijski pregled prethodnih radova, pa navodi vrlo potpuno literaturu radova, koji su u bližoj ili daljoj vezi s rješavanjem problemima.

U ovu grupu radova možemo uračunati više po metodi i načinu istraživanja i rad R. Sauera [10], koji neovisno od drugih, bez poznavanja prethodnih radova, dolazi do istih rezultata kao i A. Šubnikov, W. Nowacki i dr.

Konačno je tu i rad U. Sinogowitza [11], koji obrađuje srodne probleme, ali koji se temelje na problemu homogene razdiobe ravnine. U tom smislu naslanja se taj rad na radove F. Lavesa [4] i W. Nowackoga [5].

III. skupina. U radu [12] Sommerville istražuje u ravninama triju geometrija semi-regularne mreže, t. j. mreže, kod kojih su svi poligoni regularni, ali općenito različitih vrsta. Ove dijeli u različite tipove i to: »simple types«, kod kojih su sva »čvorišta« kongruentna ili simetrično kongruentna, a to su baš polupravilne razdiobe ravnine u smislu Arhimedovu, koje je i Badourcau istraživao, i »composite types«, kod kojih sva čvorišta nisu međusobno kongruentna. On ispituje svaki slučaj individualno služeći se pri tom samo geometrijskim zorom i pokušavanjem, i bez dokaza egzistencije nabraja sve moguće mreže u euklidskoj i sfernoj ravnini, a za hiperboličnu ravninu samo napominje, da je broj mogućih slučajeva beskonačan.

K. Reinhardt promatra u radu [7] razdiobe hiperbolične ravnine u konveksne istokutne poligone, pa uz neke metričke pretpostavke daje gornju ogradu za broj stranica poligona moguće razdiobe.

R. Cesarec u jednoj napomeni na kraju rada [1] ističe mogućnost razdiobe hiperbolične ravnine u potpuno pravilne ortogone jednakog broja stranica.

U radu [9] E. Roeser promatra razdiobe granične kugle u pravilne kongruentne poligone, koje ujedno daju regularne hiperbolične poliedre s neizmjereno mnogo ploha. Iz relacija za polumjere poliedru opisane i upisane kugle dolazi do jednadžbe, koja je identična sa specijaliziranom relacijom nužnog uvjeta pravilnih homogenih mreža t. j. s relacijom (65) ove radnje.

To je u glavnim crtama prikaz najvažnijih radova, do kojih sam mogao doći, a koji sadržajno stoje u neposrednoj vezi s ovom radnjom.

Pogledat ćemo, što je prema tome do sada već učinjeno u rješavanju problema razdiobe ravnine u poligone. Vidimo iz gornjih radova, da je taj problem od više autora sa mnogo strana proučavan i temeljito istraživao. Da se tu lakše snađemo, pomoći će nam i referat o tom pitanju u radu [5]. Radove koji obrađuje taj problem, podijelio je tu W. Nowacki s obzirom na metode, koje se u njima primjenjuju i koji se problemi pri tom rješavaju, pa je sastavio o tom jednu preglednu tablicu (str. 72). Tako možemo razabrati, da su problemi homogenih razdioba ravnina s kristalografskog stanovišta riješeni, ali s općeg topološkog stanovišta — koje u sam problem šire i dublje zahvaća — rješenje nije potpuno. Tu su postavljeni samo neki nužni uvjeti, a dovoljnih uvjeta kao i dokaza egzistencije još nema.

Tako na pr. F. Laves ističe ([4] str. 225.): »...ali za te uvjete moglo je biti samo pokazano, da su nužni, no nije uspjelo postaviti bilo kakve uvjete, koji bi bili i dovoljni. I doista za manji dio rješenja, koja zadovoljavaju uvjetima, moglo se pokazati, da su razdiobe ravnine, koje bi njima odgovarale, topološki nemoguće, dok se za preostali dio rješenja moglo samo pomoću crteža pokazati, da njima doista odgovaraju razdiobe ravnine u gore naznačenom smislu.«

Slično možemo čitati i kod W. Nowackoga ([5] str. 68.): »Mogućnost realizacije (dovoljni uvjeti?) može za sada i opet biti ustanovljena samo istraživanjem svakog pojedinog slučaja i crtežom.«

Prvi pokušaj, da se ova praznina popuni, nalazi se u radu [11] str. 466. Tu U. Sinogowitz pretpostavlja, da jedna pravilna homogena mreža — šesterokutna — egzistira (a ta se pretpostavka čini autoru neizbježivom), i dokazuje odatle egzistencije ostalih homogenih mreža parabolične ravnine, ali i to opet oslanjajući se samo na zor. I bez obzira na to, da neizbježnost učinjene pretpostavke nije baš evidentna, ovo se ne može smatrati rješenjem problema već i radi toga, jer se ne da primijeniti u neeuklidskim geometrijama, a pogotovo ne u općem topološkom slučaju, pa tako ostaje problem u svojoj općenitosti do sada neriješen.

Ova je radnja prilog konačnom rješenju tog problema i s ovog stanovišta.

Mi ćemo tom problemu pristupiti tako, da ćemo ispitati s jednog jedinstvenog i općenitijeg stanovišta mogućnost egzistencije homogenih mreža, a zatim ćemo dati i dokaze njihovih egzistencija.

No zato će najprije biti potrebno, da nađemo način, kako bismo mogli shematički fiksirati tip neke određene mreže u ravnini. Metode, koje se upotrebljavaju u teoriji poliedara, gdje je tip nekog poliedra fiksiran uz pomoć »plošnih izraza« ili »vršnih izraza« ili »bridnih izraza« ili napokon »matricom incidencije«, ne mogu se tu upotrijebiti, jer ovdje ne će općenito broj poliedarskih elemenata biti konačan, pa bi takve sheme i matrice morale biti beskonačne. Radi toga ćemo mi dati najprije pojam složenog cikličnog slijeda, a onda uz pomoć tog pojma definirati stanovite elementarne poliedarske komplekse, koje ćemo zvati čvorištima odnosno poligonima višeg reda i razreda. Neki određeni tip mreže bit će određen stanovitim beskonačnim slijedom tako stvorenih izraza.

Metoda, koju ćemo tako razviti za rješenje specijalnog problema ove radnje, sigurno će se moći primijeniti i drugdje u kombinatoričkoj topologiji ploha i teoriji poliedara.

Na kraju ove radnje dane su slike svih pravilnih homogenih mreža parabolične ravnine, a iza ovih još i shematski crtež svih pravilnih homogenih mreža eliptične ravnine. Pravilne homogene mreže sferne ravnine nalaze se u spomenutoj radnji Sommervillea [12], jer ono, što on pogrešno naziva pravilnim mrežama eliptične ravnine, zapravo su mreže sferne ravnine. Sommerville naime nije uzео u obzir, da se eliptična ravnina ne da orijentirati.

1. JEDNOSTAVNI I SLOŽENI CIKLIČNI SLJEDOVİ

Definicija 1. Neka je dan konačni skup S od n elemenata, među kojima može biti i jednakih, pa neka je uvijek za svaka po dva elementa određeno, da li su susjedni ili nisu. Reći ćemo da ti elementi čine »ciklični slijed« ili kraće »ciklus«, ako je svaki elemenat susjedan s točno dva elementa iz skupa S , ali skup S ne sadrži u sebi nikakav uži skup istog svojstva.

Iz te definicije slijedi neposredno:

Stavak I. Svaki ciklus sadrži barem tri člana.

No mi ćemo kadgod radi općenitosti i jednostavnosti proširiti pojam ciklusa i na slučaj, da on sastoji — protivno def. 1. i stavku I. — od jednog jedinog člana. Ima li se u kojem slučaju pod ciklusom razumijevati ovaj širi pojam, to ćemo uvijek naročito istaći.

Neka su $a, b, c, \dots, k, l, m$, elementi skupa S definicije 1., onda ćemo ciklus A označiti s

$$A \equiv [a, b, c, \dots, k, l, m],$$

gdje je svaki član napisan između svoja dva susjedna, a osim toga je i prvi napisani susjedan posljednjem od njih. Uglasta zagrada će nam naznačivati, da se tu radi o ciklusu. Uzmemo li kojigod par susjednih članova toga ciklusa, možemo takav ciklus orijentirati, ako taj par uredimo t. j., ako odlučimo, koji je od ta dva člana prvi po redu. Budući da su tu moguće dvije različite odluke, ima ciklus A dvije orijentacije, koje ćemo pisati:

$$A_1 \equiv (a, b, c, \dots, k, l, m)$$

i

$$A_2 \equiv (m, l, k, \dots, c, b, a),$$

pa ćemo smatrati, da članovi tih orijentiranih ciklusa slijede jedan za drugim od lijeva na desno onim redom, kako su napisani. Ovdje će okrugle zagrade naznačivati, da je ciklus u

njima orijentiran. Isto tako, dok veliko slovo bez indeksa znači neorijentirani ciklus, donji indeks pored velikog slova naznačit će, da je ciklus orijentiran.

Orijentirani ciklus ćemo numerirati tako, da odaberemo bilo koji od njegovih članova kao prvi, a svakom slijedećem damo indeks za jedinicu veći. Pri tom ćemo obje orijentacije jednog istog ciklusa A numerirati uvijek tako, da prvi, drugi, ..., posljednji član ciklusa A_1 budu posljednji, pretposljednji, ..., prvi član ciklusa A_2 .

Definicija 2. Svaki »otvoreni slijed«

$$a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_n, a_1, \dots, a_{i-2}, a_{i-1}$$

članova orijentiranog ciklusa

$$A_1 \equiv (a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n)$$

nazvat ćemo »položajem« tog ciklusa. Kojim članom ima otvoreni slijed početi, naznačit ćemo gornjim indeksom. Tako će ciklus A_1 imati ovih n položaja:

$$A_1^1 \equiv a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$$

$$A_1^2 \equiv a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, a_1$$

$$A_1^3 \equiv a_3, \dots, a_{n-1}, a_n, a_1, a_2$$

$$\dots\dots\dots$$

$$A_1^n \equiv a_n, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}$$

Simbol A_i^m za $m > n$ neka je definiran relacijom $A_i^m = A_i^p$, gdje je p najmanji pozitivni ostatak od m za modul n .

Sve položaje ciklusa A_1 i A_2 smatrat ćemo položajima ciklusa A .

Jednočlani ciklus imat će samo jedan položaj, koji je identičan s tim jedinim članom.

Definicija 3. Kazat ćemo, da su dva položaja

$$A_i^k \equiv a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \dots, a_{k-1}$$

$$i \quad B_j^l \equiv b_l, b_{l+1}, b_{l+2}, \dots, b_{l-1} \quad (i, j = 1, 2)$$

jednog istog ili dvaju ciklusa međusobno jednaka, i pisat ćemo

$$A_i^k = B_j^l,$$

ako postoje redom jednadžbe:

$$a_k = b_l, a_{k+1} = b_{l+1}, a_{k+2} = b_{l+2}, \dots, a_{k-1} = b_{l-1}.$$

Definicija 4. Kazat ćemo, da su dva orijentirana ciklusa A_i, B_j ($i, j = 1, 2$) međusobno jednaka, ako postoje dva broja k i l tako, da vrijedi jednađžba

$$A_i^k = B_j^l. \quad (1)$$

Za dva neorijentirana ciklusa A i B kazat ćemo, da su jednaka, ako postoje četiri broja i, j, k i l ($i, j = 1, 2$) tako, da vrijedi relacija (1).

Ako su A_i i B_j dva jednaka n -člana ciklusa, to prema definiciji 3. odmah slijedi iz jednađžbe (1), da mora za svaki cijeli broj x vrijediti jednađžba

$$A_i^{k+x} = B_j^{l+x}, \quad (2)$$

gdje valja indekse $k+x$ i $l+x$ još eventualno svesti na najmanji prirodni broj za modul n .

Definicija 5. Ako su obje orijentacije A_1 i A_2 ciklusa A međusobno jednake, zvat ćemo takav ciklus »simetričnim«.

Sada možemo pokazati, da vrijedi ovaj stavak:

Stavak II. Neka je dan n -člani ciklus

$$A_1 \equiv (a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n),$$

pa neka vrijedi jednađžba

$$A_1^b = A_1^c, \quad (3)$$

gdje su $b, c \leq n$, a ujedno neka je c najmanji od brojeva većih od b , za koji vrijedi ta jednađžba, pa ako još označimo kraće $c - b = r$, onda

$$1. \text{ položaji } A_1^1, A_1^2, A_1^3, \dots, A_1^r \quad (4)$$

čine skup svih međusobno različitih položaja ciklusa A_1 ,

$$2. \text{ mora vrijediti kongruencija } n \equiv 0, (r), \quad (5)$$

i 3. ciklični slijed A_1 je periodičan i period mu sastoji od r članova.

Dokaz:

Primijenimo li na (3) relaciju (2), slijedi

$$A_1^{b+x} = A_1^{c+x}.$$

Stavimo li $x = -b + i$, dobivamo jednađžbu

$$A_1^i = A_1^{c-b+i} \quad (i = 1, 2, 3, \dots; c - b + i \leq n)$$

$$\text{ili} \quad A_1^i = A_1^{r+i} \quad (i = 1, 2, 3, \dots; r + i \leq n). \quad (6)$$

Ako ovdje mjesto i stavimo $r+i$, onda ponovnom $(k-1)$ -kratnom uzastopnom primjenom te relacije slijedi:

$$A_1^i = A_1^{kr+i} \quad (i, k = 1, 2, 3, \dots; kr+i \leq n). \quad (7)$$

Pokazat ćemo sada, da je (4) doista skup svih međusobno različitih položaja ciklusa A_1 . Iz (7) naime slijedi, da je svaki od preostalih položaja

$$A_1^{r+1}, A_1^{r+2}, A_1^{r+3}, \dots, A_1^n$$

jednak jednom od položaja iz skupa (4). Da su svi oni međusobno različiti, možemo zaključiti ovako: Kad bi bilo:

$$A_1^g = A_1^h \quad (g < h; g, h \leq r),$$

morala bi kao i gore vrijediti relacija

$$A_1^i = A_1^{r+i} \quad (r_1 = h - g < r; i = 1, 2, 3, \dots).$$

Ako ovdje stavimo $i = b$, bilo bi $A_1^b = A_1^{r+b}$, a to se protivi pretpostavci stavka, jer je $r_1 + b > b$ i ujedno

$$r_1 + b = r_1 + c - r < c,$$

a c bi po pretpostavci morao biti najmanji broj, za koji vrijedi relacija (3). Time je prva tvrdnja dokazana. Ujedno odatle zaključujemo na osnovi relacije (7), ako za dva broja p i q vrijedi jednadžba $A_1^p = A_1^q$, da mora biti $p \equiv q, (r)$. Kako je $(n+1)$ -vi položaj uvijek jednak prvom položaju t. j. $A_1^{n+1} = A_1^1$, mora biti $n+1 \equiv 1, (r)$, odakle konačno slijedi relacija (5).

Prema definiciji 3. moraju prvi članovi jednakih položaja biti međusobno jednaki, pa iz (6) slijedi, da je

$$a_i = a_{r+i} \quad (i = 1, 2, 3, \dots; r+i \leq n),$$

t. j. ciklus

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_r)$$

je period ciklusa A_1 . Tim je i treća tvrdnja dokazana.

Broj članova u periodu ciklusa A označivat ćemo s $\Pi(A)$, pa tako možemo pisati

$$\Pi(A) = r.$$

Dva jednaka položaja istog ciklusa A ne ćemo označivati različitim simbolima, nego ćemo prema relaciji (7) gornji indeks svakog položaja svesti na najmanji prirodni broj za modul

$II(A)$. Ujedno ćemo svaki ciklus smatrati periodičnim, pa i u slučaju, kad se taj ciklus A ne raspada na više manjih perioda. Tada je cijeli ciklus A sam svoj period, pa ćemo pisati u tom slučaju

$$II(A) = n.$$

Promotrit ćemo sada napose simetrične cikluse. Najprije ćemo ih podijeliti s obzirom na to svojstvo, da li im je r tak ili lih broj. A onda ćemo izvesti daljnju podjelu s obzirom na jedno drugo svojstvo. Možemo naime pokazati, da se neki simetrični ciklusi daju uvijek prenumerirati tako, da im je prvi član jednak posljednjem, drugi pretposljednem i t. d., dok kod drugih simetričnih ciklusa to nije moguće. No kod ovih posljednjih dade se prenumeriranjem članova uvijek postići to, da je drugi član jednak posljednjem, treći pretposljednem i t. d. Pokazat ćemo, da s obzirom na ove dvije podjele, koje su od nekog značenja u daljnjem razmatranju, možemo razlikovati samo tri tipa simetričnih ciklusa.

Da to pokažemo, uzmimo bilo koji orijentirani ciklus A_1 , čiji su članovi numerirani, pa te članove prenumerirajmo tako, da $(x+1)$ -vi član postane prvi, $(x+2)$ -gi član postane drugi i t. d. $(x+i)$ -ti član postane i -ti, $(x-1)$ -vi da postane predzadnji, a x -ti da postane zadnji. Označimo li tako prenumerirani ciklus sa xA_1 , onda vrijedi očito relacija $A_1^{x+i} = {}^xA_1^i$, ili primjenom relacije (2), ako u njoj mjesto x stavimo $(-x)$

$$A_1^i = {}^xA_1^{i-x}. \quad (8)$$

Za drugu orijentaciju cikličnog slijeda A vrijedit će kod korespondentnog prenumeriranja članova, gdje je prvi, drugi, ... član ciklusa xA_1 jednak posljednjem, pretposljednem, ... članu ciklusa xA_1 slična relacija:

$$A_2^i = {}^xA_2^{i+x}. \quad (9)$$

Ako je ciklus A simetričan, onda prema definicijama 5. i 4. moraju postojati dva broja p i $q \leq r$, za koje vrijedi

$$A_1^p = A_1^q. \quad (10)$$

Bez ograničenja općenitosti možemo uzeti, da je tu $p \geq q$. (U protivnom slučaju valja samo zamijeniti donje indekse). Prema (8) i (9) slijedi dalje iz (10)

$${}^xA_1^{p-x} = {}^xA_2^{q+x}. \quad (11)$$

Ovdje treba uzeti u obzir ove četiri mogućnosti:

$$\begin{array}{ll} 1. \dots\dots & \left\{ \begin{array}{l} p \equiv q, (2) \\ r \equiv 0, (2) \end{array} \right. \\ 2. \dots\dots & \left\{ \begin{array}{l} p \not\equiv q, (2) \\ r \equiv 0, (2) \end{array} \right. \\ 3. \dots\dots & \left\{ \begin{array}{l} p \equiv q, (2) \\ r \not\equiv 0, (2) \end{array} \right. \\ 4. \dots\dots & \left\{ \begin{array}{l} p \not\equiv q, (2) \\ r \not\equiv 0, (2) \end{array} \right. \end{array}$$

Općenito u različitim od ta četiri slučaja i za različite vrijednosti od x u relaciji (11) ne će biti

$$p - x \equiv q + x, (r), \quad (12)$$

pa uz primjenu definicije 3. razabiremo, da ne mora prvi, drugi, ... član ciklusa xA_1 biti jednak prvom, drugom, ... članu ciklusa xA_2 . No u 1., 3. i 4. slučaju možemo uvijek odrediti barem jedan x tako, da bude zadovoljena kongruencija (12).

Iz te kongruencije slijedi naime

$$2x \equiv p - q, (r),$$

pa u 1. i 3. slučaju možemo uzeti

$$x_1 = \frac{p - q}{2},$$

a u 4. slučaju

$$x_1 = \frac{p - q + r}{2}$$

i (12) će biti zadovoljeno. Vidimo dakle, da u ta tri slučaja možemo doista prenumeracijom članova ciklusa A_1 uvijek postići, da je prvi, drugi, ... član ciklusa xA_1 jednak prvom, drugom, ... članu ciklusa xA_2 , ili — što je isto — jednak posljednjem, pretposljednem, ... članu ciklusa xA_1 . U slučaju 2. to nije moguće postići, jer sada kongruencija (12) nema rješenja. No zato možemo u tom slučaju odrediti x tako, da bude

$$p - x \equiv q + x + 1, (r).$$

Valja naime samo staviti $x_1 = \frac{p - q - 1}{2}$, pa i sada iz (11) uz primjenu def. 3. razabiremo, da u tom slučaju možemo prenumeriranjem ciklusa A_1 postići, da je drugi, treći, ... član ciklusa xA_1 jednak prvom, drugom, ... članu ciklusa xA_2 , t. j. jednak posljednjem, pretposljednem, ... članu ciklusa xA_1 .

Na taj način možemo svaki simetrični ciklus prenumeriranjem njegovih članova svesti na jedan od tri tipa K , L , M , koji su u pregledu dani ovom tablicom, odakle ujedno vidimo, da 3. i 4. slučaj daju jedan isti tip.

	$p \equiv q, (2)$			$p \not\equiv q, (2)$		
	Tip simetrič- nog ciklusa	x_1	Relacija za položaje obiju orijentacija $i = 1, 2, 3, \dots, r$	Tip simetrič- nog ciklusa	x_1	Relacija za položaje obiju orijentacija $i = 1, 2, 3, \dots, r$
$r \equiv 0, (2)$	1. K	$\frac{p-q}{2}$	$A_1^i = A_2^i$	2. L	$\frac{p-q-1}{2}$	$A_1^i = A_2^{i-1}$
$r \not\equiv 0, (2)$	3. M	$\frac{p-q}{2}$	$A_1^i = A_2^i$	4. M	$\frac{p-q+r}{2}$	$A_1^i = A_2^i$

Za $n = r = 6; 7$ bili bi tipovi redom ovi:

$$K \equiv [a, b, c, c, b, a],$$

$$L \equiv [a, b, c, d, c, b]$$

$$\text{ i } M \equiv [a, b, c, d, c, b, a].$$

(I geometrijski je to očividno. Napišemo li naime članove jednog ciklusa redom na vrhove pravilnog poligona, imat će taj poligon u slučaju $r \equiv 0, (2)$ dvije vrste osi simetrija, t. j. simetrane stranica i simetrane kutova, pa odatle u tom slučaju i dva tipa simetričnih ciklusa. U slučaju $r \not\equiv 0, (2)$ postoji samo jedan tip simetričnog ciklusa, jer su simetrane stranica i kutova identične.)

Odaberemo li koja god dva susjedna člana nekog ciklusa A , može se dogoditi:

1. da je s ta dva člana — kao prva dva elementa — položaj ciklusa A jednoznačno određen; t. j. ne postoji više različitih položaja, koji bi tim istim uređenim parom članova počinjali,

2. položaj ciklusa A nije ovim parom susjednih članova jednoznačno određen; t. j. ima više različitih položaja, koji počinju ovim istim uređenim parom susjednih članova. Na pr. položaj ciklusa

$$A \equiv [a, b, c, b, a, d, b]$$

je parom susjednih članova a, d jednoznačno određen:

$$a, d, b, a, b, c, b,$$

dok je parom a, b određen na tri načina, jer postoje tri različita položaja, koji tim parom počinju:

1. $a, b, c, b, a, d, b,$
2. $a, b, d, a, b, c, b,$
- i 3. $a, b, c, b, a, b, d.$

Tako možemo postaviti ove dvije definicije:

Definicija 6. Kažemo, da je ciklus A »prve vrste«, ako mu je položaj jednoznačno određen svakim uređenim parom njegovih susjednih članova.

Definicija 7. Kažemo, da je ciklus A »druge vrste«, ako nije prve vrste, t. j. ako postoji barem jedan uređeni par njegovih susjednih članova, koji ne određuje jednoznačno položaj toga ciklusa.

Pitanje je sada, kada će ciklus biti prve, a kada druge vrste?

Neka je dakle $A_1 \equiv (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ jedna orijentacija ciklusa A prve vrste. Uzmimo koji god par susjednih članova, na pr. a_i, a_{i+1} , tada ovaj par prema definiciji 6. jednoznačno određuje jedan položaj ciklusa A , a to je položaj A_1^i . Neka je sada $a_j = a_i, a_{j+1} = a_{i+1}$, pa neka je a_j, a_{j+1} po redu prvi par susjednih članova, koji u A_1 slijedi iza para a_i, a_{i+1} a jednak mu je i iste orijentacije, onda mora prema definiciji 6. biti $A_1^i = A_1^j$. Kako je j najmanji od brojeva većih od i , za koji ta jednakost može vrijediti, to mora biti prema stavku II. $II(A) = j - i$. Prema tome je $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{j-i})$ period ciklusa A_1 . No taj period više ne može sadržavati jednakih parova susjednih članova iste orijentacije, jer bi to uz definiciju 6. bilo u protivrječju sa stakom II., t. 1. Ali taj bi period mogao sadržavati jedan jednaki par susjednih članova protivne orijentacije (više jednakih parova protivne orijentacije protivilo bi se i opet stavku II. t. 1.). Samo što bi u tom slučaju morala prema definiciji 6. vrijediti relacija $A_1^i = A_1^k$, pa vidimo prema definicijama 4. i 5., da onda ciklus A mora biti simetričan.

Iz svega razabiremo, da će vrijediti:

Stavak III. Ciklus A je prve vrste samo onda, ako u njegovom periodu nema jednakih parova susjednih članova iste orijentacije, a ako u njegovom periodu postoje dva jednaka para susjednih članova protivne orijentacije, onda on mora biti simetričan.

Promatrat ćemo sada složene cikluse, koji — za razliku od jednostavnih ciklusa, čiji su članovi jednostavni elementi — imaju kao članove položaje jednog ili više drugih ciklusa, koji i opet mogu biti na isti način složeni i t. d.

Za takve cikluse dat ćemo ove definicije:

Definicija 8. Neka su

$$\begin{aligned} S_i &\equiv (A_{i_1}^a, B_{i_2}^b, \dots, H_{i_m}^h) \\ i \quad T_j &\equiv (K_{j_1}^k, L_{j_2}^l, \dots, R_{j_n}^r) \end{aligned}$$

dva ciklusa (koji mogu biti međusobno i jednaki), a njihovi članovi $A_{i_1}^a, B_{i_2}^b, \dots, H_{i_m}^h, K_{j_1}^k, L_{j_2}^l, \dots, R_{j_n}^r$ neka su opet neki položaji jednog istog ili više različitih ciklusa, tada ćemo reći, da su položaji

$$\begin{aligned} S_i^* &\equiv A_{i_1}^a, B_{i_2}^b, \dots, H_{i_m}^h \\ i \quad T_j^* &\equiv K_{j_1}^k, L_{j_2}^l, \dots, R_{j_n}^r \end{aligned}$$

ciklusa S_i i T_j »susjedni« i to tako, da T_j^* slijedi iza S_i^* , ako postoje ove dvije jednadžbe:

$$\begin{aligned} K_{j_1}^k &= A_{i_1}^{a+1} \\ i \quad L_{j_2}^l &= H_{i_m}^{h-1}, \end{aligned} \quad (13)$$

gdje gornje indekse $a+1$ odnosno $h-1$ valja još eventualno svesti na najmanji prirodni broj za modul $\Pi(A_{i_1})$ odnosno $\Pi(H_{i_m})$.

Definicija 9. Kažemo, da je

$$Z_i \equiv (S_{h_1}^{\alpha_1}, T_{h_2}^{\alpha_2}, \dots, Y_{h_r}^{\alpha_r})$$

»složeni caklus«, ako su mu susjedni članovi susjedni položaji u smislu definicije 8. Ako su $S_{h_1}, T_{h_2}, \dots, Y_{h_r}$ jednostavni orijentirani ciklusi, t. j. ako su njihovi članovi položaji jednočlanih ciklusa, onda ćemo reći, da je Z_i »složeni ciklus prvog stepena«. Općenito ćemo reći, da je složeni ciklus Z_i »složeni ciklus n -tog stepena« ($n > 1$), ako su mu članovi položaji složenih ciklusa $(n-1)$ -vog stepena.

Radi lakšeg razumijevanja posljednjih dviju definicija dat ćemo nekoliko primjera složenih ciklusa.

Uzmimo na pr. ova četiri ciklusa:

$$A \equiv [a, b, a, b]; B \equiv [a, b, c]; C \equiv [a, a, b]; D \equiv [a, a, c].$$

Njihove položaje možemo sastaviti na pr. u ove složene cikluse prvog stepena:

$$\begin{aligned} E_1 &\equiv (A_1^1, B_1^1, B_2^3, A_1^1); F_1 \equiv (B_1^2, A_1^2, B_2^2); \\ G_1 &\equiv (A_1^2, A_1^2, C_1^3); H_1 \equiv (A_1^1, B_1^1, D_1^2, C_1^1); \\ J_1 &\equiv (A_1^1, C_1^1, D_1^1, B_2^3); K_1 \equiv (B_1^3, B_2^1, B_1^3, B_2^1, D_1^3). \end{aligned}$$

Zatim će biti složeni ciklusi drugog stepena na pr. ovi:

$$L_1 \equiv (E_1^1, G_1^1, J_1^1, F_1^2); M_1 \equiv (F_1^1, K_1^3, E_1^2);$$

$$N_1 \equiv (F_1^3, E_1^3, K_1^2); O_1 \equiv (H_1^1, G_1^2, E_1^4, F_1^2),$$

dok je na pr. ciklus

$$P_1 \equiv (L_1^1, M_1^3, N_1^2, O_1^3)$$

složeni ciklus 3. stepena. I t. d.

Vidjet ćemo kasnije, da su ovi složeni ciklusi od osnovne važnosti za proučavanje dvodimenzionalnih mreža. Mogli bismo skoro reći, da istraživanje tih mreža nije ništa drugo nego teorija složenih cikličnih sljedova.

2. DEFINICIJA MREŽE

Definicija 10.¹ Skup S , sastavljen od tri vrste elemenata, koje ćemo zvati »čvorišta, stranice« odnosno »poligoni« čini »mrežu«, ako ima ova svojstva:

1) Za svaka dva elementa različitih vrsta određeno je, da li su incidentni ili nisu.

2) Ako među trima elementima različitih vrsta postoji incidencija čvorišta i stranice i incidencija stranice i poligona, onda uvijek postoji i incidencija čvorišta i poligona.

3) K svakom incidentnom paru od jednog čvorišta i jednog poligona postoje točno dvije stranice, koje su s tim parom incidentne.

4^a) Svaka je stranica incidentna s dva čvorišta.

4^b) Svaka je stranica incidentna s dva poligona.

5^a) Svako je čvorište incidentno barem s jednom stranicom.

5^b) Svaki je poligon incidentan barem s jednom stranicom.

6^a) Dva čvorišta mogu imati najviše ili samo jedan poligon zajednički ili jednu stranicu i dva s njom incidentna poligona zajednička.

6^b) Dva poligona mogu imati najviše ili samo jedno čvorište zajedničko ili jednu stranicu i dva s njom incidentna čvorišta zajednička.

7) K svakom se paru elemenata skupa S dade odrediti od elemenata toga skupa konačan slijed, kojemu je prvi i posljednji član par zadanih elemenata, i kod kojeg je svaki par susjednih elemenata incidentan.

¹ Isporedi Steinitz-Rademacher: *Theorie der Polyeder*, §§ 23., 24. i 28.

8^a) I skup, što ga čine samo oni elementi, koji su incidentni sa bilo kojim čvorištem, ima svojstvo 7).

Definicija 11^a. Kažemo da su dva čvorišta susjedna, ako su incidentna s jednom istom stranicom.

Kako u definicijama 10. i 11. postoji potpuna dualnost između čvorišta i poligona, to će i svi zaključci, koji iz njih izlaze, biti u tom smislu dualni. Dovoljno je zato, da uvijek dokažemo samo po jednu od dvije dualne tvrdnje, jer će dokaz za drugu tvrdnju biti uvijek dualan. Radi toga ćemo od sada redovno samo konačne zaključke, definicije i stavke pisati dualno, a dokaze i općenita razmatranja provodit ćemo samo za jednu stranu.

Tako ćemo dokazati, da vrijedi ovaj par stavaka:

Stavak IV^a. Poligoni incidentni s jednim istim čvorištem čine ciklus.

8^b) I skup, što ga čine samo oni elementi, koji su incidentni sa bilo kojim poligonom, ima svojstvo 7).

Definicija 11^b. Kažemo da su dva poligona susjedna, ako su incidentna s jednom istom stranicom.

Stavak IV^b. Čvorišta incidentna s jednim istim poligonom čine ciklus.

Dokaz:

Uzmimo koji god poligon α incidentan s čvorištem A — a jedan takav prema definiciji 10., t. 5^a), 4^b) i 2) sigurno postoji — pa ćemo pokazati, da postoje točno dva od poligona incidentnih sa A , koja su susjedna sa α . Prema def. 10., t. 3. postoji naime par stranica a_1, a_2 , zajednički čvorištu A i poligonu α . Stranica a_1 je prema 4^b) osim s poligonom α incidentna još s poligonom α_1 , a stranica a_2 još s poligonom α_2 . Oba ta poligona su prema 2) incidentna s čvorištem A , a prema 6^b) međusobno različita. Dakle postoje točno dva poligona α_1 i α_2 , koji su s A incidentni i prema definiciji 11^b. s α susjedni.

Tim je gornja tvrdnja dokazana, no treba još pokazati, da skup S_A poligona incidentnih s A ne može u sebi sadržavati uži skup istog svojstva. Uzmimo, da postoji takav skup S'_A , koji sadrži neki poligon α , ali ne sadrži poligon β skupa S_A , a svi njegovi elementi ipak imaju gore dokazano svojstvo. Označimo li još radi jednostavnosti $\alpha = \alpha_0$; $\beta = \alpha_n$, to prema 8^a) postoji slijed elemenata incidentnih s A

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n,$$

gdje je α_v stranica incidentna s poligonima

$$\alpha_{v-1} \text{ i } \alpha_v \quad (v = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Neka je sada a_i prvi od poligona iz tog slijeda, koji pripada skupu S_A , ali ne pripada skupu S'_A . Tada bi poligon a_{i-1} osim s dva poligona iz skupa S'_A bio susjedan još i s poligonom a_i izvan toga skupa t. j. s tri poligona skupa S_A , a to prema gore dokazanom svojstvu skupa S_A ne može biti.

Odatle slijedi odmah prema definiciji 1. stavak IV^a.

Definicija 12^a. Čvorište incidentno s n poligona zvat ćemo » n -strukim čvorištem«.

Definicija 13^a. Neka je s čvorištem A neke mreže incidentno k_1 n_1 -terokuta, k_2 n_2 -terokuta, k_3 n_3 -terokuta, i t. d. k_r n_r -terokuta. Označimo li svaki poligon s brojem n_i njegovih čvorišta, pa neka ti poligoni čine ciklus

$$C \equiv [n_{i_1}, n_{i_2}, n_{i_3}, \dots, n_{i_s}],$$

onda ćemo reći, da je C »ciklus čvorišta A «. Ovdje je

$$s = \sum_{i=1}^r k_i$$

broj svih poligona incidentnih s A .

Definicija 14^a. Ako su kod neke mreže ciklusi svih čvorišta međusobno jednaki, onda ćemo je zvati » R -mrežom«, a zajednički ciklus svih čvorišta zvat ćemo ciklusom te mreže. Ako je C ciklus mreže, onda ćemo tu mrežu simbolički označiti s

$$R[n_{i_1}, n_{i_2}, n_{i_3}, \dots, n_{i_s}]$$

ili kraće $R[C]$.

Definicija 15. R - i Q -mreže zvat ćemo zajedničkim imenom »homogene mreže«.

Definicija 12^b. Poligon incidentan s n čvorišta zvat ćemo » n -terokutom«.

Definicija 13^b. Neka je s poligonom a neke mreže incidentno k_1 n_1 -strukih čvorišta, k_2 n_2 -strukih čvorišta, k_3 n_3 -strukih čvorišta, i t. d. k_r n_r -strukih čvorišta. Označimo li svako čvorište s brojem n_i njegovih poligona, pa neka ta čvorišta čine ciklus

$$C \equiv [n_{i_1}, n_{i_2}, n_{i_3}, \dots, n_{i_s}],$$

onda ćemo reći, da je C »ciklus poligona a «. Ovdje je

$$s = \sum_{i=1}^r k_i$$

broj svih čvorišta incidentnih sa a .

Definicija 14^b. Ako su kod neke mreže ciklusi svih poligona međusobno jednaki, onda ćemo je zvati » Q -mrežom«, a zajednički ciklus svih poligona zvat ćemo ciklusom te mreže. Ako je C ciklus mreže, onda ćemo tu mrežu simbolički označiti s

$$Q[n_{i_1}, n_{i_2}, n_{i_3}, \dots, n_{i_s}]$$

ili kraće $Q[C]$.

3. MREŽE RAVNINE. NUŽNI UVJETI REALIZACIJE PRAVILNIH HOMOGENIH MREŽA U RAVNINAMA PARABOLIČNE, SFERNO-ELIPTIČNE I HIPERBOLIČNE GEOMETRIJE

O elementima skupa S definicije 10. t. j. o čvorištima, stranicama i poligonima, nije bilo ništa pobliže konkretno rečeno. To su bilo kakvi objekti triju različitih vrsta, među kojima su po volji definirane relacije incidencije, ali tako, da zadovoljavaju aksiomima 1)—8^b) definicije 10. Na taj način su pojmovi »čvorište«, »stranica«, »poligon« i pojam »incidencija« tim aksiomima implicitno definirani. No »mreža« tako definirana je apstraktni pojam, za koji vrijede zaključci paragrafa 2. U ovom i u nekoliko slijedećih paragrafa ćemo te pojmove konkretizirati tako, da ih primijenimo na geometrijske objekte. Ali će se kasnije pokazati potreba, da na razmatranja paragrafa 2. i opet nadovežemo.

Uzmemo li ravninu parabolične ili sferno-eliptične ili hiperbolične geometrije, to ćemo dati ovu definiciju.

Definicija 16. Ako sistem poligona cijelu ravninu potpuno i jednostruko prekriva, onda ćemo reći, da on čini jednu »razdiobu ravnine u poligone«.

Uzmimo sada za elementne skupa S , t. j. za »poligone«, poligone neke razdiobe ravnine, »čvorišta« neka su one točke ravnine, u kojima se sastaju barem tri poligona, a »stranice« neka su takve stranice poligona ili takve slomljene crte, sastavljene od tih stranica ili njihovih dijelova, kojima su samo krajnje točke čvorišta. Relaciju incidencije ćemo tumačiti u običnom geometrijskom smislu, pa je očito nije potrebno pitanje objašnjavati. Sada možemo dalje definirati.

Definicija 17. »Mreža ravnine« je takva razdioba ravnine, za čije poligone, stranice i čvorišta vrijede aksiomi definicije 10. Vrijede li za takvu mrežu ravnine još i uvjeti definicija 14.^a b, to ćemo je zvati » R -mrežom ravnine« odnosno » Q -mrežom ravnine« ili zajedničkim imenom »homogene mreže ravnine«.

Sada ćemo postaviti dva pitanja:

1. za koje cikluse su homogene mreže ravnine moguće?

2. da li je i u kojim slučajevima homogena mreža ravnine svojim ciklusom jednoznačno određena, ili može za jedan takav ciklus biti više različitih tipova homogenih R - odnosno Q -mreža, koji nisu međusobno izomorfni.

Odgovor na ta pitanja jedan je od glavnih ciljeva ove radnje.

No prije nego što pristupimo rješavanju tih problema u njihovoj općenitosti, promotrit ćemo najjednostavniji slučaj t. j. slučaj, kad uzimamo u obzir i metričku pravilnost. Za to ćemo dati još ove definicije:

Definicija 18. Čvorište je pravilno, ako su svi kutovi, kojih se vrhovi u čvorištu sastaju, međusobno jednaki.

(Pravilnost poligona uzimamo u običnom smislu.)

Definicija 19^a. Pravilna R -mreža ravnine je takva R -mreža ravnine, kod koje su svi poligoni pravilni i svi jednakih stranica.

Definicija 19^b. Pravilna Q -mreža ravnine je takva Q -mreža ravnine, kod koje su sva čvorišta pravilna, a svi poligoni tangentni poligoni.

Dualnost, koja je bila u definicijama 10. do 17. dosljedno provedena i koja je u biti odgovarala zapravo dualnosti u projektivnoj geometriji prostora, u definicijama 18. i 19. nije više potpuna, što je i razumljivo baš radi toga, jer ovdje ulazi bitno i pojam metričke pravilnosti. Zašto su definicije 19.^a ^b baš tako odabrane, razabrat će se iz posljednjeg paragrafa.

Uzmimo, da postoji pravilna mreža ravnine

$$R [n_{i_1}, n_{i_2}, n_{i_3}, \dots, n_{i_r}].$$

Ako je α_{n_i} kut pravilnog n_i -terokuta, mora u tom slučaju vrijediti relacija:

$$\sum_{i=1}^r k_i \alpha_{n_i} = 2\pi.$$

No kako je

$$\alpha_{n_i} \geq \left(1 - \frac{2}{n_i}\right) \pi \quad (i = 1, 2, 3, \dots, r),$$

već prema tome radi li se o sferno-eliptičnoj, paraboličnoj ili hiperboličnoj geometriji, to slijedi:

$$\sum_{i=1}^r k_i \left(1 - \frac{2}{n_i}\right) \pi \leq 2\pi$$

ili konačno

$$\sum_{i=1}^r k_i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_i} \right) \leq 1. \quad (14) \begin{matrix} a) \\ b) \\ c) \end{matrix}$$

Ove nam relacije daju nužni uvjet, koji moraju ispunjavati brojevi k_i i n_i pravilne R -mreže ravnine za sve tri geometrije. Pri tom je veličina stranice poligona kod eventualno moguće mreže u paraboličnoj geometriji povoljna, dok su stranice a i kutovi α_{n_i} ($i = 1, 2, 3, \dots, r$) poligonâ (dakle u svemu $r+1$ veličina) u neeuklidskim geometrijama određeni s $r+1$ jednadžbom, koje za hiperboličnu ravninu glase

$$\cos \frac{\pi}{n_i} = \operatorname{ch} \frac{a}{2} \sin \frac{\alpha_{n_i}}{2} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, r)$$

$$\sum_{i=1}^r k_i \alpha_{n_i} = 2\pi, \quad (15)$$

a za sferno-eliptičnu:

$$\cos \frac{\pi}{n_i} = \cos \frac{a}{2} \sin \frac{\alpha_{n_i}}{2} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, r)$$

$$\sum_{i=1}^r k_i \alpha_{n_i} = 2\pi. \quad (15')$$

Da sistem jednadžbi (15) ima uz uvjet (14)^{c)} i

$$0 < \alpha_{n_i} < \pi$$

uvijek jedno i samo jedno rješenje možemo se ovako uvjeriti:

Eliminiramo li α_{n_i} ($i = 1, 2, 3, \dots, r$) iz jednadžbi (15), slijedi

$$\sum_{i=1}^r k_i \operatorname{arc} \sin \frac{\cos \frac{\pi}{n_i}}{\operatorname{ch} \frac{a}{2}} = \pi, \quad (\operatorname{arc} \equiv \operatorname{arcus} \text{ u I. kvadrantu})$$

što ćemo kraće pisati

$$\Phi(a) = \pi. \quad (16)$$

Budući da je $\Phi(a)$ funkcija neprekidna u cijelom intervalu $0 \leq a < \infty$, i za cijeli je taj interval

$$\frac{d\Phi}{da} < 0,$$

a osim toga je

$$\Phi(0) = \pi \sum_{i=1}^r k_i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_i} \right),$$

dakle radi (14)^c) $\Phi(0) > \pi$, dok je $\Phi(\infty) = 0$, ima očito jednadžba (16) uvijek jedan i samo jedan korijen a , a onda su kutovi jednoznačno određeni relacijama

$$\alpha_{n_i} = 2 \overline{\arcsin \frac{\cos \frac{\pi}{n_i}}{\operatorname{ch} \frac{a}{2}}}. \quad (i = 1, 2, 3, \dots, r)$$

Uzmimo sada, da postoji pravilna mreža $Q[n_i, n_i, \dots, n_i]$. Ako je β_{n_i} jedan kut u pravilnom n_i -strukom čvorištu, mora u tom slučaju vrijediti relacija

$$\sum_{i=1}^r k_i \beta_{n_i} \gtrless (s-2)\pi,$$

gdje se i opet različiti znakovi odnose redom na sferno-eliptični, parabolični i hiperbolični slučaj. No kako je

$$\beta_{n_i} = \frac{2\pi}{n_i}, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, r)$$

to slijedi

$$\sum_{i=1}^r k_i \frac{2\pi}{n_i} \gtrless \left(\sum_{i=1}^r k_i - 2 \right) \pi$$

ili konačno

$$\sum_{i=1}^r k_i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_i} \right) \gtrless 1,$$

pa tako i opet dobivamo relacije (14) kao nužne uvjete pravilne Q -mreže.

Prema tome vrijedi ovaj stavak:

Stavak V. Ako postoji pravilna mreža ravnine

$$R[n_1, n_2, n_3, \dots, n_r] \text{ ili } Q[n_1, n_2, n_3, \dots, n_r],$$

to uvijek vrijedi relacija

$$\sum_{i=1}^r k_i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_i} \right) \leq 1, \quad (14) \begin{matrix} a) \\ b) \\ c) \end{matrix}$$

gdje se prvi znak odnosi na sferno-eliptičnu, drugi na paraboličnu, a treći na hiperboličnu geometriju.¹

Vidimo dakle, da relacije (14) daju nužne uvjete za mogućnost egzistencije pravilnih homogenih mreža u ravninama triju geometrija. Pitanje je, koje se ovdje odmah prirodno nameće, nisu li ti nužni uvjeti ujedno i dovoljni. Na to ćemo pitanje odgovoriti u slijedećem paragrafu. No već sada možemo uočiti činjenicu, da smo te nužne uvjete izveli jedino iz pretpostavke, da suma kutova oko jednog čvorišta čini puni kut. Ako je ta pretpostavka ispunjena, to je očito dovoljno, da se daje složiti ciklus poligona oko jednog čvorišta, ali odatle dakako ne možemo sa sigurnošću očekivati, da će ta pretpostavka u svakom slučaju biti dovoljna i za izgradnju cijele mreže.

4. RJEŠENJA RELACIJA NUŽNIH UVJETA PRAVILNIH HOMOGENIH MREŽA RAVNINE

Želimo li naći cikluse, koji pripadaju mogućim pravilnim homogenim mrežama ravnine u pojedinim geometrijama, treba ih potražiti među ciklusima, koji se daju načiniti od rješenja jednadžbe (14)^{b)} odnosno nejednadžbi (14)^{a)} i (14)^{c)}.

Uzmimo slučaj parabolične geometrije. Kako je ovdje suma od po jednog kuta pravilnog trokuta, četverokuta, peterokuta i šesterokuta veća od 2π , isto tako šest kutova istostranog trokuta daju već sumu 2π , pa uzmemo li još u obzir stavak IV.^{a), b)} i stavak I., to vidimo, da ovdje dobivamo uz jednadžbu (14)^{b)} ova ograničenja:

¹ U radovima [12], [13], [6], [4] i [5] nalazimo nužne uvjete homogenih mreža ravnine, za koje nije teško pokazati, da su u odnosnim slučajevima ekvivalentni s relacijama (14). Ti su uvjeti izvedeni u [12] za pravilne R-mreže ravnina triju geometrija, u [13] za R-mreže parabolične ravnine, konačno u [6], [4] i [5] za Q-mreže parabolične ravnine.

$$\left. \begin{array}{l} 0 < r < 4 \\ 2 < s < 7 \\ n_i > 2 \end{array} \right\} \quad (17)$$

Uz te uvjete ima jednadžba (14)^{b)} u svemu 17 rješenja, koja su dana u tablici (18):

r	s	n ₁	k ₁	n ₂	k ₂	n ₃	k ₃	Ciklusi, koji pripadaju mogućoj homogenoj mreži
1	3	6	3	.	.	.	.	[6, 6, 6]
	4	4	4	.	.	.	.	[4, 4, 4, 4]
	6	3	6	.	.	.	.	[3, 3, 3, 3, 3, 3]
2	3	3	1	12	2	.	.	[3, 12, 12]
		4	1	8	2	.	.	[4, 8, 8]
		5	2	10	1	.	.	
	4	3	2	6	2	.	.	[3, 6, 3, 6]
		3	4	6	1	.	.	[3, 3, 3, 3, 6]
		3	3	4	2	.	.	[3, 3, 4, 3, 4]; [3, 3, 3, 4, 4]
3	3	3	1	7	1	42	1	
		3	1	8	1	24	1	
		3	1	9	1	18	1	
		3	1	10	1	15	1	
		4	1	6	1	12	1	[4, 6, 12]
		4	1	5	1	20	1	
	4	3	2	4	1	12	1	
		3	1	4	2	6	1	[3, 4, 6, 4]

U ravnini sferno-eliptične geometrije mora biti

$$\left. \begin{array}{l} 0 < r < 4 \\ 2 < s < 6 \\ n_i > 2 \end{array} \right\} \quad (19)$$

Uz te uvjete daje relacija (14)^{a)} rješenja, koja se nalaze u tablici (20)

r	s	n_1	k_1	n_2	k_2	n_3	k_3	Ciklus, koji pripada mogućoj homogenoj mreži
1	3	3	3	.	.	.	.	[3, 3, 3]
		4	3	.	.	.	.	[4, 4, 4]
		5	3	.	.	.	.	[5, 5, 5]
	4	3	4	.	.	.	.	[3, 3, 3, 3]
		5	3	5	.	.	.	[3, 3, 3, 3, 3]
2	3	3	1	$3 < n_2 < 12$	2	.	.	[3, 4, 4]; [3, 6, 6] [3, 8, 8]; [3, 10, 10]
		3	2	$3 < n_2$	1	.	.	
		4	1	$4 < n_2 < 8$	2	.	.	[4, 6, 6]
		4	2	$4 < n_2$	1	.	.	[4, 4, n] ($n > 4$)
		5	1	6	2	.	.	[5, 6, 6]
	4	5	2	$5 < n_2 < 10$	1	.	.	
		3	1	4	3	.	.	[3, 4, 4, 4]
		3	2	4	2	.	.	[3, 4, 3, 4]
		3	2	5	2	.	.	[3, 5, 3, 5]
		3	3	$3 < n_2$	1	.	.	[3, 3, 3, n] ($n > 3$)
		3	4	4	1	.	.	[3, 3, 3, 3, 4]
		3	4	5	1	.	.	[3, 3, 3, 3, 5]
	5	3	4	5	1	.	.	
		3	4	5	1	.	.	
		3	4	5	1	.	.	
3	3	3	1	$3 < n_2 < 7$	1	$4 < n_3$	1	
		3	1	7	1	$7 < n_3 < 42$	1	
		3	1	8	1	$8 < n_3 < 24$	1	
		3	1	9	1	$9 < n_3 < 18$	1	
		3	1	10	1	$10 < n_3 < 15$	1	
		3	1	11	1	$11 < n_3 < 14$	1	
		4	1	5	1	$5 < n_3 < 20$	1	
		4	1	6	1	$6 < n_3 < 12$	1	[4, 6, 8]; [4, 6, 10]
		4	1	7	1	$7 < n_3 < 10$	1	
	4	5	1	6	1	7	1	
		3	2	4	1	$4 < n_3 < 12$	1	
		3	2	5	1	$5 < n_3 < 8$	1	
		3	1	4	2	5	1	[3, 4, 5, 4]
		3	1	4	2	5	1	

(20)

U hiperboličnoj ravlini mogu biti r i s po volji veliki.
Mjesto uvjeta (17) i (19) dobivamo ovdje:

$$r > 0; s > 2; n_i > 2.$$

Uz ove uvjete ima relacija (14)^o beskonačno mnogo rješenja. U (21) dan je početak beskonačne tablice tih rješenja.

r	s	n_1	k_1	n_2	k_2	n_3	k_3
1	3	$n_1 > 6$	3	.	.	.	.
	4	$n_1 > 4$	4	.	.	.	.
	5	$n_1 > 3$	5	.	.	.	.
	6	$n_1 > 3$	6	.	.	.	.
	$s > 6$	$n_1 > 2$	$k_1 > 6$	.	.	.	.
2	3	3	1	$n_2 > 12$	2	.	.
		4	1	$n_2 > 8$	2	.	.
		$4 < n_1 < 7$	1	$n_2 > 6$	2	.	.
		$6 < n_1 < 11$	1	$n_2 > 5$	2	.	.
		$n_1 > 10$	1	$n_2 > 4$	2	.	.
	4	$2 < n_1 < 5$	1	$n_2 > 4$	3	.	.
		$n_1 < 4$	1	$n_2 > 3$	3	.	.
		3	2	$n_2 > 6$	2	.	.
		4	2	$n_2 > 4$	2	.	.
		$4 < n_1 < 7$	2	$n_2 > 3$	2	.	.
	5	$n_1 > 6$	2	$n_2 > 2$	2	.	.
		$2 < n_1 < 7$	1	$n_2 > 3$	4	.	.
		$n_1 > 6$	1	$n_2 > 2$	4	.	.
		$2 < n_1 < 5$	2	$n_2 > 3$	3	.	.
		$n_1 > 4$	2	$n_2 > 2$	3	.	.
	6	3	1	$n_2 > 3$	5	.	.
		$n_1 > 3$	1	$n_2 > 2$	5	.	.
		3	2	$n_2 > 3$	4	.	.
		$n_1 > 3$	2	$n_2 > 2$	4	.	.
		3	3	$n_2 > 3$	3	.	.
	7	$n_1 > 3$	3	$n_2 > 2$	3	.	.
		$n_1 > 2$	$0 < k_1 < 7$	$n_2 > 2$	$7 - k_1$	.	.
		i t. d.		i t. d.		i t. d.	
3	3	3	1	7	1	$n_3 > 42$	1
		3	1	8	1	$n_3 > 24$	1
		3	1	9	1	$n_3 > 18$	1
		3	1	10	1	$n_3 > 15$	1
		i t. d.		i t. d.		i t. d.	

Načinimo li za svako rješenje iz tablica (18), (20) i (21) sve pripadne cikluse, to možemo pokušavanjem ustanoviti, da samo ciklusi, koji se nalaze u desnim stupcima tih tablica pripadaju mogućim pravilnim homogenim mrežama ravnine. Prema tome nužni uvjeti (14), koji su izražaj stanovitih metričkih svojstava ravnina triju geometrija, nisu nipošto dovoljni za mogućnost egzistencije pravilnih homogenih mreža ravnine. Kojim još uvjetima mora zadovoljavati koji ciklus, da dade moguću homogenu mrežu, ne ovisi više o metričkim svojstvima ravnine. Daljnji uvjeti za mogućnost egzistencije neke pravilne homogene mreže jesu samo opće topološko kombinatoričke prirode, pa će biti u svim geometrijama isti, a isti i za posve općenite homogene mreže ravnina. Vidjet ćemo tako, da je egzistencija homogene mreže ravnine ovisna još samo o stanovitom kombinatoričkom sadržaju njezinog ciklusa. Zato ćemo se u paragrafu 6. vratiti i nastaviti dalje naše promatranje općenitih mreža na osnovi definicija iz 2. paragrafa.

5. PROŠIRENJE VALJANOSTI NUŽNIH UVJETA NA OPĆENITIJE HOMOGENE MREŽE RAVNINE

Valjanost relacija (14) mnogo je šira, nego što se iz samog njihovog izvođenja u paragrafu 3. može razabrati. Te relacije naime daju nužne uvjete egzistencije mnogo općenitije klase homogenih mreža ravnine, nego što su pravilne homogene mreže. Tu ćemo tvrdnju dokazati. Pri tom ćemo se ograničiti samo na promatranje R -mreža, jer se za Q -mreže mogu provesti razmatranja analognu ovima.

Uzmimo najprije bilo kakvu razdiobu ravnine u poligone, gdje ni stranice poligona ne moraju biti pravocrtne, pa ćemo dakle tu pod »poligonom« razumijevati bilo kakvo jednostavno suvislo područje ravnine. Jedini uvjet, koji postavljamo za ovu razdiobu ravnine je ovaj:

Neka postoji donja ograda površine i gornja ograda promjera za sve »poligone« razdiobe, t. j. tražimo, da postoje dva pozitivna broja a i b tako, da je

$$\begin{aligned} P_n &> a \\ d_n &< b, \end{aligned} \tag{22}_{1,2}$$

gdje je P_n površina a d_n promjer bilo kojeg poligona promatrane razdiobe ravnine.¹

Neka je sada dan bilo koji broj q , ali tako, da je

$$q > b, \quad (23)$$

to ćemo bilo gdje u ravnini promatrane poligonske razdiobe uzeti tri koncentrična kruga: K_0 polumjera $q-b$, K_1 polumjera q i K_2 polumjera $q+b$.

Budući da radi uvjeta (22), kružnice K_1 i K_2 ne mogu obje presijecati isti poligon, to je uvijek moguće povući barem jednu zatvorenu krivulju C bez dvostrukih točaka, koja je sastavljena od stranica i čvorišta poligonske razdiobe ravnine tako, da ta krivulja omeđuje jedno jednostavno suvislo područje P ravnine, koje je cijelo sadržano u krugu K_2 , ali koje sadržaje u sebi cijeli krug K_1 . Krivulja C se dakle cijela nalazi u kružnom prstenu između kružnica K_1 i K_2 . Za one stranice poligonske razdiobe ravnine, koje leže na krivulji C , reći ćemo, da su području P »vanjske«, dok su sve ostale stranice, koje se nalaze u području P , njegove »unutarnje« stranice. Isto to neka vrijedi i za čvorišta. Od poligona, koji pripadaju području P , smatrat ćemo »vanjskim« onaj, koji je incidentan barem s jednim vanjskim čvorištem, a ostali poligoni tog područja neka su »unutarnji«.

Označit ćemo s a_0 , a_1 i a_2 broj čvorišta, stranica odnosno poligona u području P .

Broj unutarnjih odnosno vanjskih elemenata stanovite dimenzije u području P označit ćemo gornjim indeksom u odnosno v tako, da vrijede relacije:

$$\alpha_i^u + \alpha_i^v = a_i \quad (i = 0, 1, 2) \quad (24)$$

Uzmimo najprije da je ravnina, koju promatramo, ravnina parabolične geometrije. Budući da svi unutarnji poligoni područja P zauzimaju zajedno područje, koje je veće od kruga K_0 , a svaki od poligona sigurno stane u krug polumjera b , to možemo za a_2^u postaviti donju ogradu

$$\alpha_2^u > \frac{(q-b)^2}{b^2}.$$

¹ Uvjetu (22) postavlja K. Reinhardt [6]. Tu se nalazi i relacija (25) i stavak VI. u sličnom obliku. I F. Laves [4] postavlja uvjete, koji su manje jednostavni od Reinhardtovih (22), ali koji bi točnije formulirani bili u slučaju parabolične geometrije ekvivalentni s Reinhardtovim uvjetima.

Za α_2^v možemo postaviti gornju ogradu uzevši u obzir, da svi vanjski poligoni područja P leže sigurno u kružnom prstenu između kružnica K_0 i K_2 , a prema (22)₁ je površina svakog od njih veća od a . Vrijedi dakle nejednadžba

$$\alpha_2^v < \frac{(\varrho + b)^2 \pi - (\varrho - b)^2 \pi}{a}$$

t. j.

$$\alpha_2^v < \frac{4 b \varrho \pi}{a}.$$

No onda je

$$\frac{\alpha_2^v}{\alpha_2^u} < \frac{4 b^3 \varrho \pi}{a (\varrho - b)^2},$$

odakle slijedi

$$\lim_{\varrho \rightarrow \infty} \frac{\alpha_2^v}{\alpha_2^u} = 0. \quad (25)$$

Prema tome vrijedi

Stavak VI. U paraboličnoj je ravnini u graničnom slučaju za $\varrho \rightarrow \infty$ uz uvjete (22) broj unutarnjih poligona područja P beskonačno velika veličina višeg reda od broja vanjskih poligona tog područja, t. j. broj vanjskih poligona prema broju unutarnjih poligona u tom slučaju iščezava.

Uzmemo li sada ravninu hiperbolične geometrije, to za nju stavak VI. više ne vrijedi. Budući da svi unutarnji poligoni područja P zajedno zauzimaju područje, koje je sigurno manje od kruga K_2 , to radi (22)₁ mora biti

$$\alpha_2^u < \frac{2 \pi (\operatorname{ch} (\varrho + b) - 1)}{a},$$

a nije teško razabrati, da vanjskih poligona mora biti više, nego što daje omjer opsega kruga K_1 i gornje ograde promjera svih poligona t. j.

$$\alpha_2^v > \frac{2 \pi \operatorname{sh} \varrho}{b},$$

a onda je

$$\frac{\alpha_2^v}{\alpha_2^u} > \frac{a}{b} \cdot \frac{\operatorname{sh} \varrho}{\operatorname{ch} (\varrho + b) - 1}.$$

Budući da je

$$\lim_{\varrho \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sh} \varrho}{\operatorname{ch}(\varrho + b) - 1} = \frac{1}{e^b},$$

to, ako postoji granična vrijednost kvocijenta $\frac{\alpha_2^v}{\alpha_2^u}$, ona sigurno nije jednaka nuli, nego mora biti

$$\lim_{\varrho \rightarrow \infty} \frac{\alpha_2^v}{\alpha_2^u} \geq \frac{a}{b e^b} > 0. \quad (26)$$

Vrijedi dakle

Stavak VII. U hiperboličnoj ravnini u graničnom slučaju za $\varrho \rightarrow \infty$ uz uvjete (22) broj unutarnjih poligona područja P nije prema broju vanjskih poligona tog područja beskonačno velika veličina višeg reda, t. j. u tom slučaju broj vanjskih poligona ne iščezava prema broju unutarnjih poligona.

Uzmimo sada mjesto općenite poligonske razdiobe homogenu mrežu ravnine $R [n_i, n_{i_1}, n_{i_2}, \dots, n_{i_r}]$.

Neka je n najmanji, a N najveći od svih brojeva n ($i = 1, 2, 3, \dots, r$) tada za područje P vrijedi relacija

$$\alpha_2^v \leq (s - 2) \alpha_0^v,$$

gdje može znak jednakosti vrijediti samo u slučaju, kad u ciklusu svakog vanjskog čvorišta samo po jedan poligon ne pripada području P , i relacija

$$\alpha_0^v < N \alpha_2^v.$$

Znak jednakosti bi ovdje mogao vrijediti samo u slučaju, kada bi cijelo područje P sastojalo od jednog jedinog poligona s maksimalnim brojem stranica, no to je nemoguće, jer radi (22)₂ i (23) područje P sadrži sigurno više nego jedan poligon. Uz dani broj vanjskih poligona, broj je vanjskih čvorišta dakle ograđen prema relaciji

$$\frac{\alpha_2^v}{s - 2} \leq \alpha_0^v < N \alpha_2^v. \quad (27)$$

Na sličan način možemo razabrati, da će uz dani broj unutarnjih poligona, broj unutarnjih čvorišta biti ograđen prema relaciji

$$N \alpha_2^u \geq \alpha_0^u > \frac{n}{s} \alpha_2^u. \quad (28)$$

Iz (27) i (28) slijedi

$$\frac{1}{N(s-2)} \cdot \frac{\alpha_2^v}{\alpha_2^u} \leq \frac{\alpha_0^v}{\alpha_0^u} < \frac{Ns}{n} \cdot \frac{\alpha_2^v}{\alpha_2^u}. \quad (29)$$

Odatle odmah zaključujemo prema (25), da mora biti uz uvjet (22) u slučaju parabolične ravnine

$$\lim_{\vartheta \rightarrow \infty} \frac{\alpha_0^v}{\alpha_0^u} = 0, \quad (30)$$

dok prema (26) u slučaju hiperbolične ravnine, ako limes tog kvocijenta postoji, to je on sigurno pozitivan, t. j.

$$\lim_{\vartheta \rightarrow \infty} \frac{\alpha_0^v}{\alpha_0^u} > 0. \quad (31)$$

Dio mreže ravnine, koji pripada području P , čini elementarni kompleks, pa je prema tome njegova karakteristika c jednaka jedinici, t. j.

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 1,$$

što možemo prema (24) pisati i ovako:

$$\alpha_0^u + \alpha_0^v - \alpha_1^u - \alpha_1^v + \alpha_2 - 1 = 0. \quad (32)$$

U ovoj ćemo jednadžbi brojeve α_1^u , α_1^v i α_2 izraziti pomoću α_0^u i α_0^v i to na ovaj način. Ponaјprije je očito

$$\alpha_1^v = \alpha_0^v. \quad (33)$$

Uzmimo zatim bilo koji određeni od brojeva n_i , pa neka je p_{n_i} broj n_i -terokuta, koji pripadaju području P , onda možemo ukupni broj incidencija između svih n_i -terokuta područja P i svih čvorišta tog područja određiti na dva različita načina, pa tako dobivamo ovu jednadžbu

$$\left. \begin{aligned} p_{n_i} n_i &= \alpha_0^u k_i + \alpha_0^v \vartheta_i k_i, \\ \text{gdje je } 0 &\leq \vartheta_i \leq 1, \end{aligned} \right\} (i = 1, 2, 3, \dots, r) \quad (34)$$

ali ne mogu biti svi $\vartheta_i = 0$ niti svi $\vartheta_i = 1$.

Sumiramo li jednadžbu (34) po i , na lijevoj ćemo strani dobiti broj svih stranica mreže područja P , i to broj unutarnjih stranica uračunat dvostruko. Prema tome vrijedi relacija

$$\alpha_1^v + 2\alpha_1^u = \alpha_0^u \sum_{i=1}^r k_i + \alpha_0^v \vartheta \sum_{i=1}^r k_i, \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Uz pomoć jednadžbe (33) slijedi odatle

$$\alpha_1^u = \frac{1}{2} \left[\alpha_0^u \sum_{i=1}^r k_i - \alpha_0^v (1 - \vartheta \sum_{i=1}^r k_i) \right]. \quad (35)$$

Ako još jednadžbu (34) najprije podijelimo s n_i , pa onda sumiramo po i , izlazi

$$\alpha_2 = \alpha_0^u \sum_{i=1}^r \frac{k_i}{n_i} + \alpha_0^v \vartheta' \sum_{i=1}^r \frac{k_i}{n_i}, \quad 0 < \vartheta' < 1. \quad (36)$$

Uvrstimo li (33), (35) i (36) u (32) i sredimo, slijedi nakon diobe sa α_0^u

$$1 - \sum_{i=1}^r k_i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_i} \right) + \frac{\alpha_0^v}{\alpha_0^u} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \vartheta \sum_{i=1}^r k_i + \vartheta' \sum_{i=1}^r \frac{k_i}{n_i} \right) - \frac{1}{\alpha_0^u} = 0. \quad (37)$$

Relacija (37) je opće topološke prirode i vrijedi jednako u sve tri geometrije, pa ćemo je tako i primijeniti.

Uzmimo najprije eliptičnu ravninu. Uvećavamo li postepeno ϱ , to će područje P napokon obuhvatiti cijelu ravninu, jer je ona konačna, pa tako sva čvorišta postaju unutarinja t. j. $\alpha_0^v = 0$, dok je α_0^u radi (22)₁ i (28) konačan broj. Relacija (37) prelazi u

$$\sum_{i=1}^r k_i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_i} \right) = 1 - \frac{1}{\alpha_0^u} \quad (38)$$

i tako dobivamo relaciju nužnog uvjeta (14)^a. (U sfernoj ravnini bi na desnoj strani relacije (38) stajao izraz $1 - \frac{2}{\alpha_0^u}$, jer kad područje P od elementarnog kompleksa prijeđe u potpunu sfernu ravninu, koja je homeomorfna kuglinoj plohi, to se karakteristika uveća za jedinicu. Međutim karakteristika i potpune eliptične ravnine, koja je homeomorfna projektivnoj ravnini, ostaje jednaka jedinici. Dakako da bismo ovdje do relacije (38) mogli doći i jednostavnije tako, da promatramo odmah eliptičnu ravninu u cijelosti, a ne pomoću relacije (37) postepenim povećanjem područja P . Učinili smo ipak tako radi analognog postupka u slijedeća dva slučaja.)

U slučaju parabolične ravnine granični prijelaz $\varrho \rightarrow \infty$ primijenjen relacijom (30) na jednadžbu (37) daje jednadžbu nužnog uvjeta (14)^b.

Promotrimo napokon slučaj hiperbolične ravnine. Ako je koeficijent od $\frac{\alpha_0^v}{\alpha_0^u}$, t. j. izraz

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \vartheta \sum_{i=1}^r k_i + \vartheta \sum_{i=1}^r \frac{k_i}{n_i} \quad (39)$$

pozitivan, slijedi graničnim prelazom $\varrho \rightarrow \infty$ uz primjenu relacije (31) relacija nužnog uvjeta (14)^c.

No predznak izraza (39) nije moguće odrediti i prema tome relacija (37) u slučaju hiperbolične ravnine ne dovodi do cilja.

Eliminacijom nekih drugih veličina možemo jednadžbu (32) svesti i na ovaj oblik

$$1 - \sum_{i=1}^r k_i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_i} \right) + \frac{\alpha_2^v}{\alpha_2^u} [---] + \frac{(-)}{\alpha_2^u} = 0,$$

ali izraz u uglatoj zagradi je sada znatno zamršeniji od izraza (39), a i njegov se predznak ne može odrediti.

To ćemo razumjeti, ako uočimo, da je ovdje teškoća dublje naravi i da leži već u osnovnoj zamisli, a ne u njezinoj analitičkoj izvedbi. Ne će naime uopće biti moguće odrediti nužne uvjete za hiperboličnu ravninu na taj način, da se postepenim povećavanjem područja P u graničnom slučaju obuhvati cijela ravnina.

To je posljedica stavka VII., jer broj vanjskih elemenata područja P — a oni unose nesigurnost u izbrajanju elemenata pojedine vrste — u graničnom slučaju ne iščezava prema broju unutarnjih elemenata.

Pitanje je, kako da uklonimo tu teškoću i riješimo problem nužnih uvjeta i u tom slučaju. Prva je pomisao, da mjesto hiperbolične ravnine uzmemo koju drugu, konačnu »prostornu formu« hiperbolične dvodimenzionalne geometrije. Takvih prostornih formi hiperbolične dvodimenzionalne geometrije ima neizmjerljivo mnogo i one su dane topološkim tipom zatvorene plohe, koja se da orijentirati, roda $p \geq 2$, a to su »pereci« s dvije ili više »rupa« ili — što je isto — kugle s dva ili više »držaka«. »Curvatura integra« tih ploha je naime negativna.

I doista nije teško razabrati, da za homogene mreže tih ploha relacija (14)^c daje nužni uvjet (o tom će biti još поближе govora u jednoj drugoj radnji), ali odatle ipak za samu hiperboličnu ravninu ne možemo izvesti još nikakav zaključak. Budući da je hiperbolična ravnina za te plohe ∞ -struka nerazgranata »ploha prekrivanja« (»Überlagerungsfläche«) to će na osnovi toga preslikavanja svakoj mreži koje od tih ploha

odgovarati jedna mreža hiperbolične ravnine, ali svakoj mreži hiperbolične ravnine ne mora odgovarati i mreža jedne od tih ploha. Odatle slijedi, da nužni uvjet egzistencije homogenih mreža konačnih prostornih formi dvodimenzionalne hiperbolične geometrije ne mora biti i nužni uvjet za homogene mreže hiperbolične ravnine.

Možda bi se moglo dokazati, da vrijedi relacija (14)^c i za taj slučaj tako, da se pokaže, da se svaka homogena mreža hiperbolične ravnine, koja ispunjava uvjete (22), može nekom topološkom transformacijom te ravnine prevesti u pravilnu homogenu mrežu. Tada bi valjanost relacije (14)^c za tu općenitu homogenu mrežu bila neposredno očevidna.

Iako je dakle vrlo vjerojatno, da u hiperboličnoj ravnini i u općenitijem slučaju vrijedi relacija (14)^c, pitanje dokaza te tvrdnje ostaje otvoreno.

6. ORIJENTACIJA MREŽE

Stranica a bilo kakve mreže incidentna je prema definiciji 10., t. 4^a) s parom A, B susjednih čvorišta i prema t. 4^b) s parom α, β susjednih poligona. Onda prema t. 2) postoji i međusobna incidencija parova A, B i α, β , ali su prema t. 6^b) čvorišta A, B jedina zajednička čvorišta za poligone α i β , a prema 6^a) su poligoni α i β jedini zajednički poligoni za čvorišta A, B . Prema stavcima IV.^a i IV.^b svakom će od ta četiri elementa pripadati i ciklus s njim incidentnih elemenata druge vrste. Ukratko ćemo svaki od tih ciklusa označiti elementom, kojem oni pripadaju, pa imamo tako ove cikluse:

$$A \equiv [\alpha, \beta, \kappa, \lambda, \dots, \varrho]$$

$$B \equiv [\alpha, \beta, \sigma, \tau, \dots, \omega]$$

$$\alpha \equiv [A, B, K, L, \dots, R]$$

$$\beta \equiv [A, B, S, T, \dots, Z]$$

Definicija 20^a. Kazat ćemo, da smo čvorište orijentirati, ako damo ciklusu poligona incidentnih s tim čvorištem jednu određenu orijentaciju.

Definicija 21^a. Kažemo, da su dva susjedna čvorišta A i B jednako orijentirana, ako par zajedničkih poligona α, β

Definicija 20^b. Kazat ćemo, da smo poligon orijentirali, ako damo ciklusu čvorišta incidentnih s tim poligonom jednu određenu orijentaciju.

Definicija 21^b. Kažemo, da su dva susjedna poligona α i β jednako orijentirana, ako par zajedničkih čvorišta A i B

ima u ciklusima poligona incidentnih s tim čvorištima protivan redoslijed. Ako dakle pridamo čvorištu A orijentaciju $A_1 \equiv (\alpha, \beta, \kappa, \lambda, \dots, \varrho)$, onda će čvorište B biti jednako orijentirano, ako mu pripada orijentacija $B_1 \equiv (\beta, \alpha, \omega, \dots, \tau, \sigma)$.

ima u ciklusima čvorišta incidentnih s tim poligonima protivan redoslijed. Ako dakle pridamo poligonu α orijentaciju $\alpha_1 \equiv (A, B, K, L, \dots, R)$, onda će poligon β biti jednako orijentiran, ako mu pripada orijentacija $\beta_1 \equiv (B, A, Z, \dots, T, S)$.

Ako su M i N (μ i ν) bilo koja dva čvorišta (poligona) mreže, tada se uz pomoć def. 10., t. 7) i 2), def. 11. i stavka IV. može dokazati, da postoji barem jedan konačan slijed susjednih čvorišta (poligona) te mreže, kojemu su M i N (μ i ν) krajnji članovi. Pošavši tada od neke određene orijentacije nekog određenog čvorišta M (poligona μ), možemo bilo koje čvorište N (poligon ν) preko spomenutog slijeda orijentirati tako, da su po dva susjedna čvorišta (poligona) tog slijeda jednako orijentirana. Kako taj slijed čvorišta (poligona) ne mora biti krajnjim čvorištima M i N (poligonima μ i ν) jednoznačno određen, to se može desiti, da pošavši od jedne određene orijentacije čvorišta M (poligona μ) dođemo preko različitih sljedova i do različitih orijentacija čvorišta N (poligona ν).

Definicija 22^a. Ako se daje odrediti orijentacija svih čvorišta neke mreže tako, da je svaki par susjednih čvorišta te mreže jednako orijentiran prema def. 21.^a, onda kažemo, da se ta mreža daje orijentirati.

Definicija 22^b. Ako se daje odrediti orijentacija svih poligona neke mreže tako, da je svaki par susjednih poligona te mreže jednako orijentiran prema def. 21.^b, onda kažemo, da se ta mreža daje orijentirati.

Iz definicija 21. slijedi, da će dva susjedna jednako orijentirana čvorišta (poligona) ostati jednako orijentirana, ako u oba promijenimo orijentaciju. Odatle prema def. 22. slijedi, da mreži, koja se daje orijentirati, možemo pridati dvije protivne orijentacije.

U definicijama 22.^a i 22.^b dane su dvije dualne ali međusobno različite i neovisne definicije mogućnosti orijentacije mreže. Prema jednoj je mreža orijentirana čvorištima, a prema drugoj poligonima. Valja dokazati ekvivalenciju tih definicija. U tu svrhu bit će nam potrebni još neki pojmovi, koje ćemo najprije definirati, a zatim ćemo od dva međusobno dualna dokaza ekvivalencije dati samo onaj za lijevu stranu.

Definicija 23^a. Kazat ćemo, da je položaj nekoga orijentiranog čvorišta s obzirom na bilo koji njegov poligon onaj položaj pripadnog ciklusa poligona, koji tim poligonom počinje. Na pr. položaj čvorišta A uz orijentaciju A_1 s obzirom na poligon α je položaj $A_1^{(\alpha)} \equiv \alpha, \beta, \gamma, \lambda, \dots, \varrho$.

Definicija 23^b. Kazat ćemo, da je položaj nekog orijentiranog poligona s obzirom na bilo koje njegovo čvorište onaj položaj pripadnog ciklusa čvorišta, koji tim čvorištem počinje. Na pr. položaj poligona α uz orijentaciju a_1 s obzirom na čvorište A je položaj $a_1^{(A)} \equiv A, B, K, L, \dots, R$.

U smislu def. 2. bit će razumljiva još i ova simbolička oznaka

$$\begin{aligned} A_1^{(\alpha)+1} &\equiv A_1^{(\beta)} & a_1^{(A)+1} &\equiv a_1^{(B)} \\ A_1^{(\alpha)-1} &\equiv A_1^{(\varrho)}, & a_1^{(A)-1} &\equiv a_1^{(R)}, \end{aligned}$$

koju ćemo kasnije upotrebljavati.

Pokazat ćemo sada, da možemo dovesti u međusobnu vezu orijentaciju čvorišta i orijentaciju poligona i to tako, da će jednakoj orijentaciji svih parova susjednih čvorišta mreže odgovarati i jednaka orijentacija svih parova susjednih poligona te mreže i obratno. Neka je dakle dana jedna orijentacija mreže u smislu def. 22.^a, t. j. neka su svi parovi susjednih čvorišta jednako orijentirani u smislu def. 21.^a. Takvoj orijentaciji čvorišta pridijelit ćemo ujedno jednu određenu orijentaciju svih poligona. Uzmimo bilo koja dva susjedna poligona mreže α i β ; oni imaju par zajedničkih čvorišta A i B . Neka ta čvorišta imaju orijentacije

$$\begin{aligned} A_1 &\equiv (\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \dots, \varrho) \\ B_1 &\equiv (\beta, \alpha, \omega, \dots, \tau, \sigma). \end{aligned}$$

Položaji tih čvorišta obzirom na poligon α bit će:

$$\begin{aligned} A_1^{(\alpha)} &\equiv \alpha, \beta, \gamma, \lambda, \dots, \varrho \\ B_1^{(\alpha)} &\equiv \alpha, \omega, \dots, \tau, \sigma, \beta. \end{aligned}$$

Definicija 24^a. Smatrat ćemo, da je od dva položaja $A_1^{(\alpha)}$ i $B_1^{(\alpha)}$ prvi po redu onaj, kod kojega je drugi zajednički poligon za čvorišta A i B — dakle poligon β — na kraju. To je slučaj kod položaja $B_1^{(\alpha)}$, pa je prema tome redoslijed

Definicija 24^b. Smatrat ćemo, da je od dva položaja $a_1^{(A)}$ i $\beta_1^{(A)}$ prvi po redu onaj, kod kojega je drugo zajedničko čvorište za poligone α i β — dakle čvorište B — na kraju. To je slučaj kod položaja $\beta_1^{(A)}$, pa je prema tome redoslijed

tih položaja $B_1^{(a)}$, $A_1^{(a)}$. Orijentaciju poligona a odredit ćemo tako, da u ciklusu s njim incidentnih čvorišta čvorišta A i B imaju isti redoslijed kao i njihovi položaji obzirom na a , t. j. $a_1 \equiv (B, A, R, \dots, L, K)$.

tih položaja $\beta_1^{(A)}$, $a_1^{(A)}$. Orijentaciju čvorišta A odredit ćemo tako, da u ciklusu s njim incidentnih poligona poligoni a i β imaju isti redoslijed kao i njihovi položaji obzirom na A , t. j. $A_1 \equiv (\beta, a, \varrho, \dots, \lambda, \kappa)$.

Dogovorom prema def. 24.^a određena je orijentacija bilo kojeg poligona a na osnovi orijentacije dvaju njegovih susjednih čvorišta A i B . Potrebno je dakako ponajprije dokazati, da prema tom dogovoru dobivamo uvijek istu orijentaciju poligona a , uzeli ma koji par njegovih susjednih čvorišta. Uzmimo zato par B, K susjednih čvorišta poligona a , koji dolazi prvi po redu iza para A, B . Nije teško na osnovi aksioma iz def. 10. uvidjeti, da čvorištu K pripada ciklus $[a, \varepsilon, \zeta, \eta, \dots, \omega]$, gdje su ε, ζ, η neodređeni poligoni, od kojih još eventualno može biti ε identičan sa a . Prema def. 21.^a mora čvorište K imati orijentaciju $K_1 \equiv (a, \varepsilon, \zeta, \eta, \dots, \omega)$. No onda je $K_1^{(a)} \equiv a, \varepsilon, \zeta, \eta, \dots, \omega$, pa položaji $B_1^{(a)}$ i $K_1^{(a)}$ imaju prema def. 24.^a redoslijed $K_1^{(a)}$, $B_1^{(a)}$ t. j. dobivamo za poligon a i opet istu orijentaciju $a_1 \equiv (K, B, A, R, \dots, L)$. Idući tako postepeno redom dalje zaključujemo, da za svaki od jednako orijentiranih parova A, B ; B, K ; K, L ; $\dots$; R, A susjednih čvorišta poligona a dobivamo uvijek istu orijentaciju poligona a , a to je i trebalo dokazati.

Odredimo sada na osnovi def. 24.^a orijentaciju i poligona β . Budući da su

$$A_1^{(\beta)} \equiv \beta, \kappa, \lambda, \dots, \varrho, a,$$

$$B_1^{(\beta)} \equiv \beta, a, \omega, \dots, \tau, \sigma$$

položaji čvorišta A i B obzirom na poligon β , pripada njemu orijentacija

$$\beta_1 \equiv (A, B, S, T, \dots, Z).$$

Prema tome su poligoni a i β u smislu def. 21.^b jednako orijentirani. No kako je a, β bilo koji par susjednih poligona mreže, slijedi odatle, da je promatrana mreža orijentirana i u smislu def. 22.^b, t. j. definicije 22.^a i 22.^b su međusobno ekvivalentne, što je i trebalo dokazati.

Mi ćemo u slijedećim paragrafima — dok protivno ne istaknemo — promatrati samo takve mreže, koje se daju orijentirati.

7. ČVORIŠTA I POLIGONI VIŠEG REDA ODNOSNO RAZREDA

• Neka je A, B bilo koji par susjednih čvorišta incidentnih s parom susjednih poligona α, β neke mreže, koja se da orijentirati. U dvije moguće orijentacije mreže bit će prema paragrafu 6. ti elementi ovako orijentirani:

I. orijentacija

$$A_1 \equiv (\alpha, \beta, \kappa, \lambda, \dots, \varrho)$$

$$B_1 \equiv (\alpha, \omega, \dots, \tau, \alpha, \beta)$$

$$\alpha_1 \equiv (A, R, \dots, L, K, B)$$

$$\beta_1 \equiv (A, B, S, T, \dots, Z)$$

II. orijentacija

$$A_2 \equiv (\alpha, \varrho, \dots, \lambda, \kappa, \beta)$$

$$B_2 \equiv (\alpha, \beta, \sigma, \tau, \dots, \omega)$$

$$\alpha_2 \equiv (A, B, K, L, \dots, R)$$

$$\beta_2 \equiv (A, Z, \dots, T, S, B)$$

Uzmimo jednu određenu orijentaciju mreže, na primjer prvu, pa zamislimo, da je i za svako od ostalih čvorišta i poligona te mreže dana jednaka orijentacija pripadnim ciklusom. Ako su svi ti ciklusi doista dani, bit će mreža potpuno određena. Za tako određenu mrežu definirat ćemo još neke pojmove i izvesti neke stavke. Kako možemo slijedeća razmatranja provesti na dva dualna i međusobno neovisna načina, dovoljno je, da dalje pratimo samo jednu, na pr. lijevu stranu.

Definicija 25^a. Orijentirani ciklus poligona $\alpha, \beta, \kappa, \lambda, \dots, \varrho$ incidentnih s bilo kojim čvorištem A neke dane mreže zvat ćemo »čvorištem prvog reda« i označiti s

$$A_{(1)} \equiv (\alpha, \beta, \kappa, \lambda, \dots, \varrho),$$

a samo čvorište A zvat ćemo »središtem« tog čvorišta prvog reda.

Definicija 25^b. Orijentirani ciklus čvorišta $A, B, K, L, \dots, R$ incidentnih s bilo kojim poligonom α neke dane mreže zvat ćemo »poligonom prvog razreda« i označiti s

$$\alpha_{(1)} \equiv (A, B, K, L, \dots, R),$$

a sam poligon α zvat ćemo »jezgrom« tog poligona prvog razreda.

Donje indekse stavljamo u zagradu, jer oni ne će ovdje kao do sada označivati jednu ili drugu orijentaciju ciklusa, nego »red« čvorišta odnosno poligona (»razred« poligona odnosno čvorišta), kako će se iz daljnjega razabrati. Sada ćemo dokazati, da vrijedi

Stavak VIII^a. Ako je α bilo koji poligon dane orijentirane mreže, a $(A, R, \dots, L, K, B)$ ciklus s njim incidentnih čvorišta, tada je ciklus položaja poligona prvog reda

$$(A_{(1)}^{(\alpha)}, R_{(1)}^{(\alpha)}, \dots, L_{(1)}^{(\alpha)}, K_{(1)}^{(\alpha)}, B_{(1)}^{(\alpha)})$$

složeni ciklus prvog stepena.

Stavak VIII^b. Ako je A bilo koje čvorište dane orijentirane mreže, a $(\alpha, \varrho, \dots, \lambda, \kappa, \beta)$ ciklus s njim incidentnih poligona, tada je ciklus položaja poligona prvog razreda

$$(\alpha_{(1)}^{(A)}, \varrho_{(1)}^{(A)}, \dots, \lambda_{(1)}^{(A)}, \kappa_{(1)}^{(A)}, \beta_{(1)}^{(A)})$$

složeni ciklus prvog stepena.

Dokaz. Budući da je prema paragrafu 6.

$$A_{(1)}^{(\alpha)} \equiv \alpha, \beta, \kappa, \lambda, \dots, \varrho$$

$$B_{(1)}^{(\alpha)} \equiv \alpha, \omega, \dots, \tau, \sigma, \beta,$$

a kako su A i B bilo koja dva susjedna čvorišta incidentna sa α , slijedi odmah na osnovi definicije 9. tvrdnja toga stavka.

Sada možemo dati ovu definiciju:

Definicija 26^a. Složeni ciklus prvog stepena iz stavka VIII.^a zvat ćemo »poligonom prvog reda« i označiti ga s

$$\alpha_{(1)} \equiv (A_{(1)}^{(\alpha)}, R_{(1)}^{(\alpha)}, \dots, L_{(1)}^{(\alpha)}, K_{(1)}^{(\alpha)}, B_{(1)}^{(\alpha)}),$$

a sam poligon α zvat ćemo »jezgrom« tog poligona prvog reda.

Dokazat ćemo, da vrijedi

Stavak IX^a. Ako je A bilo koje čvorište dane orijentirane mreže, a $(\alpha, \beta, \kappa, \lambda, \dots, \varrho)$ ciklus s njim incidentnih poligona, tada je ciklus položaja poligona prvog reda

$$(\alpha_{(1)}^{(A)}, \beta_{(1)}^{(A)}, \kappa_{(1)}^{(A)}, \lambda_{(1)}^{(A)}, \dots, \varrho_{(1)}^{(A)})$$

složeni ciklus drugog stepena.

Dokaz. Ponajprije je

$$\alpha_{(1)}^{(A)} \equiv A_{(1)}^{(\alpha)}, R_{(1)}^{(\alpha)}, \dots, L_{(1)}^{(\alpha)}, K_{(1)}^{(\alpha)}, B_{(1)}^{(\alpha)},$$

$$\beta_{(1)}^{(A)} \equiv A_{(1)}^{(\beta)}, B_{(1)}^{(\beta)}, S_{(1)}^{(\beta)}, T_{(1)}^{(\beta)}, \dots, Z_{(1)}^{(\beta)},$$

a zatim, budući da je

$$A_{(1)} \equiv (\alpha, \beta, \kappa, \lambda, \dots, \varrho),$$

$$B_{(1)} \equiv (\alpha, \omega, \dots, \tau, \sigma, \beta),$$

Definicija 26^b. Složeni ciklus prvog stepena iz stavka VIII.^b zvat ćemo »čvorištem prvog razreda« i označiti ga s

$$A_{(1)} \equiv (\alpha_{(1)}^{(A)}, \varrho_{(1)}^{(A)}, \dots, \lambda_{(1)}^{(A)}, \kappa_{(1)}^{(A)}, \beta_{(1)}^{(A)}),$$

a samo čvorište A zvat ćemo »središtem« tog čvorišta prvog razreda.

Stavak IX^b. Ako je α bilo koji poligon dane orijentirane mreže, a $(A, B, K, L, \dots, R)$ ciklus s njim incidentnih čvorišta, tada je ciklus položaja poligona prvog razreda

$$(A_{(1)}^{(\alpha)}, B_{(1)}^{(\alpha)}, K_{(1)}^{(\alpha)}, L_{(1)}^{(\alpha)}, \dots, R_{(1)}^{(\alpha)})$$

složeni ciklus drugog stepena.

$$A_{(i)}^{(\beta)} = A_{(i)}^{(\alpha)+1}, \quad B_{(i)}^{(\beta)} = B_{(i)}^{(\alpha)-1};$$

dakle su položaji $\alpha_{(i)}^{(A)}$ i $\beta_{(i)}^{(A)}$ susjedni u smislu definicije 8. Kako je α, β bilo koji par susjednih poligona incidentnih s A , izlazi prema definiciji 9. tvrdnja prednjeg stavka.

Definicija 27^a. Složeni ciklus drugog stepena iz stavka IX.^a zvat ćemo »čvorištem drugog reda« i označiti ga s

Čvorište A zvat ćemo »početnim središtem«, a čvorište prvog reda $A_{(1)}$ »završnim središtem« tog čvorišta drugog reda.

Poligon α zvat ćemo »početnom jezgrom« a poligon prvog razreda $\alpha_{(I)}$ »završnom jezgrom« tog poligona drugog razreda.

Stavak X. Ako su

$$\begin{aligned} A_{(i-1)} &\equiv (\alpha_{(i-2)}^{(A)}, \beta_{(i-2)}^{(A)}, \kappa_{(i-2)}^{(A)}, \lambda_{(i-2)}^{(A)}, \dots, \varrho_{(i-2)}^{(A)}), \\ B_{(i-1)} &\equiv (\alpha_{(i-2)}^{(B)}, \omega_{(i-2)}^{(B)}, \dots, \tau_{(i-2)}^{(B)}, \sigma_{(i-2)}^{(B)}, \beta_{(i-2)}^{(B)}), \\ K_{(i-1)} &\equiv (\alpha_{(i-2)}^{(K)}, \dots, \omega_{(i-2)}^{(K)}), \quad S_{(i-1)} \equiv (\beta_{(i-2)}^{(S)}, \sigma_{(i-2)}^{(S)}, \dots), \\ L_{(i-1)} &\equiv (\alpha_{(i-2)}^{(L)}, \dots, \dots), \quad T_{(i-1)} \equiv (\beta_{(i-2)}^{(T)}, \dots, \dots), \\ &\dots \dots \dots \\ R_{(i-1)} &\equiv (\alpha_{(i-2)}^{(R)}, \varrho_{(i-2)}^{(R)}, \dots), \quad Z_{(i-1)} \equiv (\beta_{(i-2)}^{(Z)}, \dots, \kappa_{(i-2)}^{(Z)}). \end{aligned}$$

složeni ciklusi $2(i-2)$ -og stepena, ($i \geq 2$) (pri čemu je $\alpha_{(0)} \equiv \alpha, \dots$
t. j. složeni ciklus 0-tog stepena $\equiv$ jednostavni ciklus), a ciklusi

$$\begin{aligned} \alpha_{(i-1)} &\equiv (A_{(i-1)}^{(\alpha)}, R_{(i-1)}^{(\alpha)}, \dots, L_{(i-1)}^{(\alpha)}, K_{(i-1)}^{(\alpha)}, B_{(i-1)}^{(\alpha)}), \\ \beta_{(i-1)} &\equiv (A_{(i-1)}^{(\beta)}, B_{(i-1)}^{(\beta)}, S_{(i-1)}^{(\beta)}, T_{(i-1)}^{(\beta)}, \dots, Z_{(i-1)}^{(\beta)}), \\ \kappa_{(i-1)} &\equiv (A_{(i-1)}^{(\kappa)}, Z_{(i-1)}^{(\kappa)}, \dots), \quad \sigma_{(i-1)} \equiv (B_{(i-1)}^{(\sigma)}, \dots, S_{(i-1)}^{(\sigma)}), \\ \lambda_{(i-1)} &\equiv (A_{(i-1)}^{(\lambda)}, \dots, \dots), \quad \tau_{(i-1)} \equiv (B_{(i-1)}^{(\tau)}, \dots, \dots), \\ &\text{--- --- --- --- ---} \\ \varrho_{(i-1)} &\equiv (A_{(i-1)}^{(\varrho)}, \dots, R_{(i-1)}^{(\varrho)}), \quad \omega_{(i-1)} \equiv (B_{(i-1)}^{(\omega)}, K_{(i-1)}^{(\omega)}, \dots) \end{aligned}$$

složeni ciklusi $(2i - 3)$ -ćeg stepena, ciklusi

$$\begin{aligned} A_{(i)} &\equiv (\alpha_{(i-1)}^{(A)}, \beta_{(i-1)}^{(A)}, \kappa_{(i-1)}^{(A)}, \lambda_{(i-1)}^{(A)}, \dots, \varrho_{(i-1)}^{(A)}), \\ B_{(i)} &\equiv (\alpha_{(i-1)}^{(B)}, \omega_{(i-1)}^{(B)}, \dots, \tau_{(i-1)}^{(B)}, \sigma_{(i-1)}^{(B)}, \beta_{(i-1)}^{(B)}), \\ K_{(i)} &\equiv (\alpha_{(i-1)}^{(K)}, \dots, \omega_{(i-1)}^{(K)}), \quad S_{(i)} \equiv (\beta_{(i-1)}^{(S)}, \sigma_{(i-1)}^{(S)}, \dots), \\ L_{(i)} &\equiv (\alpha_{(i-1)}^{(L)}, \dots, \dots), \quad T_{(i)} \equiv (\beta_{(i-1)}^{(T)}, \dots, \dots), \\ &\quad \text{-----} \\ R_{(i)} &\equiv (\alpha_{(i-1)}^{(R)}, \varrho_{(i-1)}^{(R)}, \dots), \quad Z_{(i)} \equiv (\beta_{(i-1)}^{(Z)}, \dots, \kappa_{(i-1)}^{(Z)}) \end{aligned}$$

složeni su ciklusi $2(i - 1)$ -vog stepena, a ciklusi

$$\begin{aligned} \alpha_{(i)} &\equiv (A_{(i)}^{(\alpha)}, R_{(i)}^{(\alpha)}, \dots, L_{(i)}^{(\alpha)}, K_{(i)}^{(\alpha)}, B_{(i)}^{(\alpha)}), \\ \beta_{(i)} &\equiv (A_{(i)}^{(\beta)}, B_{(i)}^{(\beta)}, S_{(i)}^{(\beta)}, T_{(i)}^{(\beta)}, \dots, Z_{(i)}^{(\beta)}), \\ \kappa_{(i)} &\equiv (A_{(i)}^{(\kappa)}, Z_{(i)}^{(\kappa)}, \dots), \quad \sigma_{(i)} \equiv (B_{(i)}^{(\sigma)}, \dots, S_{(i)}^{(\sigma)}), \\ \lambda_{(i)} &\equiv (A_{(i)}^{(\lambda)}, \dots, \dots), \quad \tau_{(i)} \equiv (B_{(i)}^{(\tau)}, \dots, \dots), \\ &\quad \text{-----} \\ \varrho_{(i)} &\equiv (A_{(i)}^{(\varrho)}, \dots, R_{(i)}^{(\varrho)}), \quad \omega_{(i)} \equiv (B_{(i)}^{(\omega)}, K_{(i)}^{(\omega)}, \dots) \end{aligned}$$

složeni su ciklusi $2(i - 1)$ -vog stepena.

Dokaz. Budući da u ciklusu $A_{(i-1)}$ slijedi β iza α , a u ciklusu $B_{(i-1)}$ slijedi α iza β , možemo u smislu oznake prošlog paragrafa pisati

$$A_{(i-1)}^{(\beta)} = A_{(i-1)}^{(\alpha)+1}, \quad B_{(i-1)}^{(\beta)} = B_{(i-1)}^{(\alpha)-1}$$

i isto tako

$$B_{(i-1)}^{(\alpha)} = B_{(i-1)}^{(\beta)+1}, \quad A_{(i-1)}^{(\alpha)} = A_{(i-1)}^{(\beta)-1}$$

t. j. položaj $\beta_{(i-1)}^{(A)}$ slijedi iza $\alpha_{(i-1)}^{(A)}$, a položaj $\alpha_{(i-1)}^{(B)}$ slijedi iza $\beta_{(i-1)}^{(B)}$ i susjedni su u smislu definicije 8., dakle su prema definiciji 9. ciklusi $A_{(i)}, B_{(i)}, \dots, Z_{(i)}$ složeni ciklusi $2(i - 1)$ -vog stepena.

Isto tako, budući da u ciklusu $\alpha_{(i-1)}$ slijedi A iza B , a u ciklusu $\beta_{(i-1)}$ slijedi B iza A , možemo i opet pisati

$$\alpha_{(i-1)}^{(A)} = \alpha_{(i-1)}^{(B)+1}, \quad \beta_{(i-1)}^{(A)} = \beta_{(i-1)}^{(B)-1}$$

i isto tako

$$\beta_{(i-1)}^{(B)} = \beta_{(i-1)}^{(A)+1}, \quad \alpha_{(i-1)}^{(B)} = \alpha_{(i-1)}^{(A)-1}.$$

Prema tome položaj $A_{(i)}^{(\alpha)}$ slijedi iza $B_{(i)}^{(\alpha)}$, a položaj $B_{(i)}^{(\beta)}$ slijedi iza $A_{(i)}^{(\beta)}$, i susjedni su u smislu definicije 8. Onda su prema definiciji 9. doista ciklusi $\alpha_{(i)}$, $\beta_{(i)}$, ..., $\omega_{(i)}$ složeni ciklusi $(2i-1)$ -vog stepena, što je i valjalo dokazati.

Sada možemo dati ove rekurzivne definicije:

Definicija 28^a. Ako je A bilo koje čvorište dane orijentirane mreže, a $(\alpha, \beta, \kappa, \lambda, \dots, \varrho)$ ciklus s njim incidentnih poligona, tada ćemo složeni ciklus $2(i-1)$ -vog stepena

Definicija 28^b. Ako je a bilo koji poligon dane orijentirane mreže, a $(A, B, K, L, \dots, R)$ ciklus s njim incidentnih poligona, tada ćemo složeni ciklus $2(J-1)$ -vog stepena

$$A_{(i)} \equiv (\alpha_{(i-1)}^{(A)}, \beta_{(i-1)}^{(A)}, \kappa_{(i-1)}^{(A)}, \lambda_{(i-1)}^{(A)}, \dots, \varrho_{(i-1)}^{(A)})$$

$$a_{(J)} \equiv (A_{(J-1)}^{(a)}, B_{(J-1)}^{(a)}, K_{(J-1)}^{(a)}, L_{(J-1)}^{(a)}, \dots, R_{(J-1)}^{(a)})$$

zvati »čvorištem i -tog reda«. Samo čvorište A zvat ćemo »početnim središtem«, a čvorište $(i-1)$ -vog reda $A_{(i-1)}$ »završnim središtem« tog čvorišta i -tog reda.

zvati »poligonom J -tog razreda«. Sam poligon a zvat ćemo »početnom jezgrom«, a poligon $(J-1)$ -vog razreda $a_{(J-1)}$ »završnom jezgrom« tog poligona J -tog razreda.

Definicija 29^a. Ako je a bilo koji poligon dane orijentirane mreže, a $(A, R, \dots, L, K, B)$ ciklus s njim incidentnih čvorišta, tada ćemo složeni ciklus $(2i-1)$ -vog stepena

Definicija 29^b. Ako je A bilo koje čvorište dane orijentirane mreže, a $(\alpha, \varrho, \dots, \lambda, \kappa, \beta)$ ciklus s njim incidentnih poligona, tada ćemo složeni ciklus $(2J-1)$ -vog stepena

$$\alpha_{(i)} \equiv (A_{(i)}^{(\alpha)}, R_{(i)}^{(\alpha)}, \dots, L_{(i)}^{(\alpha)}, K_{(i)}^{(\alpha)}, B_{(i)}^{(\alpha)})$$

$$A_{(J)} \equiv (\alpha_{(J)}^{(A)}, \varrho_{(J)}^{(A)}, \dots, \lambda_{(J)}^{(A)}, \kappa_{(J)}^{(A)}, \beta_{(J)}^{(A)})$$

zvati »poligonom i -tog reda«. Sam poligon a zvat ćemo »početnom jezgrom«, a poligon $(i-1)$ -vog reda $a_{(i-1)}$ »završnom jezgrom« tog poligona i -tog reda.

zvati »čvorištem J -tog razreda«. Samo čvorište A zvat ćemo »početnim središtem«, a čvorište $(J-1)$ -vog razreda $A_{(J-1)}$ »završnim središtem« tog čvorišta J -tog razreda.

Iz gornjih razmatranja možemo sada potpunom indukcijom zaključiti, da vrijede ovi stavci:

Stavak XI^a. Ako je A bilo koje čvorište neke mreže, koja se da orijentirati, postoji uvijek beskonačni slijed

$A_{(1)}, A_{(2)}, A_{(3)}, \dots, A_{(i)}, \dots$
čvorišta višeg reda. Isto tako uz svaki poligon a te mreže postoji i beskonačni slijed

$a_{(1)}, a_{(2)}, a_{(3)}, \dots, a_{(i)}, \dots$
poligona višeg reda.

Stavak XI^b. Ako je a bilo koji poligon neke mreže, koja se da orijentirati, postoji uvijek beskonačni slijed

$a_{(1)}, a_{(II)}, a_{(III)}, \dots, a_{(j)}, \dots$
poligona višeg razreda. Isto tako uz svako čvorište A te mreže postoji i beskonačni slijed

$A_{(1)}, A_{(II)}, A_{(III)}, \dots, A_{(j)}, \dots$
čvorišta višeg razreda.

Stavci VIII^{a i b} neposredna su posljedica Moebiusovog zakona o bridovima tako, da oni zapravo izražavaju taj isti zakon u drugom obliku. U tom smislu možemo smatrati stavke XI^{a i b} nekim poopćenjem toga zakona.

Još ćemo ovdje dokazati dva gotovo očevidna stavka, koje ćemo kasnije često primjenjivati.

Stavak XII^a. Neka je S_i skup, što ga čine svi međusobno različiti položaji čvorišta i -tog reda

$A_{(i)}, B_{(i)}, C_{(i)}, \dots$

neke dane mreže; onda za svaki dani položaj iz skupa S_i postoji njemu susjedni, koji slijedi iza njega, i pripada skupu S_i .

Stavak XII^b. Neka je Σ_j skup, što ga čine svi međusobno različiti položaji poligona J -tog razreda

$\alpha_{(j)}, \beta_{(j)}, \gamma_{(j)}, \dots$

neke dane mreže; onda za svaki položaj iz skupa Σ_j postoji njemu susjedni, koji slijedi iza njega, i pripada skupu Σ_j .

Dokaz. Neka je $M_{(i)}^{(\lambda)}$ bilo koji položaj iz skupa S_i , pokazat ćemo, da u skupu S_i postoji položaj, koji je položaju $M_{(i)}^{(\lambda)}$ susjedan i slijedi iza njega. Neka je naime $(G, H, \dots, M, N, \dots, P, Q)$ ciklus čvorišta incidentnih s poligonom λ dane mreže, prema stavku XI. i prethodnim definicijama i stavicima ovog paragrafa postoji poligon i -tog reda

$$\lambda_i \equiv (G_{(i)}^{(\lambda)}, H_{(i)}^{(\lambda)}, \dots, M_{(i)}^{(\lambda)}, N_{(i)}^{(\lambda)}, \dots, P_{(i)}^{(\lambda)}, Q_{(i)}^{(\lambda)}).$$

Kako svi međusobno različiti članovi ovog složenog ciklusa pripadaju skupu S_i , položaj je $N_{(i)}^{(\lambda)}$ onaj traženi položaj, koji je susjedan položaju $M_{(i)}^{(\lambda)}$ i slijedi iza njega.

Stavak XIII^a. Neka je σ_i skup što ga čine svi međusobno različiti položaji poligona i -tog reda $\alpha_{(i)}, \beta_{(i)}, \gamma_{(i)}, \dots$, neke dane mreže, onda za svaki položaj iz skupa σ_i postoji njemu susjedni, koji slijedi iza njega i pripada skupu σ_i .

Stavak XIII^b. Neka je s_j skup što ga čine svi međusobno različiti položaji čvorišta J -tog razreda $A_{(J)}, B_{(J)}, C_{(J)}, \dots$ neke dane mreže; onda za svaki položaj iz skupa s_j postoji njemu susjedni, koji slijedi iza njega i pripada skupu s_j .

Dokaz. Neka je $\lambda_{(i)}^{(M)}$ bilo koji položaj iz skupa σ_i ; pokazat ćemo, da u skupu σ_i postoji položaj, koji je položaju $\lambda_{(i)}^{(M)}$ susjedan i slijedi iza njega. Neka je naime $(\eta, \vartheta, \dots, \lambda, \mu, \dots, \pi, \varrho)$ ciklus poligona incidentnih sa čvorištem M dane mreže, to postoji čvorište $(i+1)$ -vog reda.

$$M_{(i+1)} \equiv (\eta_{(i)}^{(M)}, \vartheta_{(i)}^{(M)}, \dots, \lambda_{(i)}^{(M)}, \mu_{(i)}^{(M)}, \dots, \pi_{(i)}^{(M)}, \varrho_{(i)}^{(M)}).$$

Prema tome je $\mu_{(i)}^{(M)}$ traženi položaj, koji je susjedan položaju $\lambda_{(i)}^{(M)}$ i slijedi iza njega.

8. REALIZACIJA MREŽA RAVNINE

Dvije mreže smatrat ćemo jednakima, ako su topološki ekvivalentne t. j. ako su međusobno izomorfne. I zato ćemo — ako označimo sa $n(\alpha)$ broj čvorišta incidentnih s poligonom α i isto tako sa $n(A)$ broj poligona incidentnih s čvorištem A — smatrati da su taj poligon α i to čvorište A određeni čim je poznat broj $n(\alpha)$, odnosno $n(A)$.

U slijedećem razmatranju, koje se može provoditi na dva međusobno dualna načina, ograničit ćemo se radi jednostavnosti samo na jedan od njih, i to na onaj, koji odgovara lijevoj strani u prošlim paragrafima.

Ako je A čvorište neke dane mreže, čvorištem prvog reda $A_{(1)} \equiv (\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \dots, \varrho)$ određen je međusobni smještaj poligona incidentnih s čvorištem A . Ako su još dani brojevi $n(\alpha), n(\beta), \dots, n(\varrho)$, određen je na taj način s $A_{(1)}$ jedan dio mreže, t. j. elementarni poliedarski kompleks, što ga čine ti poligoni sa pripadnim stranicama i čvorištima. Zato ćemo i sam taj poliedarski kompleks zvati čvorištem prvog reda $A_{(1)}$.

Neka je sada α bilo koji poligon dane mreže, pa neka su dana čvorišta prvog reda $A_{(1)}, R_{(1)}, \dots, L_{(1)}, K_{(1)}, B_{(1)}$, čija su središta $A, R, \dots, L, K, B$ incidentna s poligonom α ; njihovi položaji $A_{(1)}, R_{(1)}, \dots, B_{(1)}$ zatvaraju ponajprije složeni ciklus prvog stepena, koji smo nazvali poligonom prvog reda $\alpha_{(1)}$. No kako

je ujedno ciklusom tih čvorišta prvog reda određen međusobni smještaj svih poligona incidentnih sa bilo kojim čvorištem od α , zvat ćemo i poliedarski kompleks, što ga čini dio mreže, koji je na taj način određen, isto poligonom prvog reda $\alpha_{(1)}$. Koji od ta dva pojma treba pod poligonom prvog reda $\alpha_{(1)}$ razumjeti, razabrat će se uvijek iz samog teksta po smislu.

Ako su dani poligoni prvog reda $\alpha_{(1)}, \beta_{(1)}, \kappa_{(1)}, \lambda_{(1)}, \dots, \varrho_{(1)}$ neke dane mreže, čije su jezgre $\alpha, \beta, \kappa, \lambda, \dots, \varrho$ incidentne s čvorištem A , to ponajprije njihovi položaji $\alpha^{(A)}, \beta^{(A)}, \dots, \varrho^{(A)}$ zatvaraju složeni ciklus drugog stepena, koji smo nazvali čvorištem drugog reda $A_{(2)}$. No kako je ujedno ciklusom tih poligona prvog reda određen međusobni smještaj svih poligona incidentnih s bilo kojim od čvorišta u čvorištu prvog reda $A_{(1)}$, zvat ćemo i poliedarski kompleks, što ga čini dio mreže, koji je na taj način određen, čvorištem drugog reda $A_{(2)}$. Na slični način razumijevat ćemo pod čvorištem i -tog reda $A_{(i)}$ i poliedarski kompleks, što ga čini onaj dio mreže, koji je sa $A_{(i)}$ određen, t. j. koji je određen ciklusom poligona $(i-1)$ -vog reda $\alpha_{(i-1)}, \beta_{(i-1)}, \dots, \varrho_{(i-1)}$, čije su početne jezgre $\alpha, \beta, \dots, \varrho$ incidentne s čvorištem A , a pod poligonom i -tog reda $\alpha_{(i)}$ razumijevat ćemo i poliedarski kompleks, što ga čini onaj dio mreže, koji je sa $\alpha_{(i)}$ određen, t. j. koji je određen ciklusom čvorišta i -tog reda $A_{(i)}, R_{(i)}, \dots, B_{(i)}$, čija su početna središta $A, R, \dots, B$ incidentna s poligonom α .

Prema stavku XI.^a svakom čvorištu A i svakom poligonu α neke dane mreže, koja se da orijentirati, pripada slijed $A_{(1)}, A_{(2)}, A_{(3)}, \dots$ čvorišta višeg reda, odnosno slijed $\alpha_{(1)}, \alpha_{(2)}, \alpha_{(3)}, \dots$ poligona višeg reda. Prema tome je mogućnost sastavljanja tih složenih ciklusa viših stepena nuždan uvjet za egzistenciju neke mreže. No pokazat će se, da je mogućnost sastavljanja takvih složenih ciklusa u stanovitom smislu i dovoljna za geometrijsku realizaciju mreže ravnine.

Poligon α možemo u ravnini na pr. tako realizirati, da uzme-mo bilo koji krug k_α te ravnine i na njegovoj periferiji fiksira-mo $n(\alpha)$ točaka po volji.

Neka je sada aritmetički dano neko čvorište prvog reda, t. j. ciklus

$$A_{(1)}^* \equiv (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_s),$$

gdje su poligoni α_i određeni pripadnim brojevima $n(\alpha_i)$, a radi stavka IV.^{a, b} i stavka I. tražimo samo, da je $s \geq 3$ i $n(\alpha_i) \geq 3$. Tako aritmetički dano čvorište prvog reda često ćemo pisati u slijedećem — kako smo ga uostalom u paragrafima 2. i 4. već i označili — tako, da mjesto poligona α_i pišemo pripadni

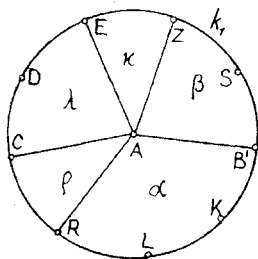
broj $n(a_i)$. Svako takvo čvorište prvog reda $A_{(1)}$ možemo geometrijski realizirati u ravnini tako, da bilo koji krug k_i te ravnine sa središtem u bilo kojoj točki A razdijelimo po volji u s sektora, i u određenom smislu oko čvorišta A , počevši od bilo kojeg sektora kao prvog, na luku i -tog sektora fiksiramo još $n(a_i) - 3$ točaka ($i = 1, 2, 3, \dots, s$).

Na sl. 1. i sl. 2. geometrijski su tako realizirana dva čvorišta prvog reda.

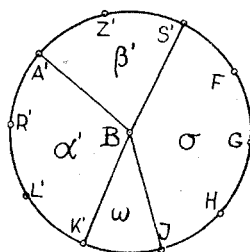
$$A_{(1)} \equiv (a, \beta, \kappa, \lambda, \varrho) \equiv (5, 4, 3, 4, 3)$$

i $B_{(1)} \equiv (a', \omega, \sigma, \beta') \equiv (5, 3, 6, 4).$

(Označimo li dva poligona istim slovom na pr. a , i a' , želimo tim istaći, da je i $n(a) = n(a')$.)



Sl. 1.

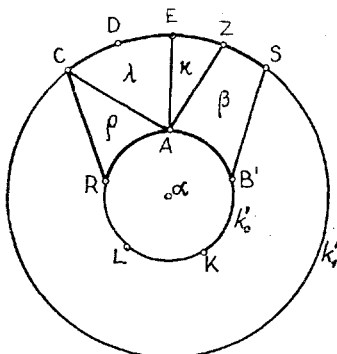


Sl. 2.

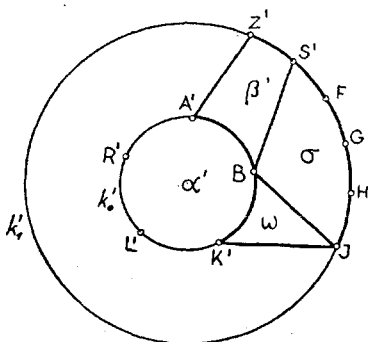
Ako je sada dan konačan ili beskonačan skup S čvorišta prvog reda $A_{(1)}, B_{(1)}, C_{(1)}, \dots$, među kojima može biti i povoljan broj jednakih egzemplara, pa ako je stavljeno na volju, hoćemo li i u kojim slučajevima smatrati identičnima pojedine poligone s jednakim brojem stranica a iz raznih čvorišta prvog reda, možemo postaviti pitanje, kada i na koji način možemo od tih čvorišta prvog reda »izgraditi« mrežu ravnine, t. j. kada i kako možemo realizirati u ravnini mrežu, čija bi sva čvorišta prvog reda bila identična s danim čvorištima prvog reda iz skupa S ?

Neka su dakle $A_{(1)}, R_{(1)}, \dots, L_{(1)}, K_{(1)}, B_{(1)}$ neka čvorišta prvog reda iz skupa S , pa neka njihovi položaji obzirom na neki poligon α čine $n(\alpha)$ -člani složeni ciklus prvog stepena $(A_{(1)}^{(\alpha)}, R_{(1)}^{(\alpha)}, \dots, L_{(1)}^{(\alpha)}, K_{(1)}^{(\alpha)}, B_{(1)}^{(\alpha)})$, to nije teško razabrati, da je mogućnost sastavljanja tih položaja u složeni $n(\alpha)$ -člani ciklus dovoljna za geometrijsku realizaciju jednog poligona prvog reda $\alpha_{(1)}$. Da to

razjasnimo, uzmimo čvorište prvog reda $A_{(1)}$ realizirano u sl. 1. i izvedimo jednu topološku transformaciju ravnine (označit ćemo je s T_{Aa}), kod koje će čvorište A iz središta kruga k_1 prijeći na periferiju kruga k_0' , kojim će sada biti realiziran poligon α , a čvorišta C, D, E, Z, S , koja nisu incidentna s poligonom α , na periferiju kruga k_1' , koji je s krugom k_0' koncentričan, a ima od njega veći polumjer. Tako sl. 1. prelazi u sl. 3., a kako su obje te figure očito topološki ekvivalentne, takva transformacija T_{Aa} sigurno uvijek postoji. Kako se pri tom transformira dio ravnine izvan kruga k_1 , ostaje za sada ned određeno.



Sl. 3.



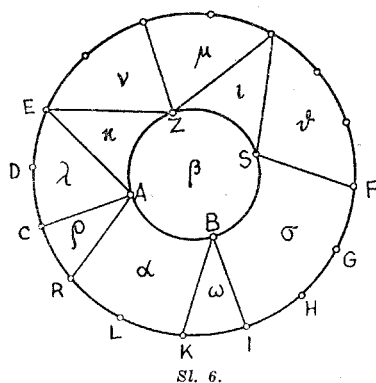
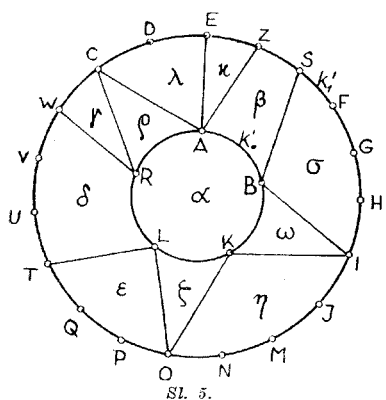
Sl. 4.

Analognom transformacijom T_{Ba} prijeći će čvorište $B_{(1)}$ iz oblika u sl. 2. u oblik u sl. 4.

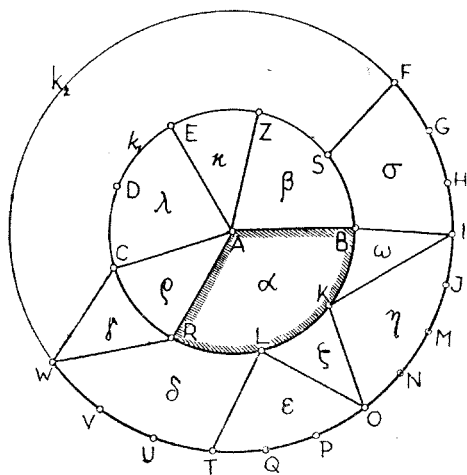
Položaj $A_{(1)}^{(\alpha)} \equiv \alpha, \beta, \gamma, \delta$ susjedan je položaju $B_{(1)}^{(\alpha)} \equiv \alpha, \omega, \sigma, \beta$ i slijedi iza njega. Razabiramo sada, da zato možemo u sl. 3. i sl. 4. identificirati poligone α i α' i isto tako β i β' . Izvedemo li analognu identifikaciju i za ostale parove susjednih čvorišta prvog reda $B_{(1)}, K_{(1)}; K_{(1)}, L_{(1)}; L_{(1)}, R_{(1)}; R_{(1)}, A_{(1)}$, realizirali smo na taj način jedan poligon prvog reda $\alpha_{(1)}$. (sl. 5.).

Na sličan će način i poligon prvog reda $\beta_{(1)} \equiv (A_{(1)}^{(\beta)}, B_{(1)}^{(\beta)}, S_{(1)}^{(\beta)}, Z_{(1)}^{(\beta)})$ biti geometrijski realiziran u sl. 6.

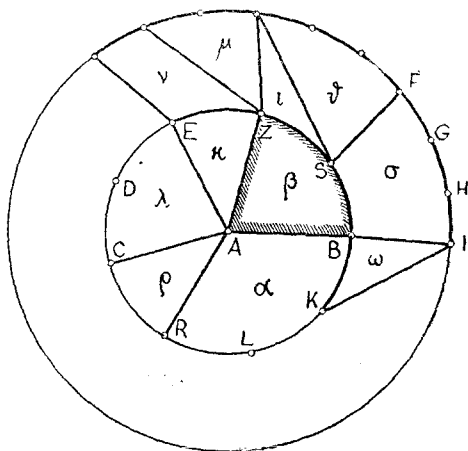
Sada ćemo na ravninu, u kojoj se nalazi poligon prvog reda $\alpha_{(1)}$ (sl. 5.), primijeniti transformaciju T_{Aa}^{-1} . Time će i opet čvorište $A_{(1)}$ prijeći natrag u krug k_1 , a za jedan dio ravnine izvan



kruga k_1 odredit ćemo transformaciju $T_{A\alpha}$ tako, da kod inverzne transformacije $T_{A\alpha}^{-1}$ čvorišta $F, G, H, I, \dots, U, V, W$ poligona prvog reda $a_{(1)}$, koja ne pripadaju čvorištu prvog reda $A_{(1)}$, padnu na periferiju kruga k_2 , koji je s k_1 koncentričan, ali većeg polumjera.



Tako poligon prvog reda $\alpha_{(1)}$ iz oblika u sl. 5. prelazi u oblik u sl. 7., a slično će i poligon prvog reda $\beta_{(1)}$ iz oblika u sl. 6. transformacijom $T_{A\beta}^{-1}$ prijeći u oblik u sl. 8. Čine li sada položaji obzirom na A onih poligona prvog reda, čije su jezgre jednake poligonima $\alpha, \beta, \kappa, \lambda, \dots, \varrho$ incidentnima s A , složeni ciklus $(\alpha_{(1)}^{(A)}, \beta_{(1)}^{(A)}, \kappa_{(1)}^{(A)}, \lambda_{(1)}^{(A)}, \dots, \varrho_{(1)}^{(A)})$ mora prema relacijama (13) iz definicije 8. bilo koji par $\alpha_{(1)}, \beta_{(1)}$ poligona prvog reda, čiji položaji zatvaraju taj ciklus, imati zajednički par čvorišta prvog reda $A_{(1)}$ i $B_{(1)}$, samo što ta čvorišta prvog reda imaju u svakom od poligona prvog reda $\alpha_{(1)}$ i $\beta_{(1)}$ drugi položaj. Tako je na pr. za poligone prvog reda $\alpha_{(1)}$ i $\beta_{(1)}$ u sl. 7. i sl. 8.



Sl. 8.

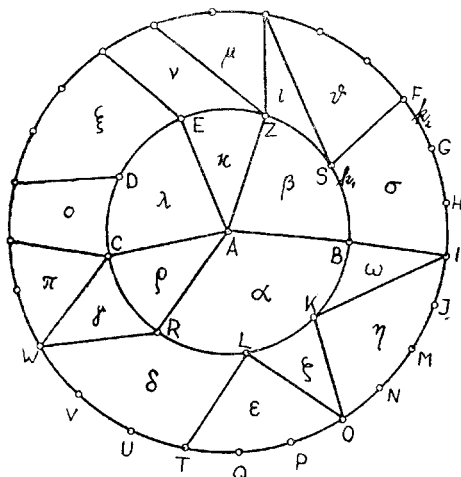
$$\alpha_{(1)}^{(A)} \equiv A_{(1)}^{(\alpha)}, R_{(1)}^{(\alpha)}, L_{(1)}^{(\alpha)}, K_{(1)}^{(\alpha)}, B_{(1)}^{(\alpha)}$$

$$\beta_{(1)}^{(A)} \equiv A_{(1)}^{(\beta)}, B_{(1)}^{(\beta)}, S_{(1)}^{(\beta)}, Z_{(1)}^{(\beta)},$$

pa kako je

$$A_{(1)}^{(\beta)} = A_{(1)}^{(\alpha)+1}, \quad B_{(1)}^{(\beta)} = B_{(1)}^{(\alpha)-1},$$

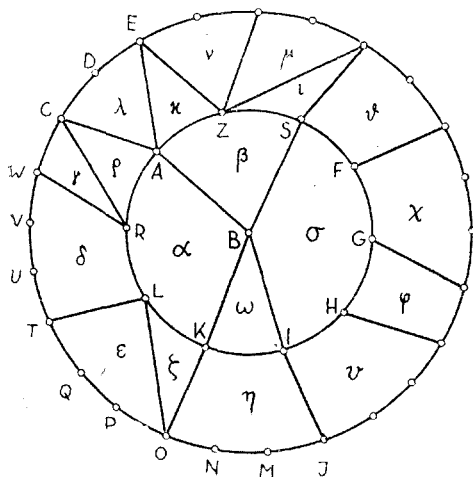
vrijede ovdje relacije (13). Razabiramo sada, da u poligonima prvog reda $\alpha_{(1)}$ (sl. 7.) i $\beta_{(1)}$ (sl. 8.) možemo doista identificirati čvorišta prvog reda $A_{(1)}$ i $B_{(1)}$. Izvedemo li sličnu identifikaciju i za ostale parove $\beta_{(1)}$, $\kappa_{(1)}$; $\kappa_{(1)}$, $\lambda_{(1)}$; $\lambda_{(1)}$, $\varrho_{(1)}$ i $\varrho_{(1)}$, $\alpha_{(1)}$ poligona prvog reda, čije su jezgre jednake susjednim poligonima u čvorištu prvog reda $A_{(1)}$, bit će na taj način geometrijski realizirano jedno čvorište drugog reda $A_{(2)}$, (sl. 9.), dok je u sl. 10. na sličan način realizirano jedno čvorište drugog reda $B_{(2)}$. U ravni poligona drugog reda $A_{(2)}$ (sl. 9.)



Sl. 9.

izvest ćemo i opet transformaciju $T_{A\alpha}$, gdje će sada čvorišta, koja pripadaju čvorištu drugog reda $A_{(2)}$, ali ne pripadaju poligonu prvog reda $\alpha_{(1)}$, pasti na periferiju kruga k_2' , koji je s k_0' i k_1' koncentričan, ali većeg polumjera (sl. 11.). Primijenimo li na čvorište drugog reda $B_{(2)}$ transformaciju $T_{B\alpha}$, prijeći će ono u oblik na sl. 12. Ako je sada $(A_{(2)}^{(a)}, R_{(2)}^{(a)}, \dots, L_{(2)}^{(a)})$,

$K_{(2)}^{(\alpha)} B_{(2)}^{(\alpha)}$) jedan složeni ciklus trećeg stepena, moraju po dva čvorišta drugog reda — na pr. $B_{(2)}$ i $A_{(2)}$ — čija su početna središta susjedna čvorišta B i A poligona α prema relacijama (13) — imati jednaka dva poligona prvog reda $\alpha_{(1)}$ i $\beta_{(1)}$, samo što svaki od njih ima u tim čvorištima drugog reda drugačiji položaj. I doista je u danom primjeru (sl. 11. i sl. 12.)



Sl. 10.

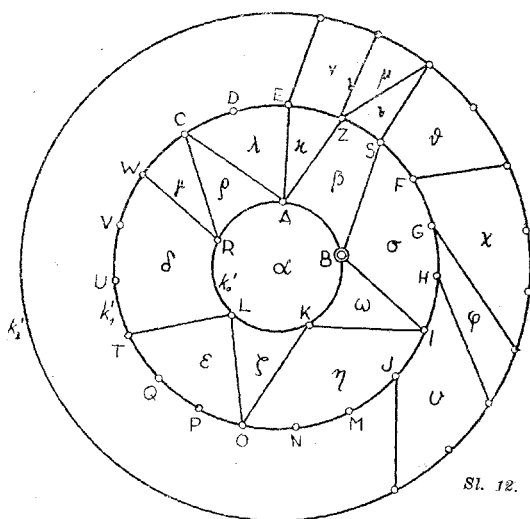
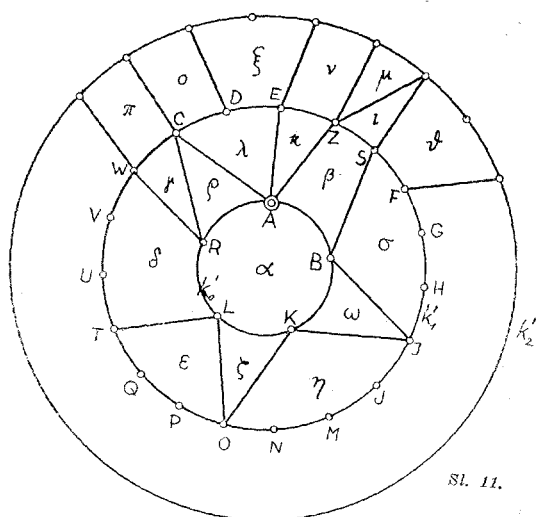
$$B_{(2)}^{(\alpha)} \equiv \alpha_{(1)}^{(B)}, \omega_{(1)}^{(B)}, \sigma_{(1)}^{(B)}, \beta_{(1)}^{(B)},$$

$$A_{(2)}^{(\alpha)} \equiv \alpha_{(1)}^{(A)}, \beta_{(1)}^{(A)}, \kappa_{(1)}^{(A)}, \lambda_{(1)}^{(A)}, \varrho_{(1)}^{(A)},$$

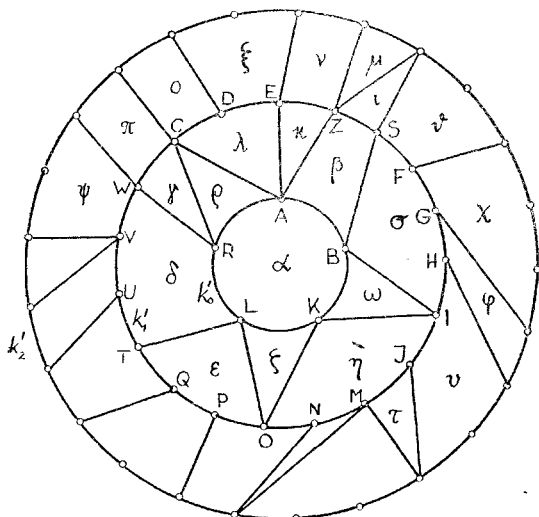
a kako je

$$\alpha_{(1)}^{(A)} = \alpha_{(1)}^{(B)+1}, \quad \beta_{(1)}^{(A)} = \beta_{(1)}^{(B)-1},$$

vrijede ovdje relacije (13), pa je prema tome $A_{(2)}^{(\alpha)}$ položaj susjedan položaju $B_{(2)}^{(\alpha)}$ i slijedi iza njega. Identificiramo li sada u čvorištima drugog reda $B_{(2)}$ (sl. 12.) i $A_{(2)}$ (sl. 11.) poligone prvog



reda $\alpha_{(1)}$ i $\beta_{(1)}$, pa analognu identifikaciju izvedemo i za ostale parove $A_{(2)}, R_{(2)}; R_{(2)}, L_{(2)}; L_{(2)}, K_{(2)}$ i $K_{(2)}, B_{(2)}$ čvorišta drugog reda, čija su početna središta susjedna čvorišta poligona α , bit će tako realiziran jedan poligon drugog reda $\alpha_{(2)}$ (sl. 13.).



Sl. 13.

Ovako započetu postepenu izgradnju mreže ravnine možemo nastaviti analogno i dalje. Pa ako je tako $(A_{(i)}^{(\alpha)}, R_{(i)}^{(\alpha)}, \dots, L_{(i)}^{(\alpha)}, K_{(i)}^{(\alpha)}, B_{(i)}^{(\alpha)})$ složeni ciklus položaja nekih čvorišta i -tog reda, možemo razabrati, da stanovitim identifikacijama poligona $(i-1)$ -vog reda, određenim prema relacijama (13), možemo u krugu k_i realizirati jedan poligon i -tog reda $\alpha_{(i)}$, a ako je $(\alpha_{(i)}^{(A)}, \beta_{(i)}^{(A)}, \gamma_{(i)}^{(A)}, \lambda_{(i)}^{(A)}, \dots, \rho_{(i)}^{(A)})$ složeni ciklus položaja nekih poligona i -tog reda, možemo razabrati, da stanovitim identifikacijama čvorišta i -tog reda, određenim prema relacijama (13), možemo u krugu k_{i+1} realizirati jedno čvorište $(i+1)$ -vog reda $A_{(i+1)}$.

Izgrađujući na taj način postepeno mrežu ravnine iz danih čvorišta prvog reda skupa S identificiranjem pojedinih eleme-

nata mreže na osnovi relacija (13) bit će čvorišta i poligoni višeg reda realizirani u krugovima k_i i k'_i , t. j. realizirani kao jednostavno suvisla područja ravnine. Kod bilo koje dane »gotove« mreže ravnine poligoni i čvorišta višeg reda općenito ne moraju činiti jednostavno suvisla područja. Nije teško razabrati, da će u tom slučaju osim prema relacijama (13) biti identificirani još neki drugi elementi mreže ravnine.

Pokušamo li na sličan način izgrađivati mrežu bilo koje druge plohe, koja nije homeomorfna ravnini, ne mogu nakon nekog konačnog broja koraka čvorišta i poligoni višeg reda biti više jednostavno suvisla područja, i mogućnost stvaranja čvorišta i poligona višeg reda, kao složenih ciklusa prema definiciji 9., ne će biti uvijek dovoljna i za njihovu realizaciju na danoj plohi.

Kod izgradnje mreže ravnine mogu sada nastati tri slučaja:

1. Nakon konačnog broja koraka na taj način mreža može biti potpuno izgrađena. To će na pr. sigurno biti u onom slučaju, kada izgradimo mrežu do čvorišta i -tog reda ili do poligona i -tog reda, pa se na kružnici k_i , odnosno k'_i , nalazi jedno jedino čvorište. U tom se slučaju dakako ta kružnica reducira na to jedino čvorište i mreža se tako zatvara, pa je tim čvorištem i -tog reda, odnosno poligonom i -tog reda, obuhvaćena cijela mreža. Na pr. kod mreže, koja je izomorfna mreži tetraedra, na kružnici k_1 nalazi se jedno jedino čvorište, i tako je jednim poligonom prvog reda cijela mreža obuhvaćena. Kod mreže heksaedra dolazimo do jedne jedine točke na kružnici k_2 , pa je tako mreža heksaedra obuhvaćena čvorištem drugog reda.

No i u slučajevima, kada se na kojoj od kružnica k_i ili k'_i nalaze dva čvorišta, mreža se zatvara, jer oba luka, što ih na toj kružnici određuju ta čvorišta, moramo radi aksioma 6.^a iz definicije 10. identificirati i smatrati jednom jedinom stranicom. Evo primjera. Uzmimo čvorišta prvog reda

$$A_{(1)} \equiv (\alpha, \beta, \gamma) \equiv (3, 3, 3)$$

$$B_{(1)} \equiv (\alpha, \gamma, \delta, \epsilon) \equiv (3, 3, 3, 3)$$

$$C_{(1)} \equiv (\alpha, \epsilon, \zeta, \beta) \equiv (3, 3, 3, 3);$$

tada postoji poligon prvog reda

$$a_{(1)} \equiv (A_{(1)}^{(\alpha)}, B_{(1)}^{(\alpha)}, C_{(1)}^{(\alpha)}),$$

na čijoj se kružnici k_1 nalaze dva čvorišta D i E . Identificiramo li oba luka $\widehat{DE}$ kao jednu stranicu, dobivamo za čvorišta D i E ova čvorišta prvog reda

$$D_{(1)} \equiv (\beta, \zeta, \delta, \gamma) \equiv (3, 3, 3, 3),$$

$$E_{(1)} \equiv (\delta, \zeta, \epsilon) \equiv (3, 3, 3),$$

pa imamo tako mrežu trostrane dvostruke piramide, t. j. poliedra recipročnog trostranog prizmi.

U slučaju, kad se mreža, na taj način izgrađena, nakon konačnog broja koraka zatvara, imat će ona konačan broj elemenata. To je tada mreža nekog Eulerovog poliedra, t. j. poliedra homeomorfnog kugli. Realiziramo li takvu mrežu u ravnini, mora ta ravnina biti sferna (promatramo za sada samo mreže, koje se daju orijentirati). No i u ovom slučaju moguće je i dalje aritmetički sastavljati čvorišta i poligone po volji visokog reda, jer bez obzira na to, što je cijela mreža obuhvaćena čvorištem, odnosno poligonom, nekog određenog reda i_0 , postoje sada aritmetički čvorišta i poligoni i po volji visokog reda $i > i_0$, jer stavak XI.^a vrijedi bez obzira, da li je neka dana orijentirana mreža konačna ili nije. Samo ti poligoni i čvorišta reda višeg od i_0 ne će određivati ništa više nego tu konačnu mrežu samu.

2. Ako je moguće nastaviti na opisani način proces izgradnje mreže tako, da red i čvorišta prima po volji velike vrijednosti, a da se mreža ipak nigdje ne zatvara, pa ako mrežu realiziramo u ravnini i uzmemo, da veličine polumjera krugova k_p , odnosno k'_p , monotono i neograničeno rastu, što će sigurno biti, ako su na pr. diferencije veličina polumjera dvaju susjednih krugova stalne, to će u graničnom slučaju na taj način biti izgrađena cijela mreža ravnine, ali u ovom slučaju dakako parabolične ili hiperbolične ravnine. Primjere za taj slučaj lako je zamisliti, a iznijet ćemo ih i u slijedećem paragrafu.

3. Ako nakon konačnog broja koraka u procesu izgradnje mreže nije moguće ni na koji način složiti položaje čvorišta i -tog reda ili poligona i -tog reda u složene cikluse, t. j. u poligone i -tog reda, odnosno čvorišta $(i + 1)$ -vog reda, tada daljnja izgradnja mreže nije moguća, i u tom slučaju ne postoji mreža, čija bi sva čvorišta bila jednaka danim čvorištima iz skupa S .

Primijenimo li općenita razmatranja ovog paragrafa na konkretni slučaj homogenih mreža ravnine, možemo o mogućnosti njihove egzistencije izreći:

Kriterij egzistencije R -mreža ravnine.

Homogena mreža ravnine R $[a, \beta, \gamma, \dots, q]$ sigurno je moguća, ako za skup S , koji sadrži čvorišta prvog reda

$$A_{(i)} \equiv (a, \beta, \gamma, \dots, \pi, q) \text{ i } B_{(i)} \equiv (q, \pi, \dots, \gamma, \beta, a)$$

(u broju egzemplara po volji), postoji za svaki prirodni broj i bar jedno čvorište i -tog reda. Ako takvo čvorište i -tog reda za bilo koji broj i ne postoji, mreža nije moguća.

Na koji način možemo u danim konkretnim slučajevima primijeniti taj kriterij, vidjet će se u slijedećim paragrafima. Ovdje ćemo sada još iznijeti neke napomene. Ako je dan skup S čvorišta prvog reda, to je kod opisane postepene izgradnje mreže ravnine realizacija čvorišta i poligona višeg reda općenito moguća uz uvjet da je moguća tvorba određenih složenih ciklusa prema definiciji 9., ali uz neke izuzetke kod kojih pored relacija (13) treba da bude ispunjen još neki uvjet. Za problem homogenih mreža ti izuzetni slučajevi nisu od važnosti i bit će izneseni na drugom mjestu.

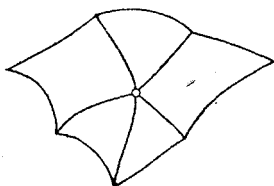
U izlaganjima ovog paragrafa nismo se služili dedukcijom, nego smo stvarali zaključke na osnovi geometrijskog zora. Kriterij egzistencije homogenih mreža, do kojega smo tako došli, ima karakter definicije a ne stavka, a gornja razmatranja ne čine dokaz tog kriterija nego njegovo objašnjenje.

9. EGZISTENCIJA HOMOGENIH MREŽA RAVNINE

Prije nego što prijedemo na ispitivanje egzistencije homogenih mreža ravnine, bit će potrebno da prilagodimo simboliku iz prošlih paragrafa za ove specijalne slučajeve. Ispitat ćemo ovdje mogućnost egzistencije mreže R $[a, \beta, \gamma, \dots, q]$ na osnovi kriterija iz prošlog paragrafa. Za Q -mreže vrijedit će uvijek analogni zaključci, pa ih radi toga ne ćemo više ni spominjati.

Sada ne ćemo više pojedine elemente mreže individualno označivati, nego ćemo sve jednake poligone i sva jednaka čvorišta označiti jednakim simbolom, a isto to neka vrijedi i za poligone i čvorišta višeg reda. Tako ćemo u posebnim slučajevima redovno mjesto $a, \beta, \gamma, \dots, q$ pisati samo brojeve $n(a)$, $n(\beta)$, $n(\gamma)$, $\dots$, $n(q)$.

No radi lakšeg razumijevanja mi ćemo prije općenitog slučaja promotriti posebni slučaj homogene mreže R $[3, 3, 4, 3, 4]$, koja se daje geometrijski realizirati kao pravilna homogena mreža parabolične ravnine. Radi simetrije ciklusa postoji ovdje samo jedno čvorište prvog reda $C_1 \equiv (3, 3, 4, 3, 4)$, koje je realizirano u slici 14.



Sl. 14.

Općenito, ako $C \equiv [\alpha, \beta, \gamma, \dots, \varrho]$ nije simetričan ciklus, razlikovat ćemo dva čvorišta prvog reda, koja ćemo ovako označiti:

$$C_1 \equiv (\alpha, \beta, \gamma, \dots, \varrho), \quad C_2 \equiv (\varrho, \dots, \gamma, \beta, \alpha).$$

Numerirat ćemo na bilo koji način članove ovih ciklusa, pa će svi položaji čvorišta prvog reda u danom posebnom slučaju biti ovi:

$$C_1^1 \equiv 3, 3, 4, 3, 4$$

$$C_1^2 \equiv 3, 4, 3, 4, 3$$

$$C_1^3 \equiv 4, 3, 4, 3, 3$$

$$C_1^4 \equiv 3, 4, 3, 3, 4$$

$$C_1^5 \equiv 4, 3, 3, 4, 3$$

ili općenito

$$C_1^1 \equiv \alpha, \beta, \gamma, \dots, \varrho$$

$$C_2^1 \equiv \varrho, \dots, \gamma, \beta, \alpha$$

$$C_1^2 \equiv \beta, \gamma, \dots, \varrho, \alpha$$

$$C_2^2 \equiv \dots, \gamma, \beta, \alpha, \varrho$$

$$C_1^3 \equiv \gamma, \dots, \varrho, \alpha, \beta$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$C_2^{H(c)-1} \equiv \beta, \alpha, \varrho, \dots, \gamma$$

$$C_1^{H(c)} \equiv \varrho, \alpha, \beta, \gamma, \dots$$

$$C_2^{H(c)} \equiv \alpha, \varrho, \dots, \gamma, \beta.$$

Ako je C simetričan ciklus, ne dolaze položaji čvorišta C_2 u obzir.

Promotrit ćemo sada, mogu li se ti položaji poredati u složene cikluse prvog stepena — poligone prvog reda. Pri tom ćemo kod određivanja susjednih položaja postupati uvijek tako, da napišemo jednu preglednu četverorednu tablicu, koja će biti ovako sastavljena: Napisat ćemo

u 1. redak sve položaje, kojima tražimo slijedeće susjedne položaje;

u 2. redak ispod svakog položaja njegov prvi i posljednji član;

u 3. redak ispod svakog takvog para članova prvi i drugi član sljedećeg susjednog položaja prema definiciji 8.;

u 4. redak ispod svakog para od prvih dvaju članova sve one položaje, koji tim parom počinju.

Na taj će način svakom položaju iz prvog retka biti susjedni svi oni položaji, koji se nalaze ispod njega, t. j. u četvrtom retku, ali u istom stupcu te tablice. U našem posebnom slučaju dobit ćemo tako ovu tablicu susjednih položaja:

$C_1^1; C_1^4$	C_1^2	$C_1^3; C_1^5$
3, ..., 4	3, ..., 3	4, ..., 3
3, 4, ...	3, 3, ...	4, 3, ...
$C_1^2; C_1^4$	C_1^1	$C_1^3; C_1^5$

Za svaki poligon a valja ove susjedne položaje složiti u sve moguće $n(a)$ -člane cikluse, poligone prvog reda. Kod sastavljanja susjednih položaja u cikluse, često ćemo se poslužiti radi lakšeg pregleda jednom shemom, u kojoj ćemo napisati u prvi redak bilo koji položaj, u drugi sve njemu susjedne položaje, i tako dalje ispod svakog položaja u sljedeći redak sve njemu susjedne položaje. Tako dobivamo iz gornje tablice dvije sheme susjednih položaja i to prva za poligone prvog reda, kojima je jezgra trokut, a druga kojima je jezgra četverokut:

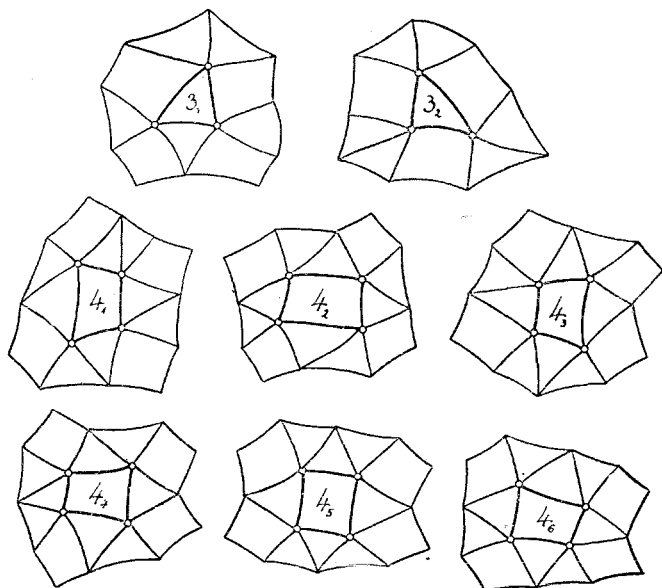
C_1^1					C_1^3							
C_1^2		C_1^4			C_1^3				C_1^5			
C_1^1		C_1^2		C_1^4	C_1^3		C_1^5		C_1^3		C_1^5	
C_1^2	C_1^4	C_1^1	C_1^2	C_1^4	C_1^3	C_1^5	C_1^3	C_1^5	C_1^3	C_1^5	C_1^3	C_1^5
C_1^1	C_1^2	C_1^4	C_1^2	C_1^4	C_1^1	C_1^2	C_1^4					
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Iz takvih shema možemo sada na posve jednostavan način (koji očitito nije potrebno potanje objašnjavati) pročitati sve moguće složene cikluse, ne ispuštajući ni jednoga. Tako dobivamo u našem posebnom slučaju ove moguće međusobno različite poligone prvog reda:

$$\begin{aligned}
 3_1 &= (C_1^1, C_1^4, C_1^2), & 4_3 &= (C_1^3, C_1^3, C_1^3, C_1^5), \\
 3_2 &= (C_1^4, C_1^4, C_1^4), & 4_4 &= (C_1^3, C_1^3, C_1^5, C_1^5), \\
 4_1 &= (C_1^3, C_1^3, C_1^3, C_1^3), & 4_5 &= (C_1^3, C_1^5, C_1^3, C_1^5), \\
 4_2 &= (C_1^5, C_1^5, C_1^5, C_1^5), & 4_6 &= (C_1^3, C_1^5, C_1^5, C_1^3).
 \end{aligned}$$

Geometrijski realizirani dani su ti poligoni prvog reda u slici 15.

Kod promatranja općenitih mreža u 7. i 8. paragrafu bilo je dovoljno, da red nekog čvorišta ili poligona višeg reda označimo donjim indeksom, jer smo mogli pojedina čvorišta istog reda ili pojedine poligone istog reda međusobno razlikovati, budući da su poligoni i čvorišta bili individualno označivani.



Sl. 15.

Ovdje — kod homogenih mreža ravnine — označili smo međusobno različita čvorišta prvog reda i međusobno različite poligone prvog reda različitim indeksima, ali sada bez zagrade. Da je neko čvorište ili neki poligon n -tog reda, naznačit ćemo jednim n -članim slijedom donjih indeksa, što ćemo kasnije još potanje objasniti. Ovdje naime ne će više naznačivati red poligona odnosno čvorišta donji indeks sam, nego broj donjih indeksa.

Od svih mogućih poligona prvog reda u našem posebnom slučaju može mreža R [3, 3, 4, 3, 4] sadržavati samo poligone 3_1 , 4_1 i 4_2 . Svaki naime od poligona 4_3 , 4_4 , 4_5 i 4_6 ima barem jedan položaj, u kojem su prvi i zadnji član $C_1^5, \dots, C_1^3$. Tome položaju slijedeći susjedni morao bi započimati parom $C_1^1, C_1^2, \dots$, a kako taj par susjednih članova među svim mogućim poligonima prvog reda nigdje ne dolazi, to radi stavka XIII.^a ni jedan od spomenutih poligona prvog reda ne može biti sadržan u mreži R [3, 3, 4, 3, 4]. No ta mreža ne može sadržavati ni poligon prvog reda 3_2 , jer njegovom položaju

$$3_2^1 \equiv C_1^4, C_1^4, C_1^4$$

pripadao bi kao slijedeći susjedni položaj onaj, koji počinje s $C_1^5, C_1^3, \dots$, a taj par susjednih članova sadrže baš samo oni poligoni prvog reda, koje smo već gore morali isključiti.

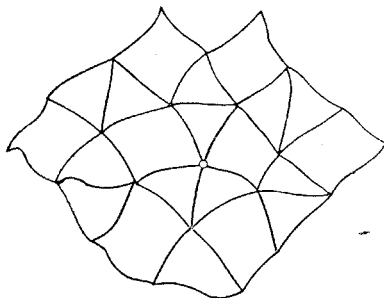
Preostali poligoni prvog reda daju ovu tablicu susjednih položaja:

3_1^1	3_1^2	3_1^3	4_1^1	4_2^1
$C_1^1, \dots, C_1^2$	$C_1^4, \dots, C_1^1$	$C_1^2, \dots, C_1^1$	$C_1^3, \dots, C_1^3$	$C_1^5, \dots, C_1^5$
$C_1^2, C_1^1, \dots$	$C_1^5, C_1^5, \dots$	$C_1^3, C_1^3, \dots$	$C_1^4, C_1^2, \dots$	$C_1^1, C_1^4, \dots$
3_1^3	4_2^1	4_1^1	3_1^2	3_1^1

Ovi položaji zatvaraju jedan jedini ciklus, pa tako imamo jedno čvorište drugog reda, koje ćemo označiti s dva donja indeksa.

$$C_{11} \equiv (3_1^1, 3_1^3, 4_1^1, 3_1^2, 4_2^1).$$

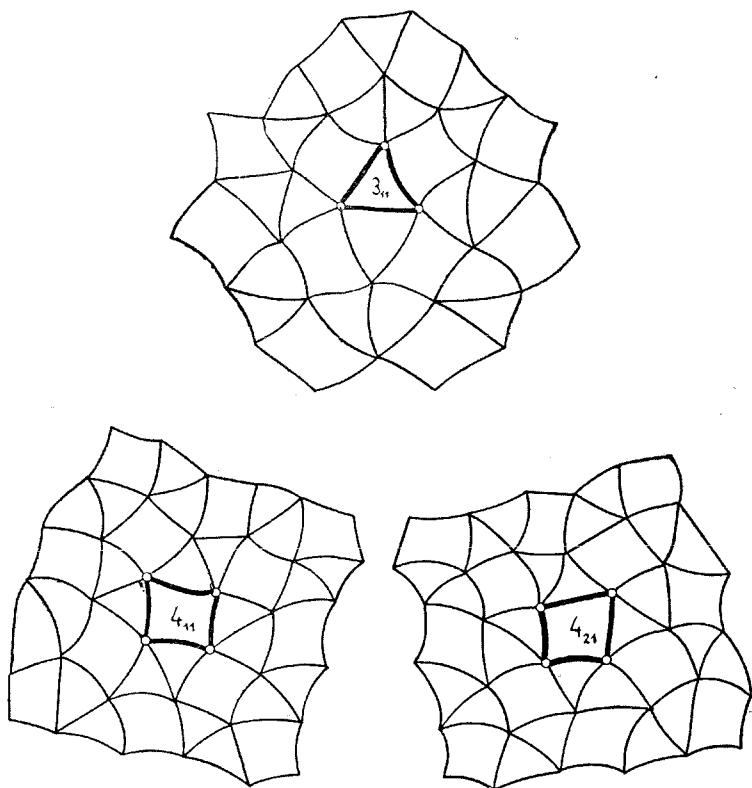
To čvorište drugog reda je geometrijski realizirano u sl. 16.



Sl. 16.

Da nađemo sve moguće poligone drugog reda, sastavit ćemo i opet tablicu susjednih položaja za čvorište drugog reda C_{11} :

C_{11}^1	C_{11}^2	C_{11}^3	C_{11}^4	C_{11}^5	(40)
$3_1^1, \dots, 4_2^1$	$3_1^3, \dots, 3_1^1$	$4_1^1, \dots, 3_1^3$	$3_1^2, \dots, 4_1^1$	$4_2^1, \dots, 3_1^2$	
$3_1^2, 4_2^1, \dots$	$3_1^1, 3_1^3, \dots$	$4_1^1, 3_1^2, \dots$	$3_1^3, 4_1^1, \dots$	$4_2^1, 3_1^1, \dots$	
C_{11}^4	C_{11}^1	C_{11}^3	C_{11}^2	C_{11}^5	



Sl. 17.

Odatle odmah razabiramo, da su moguća samo tri poligona drugog reda, koje ćemo ovako označiti:

$$3_{11} \equiv (C_{11}^1, C_{11}^4, C_{11}^2),$$

$$4_{11} \equiv (C_{11}^3, C_{11}^3, C_{11}^3, C_{11}^3),$$

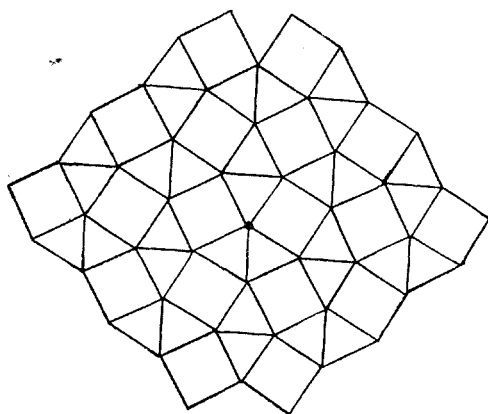
$$4_{21} \equiv (C_{11}^5, C_{11}^5, C_{11}^5, C_{11}^5).$$

Ti su poligoni drugog reda predloženi u sl. 17. Tablica susjednih položaja ovih poligona drugog reda bit će ova:

3_{11}^1	3_{11}^2	3_{11}^3	4_{11}^1	4_{21}^1
$C_{11}^1, \dots, C_{11}^2$	$C_{11}^4, \dots, C_{11}^1$	$C_{11}^2, \dots, C_{11}^4$	$C_{11}^3, \dots, C_{11}^3$	$C_{11}^5, \dots, C_{11}^5$
$C_{11}^2, C_{11}^1, \dots$	$C_{11}^5, C_{11}^5, \dots$	$C_{11}^3, C_{11}^3, \dots$	$C_{11}^4, C_{11}^2, \dots$	$C_{11}^1, C_{11}^4, \dots$
3_{11}^3	4_{21}^1	4_{11}^1	3_{11}^2	3_{11}^1

Odatle i opet čitamo jedino moguće čvorište trećeg reda (vidi sl. 18.), koje ćemo označiti ovako:

$$C_{111} \equiv (3_{11}^1, 3_{11}^3, 4_{11}^1, 3_{11}^2, 4_{21}^1).$$



Sl. 18.

Tako bismo mogli nastaviti i dalje i pokazati, da je za mrežu $R[3, 3, 4, 3, 4]$ moguće čvorište četvrtog reda, zatim čvorište petog reda i t. d. Svako daljnje od tih čvorišta višeg reda određuje jedan širi elementarni poliedarski kompleks, dakle veći dio te mreže, ali tim ipak nije još dokazana egzistencija homogene mreže ravnine $R[3, 3, 4, 3, 4]$ u njezinoj cijelosti. No prije nego li tu egzistenciju potpuno dokažemo, vratit ćemo se još na općeniti slučaj mreže

$$R[\alpha, \beta, \gamma, \dots, \varrho].$$

Složeni ciklusi položaja čvorišta prvog reda C_1 i C_2 dat će nam sve moguće poligone prvog reda, koje ćemo označiti s

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{m_1}, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{m_2}, \dots, \dots, \varrho_1, \varrho_2, \dots, \varrho_{m_r},$$

gdje je na pr.

$$\alpha_1 \equiv (C_{p_1}^{i_1}, C_{p_2}^{i_2}, C_{p_3}^{i_3}, \dots, C_{p_{n(\alpha)}}^{i_{n(\alpha)}}),$$

$$\alpha_2 \equiv (C_{q_1}^{j_1}, C_{q_2}^{j_2}, C_{q_3}^{j_3}, \dots, C_{q_{n(\alpha)}}^{j_{n(\alpha)}}),$$

$$--- \quad \quad \quad ---$$

$$\beta_1 \equiv (C_{r_1}^{k_1}, C_{r_2}^{k_2}, C_{r_3}^{k_3}, \dots, C_{r_{n(\beta)}}^{k_{n(\beta)}}),$$

$$--- \quad \quad \quad ---$$

$$\varrho_{m_r} \equiv (C_{s_1}^{l_1}, C_{s_2}^{l_2}, C_{s_3}^{l_3}, \dots, C_{s_{n(\varrho)}}^{l_{n(\varrho)}}).$$

Ovdje su gornji indeksi $i, j, \dots, k, \dots, l \leq H(C)$, a donji indeksi $p, q, \dots, r, \dots, s = 1, 2$.

Položaji ovih poligona sastavljeni u složene cikluse daju nam sva moguća čvorišta drugog reda, kojih može za istu R -mrežu biti i više međusobno različitih, kako ćemo se kasnije i uvjeriti. Ta će čvorišta — označena s dva donja indeksa — redom biti ova:

$$C_{11}, C_{12}, C_{13}, \dots, C_{1m_1}, C_{21}, C_{22}, C_{23}, \dots, C_{2m_2}.$$

Ovdje smo čvorištu drugog reda kao prvi indeks stavili broj 1 ili 2 prema tome, da li mu je završno središte čvorište prvog reda C_1 ili C_2 , t. j. sva čvorišta drugog reda, kod kojih članovi počinju kojim položajem čvorišta prvog reda C_1 , imaju prvi indeks 1, a čvorišta drugog reda, kod kojih članovi počinju kojim položajem čvorišta prvog reda C_2 , imaju prvi indeks 2.

Homogena mreža ravnine $R[C]$ moguća je onda i samo onda, ako za svako n postoji barem jedno čvorište n -tog reda $C_{i_1 i_2 \dots i_n}$, koje pripada ciklusu C .

Konačno ćemo sada dokazati egzistenciju mreže $R[3, 3, 4, 3, 4]$. Uzmimo, da postoji čvorište n -tog reda

$$C_{i_1 \dots i_n} \equiv (\underbrace{3_{i_1 \dots i_n}^1}_{n-1}, 3_{i_1 \dots i_n}^3, 4_{i_1 \dots i_n}^1, 3_{i_1 \dots i_n}^2, 4_{2i_1 \dots i_n}^1),$$

gdje je

$$\Pi(3_{i_1 \dots i_n}) = 3, \quad \Pi(4_{i_1 \dots i_n}) = 1, \quad \Pi(4_{2i_1 \dots i_n}) = 1,$$

pa ćemo pokazati, da onda mora postojati i slično čvorište $(n+1)$ -vog reda $C_{i_1 \dots i_{n+1}}$, a za broj članova u periodu poligona n -tog reda, čiji su položaji njegovi članovi, da vrijede iste relacije.

Napisat ćemo naprije tablicu susjednih položaja za čvorište n -tog reda $C_{i_1 \dots i_n}$.

$C_{i_1 \dots i_n}^1$	$C_{i_1 \dots i_n}^2$	$C_{i_1 \dots i_n}^3$
$3_{i_1 \dots i_n}^1, \dots, 4_{2i_1 \dots i_n}^1$	$3_{i_1 \dots i_n}^3, \dots, 3_{i_1 \dots i_n}^1$	$4_{i_1 \dots i_n}^1, \dots, 3_{i_1 \dots i_n}^3$
$3_{i_1 \dots i_n}^2, 4_{2i_1 \dots i_n}^1, \dots$	$3_{i_1 \dots i_n}^1, 3_{i_1 \dots i_n}^3, \dots$	$4_{i_1 \dots i_n}^1, 3_{i_1 \dots i_n}^2, \dots$
$C_{i_1 \dots i_n}^4$	$C_{i_1 \dots i_n}^1$	$C_{i_1 \dots i_n}^3$
$3_{i_1 \dots i_n}^2, \dots, 4_{i_1 \dots i_n}^1$	$4_{2i_1 \dots i_n}^1, \dots, 3_{i_1 \dots i_n}^2$	
$3_{i_1 \dots i_n}^3, 4_{i_1 \dots i_n}^1, \dots$	$4_{2i_1 \dots i_n}^1, 3_{i_1 \dots i_n}^1, \dots$	
$C_{i_1 \dots i_n}^2$	$C_{i_1 \dots i_n}^5$	

Odatle slijede odmah ova tri poligona n -tog reda

$$3_{i_1 \dots i_n} \equiv (C_{i_1 \dots i_n}^1, C_{i_1 \dots i_n}^4, C_{i_1 \dots i_n}^2),$$

$$4_{i_1 \dots i_n} \equiv (C_{i_1 \dots i_n}^3, C_{i_1 \dots i_n}^3, C_{i_1 \dots i_n}^3, C_{i_1 \dots i_n}^3),$$

$$4_{2i_1 \dots i_n} \equiv (C_{i_1 \dots i_n}^5, C_{i_1 \dots i_n}^5, C_{i_1 \dots i_n}^5, C_{i_1 \dots i_n}^5),$$

pa vidimo, da doista vrijede relacije

$$\Pi(3_{i_1 \dots i_n}) = 3; \quad \Pi(4_{i_1 \dots i_n}) = 1; \quad \Pi(4_{2i_1 \dots i_n}) = 1.$$

Tablica susjednih položaja za te poligone n -tog reda bila bi ova:

$3_{11 \dots 11}^1$	$3_{11 \dots 11}^2$	$3_{11 \dots 11}^3$
$C_{11 \dots 11}^1, \dots, C_{11 \dots 11}^2$	$C_{11 \dots 11}^4, \dots, C_{11 \dots 11}^1$	$C_{11 \dots 11}^2, \dots, C_{11 \dots 11}^4$
$C_{11 \dots 11}^2, \dots, C_{11 \dots 11}^1$	$C_{11 \dots 11}^5, \dots, C_{11 \dots 11}^5$	$C_{11 \dots 11}^3, \dots, C_{11 \dots 11}^6$
$3_{11 \dots 11}^2$	$4_{21 \dots 11}^1$	$4_{11 \dots 11}^1$

$4_{11 \dots 11}^1$	$4_{21 \dots 11}^1$
$C_{11 \dots 11}^3, \dots, C_{11 \dots 11}^3$	$C_{11 \dots 11}^5, \dots, C_{11 \dots 11}^5$
$C_{11 \dots 11}^4, \dots, C_{11 \dots 11}^2$	$C_{11 \dots 11}^1, \dots, C_{11 \dots 11}^4$
$3_{11 \dots 11}^2$	$3_{11 \dots 11}^1$

Odatle vidimo, da postoji jedno čvorište $(n+1)$ -vog reda.

$$\underline{C_{11 \dots 11}}_{n+1} = (\underline{3_{11 \dots 11}^1}, \underline{3_{11 \dots 11}^3}, \underline{4_{11 \dots 11}^1}, \underline{3_{11 \dots 11}^2}, \underline{4_{21 \dots 11}^1}),$$

a to smo i želili dokazati. No kako je učinjena pretpostavka za $n=3$ već prije dokazana, to prema kriteriju egzistencije slijedi potpunom indukcijom, da je homogena mreža ravnine $R[3, 3, 4, 3, 4]$ moguća. Kako je osim toga u tom slučaju jednadžba (14^b) zadovoljena, to se ta mreža daje realizirati kao pravilna R -mreža parabolične ravnine. Na sličan način mogli bismo dokazati egzistenciju i mnogih drugih homogenih mreža ravnine. No dokazni će se postupak znatno pojednostavniti uvođenjem pojma »potpunog sistema čvorišta«, koji ćemo u mnogo slučajeva moći lako primijeniti i tako dokaz skratiti.

10. POTPUNI SISTEM ČVORIŠTA

Definicija 31. Neka je $S\{C, m, n\}$ skup od m međusobno različitih čvorišta ($m \geq 1$) n -tog reda ($n \geq 2$), koja sva pripadaju jednom istom ciklusu C , a Σ_{n-1} neka je skup svih poligona $(n-1)$ -vog reda, kojih su položaji članovi čvorišta n -tog reda skupa $S\{C, m, n\}$. Kazat ćemo, da skup $S\{C, m, n\}$ čini jedan »potpuni sistem čvorišta za ciklus C «, ako ima ova svojstva:

a) Svaki položaj svakog poligona $(n-1)$ -vóg reda skupa Σ_{n-1} , nalazi se točno jedamput među članovima po jednog perioda svih čvorišta n -tog reda skupa $S\{C, m, n\}$ ili — drugim riječima — skup svih međusobno različitih položaja svih poligona $(n-1)$ -vog reda iz skupa Σ_{n-1} identičan je sa skupom, koji dobijemo, ako uzmemo od svakog čvorišta n -tog reda iz skupa $S\{C, m, n\}$ sve članove, koji čine jedan period tog čvorišta n -tog reda.

b) K svakom položaju svakog čvorišta skupa $S\{C, m, n\}$ postoji točno jedan među tim istim položajima — a to može biti i taj položaj sam —, koji mu je susjedan i slijedi iza njega.

c) Ako je $m > 1$, to dva različita čvorišta n -tog reda skupa $S\{C, m, n\}$ imaju i različita završna središta.

d) Broj članova u periodu svakog čvorišta n -tog reda iz skupa $S\{C, m, n\}$ jednak je broju članova u periodu njegovog završnog središta.

e) Skup $S\{C, m, n\}$ ne sadrži u sebi uži skup, koji ima svojstva a) i b).

Da objasnimo ovu definiciju, uzmimo kao primjer i opet ciklus $C \equiv [3, 3, 4, 3, 4]$. Njemu pripada čvorište drugog reda $C_{11} \equiv (3_1^1, 3_1^2, 3_1^3, 4_1^1, 3_1^2, 4_2^1)$, koje samo za se čini potpuni sistem čvorišta $S\{C, m, n\}$ ili sada $S\{C, 1, 2\}$. Skup Σ_{n-1} čine ovdje poligoni prvog reda 3_1 , 4_1 i 4_2 . Možemo se uvjeriti, da su sve točke definicije 31. ovdje ispunjene:

a) Ciklus C_{11} nije periodičan, pa prema tome svaki potpuni njegov položaj čini jedan period; članovi toga perioda jesu dakle $3_1^1, 3_1^2, 3_1^3, 4_1^1$ i 4_2^1 , a to su doista svi međusobno različiti položaji poligonâ prvog reda iz skupa Σ_{n-1} .

b) Da je ovaj uvjet ispunjen, razabiramo iz tablice (40) u paragrafu 9.

c) Ovdje je $m = 1$.

d) Uvjet je ispunjen, jer je $\Pi(C_{11}) = \Pi(C_1) = 5$.

e) Kako $S\{C, 1, 2\}$ sadrži jedan jedini član, to on ne može sadržavati užeg skupa, koji bi imao svojstva a) i b), t. j. koji ne bi bio prazan.

Možemo pokazati da vrijedi ovaj stavak:

Stavak XIV. Postoji li za neki ciklus C potpuni sistem čvorišta $S\{C, m, n\}$, postoji za taj ciklus uvijek i potpuni sistem čvorišta $S\{C, m, n+1\}$.

Ovaj ćemo stavak dokazati. Neka nam pri tom radi jednostavnosti oznake znači $(N)_i$ bilo koji n -člani slijed indeksa, isto tako $(N-1)_i$ bilo koji $(n-1)$ -člani slijed indeksa, a $(N)_{i-1}$

sljedeć indeksa, koji dobivamo, ako od slijeda $(N)_i$ izostavimo posljednji član, dok je $(N-1)_i + 1$ sljedeć, koji dobivamo, ako $(n-1)$ -članom slijedu $(N-1)_i$ dodamo na kraju još jedan indeks.

Neka su $C_{(N)_1}, C_{(N)_2}, C_{(N)_3}, \dots, C_{(N)_m}$ članovi skupa $S\{C, m, n\}$. Osim toga neka je $\vartheta_{(N-1)_i}$ bilo koji član iz skupa Σ_{n-1} , pa neka je

$$II(\vartheta_{(N-1)_i}) = r. \quad (41)$$

Uzmimo, da su

$$C_{(N)_1}^{a_1}, C_{(N)_2}^{a_2}, C_{(N)_3}^{a_3}, \dots, C_{(N)_r}^{a_r} \quad (42)$$

redom svi oni položaji članova skupa $S\{C, m, n\}$, kojima je prvi član po jedan od r različitih položaja poligona $(n-1)$ -vog reda $\vartheta_{(N-1)_i}$, a koji prema a) sigurno postoje; neka je dakle:

$$\begin{aligned} C_{(N)_1}^{a_1} &\equiv \vartheta_{(N-1)_1}^1, \dots \\ C_{(N)_2}^{a_2} &\equiv \vartheta_{(N-1)_1}^2, \dots \\ C_{(N)_3}^{a_3} &\equiv \vartheta_{(N-1)_1}^3, \dots \\ &\dots \dots \dots \\ C_{(N)_r}^{a_r} &\equiv \vartheta_{(N-1)_1}^r, \dots \end{aligned} \quad (43)$$

Prema relacijama (13) definicije 8. i radi b) i a) svaki od položaja (42) susjedan je članu pred njim, a prvi posljednjemu. Oni se dakle mogu složiti u ciklus, a kako su radi a) sigurno svi međusobno različiti, to oni čine jedan period poligona n -tog reda $\vartheta_{(N-1)_1} + 1$. Prema tome postoji jedan poligon n -tog reda

$$\vartheta_{(N-1)_1} + 1 \equiv (C_{(N)_1}^{a_1}, C_{(N)_2}^{a_2}, C_{(N)_3}^{a_3}, \dots, C_{(N)_r}^{a_r}, C_{(N)_1}^{a_1}, C_{(N)_2}^{a_2}, \dots, C_{(N)_r}^{a_r}). \quad (44)$$

Iz gornjeg ujedno razabiramo, da je taj poligon n -tog reda poligonom $(n-1)$ -vog reda $\vartheta_{(N-1)_1}$ jednoznačno određen. Neka svi takvi poligoni n -tog reda čine skup Σ_n , to možemo reći, da na taj način svakom poligonu $(n-1)$ -vog reda skupa Σ_{n-1} odgovara jedan određeni poligon n -tog reda skupa Σ_n , a kako

svaki poligon višeg reda ima uvijek jednu određenu završnu jezgru, očito je, da kod te korespondencije i svakom poligonu n -tog reda iz skupa Σ_n odgovara jedan određeni poligon $(n-1)$ -vog reda iz skupa Σ_{n-1} .

No iz (44) razabiramo, da mora biti

$$II(\mathfrak{P}_{(N-1)_i+1}) = r,$$

dakle je radi (41)

$$II(\mathfrak{P}_{(N-1)_i+1}) = II(\mathfrak{P}_{(N-1)_i}). \quad (45)$$

Radi toga možemo recipročno jednoznačnu korespondenciju među članovima skupova Σ_{n-1} i Σ_n proširiti i na njihove položaje pridruživši položaju $\vartheta_{(N-1)_i}^a$ nekog člana iz skupa Σ_{n-1} položaj $\vartheta_{(N-1)_i+1}^a$, t. j. položaj s istim gornjim indeksom.

Budući da je nadalje prema d)

$$II(C_{(N)_i}) = II(C_{(N)_{i-1}}), \quad (i = 1, 2, 3, \dots, m), \quad (46)$$

to radi konvencije o numeriranju članova poligona višeg reda iz 9. paragrafa i prema definicijama 9. i 8. slijedi iz (43)

$$\mathfrak{P}_{(N-1)_1}^1 \equiv C_{(N)_1}^{a_1}{}_{i_1-1}, \dots$$

$$\mathfrak{P}_{(N-1)_1}^2 \equiv C_{(N)_2}^{a_2}{}_{i_2-1}, \dots$$

$$\mathfrak{P}_{(N-1)_1}^3 \equiv C_{(N)_3}^{a_3}{}_{i_3-1}, \dots$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\mathfrak{P}_{(N-1)_1}^r \equiv C_{(N)_{i_r}}^{a_r}{}_{i_r-1}, \dots$$

t. j. moraju biti

$$\mathfrak{P}_{(N-1)_i} \equiv (C_{(N)_{i_1}}^{a_1}{}_{i_1-1}, C_{(N)_{i_2}}^{a_2}{}_{i_2-1}, C_{(N)_{i_3}}^{a_3}{}_{i_3-1}, \dots, C_{(N)_{i_r}}^{a_r}{}_{i_r-1}, \\ C_{(N)_{i_1}}^{a_1}{}_{i_1-1}, C_{(N)_{i_2}}^{a_2}{}_{i_2-1}, \dots, \dots, \dots, C_{(N)_{i_r}}^{a_r}{}_{i_r-1}). \quad (47)$$

Pokazat ćemo sada, da među skupovima Σ_{n-1} i Σ_n postoji izomorfija u tom smislu, da kod gore spomenute recipročno jednoznačne korespondencije njihovih članova i položaja tih članova, bilo kojem paru susjednih položaja poligona $(n-1)$ -vog reda skupa Σ_{n-1} odgovara u skupu Σ_n par položaja poligona n -tog reda, koji su u istom smislu susjedni.

Neka su dakle $\vartheta_{(N-1)_i}^p$ i $\eta_{(N-1)_i}^q$ koja god dva susjedna položaja poligona $(n-1)$ -vog reda iz skupa Σ_{n-1} , i neka oni slijede jedan za drugim onako, kako su napisani. Ako je sada

$$\begin{aligned}\vartheta_{(N-1)_i}^p &\equiv C_{(N)_i-1}^a, \dots, C_{(N)_j-1}^b; \\ \eta_{(N-1)_i}^q &\equiv C_{(N)_k-1}^d, C_{(N)_l-1}^e, \dots,\end{aligned}\quad (48)$$

onda slijedi isporođivanjem relacija (47) i (44):

$$\begin{aligned}\vartheta_{(N-1)_i+1}^p &\equiv C_{(N)_i}^a, \dots, C_{(N)_j}^b; \\ \eta_{(N-1)_i}^q &\equiv C_{(N)_k}^d, C_{(N)_l}^e, \dots.\end{aligned}\quad (49)$$

Iz (48) slijedi prema relacijama (13) definicije 8., da je

$$C_{(N)_k-1}^d = C_{(N)_i-1}^{a+1}, \quad C_{(N)_l-1}^e = C_{(N)_j-1}^{b-1}. \quad (50)$$

Onda je prema definiciji 4.

$$C_{(N)_k-1} = C_{(N)_i-1}, \quad C_{(N)_l-1} = C_{(N)_j-1},$$

No ta čvorišta $(n-1)$ -vog reda nisu samo jednaka — dakle takva, koja bi se međusobno eventualno razlikovala samo u oznaci i numeraciji svojih članova — nego identična

$$C_{(N)_k-1} \equiv C_{(N)_i-1}, \quad C_{(N)_l-1} \equiv C_{(N)_j-1}, \quad (51)$$

jer su prema dogovoru u paragrafu 9. topološki ekvivalentna čvorišta višeg reda označena istim simbolima. A onda iz (50) slijedi, da mora biti

$$d \equiv a+1, (\Pi(C_{(N)_i-1})), \quad e \equiv b-1, (\Pi(C_{(N)_j-1})). \quad (52)$$

Radi c) slijedi sada iz (51), da je i

$$C_{(N)_k} \equiv C_{(N)_i}, \quad C_{(N)_l} \equiv C_{(N)_j}, \quad (53)$$

pa onda konačno iz (49) zaključujemo na osnovi relacija (53), (52) i (46), a prema definiciji 8., da su položaji poligonâ n -tog reda $\vartheta_{(N-1)_i+1}^p$ i $\eta_{(N-1)_i+1}^q$ susjedni i slijede jedan za drugim onim redom kako su napisani, a time je dokazano, da su skupovi Σ_{n-1} i Σ_n doista izomorfni u rečenom smislu.

Čvorišta n -tog reda iz sistema $S\{C, m, n\}$ potpuno su određena, čim su dane relacije susjednosti među položajima članova skupa Σ_{n-1} . Izomorfijom skupova Σ_{n-1} i Σ_n prenose se iste relacije susjednosti i na položaje članova skupa Σ_n , pa će tako

sada svakom složenom ciklusu položaja poligona $(n-1)$ -vog reda iz skupa Σ_{n-1} odgovarati jedan složeni ciklus položaja poligona n -tog reda iz skupa Σ_n . A to znači, da će skupu od m čvorišta n -tog reda $S\{C, m, n\}$ odgovarati jedan novi skup od m čvorišta $(n+1)$ -vog reda, koja pripadaju istom ciklusu C . Sada je lako uvidjeti, da će na osnovi gornje izomorfije skupova Σ_{n-1} i Σ_n svojstva a), b), c), d) i e) skupa $S\{C, m, n\}$ biti sačuvana i u tom novom skupu, t. j. taj skup čini potpuni sistem čvorišta $S\{C, m, n+1\}$ za isti ciklus C , pa je tako stavak XIV. dokazan.

Iz stavka XIV. slijedi odmah potpunom indukcijom uz primjenu kriterija egzistencije R -mreže ravnine ovaj stavak:

Stavak XV. Ako za neki ciklus C postoji potpuni sistem čvorišta, postoji uvijek i homogena mreža ravnine $R[C]$.

Taj nam dakle stavak daje mogućnost da nademo odgovor na pitanje egzistencije homogenih mreža ravnine. No on to pitanje ne rješava potpuno. Da se uvjerimo o mogućnosti homogene mreže ravnine za neki dani ciklus C , bit će prema tom stavku potrebno pronaći jedan potpuni sistem čvorišta za taj ciklus C . Doduše — kako ćemo se o tom uvjeriti u slijedećim paragrafima — kod pravilnih homogenih mreža parabolične i sferne ravnine, moći će se u svakom posebnom slučaju moguće mreže pronaći i potpuni sistem čvorišta, pa ovdje pitanje egzistencije stavak XV. rješava bez izuzetka. Na isti način moći ćemo riješiti i pitanje egzistencije mnogih pravilnih homogenih mreža, pa i općenitih tipova pravilnih homogenih mreža hiperbolične ravnine. No u slučajevima homogenih mreža ravnine, gdje ne postoji potpuni sistem čvorišta, kakve su na pr. mnoge pravilne homogene mreže hiperbolične ravnine, stavak XV. ne rješava pitanje egzistencije. U tom ćemo slučaju moći na prije izloženi način ispitivati čvorišta i poligone sve viših redova, ali će često radi prevelikog njihovog broja to doskora postati nepregledno pa i nemoguće. I u takvim slučajevima pitanje egzistencije homogene mreže ravnine teoretski rješava kriterij egzistencije iz 8. paragrafa, ali pitanje samog dokaza te egzistencije u tim slučajevima ostaje otvoreno.

Preostaje još da se odgovori na pitanje, da li je neka homogena mreža ravnine pripadnim ciklusom jednoznačno određena, ili može biti za isti ciklus i više međusobno različitih mreža.

Ako je dan potpuni sistem čvorišta $S\{C, m, n_0\}$, postoji prema stavku XIV. za ciklus C i za svako $n \geq n_0$ sigurno m međusobno različitih čvorišta n -tog reda. Mogli bismo sada pitati, da li taj sistem $S\{C, m, n\}$ daje m različitih mreža $R[C]$

ili je broj tih mogućih mreža manji. Pokazat ćemo, da svaki potpuni sistem čvorišta daje jednu moguću mrežu. Neka čvorišta n -tog reda $C_{(N)_1}, C_{(N)_2}, C_{(N)_3}, \dots, C_{(N)_m}$ čine taj potpuni sistem $S\{C, m, n_0\}$, onda doduše za svako $n \geq n_0$ postoji sigurno m međusobno različitih čvorišta n -tog reda, koja pripadaju ciklusu C , ali svaki od m beskonačnih sljedova

$$\begin{aligned} &C_{(N)_1}, C_{(N)_1+1}, C_{(N)_1+1+1}, C_{(N)_1+1+1+1}, \dots; \\ &C_{(N)_2}, C_{(N)_2+1}, C_{(N)_2+1+1}, C_{(N)_2+1+1+1}, \dots; \\ &C_{(N)_3}, C_{(N)_3+1}, C_{(N)_3+1+1}, C_{(N)_3+1+1+1}, \dots; \\ &\text{-----} \\ &C_{(N)_m}, C_{(N)_m+1}, C_{(N)_m+1+1}, C_{(N)_m+1+1+1}, \dots \end{aligned}$$

od kojih svaki napose određuje mrežu ravnine, daje zapravo m određenja jedne iste mreže, samo sa m »različitih mjesta gledane«. Vrijedi naime ovaj stavak:

Stavak XVI. Ako sva čvorišta n -tog reda neke homogene mreže ravnine $R[C]$ pripadaju jednom potpunom sistemu $S\{C, m, n\}$ (gdje je $m > 1$), mora ta mreža sadržavati svih m različitih čvorišta n -tog reda tog potpunog sistema.

Dokaz. Uzmimo da postoji homogena mreža ravnine $R[C]$, koja sadrži samo p različitih čvorišta n -tog reda nekog potpunog sistema $S\{C, m, n\}$ (gdje je $1 \leq p < m$). Skup od tih p čvorišta n -tog reda označit ćemo sa $S'\{C, p, n\}$, a Σ'_{n-1} neka je skup svih onih poligona $(n-1)$ -vog reda, kojih su položaji članovi čvorišta n -tog reda skupa $S'\{C, p, n\}$. Pokazat ćemo sada, da bi i skup $S'\{C, p, n\}$ morao imati svojstva a) i b). Najprije ćemo pokazati, da bi on morao imati svojstvo b). To svojstvo slijedi iz stavka XII.^a i činjenice, da je svaki član skupa $S'\{C, p, n\}$ ujedno i član skupa $S\{C, m, n\}$. No pokazat ćemo sada, da bi morao imati i svojstvo a). Da se neki položaj poligona $(n-1)$ -vog reda skupa Σ'_{n-1} ne može nalaziti više puta među članovima po jednog perioda svih čvorišta n -tog reda skupa $S'\{C, p, n\}$, slijedi odatle, što su svi članovi skupa Σ'_{n-1} , odnosno $S'\{C, p, n\}$, ujedno i članovi skupova Σ_{n-1} odnosno $S\{C, m, n\}$. Da svaki od tih položaja dolazi barem jedamput među spomenutim članovima, možemo zaključiti ovako: uzmimo, da je $\vartheta_{(N-1)_i}$ koji god poligon $(n-1)$ -vog reda skupa Σ'_{n-1} ; tada se jedan od njegovih položaja — na pr. položaj $\vartheta_{(N-1)_i}^a$ — sigurno nalazi (po definiciji skupa Σ'_{n-1}) među spomenutim članovi-

ma. Uzmimo onaj položaj jednog čvorišta n -tog reda iz skupa $S' \{C, p, n\}$, kojemu je $\vartheta_{(N-1)i}^a$ prvi član; tada radi svojstva b) i definicije 8. postoji u skupu $S' \{C, p, n\}$ čvorište n -tog reda, čiji jedan položaj počinje sa $\vartheta_{(N-1)i}^{a+1}$. Na isti način, pošavši sada od položaja $\vartheta_{(N-1)i}^{a+1}$, mogli bismo pokazati, da u skupu $S' \{C, p, n\}$ postoji čvorište n -tog reda, čiji jedan položaj počinje sa $\vartheta_{(N-1)i}^{a+2}$, i t. d. Odatle dakle slijedi, da svi položaji poligona $\vartheta_{(N-1)i}$ dolaze bar jedamput među spomenutim članovima, pa je time svojstvo a) dokazano. No sada radi e) slijedi, da ne može biti $p < m$, pa je time i stavak dokazan.

U slijedećim ćemo paragrafima vidjeti na promatranju posebnih slučajeva, da za neki ciklus C i dani broj n može postojati i više potpunih sistema čvorišta $S_i \{C, m, n\}$, a mogu postojati za taj isti n još i čvorišta n -tog reda, koja ne pripadaju ni jednom potpunom sistemu. Nije teško sada uvidjeti, da će svaki takav potpuni sistem čvorišta $S_i \{C, m, n\}$ određivati drugu homogenu mrežu ravnine $R[C]$, pa zato homogena mreža ravnine općenito ne će biti određena samo pripadnim ciklusom C , nego za isti takav ciklus može kadgod postojati i više međusobno različitih R -mreža ravnine.

11. DOKAZ EGZISTENCIJE NEKIH HOMOGENIH MREŽA RAVNINE

Na osnovi dobivenih općenitih rezultata ispitat ćemo sada mogućnosti egzistencije nekih posebnih mreža. Najjednostavniji će slučajevi biti oni, gdje je ciklus homogene mreže ravnine ciklus prve vrste, pa ćemo taj slučaj najprije i proučiti.

Uzmimo r poligona $\alpha, \beta, \dots, \eta, \vartheta, \iota, \dots, \nu, \varrho$ (među kojima može biti i jednakih), a

$$C \equiv [\alpha, \beta, \dots, \eta, \vartheta, \iota, \dots, \nu, \varrho, \alpha, \beta, \dots, \dots, \dots, \varrho] \quad (54)$$

neka je ciklus prve vrste, koji je ujedno asimetričan, pa neka je $\Pi(C) = r$. Tada za taj ciklus C postoje dva čvorišta prvog reda

$$\begin{aligned} C_1 &\equiv (\alpha, \beta, \dots, \eta, \vartheta, \iota, \dots, \nu, \varrho, \alpha, \beta, \dots, \dots, \dots, \varrho) \\ i \quad C_2 &\equiv (\varrho, \nu, \dots, \iota, \vartheta, \eta, \dots, \beta, \alpha, \varrho, \nu, \dots, \dots, \dots, \alpha). \end{aligned} \quad (55)$$

Za ta čvorišta prvog reda dobit ćemo ovu tablicu susjednih položaja:

C_1^1	C_2^2	$\dots$	C_1^i	$\dots$	C_1^r	C_2^1	C_2^2	$\dots$	C_2^{r-i+1}	$\dots$	C_2^r
$\alpha, \dots, \varrho$	$\beta, \dots, \alpha$	$\dots$	$\vartheta, \dots, \eta$	$\dots$	$\varrho, \dots, \nu$	$\varrho, \dots, \alpha$	$\nu, \dots, \varrho$	$\dots$	$\vartheta, \dots, \iota$	$\dots$	$\alpha, \dots, \beta$
$\alpha, \varrho, \dots$	$\beta, \alpha, \dots$	$\dots$	$\vartheta, \eta, \dots$	$\dots$	$\varrho, \nu, \dots$	$\varrho, \alpha, \dots$	$\nu, \varrho, \dots$	$\dots$	$\vartheta, \iota, \dots$	$\dots$	$\alpha, \beta, \dots$
C_2^r	C_2^{r-1}	$\dots$	C_2^{r-i+1}	$\dots$	C_2^1	C_1^r	C_1^{r-1}	$\dots$	C_1^i	$\dots$	C_1^1

(56)

Ako je mreža $R[C]$ moguća, onda će ovi susjedni položaji zatvarati cikluse — poligone prvog reda, pa će biti:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &\equiv (C_1^1, C_2^r, C_1^1, C_2^r, \dots, C_2^r), \\
 \beta_1 &\equiv (C_1^2, C_2^{r-1}, C_1^2, C_2^{r-1}, \dots, C_2^{r-1}) \\
 &\dots\dots\dots \\
 \eta_1 &\equiv (C_1^{i-1}, C_2^{r-i+2}, C_1^{i-1}, C_2^{r-i+2}, \dots, C_2^{r-i+2}), \\
 \vartheta_1 &\equiv (C_1^i, C_2^{r-i+1}, C_1^i, C_2^{r-i+1}, \dots, C_2^{r-i+1}), \\
 \iota_1 &\equiv (C_1^{i+1}, C_2^{r-i}, C_1^{i+1}, C_2^{r-i}, \dots, C_2^{r-i}), \\
 &\dots\dots\dots \\
 \varrho_1 &\equiv (C_1^r, C_2^1, C_1^r, C_2^1, \dots, C_2^1).
 \end{aligned}
 \tag{57}$$

Kako je C asimetričan ciklus, to je sigurno uvijek

$$C_1^i \neq C_2^{r-i+1} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, r).$$

Prema tome za sve poligone prvog reda vrijedi, da je

$$\Pi(\vartheta_i) = 2,$$

t. j. prema stavku II. $n(\vartheta) \equiv 0, (2)$.

Ako je dakle mreža $R[C]$ moguća, mora za sve poligone ϑ broj $n(\vartheta)$ biti tak broj. Ali iz gornjeg razmatranja možemo zaključiti, da je za egzistenciju svih poligona prvog reda te mreže taj nužni uvjet ujedno i dovoljan.

Uzet ćemo sada oba položaja i -tog poligona prvog reda ϑ_1 i potražiti im susjedne položaje

ϑ_1^1	ϑ_1^2
$C_1^i, \dots, C_2^{r-i+1}$	$C_2^{r-i+1}, \dots, C_1^i$
$C_1^{i+1}, C_2^{r-i}, \dots$	$C_2^{r-i+2}, C_1^{i-1}, \dots$
ι_1^1	η_1^2

Odatle vidimo, da će svi položaji poligona prvog reda dati dva čvorišta drugog reda:

$$\begin{aligned} C_{11} &\equiv (\alpha_1^1, \beta_1^1, \dots, \eta_1^1, \theta_1^1, \iota_1^1, \dots, \nu_1^1, \varrho_1^1, \alpha_1^1, \beta_1^1, \dots, \dots, \dots, \varrho_1^1) \\ C_{21} &\equiv (\varrho_1^2, \nu_1^2, \dots, \iota_1^2, \theta_1^2, \eta_1^2, \dots, \beta_1^2, \alpha_1^2, \varrho_1^2, \nu_1^2, \dots, \dots, \dots, \alpha_1^2). \end{aligned} \quad (58)$$

Potražiti ćemo susjedne položaje položajima ovih čvorišta.

C_{11}^i	C_{21}^{r-i+1}
$\vartheta_1^1, \dots, \nu_1^1$	$\vartheta_1^2, \dots, \iota_1^2$
$\vartheta_1^2, \iota_1^2, \dots$	$\vartheta_1^1, \nu_1^1, \dots$
C_{21}^{r-i+1}	C_{11}^i

Dakle je položaju C_{11}^i sljedeći susjedni položaj C_{21}^{r-i+1} , a položaju C_{21}^{r-i+1} položaj C_{11}^i ($i = 1, 2, 3, \dots, r$). Prema tome skup, što ga čine dva čvorišta drugog reda C_{11} i C_{21} , ima svojstvo b) definicije 31., a lako se možemo uvjeriti, da su i ostali uvjeti te definicije ispunjeni. Ta čvorišta čine dakle potpuni sistem čvorišta $S\{C, 2, 2\}$ za ciklus C , a vidimo odmah, da je to jedini mogući potpuni sistem čvorišta za taj ciklus. Prema tome imamo na osnovi stavka XV. ovaj zaključak:

Ako je (54) ciklus prve vrste i osim toga asimetričan, a za sve su poligone $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \varrho$ brojevi $n(\alpha), n(\beta), n(\gamma), \dots, n(\varrho)$ tāki, moguća je uvijek jedna ali i samo jedna mreža $R[C]$.

Uzmimo sada homogene mreže ravnine, gdje je C ciklus prve vrste, ali simetričan. Promotrit ćemo ovdje svaki tip napose. K -tip je karakteriziran relacijama

$$\begin{aligned} r &\equiv 0, (2), \\ C_1^i &= C_2^i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, r), \end{aligned} \quad (59)$$

pa u tom slučaju postoji samo jedno čvorište prvog reda

$$C_1 \equiv (\alpha, \beta, \gamma, \dots, \alpha, \lambda, \lambda, \alpha, \dots, \gamma, \beta, \alpha, \alpha, \beta, \dots, \dots, \dots, \alpha).$$

Kod asimetričnog ciklusa prve vrste bio je i -ti poligon prvog reda

$$\vartheta_1 \equiv (C_1^i, C_2^{r-i+1}, C_1^i, C_2^{r-i+1}, \dots, C_2^{r-i+1}).$$

Ovdje ćemo radi relacija (59) dobiti kao i -ti poligon prvog reda

$$\vartheta_1 \equiv (C_1^i, C_1^{r-i+1}, C_1^i, C_1^{r-i+1}, \dots, C_1^{r-i+1}). \quad (60)$$

Vidimo i ovdje, da je uvijek $\Pi(\vartheta_1) = 2$, dakle mora biti prema stavku II. $n(\vartheta) \equiv 0, (2)$, osim u slučaju, kada je $C_1^i = C_1^{r-i+1}$. Ta je relacija valjana, ako postoji kongruencija

$$i \equiv r - i + 1, (r) \quad (61)$$

ili $2i \equiv r + 1, (r)$.

Kako ta kongruencija nema rješenja, jer je r tâki broj, mora i ovdje za svaki poligon ϑ biti $n(\vartheta)$ tâk broj. U tom slučaju dobivamo slično kao i gore čvorište drugog reda

$$C_{11} \equiv (a_1^1, \beta_1^1, \gamma_1^1, \dots, \alpha_1^1, \lambda_1^1, \lambda_1^2, \alpha_1^2, \dots, \beta_1^2, \alpha_1^2, \alpha_1^1, \beta_1^1, \dots, \dots, \dots, \alpha_1^2).$$

To čvorište drugog reda sâmo čini potpuni sistem, o čemu se možemo lako uvjeriti, jer se može odmah pokazati, da ispunjava sve uvjete definicije 31. Prema tome i u ovom slučaju moguća je jedna, ali i samo jedna mreža ravnine $R[C]$

Za L -tip karakteristične su relacije

$$r \equiv 0, (2), \quad C_1^i = C_2^{i-1} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, r), \quad (62)$$

pa je ovdje čvorište prvog reda

$$C_1 \equiv (a, \beta, \gamma, \dots, \alpha, \lambda, \alpha, \dots, \beta, a, \beta, \dots, \dots, \dots, \beta).$$

Radi (62) će ovdje biti i -ti poligon prvog reda

$$\vartheta_1 \equiv (C_1^i, C_1^{r-i+2}, C_1^i, C_1^{r-i+2}, \dots, C_1^{r-i+2}),$$

pa mjesto kongruencije (61) sada dobivamo $i \equiv r - i + 2, (r)$. Rješenja ove kongruencije, koja dolaze u obzir, jesu: $i_1 = 1$;

$i_2 = \frac{r}{2} + 1$. Ovdje je potpuni sistem dan čvorištem

$$C_{11} \equiv (a_1^1, \beta_1^1, \gamma_1^1, \dots, \alpha_1^1, \lambda_1^1, \alpha_1^2, \dots, \beta_1^2, \alpha_1^1 \beta_1^1, \dots, \dots, \dots, \beta_1^2).$$

Dakle je i u tom slučaju moguća samo jedna mreža ravnine. Pri tom mora biti za sve poligone broj $n(\vartheta)$ tâk broj, osim eventualno za prvi i $(\frac{r}{2} + 1)$ -vi poligon, a to su oni, koji su u ciklusu susjedni s dva jednaka poligona.

Za M -tip vrijede relacije

$$\begin{aligned} r &\equiv 1, (2) \\ C_1^i &= C_2^i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, r). \end{aligned} \quad (63)$$

Tu će biti čvorište prvog reda

$$C_1 \equiv (a, \beta, \dots, \alpha, \lambda, \alpha, \dots, \beta, a, \alpha, \beta, \dots, \dots, \dots, a).$$

Radi (63) je i -ti poligon i ovdje (60), ali kongruencija (61) sada ima jedno rješenje, a to je: $i_1 = \frac{r+1}{2}$.

Potpuni sistem čini čvorište drugog reda:

$$C_{11} \equiv (\alpha_1^1, \beta_1^1, \dots, \alpha_1^1, \lambda_1^1, \alpha_1^2, \dots, \beta_1^2, \alpha_1^2, \alpha_1^1, \beta_1^1, \dots, \dots, \dots, \alpha_1^2).$$

I sada možemo zaključiti, da je tu moguća samo jedna mreža ravnine, a pri tom smije biti $n(\theta)$ lih broj samo za $\frac{r+1}{2}$ -ti poligon, koji je i u tom ciklusu susjedan s dva jednaka poligona. Tim je u potpunosti riješeno pitanje egzistencije i određenosti homogenih mreža ravnine s pripadnim ciklusom prve vrste.

Prijeći ćemo sada na ispitivanje homogenih mreža, kojima pripada ciklus druge vrste. Neka je dakle C ciklus druge vrste i asimetričan. Tada kao i prije postoje dva čvorišta prvog reda (55). No u četvrtom redu tablice (56) ne će sada više stajati uvijek samo po jedan položaj, nego će općenito svakom položaju čvorišta prvog reda biti i više susjednih položaja. Ako su još svi brojevi $n(\theta)$ takvi, onda će biti i opet mogući svi poligoni prvog reda (57), ali oni u tom slučaju ne moraju biti jedini mogući poligoni prvog reda. Tako ne će općenito biti moguća samo dva čvorišta drugog reda, nego i više njih i izvan potpunog sistema, što ga čine čvorišta (58), a prema tome i više različitih R -mreža ravnine za isti ciklus C . U slučaju, da je C ciklus druge vrste, ali simetričan, možemo na sličan način zaključiti, da je homogena mreža ravnine sigurno moguća uz uvjet, uz koji i mreža s pripadnim ciklusom prve vrste, no i sada općenito ne mora biti jedina za isti ciklus.

U slučaju, da u ciklusu druge vrste ima članova, za koje su $n(\theta)$ lihi brojevi, a ti članovi su susjedni s dva različita člana, ne možemo ništa unaprijed zaključiti o mogućnosti egzistencije homogene mreže ravnine. U svakom takvom slučaju treba egzistenciju mreže napose istražiti.

Sve ove dobivene rezultate možemo skupiti u ovoj tablici:

Pretpostavke o članovima ciklusa homogene mreže ravnine	Ciklus homogene mreže ravnine je	
	prve vrste	druge vrste
Za sve članove u ciklusu su $n(\theta)$ takvi brojevi osim eventualno onih, koji su susjedni s dva jednaka člana.	Uvijek moguća jedna homogena mreža ravnine.	Uvijek moguća bar jedna homogena mreža ravnine.
U ciklusu ima članova, za koje su brojevi $n(\theta)$ lihi, a susjedni su s dva različita člana.	Homogena mreža ravnine nije moguća	U svakom posebnom slučaju treba mogućnost homogene mreže ravnine napose ispitati.

(64)

12. PRIMJENA NA POSEBNE SLUČAJEVE HOMOGENIH MREŽA RAVNINA SFERNE, PARABOLIČNE, HIPERBOLIČNE I ELIPTIČNE GEOMETRIJE

Spoznaja o mogućnosti realizacije čvorišta viših redova za neki dani ciklus C u nizu koncentričnih krugova sve većih polumjera dovela nas je do kriterija egzistencije homogenih mreža ravnine iz paragrafa 8. i 9. Na osnovi toga kriterija mi smo ispitivali u paragrafima 9., 10. i 11. mogućnost egzistencije homogenih mreža ravnine bez obzira na to, o kakvoj se ravnini u danom slučaju radi. Primijenit ćemo te rezultate na homogene mreže konkretnih ravnina, t. j. ravnina sferne, parabolične i hiperbolične geometrije, a na kraju ćemo izvesti neke zaključke i za homogene mreže eliptične ravnine, koje se dakako ne mogu orijentirati.

Iz metričkih svojstava tih ravnina izveli smo u paragrafu 3., da za njihove pravilne homogene mreže moraju vrijediti nužni uvjeti (14)^{a)} b) c), a iz razmatranja u paragrafu 5. je slijedilo, da se valjanost tih metričkih uvjeta može proširiti i na mnogo općenitije homogene mreže, t. j. mreže koje ispunjavaju uvjete (22). U slijedećem ćemo razmatranju uzeti, da su uvjeti (22) ispunjeni, pa ćemo pod homogenom mrežom ravnine razumijevati takvu homogenu mrežu, koja još zadovoljava i tim uvjetima.

Ako dakle želimo naći, u kojoj se konkretnoj ravnini koja homogena mreža da realizirati, moramo ispitati i istražiti mogućnost egzistencije homogenih mreža za cikluse, koji pripadaju rješenjima nužnih uvjeta (14) danim u tablicama (18), (20) odnosno (21).

Naprije ćemo promotriti sve cikluse prve vrste. Svi ciklusi C , za koje je $\Pi(C)=1$, prve su vrste i to simetrični tipa M . Prema tome za svaki takav ciklus postoji jedna homogena mreža ravnine. Relacije (14) prelaze u tom slučaju u

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{n} \geq \frac{1}{2}. \quad (65)$$

Tako dobivamo za paraboličnu ravninu tri poznate homogene mreže s ciklusima $[6, 6, 6]$, $[4, 4, 4, 4]$, $[3, 3, 3, 3, 3, 3]$, a za sfernu ravninu pet mreža s ciklusima $[3, 3, 3]$, $[4, 4, 4]$, $[5, 5, 5]$, $[3, 3, 3, 3]$, $[3, 3, 3, 3, 3]$. Te su mreže izomorfne s pet pravilnih poliedara. U hiperboličnoj će geometriji broj takvih mogućih mreža biti beskonačan.

Sve te moguće cikluse pravilnih homogenih mreža ravnine s poligonima jedne vrste za sve tri geometrije možemo prikazati u tablici (66), gdje su unesena rješenja relacija (65), a

$\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}$	3	4	5	6	7	8...
3	S	S	S	P	H	---
4	S	P	H	H	H	---
5	S	H	H	H	H	---
6	P	H	H	H	H	---
7	H	H	H	H	H	---
8						

(66)

moгуćnost realizacije u sfernoj, paraboličnoj odnosno hiperboličnoj ravнини naznačena slovima S , P odnosno H . Sav preostali beskonačni dio tablice (66) ispunjen je slovom H .

Pitamo sada za moguće R -mreže ravnine s više vrsta poligona.

Prema tablici egzistencije homogenih mreža ravnine (64) bit će moguće mreže parabolične ravnine, kojima pripadaju ovi ciklusi prve vrste:

$[3, 12, 12]$; $[4, 8, 8]$; $[3, 6, 3, 6]$; $[4, 6, 12]$ i $[3, 4, 6, 4]$.

Za ostale cikluse prve vrste iz tablice (18) homogene mreže nisu moguće.

Za sfernu ravninu daju moguće homogene mreže još ovi ciklusi prve vrste:

$[3, 4, 4]$; $[3, 6, 6]$; $[3, 8, 8]$; $[3, 10, 10]$; $[4, 6, 6]$; $[4, 4, n]$ ($n > 4$);

$[5, 6, 6]$; $[3, 4, 3, 4]$; $[3, 5, 3, 5]$; $[4, 6, 8]$; $[4, 6, 10]$; $[3, 4, 5, 4]$.

Broj ciklusa prve vrste, koji pripadaju mogućim homogenim mrežama ravnine s više vrsti poligona, u hiperboličnoj je geometriji beskonačan, i radi toga ih ne možemo nabrojati, ali za svaki takav dani ciklus bit će na osnovi tablice (64) unaprijed određeno, da li daje moguću mrežu ili ne. Tako na pr. možemo odmah reći, da ciklus $[4, 6, 8, 7, 8, 6, 4]$ daje moguću homogenu mrežu ravnine, dok je za ciklus $[4, 5, 6, 7]$ takva mreža nemoguća.

Sada nam još preostaju ciklusi druge vrste. Od svih rješenja tablica (18) i (20) možemo načiniti u svemu ovih 12 ciklusa druge vrste:

$[3, 3, 3, 3, 6]$; $[3, 3, 4, 3, 4]$; $[3, 3, 3, 4, 4]$; $[3, 3, 4, 12]$; $[3, 4, 4, 6]$;

$[3, 4, 4, 4]$; $[3, 3, 3, n]$ ($n > 3$); $[3, 3, 3, 3, 4]$; $[3, 3, 3, 3, 5]$; $[3, 3, 4, n]$

($4 < n < 12$); $[3, 3, 5, n]$ ($5 < n < 8$); $[3, 4, 4, 5]$, (67)

od kojih prvih pet za paraboličnu, a posljednjih sedam za sfernu ravninu.

Kako u tom slučaju o egzistenciji pripadnih homogenih mreža prema (64) ne možemo unaprijed ništa reći, moramo ove cikluse napose ispitati.

Uzmimo najprije općeniti tip ciklusa

$$C \equiv [3, 3, p, 3, q], \quad (68)$$

u kojem su četiri od ciklusa (67) sadržani kao posebni slučajevi, a za jedan od njih t. j. za ciklus $[3, 3, 4, 3, 4]$ smo već u paragrafu 9. dokazali egzistenciju homogene mreže ravnine.

Uzet ćemo najprije slučaj

$$p = q > 3.$$

Radi simetričnosti ciklusa C u tom slučaju postoji samo jedno čvorište prvog reda

$$C_1 \equiv (3, 3, q, 3, q).$$

Tablica susjednih položaja bila bi sada ova:

$C_1^1; C_1^4$	C_1^2	$C_1^3; C_1^5$
$3, \dots, q$	$3, \dots, 3$	$q, \dots, 3$
$3, q, \dots$	$3, 3; \dots$	$q, 3, \dots$
$C_1^2; C_1^4$	C_1^1	$C_1^3; C_1^5$

Dalje slijedi kao i u posebnom slučaju mreže $R[3, 3, 4, 3, 4]$, da su mogući ovi poligoni prvog reda:

$$3_1 \equiv (C_1^1, C_1^4, C_1^2); \quad 3_2 \equiv (C_1^4, C_1^4, C_1^4),$$

$$q_1 \equiv (C_1^3, C_1^3, C_1^3, \dots, C_1^3),$$

$$q_2 \equiv (C_1^5, C_1^5, C_1^5, \dots, C_1^5),$$

$$q_3 \equiv (C_1^5, C_1^3, C_1^3, \dots, C_1^3),$$

$$q_4 \equiv (C_1^5, C_1^5, C_1^3, \dots, C_1^3),$$

$$q_5 \equiv (C_1^5, C_1^3, C_1^5, \dots, C_1^3),$$

$$--- \quad \quad \quad --- \quad \quad \quad ---$$

$$q_n \equiv (C_1^5, C_1^5, C_1^5, \dots, C_1^5, C_1^3).$$

Od svih ovih poligona mogu pripadati mreži $R[3, 3, q, 3, q]$ radi stavka XIII^a samo poligoni prvog reda 3_1 , q_1 i q_2 . Položaji ovih poligona prvog reda zatvaraju jedan jedini ciklus, pa tako imamo jedno čvorište drugog reda:

$$C_{11} \equiv (3_1^1, 3_1^3, q_1^1, 3_1^2, q_2^1).$$

Kako ovo čvorište zadovoljava svim uvjetima definicije 31., čini ono samo za sebe potpuni sistem čvorišta, t. j. postoji jedna i samo jedna mreža ravnine $R[C]$.

Uzet ćemo sada slučaj $p \neq q$; $p, q > 3$. Tada postoje dva čvorišta prvog reda:

$$C_1 \equiv (3, 3, p, 3, q),$$

$$C_2 \equiv (q, 3, p, 3, 3).$$

Tablica njihovih susjednih položaja bit će sada:

$C_1^1; C_2^2$	$C_1^2; C_2^5$	$C_1^3; C_2^3$	$C_1^4; C_2^4$	$C_1^5; C_2^1$
$3, \dots, q$	$3, \dots, 3$	$p, \dots, 3$	$3, \dots, p$	$q, \dots, 3$
$3, q, \dots$	$3, 3, \dots$	$p, 3, \dots$	$3, p, \dots$	$q, 3, \dots$
$C_1^4; C_2^5$	$C_1^1; C_2^4$	$C_1^3; C_2^3$	$C_1^2; C_2^2$	$C_1^5; C_2^1$

Odatle imamo ove tri sheme susjednih položaja:

$C_1^1; C_2^2$							
C_1^4				C_2^5			
C_1^2		C_2^2		C_1^1		C_2^4	
C_1^1	C_2^4	C_1^4	C_2^5	C_1^4	C_2^5	C_1^2	C_2^2
$C_1^4 C_2^5$	$C_1^2 C_2^2$	$C_1^2 C_2^2$	$C_1^1 C_2^4$	$C_1^2 C_2^2$	$C_1^1 C_2^4$	$C_1^1 C_2^4$	$C_1^4 C_2^5$
$C_1^3; C_2^3$				$C_1^5; C_2^1$			
$C_1^3 C_2^3$		$C_1^5 C_2^1$		$C_1^5 C_2^1$		$C_1^1 C_2^5$	

Iz tih shema čitamo ove poligone prvog reda:

$$3_1 \equiv (C_1^1, C_1^4, C_1^5),$$

$$3_2 \equiv (C_2^2, C_2^5, C_2^4),$$

$$p_1 \equiv (C_1^3, C_1^3, C_1^3, \dots, C_1^3), \quad q_1 \equiv (C_1^5, C_1^5, C_1^5, \dots, C_1^5),$$

$$p_2 \equiv (C_2^3, C_2^3, C_2^3, \dots, C_2^3), \quad q_2 \equiv (C_2^1, C_2^1, C_2^1, \dots, C_2^1),$$

$$p_3 \equiv (C_2^3, C_1^3, C_1^3, \dots, C_1^3), \quad q_3 \equiv (C_2^1, C_1^5, C_1^5, \dots, C_1^5),$$

$$p_x \equiv (C_2^3, C_2^3, C_2^3, \dots, C_2^3, C_1^3), \quad q_x \equiv (C_2^1, C_2^1, C_2^1, \dots, C_2^1, C_1^5).$$

Na sličan način, kao i u slučaju $p = q$ možemo i sada zaključiti, da mreža $R[3, 3, p, 3, q]$ može sadržavati samo ove poligone prvog reda:

$$3_1, 3_2, p_1, p_2, q_1 \text{ i } q_2.$$

Za njih dobivamo ovu tablicu susjednih položaja:

3_1^1	3_1^2	3_1^3	3_2^1	3_2^2
$C_1^1, \dots, C_1^2$	$C_1^4, \dots, C_1^1$	$C_1^2, \dots, C_1^4$	$C_2^2, \dots, C_2^4$	$C_2^5, \dots, C_2^2$
$C_1^2, C_1^1, \dots$	$C_1^5, C_1^4, \dots$	$C_1^3, C_1^2, \dots$	$C_2^3, C_2^2, \dots$	$C_2^1, C_2^5, \dots$
3_1^3	q_1^1	p_1^1	p_2^1	q_2^1
3_2^3	p_1^1	p_2^1	q_1^1	q_2^1
$C_2^4, \dots, C_2^5$	$C_1^3, \dots, C_1^5$	$C_2^3, \dots, C_2^5$	$C_1^5, \dots, C_1^5$	$C_2^1, \dots, C_2^1$
$C_2^5, C_2^4, \dots$	$C_1^4, C_1^3, \dots$	$C_2^4, C_2^3, \dots$	$C_1^1, C_1^4, \dots$	$C_2^2, C_2^5, \dots$
3_2^2	3_1^2	3_2^3	3_1^1	3_2^1

Ta nam tablica daje dva čvorišta drugog reda:

$$C_{11} \equiv (3_1^1, 3_1^3, p_1^1, 3_1^2, q_1^1),$$

$$C_{21} \equiv (q_2^1, 3_2^1, p_2^1, 3_2^3, 3_2^2).$$

I sada se možemo uvjeriti, da svako od tih čvorišta drugog reda samo za sebe čini potpuni sistem. Tako vidimo, da u tom slučaju postoje dvije različite mreže ravnine za isti ciklus, no ta razlika nije bitna. One su naime jedna drugoj simetrične i prelaze jedna u drugu zrcaljenjem na bilo kojem pravcu ravnine.

Promotrimo konačno slučaj: $p=3$; $q>3$. Tada imamo i opet jedno čvorište prvog reda

$$C_1 \equiv (3, 3, 3, q).$$

Tablica susjednih položaja će biti ova:

C_1^1	$C_1^2; C_1^3; C_1^4$	C_1^5
$3, \dots, q$	$3, \dots, 3$	$q, \dots, 3$
$3, q, \dots$	$3, 3, \dots$	$q, 3, \dots$
C_1^4	$C_1^1; C_1^2; C_1^3$	C_1^5

Načinimo li sheme susjednih položaja, možemo iz njih pročitati ove poligone prvog reda:

$$3_1 \equiv (C_1^1, C_1^4, C_1^2); 3_2 \equiv (C_1^1, C_1^4, C_1^3); 3_3 \equiv (C_1^2, C_1^2, C_1^2);$$

$$3_4 \equiv (C_1^2, C_1^2, C_1^3); 3_5 \equiv (C_1^2, C_1^3, C_1^3); 3_6 \equiv (C_1^3, C_1^3, C_1^3);$$

$$q_1 \equiv (C_1^5, C_1^5, C_1^5, \dots, C_1^5).$$

Od ovih poligona ne dolaze u obzir radi stavka XIII.² poligoni 3_4 i 3_5 . Ciklusi susjednih položaja preostalih poligona daju nam dva čvorišta drugog reda:

$$C_{11} \equiv (3_1^1, 3_1^3, 3_6^1, 3_1^2, q_1^1),$$

$$C_{12} \equiv (3_2^1, 3_3^1, 3_2^3, 3_2^2, q_1^1),$$

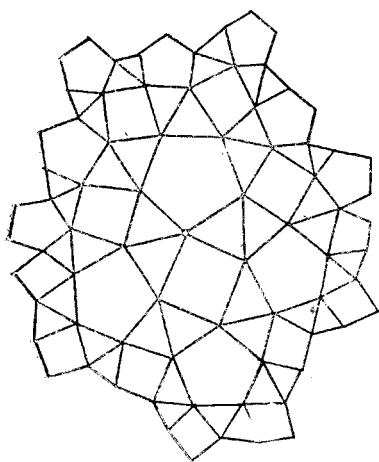
koja svako za sebe čine potpuni sistem. Prema tome postoje i u tom slučaju dvije moguće mreže ravnine, koje su međusobno simetrične.

Kako je slučaj $p = q = 3$ već prije riješen, proučili smo na taj način sve moguće slučajeve ciklusa (68), a time ujedno riješili pitanje egzistencije pravilnih mreža za četiri od dvanaest preostalih ciklusa druge vrsti (67).

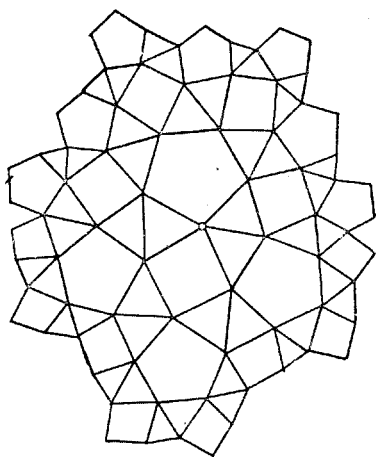
Pitamo li još za mogućnost realizacije homogenih mreža za ciklus (68) u konkretnim geometrijama, morat ćemo uzeti u pomoć relacije nužnih uvjeta (14). Za ciklus (68) dobivaju te relacije jednostavan oblik:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{2}. \quad (69)$$

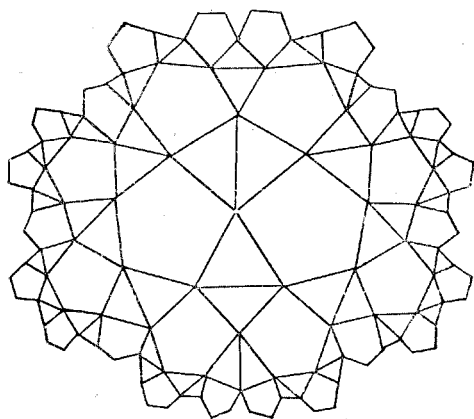
Vidimo da postoji identičnost među relacijama (65) i (69), a onda nam tablica (66) daje ujedno sva rješenja od (69), samo valja u njoj zamijeniti slova k i n sa slovima p i q . Tako možemo u tablici (66) pročitati sve mogućnosti realizacije homogenih mreža ravnine za ciklus (68) u pojedinim geometrijama. Pri tom svakom rješenju iz tablice (66), koje se »nalazi na dijagonali«, pripada samo jedna mreža, a svima ostalima po dvije međusobno simetrične mreže. U slikama 18., 19., 20. i 21. dana su za te mreže čvorišta trećeg reda i to: u sl. 18. čvorište trećeg reda C_{111} za mrežu $R[3, 3, 4, 3, 4]$; u sl. 19. i 20. čvorišta C_{111} odnosno C_{211} za mrežu $R[3, 3, 4, 3, 5]$; i u sl. 21. čvorište C_{111} za mrežu $R[3, 3, 5, 3, 5]$.



Sl. 19.



Sl. 20.



Sl. 21.

Još preostaje za paraboličnu ravninu ciklus $C \equiv [3, 3, 3, 4, 4]$. Tu postoji samo jedno čvorište prvog reda: $C_1 \equiv (3, 3, 3, 4, 4)$. Nadalje dobivamo ove poligone prvog reda:

$$3_1 \equiv (C_1^1, C_1^3, C_1^2); \quad 3_2 \equiv (C_1^2, C_1^3, C_1^2); \quad 4_1 \equiv (C_1^4, C_1^5, C_1^4, C_1^5).$$

Poligon 3_2 ne pripada mreži radi stavka XIII.^a, a preostala dva poligona daju jedino moguće čvorište drugog reda

$$C_{11} \equiv (3_1^1, 3_1^3, 3_1^2, 4_1^1, 4_1^2),$$

koje ujedno samo čini potpuni sistem. Prema tome za taj ciklus postoji jedna i samo jedna moguća homogena mreža ravnine.

Ciklusi $[3, 3, 4, 12]$ i $[3, 4, 4, 6]$ za paraboličnu ravninu kao i ciklusi $[3, 3, 4, n]$ ($4 < n < 12$); $[3, 3, 5, n]$ ($3 < n < 8$) i $[3, 4, 4, 5]$ za sfernu ravninu ne daju moguću homogenu mrežu, jer ni za koji od njih ne postoji trokut prvog reda.

Uzet ćemo sad ciklus $C \equiv [3, 3, 3, n]$ ($n > 3$) za sfernu ravninu. Tu imamo jedno čvorište prvog reda $C_1 \equiv (3, 3, 3, n)$ i tri poligona prvog reda

$$3_1 \equiv (C_1^1, C_1^3, C_1^2); \quad 3_2 \equiv (C_1^2, C_1^3, C_1^2); \quad n_1 \equiv (C_1^4, C_1^4, \dots, C_1^4).$$

Ti poligoni prvog reda daju jedino moguće čvorište drugog reda

$$C_{11} \equiv (3_1^1, 3_1^3, 3_1^2, n_1^1),$$

jer poligon prvog reda 3_2 ne pripada mogućoj mreži. Kako osim toga čvorište drugog reda C_{11} čini samo potpuni sistem, to i za taj ciklus postoji jedna i samo jedna homogena mreža ravnine.

Od ciklusa druge vrste (67) preostaje još samo ciklus

$$C \equiv [3, 4, 4, 4]$$

i to za sfernu ravninu. Taj ciklus daje jedno čvorište prvog reda

$$C_1 \equiv (3, 4, 4, 4).$$

Tablica za njegove susjedne položaje bit će ova:

C_1^1	C_1^2	$C_1^3; C_1^4$
3, ..., 4	4, ..., 3	4, ..., 4
3, 4, ...	4, 3, ...	4, 4, ...
C_1^1	C_1^4	$C_1^2; C_1^3$

Odatle dobivamo ove dvije sheme susjednih položaja

	c_1^2										
c_1^1	c_1^4										
c_1^1	c_1^2					c_1^3					
	c_1^4					c_1^2		c_1^3			
	c_1^2		c_1^3			c_1^4		c_1^2		c_1^3	
	c_1^4		c_1^2	c_1^3		c_1^2	c_1^3	c_1^4	c_1^2	c_1^3	
	c_1^2	c_1^3	c_1^4	c_1^2	c_1^3	c_1^4	c_1^2	c_1^3	c_1^2	c_1^3	

I tako imamo ova četiri poligona prvog reda:

$$3_1 \equiv (C_1^1, C_1^1, C_1^1); \quad 4_1 \equiv (C_1^2, C_1^4, C_1^2, C_1^4);$$

$$4_2 \equiv (C_1^2, C_1^4, C_1^3, C_1^3); \quad 4_3 \equiv (C_1^3, C_1^3, C_1^3, C_1^3).$$

Tablica njihovih susjednih položaja bit će ova:

3_1^1	4_1^1	$4_2^2; 4_2^2$	4_2^1	4_2^3	$4_2^4; 4_2^1$
$c_1^1, \dots, c_1^1$	$c_1^2, \dots, c_1^4$	$c_1^4, \dots, c_1^2$	$c_1^2, \dots, c_1^3$	$c_1^3, \dots, c_1^4$	$c_1^3, \dots, c_1^3$
$c_1^2, c_1^4, \dots$	$c_1^3, c_1^3, \dots$	$c_1^1, c_1^1, \dots$	$c_1^3, c_1^2, \dots$	$c_1^4, c_1^3, \dots$	$c_1^4, c_1^2, \dots$
$4_1^1; 4_2^1$	$4_2^3; 4_3^1$	3_1^1	4_2^4	4_2^2	4_2^1

Odatle slijedi ova shema susjednih položaja:

	3_1^1	
	4_1^1	4_2^1
4_2^3	4_3^1	4_2^4
4_2^2	4_1^2	4_2^1
3_1^1	3_1^1	3_1^1

Prema tome postoje tri čvorišta drugog reda:

$$C_{11} \equiv (3_1^1, 4_1^1, 4_2^3, 4_2^2); C_{12} \equiv (3_1^1, 4_1^1, 4_3^1, 4_1^2);$$

$$C_{13} \equiv (3_1^1, 4_2^1, 4_2^4, 4_1^2).$$

Tablica susjednih položaja ovih čvorišta bit će

C_{11}^1	$C_{11}^2; C_{12}^2$	C_{11}^3	C_{11}^4	$C_{12}^1; C_{13}^1$
$3_1^1, \dots, 4_2^2$	$4_1^1, \dots, 3_1^1$	$4_2^3, \dots, 4_1^1$	$4_2^2, \dots, 4_2^3$	$3_1^1, \dots, 4_1^2$
$3_1^1, 4_2^1, \dots$	$4_1^2, 3_1^1, \dots$	$4_2^4, 4_1^2, \dots$	$4_2^3, 4_2^2, \dots$	$3_1^1, 4_1^1, \dots$
C_{13}^1	$C_{12}^4; C_{13}^4$	C_{13}^3	C_{11}^3	$C_{11}^1; C_{12}^1$

C_{12}^3	C_{12}^4	C_{13}^2	C_{13}^3	C_{13}^4
$4_3^1, \dots, 4_1^1$	$4_1^2, \dots, 4_3^1$	$4_2^1, \dots, 3_1^1$	$4_2^4, \dots, 4_2^1$	$4_1^2, \dots, 4_2^4$
$4_3^1, 4_1^2, \dots$	$4_1^1, 4_3^1, \dots$	$4_2^2, 3_1^1, \dots$	$4_2^1, 4_2^4, \dots$	$4_1^1, 4_2^3, \dots$
C_{12}^3	C_{12}^2	C_{11}^4	C_{13}^2	C_{11}^2

Odatle slijede ove četiri sheme susjednih položaja:

C_{11}^1								
C_{13}^1								
C_{11}^1			C_{12}^1					
C_{13}^1			C_{11}^1			C_{12}^1		
C_{11}^1	C_{12}^1		C_{13}^1		C_{11}^1	C_{12}^1	C_{11}^1	
C_{13}^1	C_{11}^1	C_{13}^1	C_{11}^1	C_{12}^1	C_{13}^1	C_{11}^1	C_{12}^1	C_{13}^1

C_{11}^2							
C_{12}^4				C_{13}^4			
C_{12}^2				C_{11}^2			
C_{12}^4		C_{13}^4		C_{12}^4		C_{13}^4	
C_{12}^2		C_{11}^2		C_{12}^2		C_{11}^2	
C_{12}^4	C_{13}^4	C_{12}^4	C_{13}^4	C_{12}^4	C_{13}^4	C_{12}^4	C_{13}^4
C_{12}^2	C_{11}^2	C_{12}^2	C_{11}^2	C_{12}^2	C_{11}^2	C_{12}^2	C_{11}^2

C_{11}^3
C_{13}^3
C_{13}^2
C_{11}^4
C_{11}^3

C_{12}^3
C_{12}^3

Iz tih shema možemo pročitati ovih sedam poligona drugog reda :

$$3_{11} \equiv (C_{11}^1, C_{13}^1, C_{12}^1);$$

$$3_{12} \equiv (C_{12}^1, C_{11}^1, C_{13}^1);$$

$$4_{11} \equiv (C_{11}^2, C_{12}^4, C_{12}^2, C_{13}^4);$$

$$4_{12} \equiv (C_{11}^2, C_{13}^4, C_{11}^2, C_{13}^4); \quad 4_{13} \equiv (C_{12}^2, C_{12}^4, C_{12}^2, C_{12}^4);$$

$$4_{21} \equiv (C_{13}^2, C_{11}^4, C_{11}^2, C_{13}^2); \quad 4_{31} \equiv (C_{12}^3, C_{12}^3, C_{12}^3, C_{12}^3).$$

Od tih mogućih poligona drugog reda 4_{12} ne dolazi u obzir radi stavka XIII^a, jer njegovom položaju 4_{12}^2 nema među položajima tih poligona susjednoga. Preostali poligoni daju ovu tablicu susjednih položaja:

3_{11}^1	3_{11}^2	3_{11}^3	3_{12}^1	4_{11}^1
$C_{11}^1, \dots, C_{12}^1$	$C_{13}^1, \dots, C_{11}^1$	$C_{12}^1, \dots, C_{13}^1$	$C_{12}^1, \dots, C_{12}^1$	$C_{11}^2, \dots, C_{13}^4$
$C_{11}^2, C_{12}^4, \dots$	$C_{13}^2, C_{11}^4, \dots$	$C_{12}^2, C_{13}^4, \dots$	$C_{12}^2, C_{12}^4, \dots$	$C_{11}^3, C_{13}^3, \dots$
4_{11}^1	4_{21}^1	4_{11}^3	4_{13}^1	4_{21}^3
4_{11}^2	4_{11}^3	4_{11}^4	4_{13}^1	4_{13}^2
$C_{12}^4, \dots, C_{11}^2$	$C_{12}^2, \dots, C_{12}^4$	$C_{13}^4, \dots, C_{12}^2$	$C_{12}^2, \dots, C_{12}^4$	$C_{12}^4, \dots, C_{12}^2$
$C_{12}^1, C_{11}^1, \dots$	$C_{13}^3, C_{12}^3, \dots$	$C_{13}^1, C_{12}^1, \dots$	$C_{12}^3, C_{12}^3, \dots$	$C_{12}^1, C_{12}^1, \dots$
3_{11}^3	4_{31}^1	3_{11}^2	4_{31}^1	3_{12}^1

4_{21}^1	4_{21}^2	4_{21}^3	4_{21}^4	4_{31}^1
$C_{13}^2, \dots, C_{13}^3$	$C_{11}^4, \dots, C_{13}^2$	$C_{11}^3, \dots, C_{11}^4$	$C_{13}^3, \dots, C_{11}^3$	$C_{12}^3, \dots, C_{12}^3$
$C_{13}^3, C_{13}^2, \dots$	$C_{11}^1, C_{13}^1, \dots$	$C_{11}^4, C_{11}^3, \dots$	$C_{13}^4, C_{11}^2, \dots$	$C_{12}^4, C_{12}^2, \dots$
4_{21}^4	3_{11}^1	4_{21}^2	4_{11}^4	$4_{11}^2, 4_{13}^2$

Iz te tablice dobivamo ova četiri moguća čvorišta trećeg reda:

$$C_{111} \equiv (3_{11}^1, 4_{11}^1, 4_{21}^3, 4_{21}^2); C_{121} \equiv (3_{11}^3, 4_{11}^3, 4_{31}^1, 4_{11}^2);$$

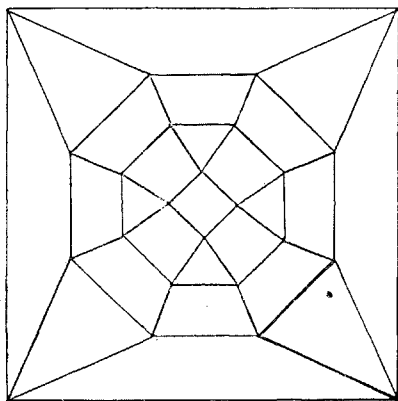
$$C_{131} \equiv (3_{11}^2, 4_{21}^1, 4_{21}^4, 4_{11}^4); C_{122} \equiv (3_{12}^1, 4_{13}^1, 4_{31}^1, 4_{13}^2).$$

Načinimo li i za njih tablicu susjednih položaja

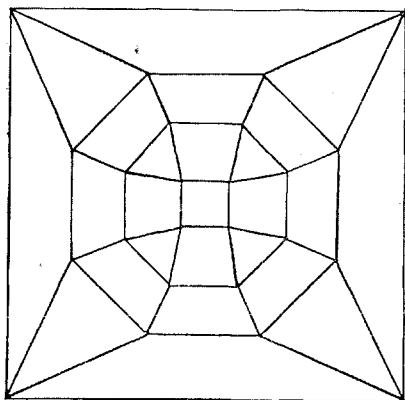
C_{111}^1	C_{111}^2	C_{111}^3	C_{111}^4	C_{121}^1	C_{121}^2	C_{121}^3	C_{121}^4
$3_{11}^1, \dots, 4_{21}^1$	$4_{11}^1, \dots, 3_{11}^1$	$4_{21}^3, \dots, 4_{11}^1$	$4_{21}^2, \dots, 4_{21}^3$	$3_{11}^3, \dots, 4_{11}^2$	$4_{11}^3, \dots, 3_{11}^3$	$4_{31}^1, \dots, 4_{11}^3$	$4_{21}^1, \dots, 4_{31}^1$
$3_{11}^2, 4_{21}^1, \dots$	$4_{11}^2, 3_{11}^1, \dots$	$4_{21}^4, 4_{11}^4, \dots$	$4_{21}^1, 4_{21}^2, \dots$	$3_{11}^1, 4_{11}^1, \dots$	$4_{11}^4, 3_{11}^2, \dots$	$4_{31}^1, 4_{11}^2, \dots$	$4_{11}^3, 4_{31}^1, \dots$
C_{131}^1	C_{121}^4	C_{131}^3	C_{111}^3	C_{111}^1	C_{131}^4	C_{121}^3	C_{121}^2

C_{122}^1	C_{122}^2	C_{122}^3	C_{122}^4	C_{131}^1	C_{131}^2	C_{131}^3	C_{131}^4
$3_{12}^1, \dots, 4_{12}^2$	$4_{13}^1, \dots, 3_{12}^1$	$4_{31}^1, \dots, 4_{13}^1$	$4_{13}^2, \dots, 4_{31}^1$	$3_{11}^2, \dots, 4_{11}^4$	$4_{21}^1, \dots, 3_{11}^3$	$4_{21}^4, \dots, 4_{21}^1$	$4_{11}^4, \dots, 4_{21}^4$
$3_{12}^1, 4_{13}^1, \dots$	$4_{13}^2, 3_{12}^1, \dots$	$4_{31}^1, 4_{13}^2, \dots$	$4_{13}^1, 4_{31}^1, \dots$	$3_{11}^3, 4_{11}^3, \dots$	$4_{21}^2, 3_{11}^1, \dots$	$4_{21}^1, 4_{21}^4, \dots$	$4_{11}^1, 4_{21}^3, \dots$
C_{122}^1	C_{122}^4	C_{122}^3	C_{122}^2	C_{121}^1	C_{111}^4	C_{131}^2	C_{111}^2

to se možemo lako uvjeriti, da ta čvorišta trećeg reda čine dva potpuna sistema, i to: C_{111} , C_{121} i C_{131} čine prvi potpuni sistem, a C_{122} čini drugi potpuni sistem. S obzirom na drugi potpuni sistem, što ga daje čvorište C_{122} , nismo morali ni ići do trećeg reda čvorišta, jer već čvorište drugog reda C_{12} čini samo za se potpuni sistem, koji se onda dalje u čvorištu C_{122} nastavlja. Vidimo dakle, da u tom slučaju postoje dvije mreže ravnine $R_1 [3, 4, 4, 4]$ (sl. 22.) i $R_2 [3, 4, 4, 4]$ (sl. 23.) za prvi, odnosno drugi potpuni sistem.



Sl. 22.



Sl. 23.

Iz tih potpunih sistema vidimo ujedno, da kod mreže R_1 postoje tri različite vrste čvorišta n -tog reda ($n > 1$), dok su kod mreže R_2 sva čvorišta n -tog reda istovrsna. Možemo to izreći i tako, da je mreža R_2 »promatrana sa svakog svog čvorišta jednaka«, dok za mrežu R_1 to ne vrijedi.

Tako smo pregledali sve moguće slučajeve homogenih mreža parabolične i sferne ravnine, a riješili smo i pitanje egzistencije za neke slučajeve takvih mreža hiperbolične ravnine. Vidjeli smo pri tom, da su homogene mreže parabolične i sferne ravnine svojim ciklusom jednoznačno određene, osim u četiri izuzetna slučaja, gdje za isti ciklus postoje dvije moguće mreže, a i te dvije moguće mreže samo su u jednom slučaju bitno različite, a u tri preostala jedna su drugoj simetrične.

No ne će biti uvijek tako jednostavno riješiti pitanje dokaza egzistencije homogene mreže hiperbolične ravnine s ciklusom druge vrste. Stvarno će biti moguće dokazati egzistenciju takve mreže samo u takvim slučajevima, gdje možemo primijeniti stavak XV., pa i to ne će uvijek biti sasvim lako.

Tako se u mnogim slučajevima homogenih mreža hiperbolične ravnine s ciklusom druge vrste broj poligona i čvorišta višeg reda zajedno s redom naglo povećava i tim daljnje ispitivanje postaje nepregledno i praktički nemoguće, no u tim će slučajevima za jedan određeni ciklus biti očito vrlo mnogo — sigurno i neizmjereno mnogo — mogućih međusobno različitih homogenih mreža.

Kao primjer za ove tvrdnje uzmimo cikluse

$$C \equiv [3, 4, 3, 6, 3, 8]; \quad C \equiv [5, 4, 4, 4]; \quad C \equiv [3, 5, 5, 5].$$

Lako se možemo uvjeriti, da prvi od tih ciklusa daje dva moguća čvorišta drugog reda, od kojih svako za sebe čini potpuni sistem, pa prema tome za taj ciklus postoje dvije moguće međusobno različite homogene mreže.

Za ciklus $C \equiv [5, 4, 4, 4]$ postoji jedno čvorište prvog reda

$$C_1 \equiv (5, 4, 4, 4),$$

četiri poligona prvog reda:

$$4_1 \equiv (C_1^2, C_1^4, C_1^2, C_1^4); \quad 4_2 \equiv (C_1^2, C_1^4, C_1^3, C_1^3);$$

$$4_3 \equiv (C_1^3, C_1^3, C_1^3, C_1^3); \quad 5_1 \equiv (C_1^1, C_1^1, C_1^1, C_1^1).$$

Ovi poligoni daju tri čvorišta drugog reda:

$$C_{11} \equiv (5_1^1, 4_1^1, 4_2^3, 4_2^2); \quad C_{12} \equiv (5_1^1, 4_1^1, 4_3^1, 4_4^2);$$

$$C_{13} \equiv (5_1^1, 4_2^1, 4_2^4, 4_1^2),$$

zatim postoji osam poligona drugog reda:

$$\begin{aligned} 4_{11} &\equiv (C_{11}^2, C_{12}^4, C_{12}^2, C_{13}^4); & 4_{12} &\equiv (C_{11}^2, C_{13}^4, C_{11}^2, C_{13}^4); \\ 4_{13} &\equiv (C_{12}^2, C_{12}^4, C_{12}^2, C_{12}^4); & 4_{21} &\equiv (C_{13}^2, C_{11}^4, C_{11}^3, C_{13}^3); \\ 4_{31} &\equiv (C_{12}^3, C_{12}^3, C_{12}^3, C_{12}^3); & 5_{11} &\equiv (C_{11}^1, C_{13}^1, C_{11}^1, C_{13}^1, C_{12}^1); \\ 5_{12} &\equiv (C_{11}^1, C_{13}^1, C_{12}^1, C_{12}^1, C_{12}^1); & 5_{13} &\equiv (C_{12}^1, C_{12}^1, C_{12}^1, C_{12}^1, C_{12}^1). \end{aligned}$$

Od tih poligona dobivamo ovih jedanaest čvorišta trećeg reda:

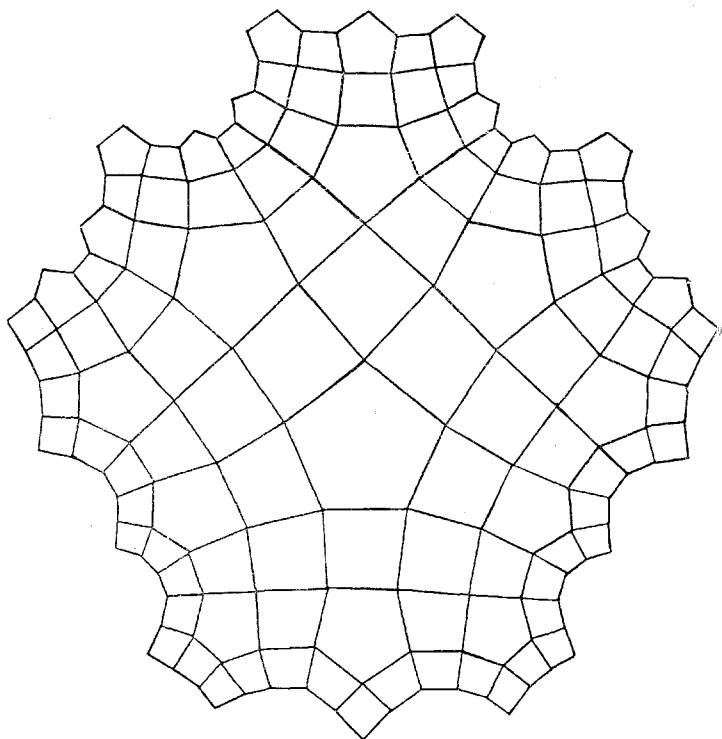
$$\begin{aligned} C_{111} &\equiv (5_{11}^1, 4_{11}^1, 4_{21}^3, 4_{21}^2); & C_{112} &\equiv (5_{11}^3, 4_{12}^1, 4_{21}^3, 4_{21}^2); \\ C_{113} &\equiv (5_{12}^1, 4_{11}^1, 4_{21}^3, 4_{21}^2); & C_{121} &\equiv (5_{11}^5, 4_{11}^3, 4_{31}^1, 4_{11}^2); \\ C_{122} &\equiv (5_{12}^3, 4_{11}^2, 4_{31}^1, 4_{13}^2); & C_{123} &\equiv (5_{12}^4, 4_{13}^1, 4_{31}^1, 4_{13}^2); \\ C_{124} &\equiv (5_{12}^5, 4_{13}^1, 4_{31}^1, 4_{11}^2); & C_{125} &\equiv (5_{13}^1, 4_{13}^1, 4_{31}^1, 4_{13}^2); \\ C_{131} &\equiv (5_{11}^2, 4_{21}^1, 4_{21}^4, 4_{12}^2); & C_{132} &\equiv (5_{11}^4, 4_{21}^1, 4_{21}^4, 4_{11}^4); \\ C_{133} &\equiv (5_{12}^2, 4_{21}^1, 4_{21}^4, 4_{11}^4). \end{aligned}$$

Broj poligona trećeg reda iznosi već 41. i t. d. Vidimo prema tome, da broj poligona i čvorišta višeg reda s redom naglo raste, a da ipak ta čvorišta ne možemo svrstati u potpune sisteme. No možemo naći među njima ipak jedno čvorište, koje samo za se čini potpuni sistem, a to je čvorište drugog reda C_{12} , koje se dalje nastavlja kao potpuni sistem u čvorištu trećeg reda C_{125} i t. d. (vidi sl. 24., koja predočuje čvorište četvrtog reda C_{1251} za taj potpuni sistem).

Vjerojatno je prema tome, da za taj ciklus postoji beskonačno mnogo mogućih međusobno različitih homogenih mreža ravnine, no nađenim potpunim sistemom je dokazano, da sigurno postoji barem jedna od njih.

Uzmimo još ciklus $C \equiv [3, 5, 5, 5]$. Tu postoji jedno čvorište prvog reda, četiri poligona prvog reda, deset čvorišta drugog reda, a broj poligona drugog reda već će iznositi više stotina, i tim daljnje ispitivanje postaje nepregledno.

Konačno preostaje još slučaj homogenih mreža eliptične ravnine. Metrika u sfernoj i eliptičnoj ravnini je jednaka, pa zato i nužni uvjet (14)³⁾ za obje te ravnine jednako glasi. No geometrije tih ravnina u njihovoj cjelini nisu identične, jer



Sl. 24.

eliptična ravnina nije sfernoj topološki ekvivalentna. Razlikuju se one u karakteristikici, a osim toga, dok je sfernu ravninu moguće orijentirati, eliptičnu nije moguće. Kako smo u izvodima ove radnje, počevši od paragrafa 6. dalje pretpostavljali, da se promatrane mreže dadu orijentirati, ne možemo dobivene rezultate neposredno primijeniti na mreže eliptične ravnine. Potrebno će biti zato napose ispitati, koje su od homogenih mreža sferne ravnine moguće i u eliptičnoj ravnini.

Budući da je sferna ravnina homeomorfna kuglinoj plohi, to će i svakoj pravilnoj homogenoj mreži sferne ravnine odgovarati jedna pravilna homogena mreža kugline plohe (a time i jedan Platonov ili Arhimedov, odnosno polupravlilan istoplošni poliedar). No kako je eliptična ravnina homeomorfna kuglinoj plohi, kod koje su dijametralno suprotne točke identificirane, očito je, da će biti moguće homogene mreže eliptične ravnine samo za one cikluse, za koje su pripadne pravilne homogene mreže kugline plohe centralno simetrične s obzirom na središte kugle.

Od svih homogenih mreža sferne ravnine bit će prema tome u eliptičnoj ravnini moguće samo one mreže, koje pripadaju ovim ciklusima: $[4, 4, 4]$; $[5, 5, 5]$; $[3, 3, 3, 3]$; $[3, 3, 3, 3, 3]$; $[3, 8, 8]$; $[3, 10, 10]$; $[4, 6, 6]$; $[4, 4, n]$ (samo za tãki n); $[5, 6, 6]$; $[3, 4, 4, 4]$ (samo jedna mreža i to za drugi potpuni sistem ÷vorišta); $[3, 4, 3, 4]$; $[3, 5, 3, 5]$; $[3, 3, 3, n]$ (samo za lihi n); $[4, 6, 8]$; $[4, 6, 10]$ i $[3, 4, 5, 4]$.

Shematski prikazane su pravilne homogene mreže eliptične ravnine na kraju ove radnje, pa su tamo identične točke označene jednakim slovima.

13. PROCESI KOJI PRETVARAJU JEDNU PRAVILNU HOMOGENU MREŽU RAVNINE U DRUGU

Nužni uvjeti (14) i za pravilne R -mreže ravnine i pravilne Q -mreže ravnine jesu jednaki. Iako dakle kod definicija 19.^a i 19.^b ne postoji više ona potpuna dualnost kao u definiciji 10., očito je, da među tim mrežama mora postojati neka uža neposredna veza. Dokazat ćemo doista, da se iz svake pravilne mreže ravnine $R[n_i, n_i, n_i, \dots, n_i]$ može konstruirati pravilna mreža ravnine $Q[n_i, n_i, n_i, \dots, n_i]$, ali i obratno.

Uzmimo, da postoji pravilna mreža, ravnine $R[C]$. Na toj mreži izvest ćemo ovu elementarnu konstrukciju: središte svakog poligona spojiti ćemo sa središtem svih susjednih poligona. Tvrdimo, da tako konstruirane dužine čine mrežu ravnine $Q[C]$. Opisanoj konstrukciji nazvat ćemo » q -procesom«, pa ćemo gornju tvrdnju pisati simbolički

$$q(R[C]) \equiv Q[C].$$

Tu ćemo tvrdnju ukratko dokazati; pokazat ćemo, da su ispunjeni uvjeti definicije 19.^b. Ponajprije će sve tako konstruirane dužine u jednom n -terokutu R -mreže, kao simetrale

stranica pravilnog poligona, činiti u njegovom središtu pravilno n -struko čvorište. Osim toga će sve konstruirane dužine oko svakog čvorišta R -mreže — jer su sva ta čvorišta kongruentna — zatvarati tangentne poligone, međusobno kongruentne, s polumjerom upisane kružnice, koji je jednak polovici stranice R -mreže. Pri tom će ciklus $[n_1, n_2, n_3, \dots, n_s]$ novih čvorišta, incidentnih s jednim novim poligonom, biti jednak ciklusu $[n_1, n_2, n_3, \dots, n_s]$ starih poligona incidentnih s jednim čvorištem R -mreže. Dakle će nova mreža biti pravilna mreža $Q[n_1, n_2, n_3, \dots, n_s]$, pa je time tvrdnja dokazana.

Istim procesom prelazi i Q -mreža u R -mrežu, t. j. vrijedi simbolička relacija

$$Q(Q[C]) \equiv R[C].$$

pa se i ta tvrdnja može slično dokazati.

Definirat ćemo sada još neke elementarne konstrukcije, pomoću kojih prelaze pravilne mreže s jednom vrstom poligona (odnosno čvorišta) u pravilne mreže s više vrsta poligona (odnosno čvorišta). Te su konstrukcije gotovo očevidne, pa ćemo ih dati bez dokaza.

π -proces. Ako u pravilnoj mreži R $\overbrace{[p, p, p, \dots, p]}^{k\text{-članova}}$ konstruiramo dužine, koje spajaju čvorišta sa središtima svih s njima incidentnih poligona, te spojnice čine mrežu $Q[p, k, p, k]$ ili simbolički

$$\pi(R \overbrace{[p, p, p, \dots, p]}^{k\text{-članova}}) \equiv Q[p, k, p, k].$$

ϑ -proces¹. Ako u pravilnoj mreži R $[p, p, p, \dots, p]$ konstruiramo dužine, koje u svakom poligonu spajaju polovišta susjednih stranica, tako konstruirane dužine čine mrežu

$$R[p, k, p, k]$$

ili simbolički

$$\vartheta(R \overbrace{[p, p, p, \dots, p]}^{k\text{-članova}}) \equiv R[p, k, p, k]$$

σ -proces. Dodamo li stranicama mreže R $\overbrace{[p, p, p, \dots, p]}^{k\text{-članova}}$ dužine, koje spajaju središta svakog para susjednih poligona, dobivamo mrežu $Q[p, 4, k, 4]$ ili simbolički

$$\sigma(R \overbrace{[p, p, p, \dots, p]}^{k\text{-članova}}) \equiv Q[p, 4, k, 4].$$

¹ Vidi: Steinitz-Rademacher, Theorie der Polyeder, § 47.

τ -proces. Dodamo li stranicama mreže $R \overbrace{[p, p, p, \dots, p]}^{k\text{-članova}}$ dužine, koje spajaju svako čvorište sa središtima s njim incidentnih poligona, dobivamo mrežu $Q [p, 2k, 2k]$ ili simbolički

$$\tau \overbrace{(R [p, p, p, \dots, p])}^{k\text{-članova}} \equiv Q [p, 2k, 2k]$$

ω -proces. Izvedemo li na mreži $R \overbrace{[p, p, p, \dots, p]}^{k\text{-članova}}$ istodobno oba procesa σ i τ , dobivamo mrežu $Q [2p, 4, 2k]$. Simbolički ćemo to pisati:

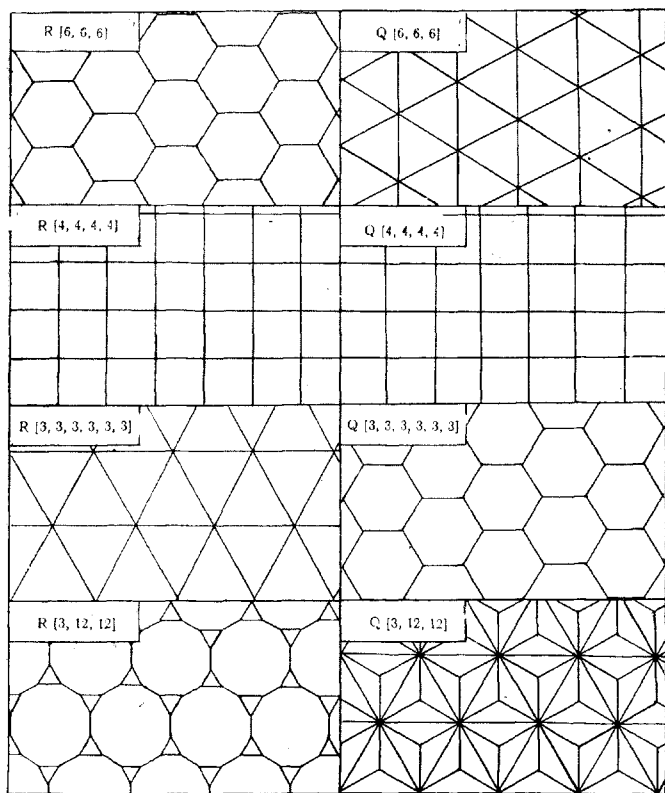
$$\sigma + \tau \equiv \omega$$

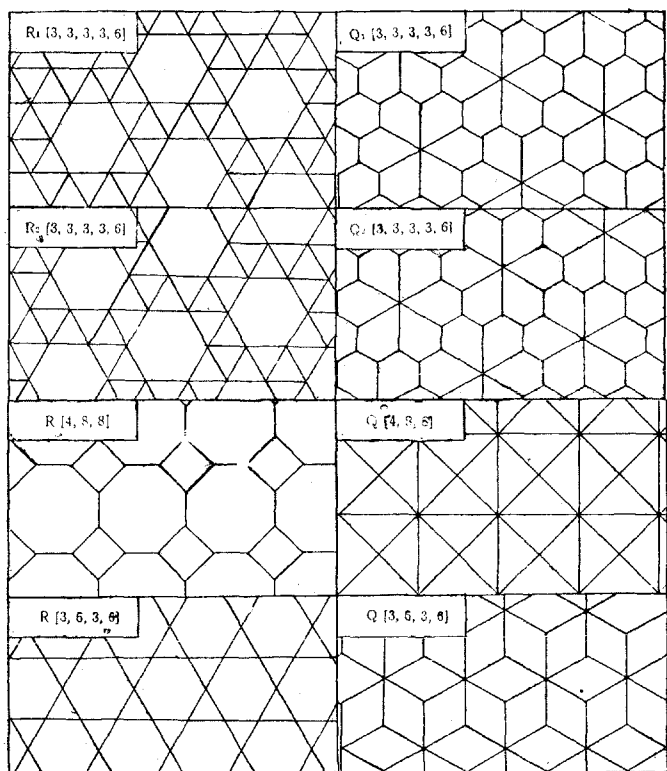
$$\omega \overbrace{(R [p, p, p, \dots, p])}^{k\text{-članova}} \equiv Q [2p, 4, 2k].$$

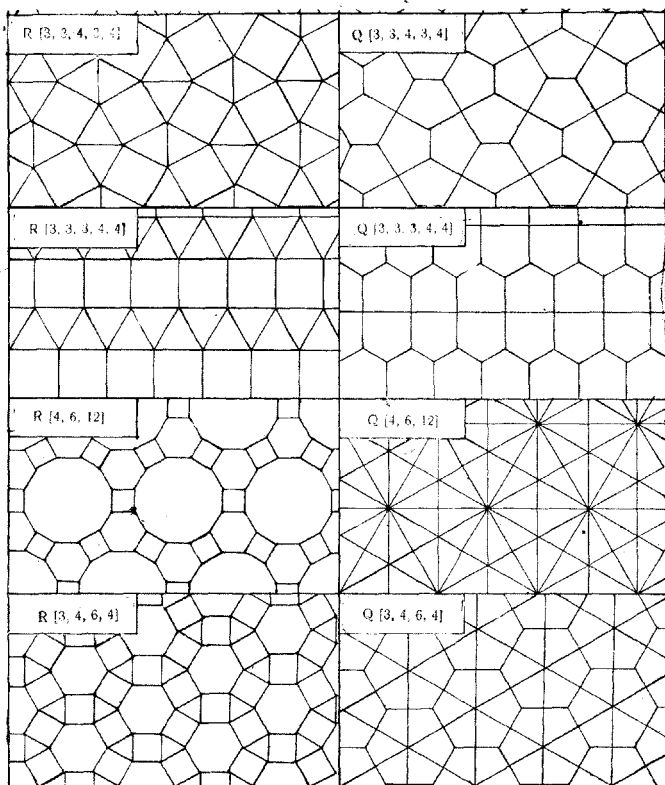
Ovim ovdje opisanim elementarnim konstrukcijama nisu dakako navedene sve mogućnosti takvih procesa, koji pretvaraju pojedine pravilne homogene mreže jedne u druge, nego ih i više takvih možemo zamisliti.

Svakako ćemo se često moći poslužiti definiranim procesima kod konstrukcija zamršenijih pravilnih homogenih mreža. Tako možemo na pr. lako razabrati, da iz pravilnih R -mreža s jednom vrstom poligona možemo uz pomoć spomenutih procesa nacrtati sve pravilne homogene mreže parabolične i sferne ravnine s izuzetkom od nekoliko mreža, i to onih, koje pripadaju ciklusima $[3, 3, p, 3, q]$; $[3, 3, 3, 4, 4]$; $[4, 4, n]$; $[3, 3, 3, n]$ i $[3, 4, 4, 4]$ (samo za prvi potpuni sistem).

PRAVILNE HOMOGENE MREŽE
PARABOLIČNE RAVNINE

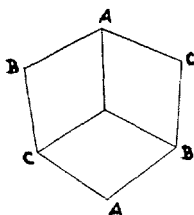




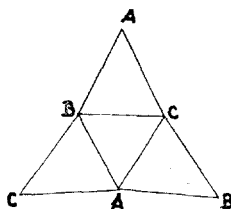


SHEMATSKI CRTEŽI
PRAVILNIH HOMOGENIH MREŽA ELIPTIČNE RAVNINE

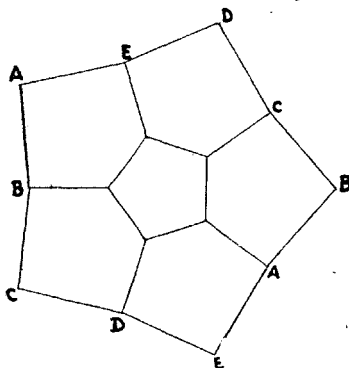
$R [4, 4, 4]$



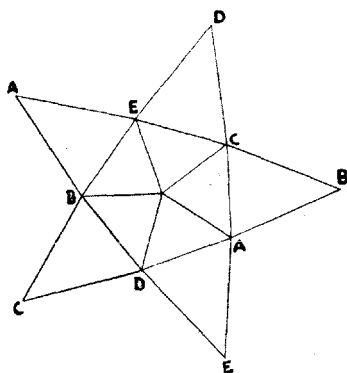
$Q [4, 4, 4]$



$R [5, 5, 5]$



$Q [5, 5, 5]$



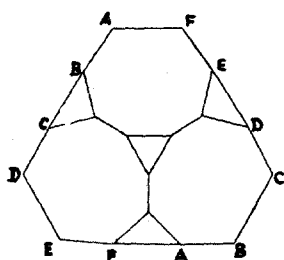
$R [3, 3, 3, 3] \equiv Q [4, 4, 4]$

$Q [3, 3, 3, 3] \equiv R [4, 4, 4]$

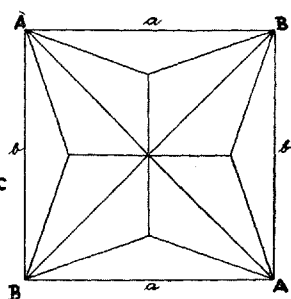
$R [3, 3, 3, 3, 3] \equiv Q [5, 5, 5]$

$Q [3, 3, 3, 3, 3] \equiv R [5, 5, 5]$

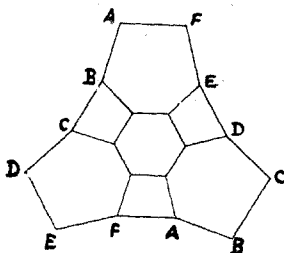
$R[3, 8, 8]$



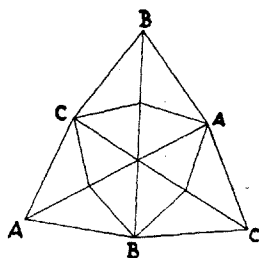
$Q[3, 8, 8]$



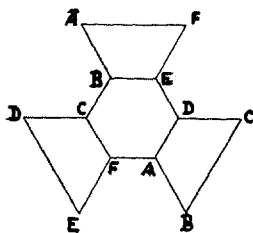
$R[4, 6, 6]$



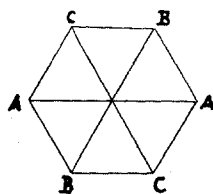
$Q[4, 6, 6]$



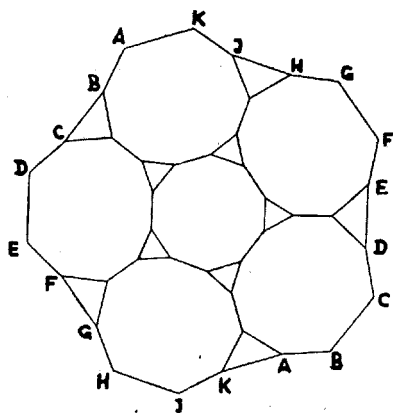
$R[4, 4, n]$ (na pr. $n=6$)



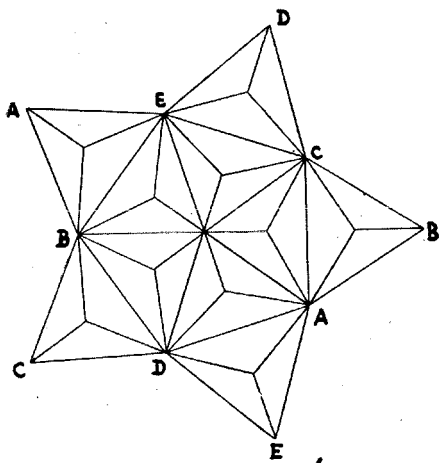
$Q[4, 4, n]$ (na pr. $n=6$)



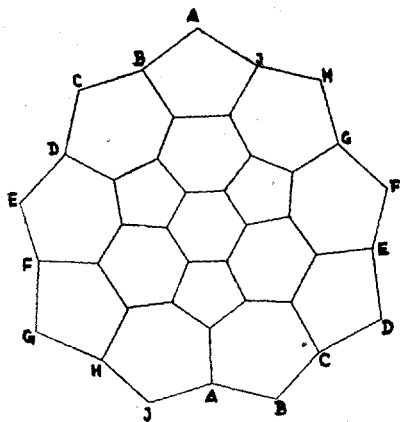
$R [3, 10, 10]$



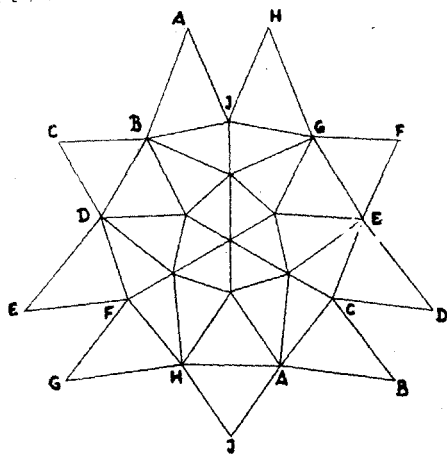
$Q [3, 10, 10]$



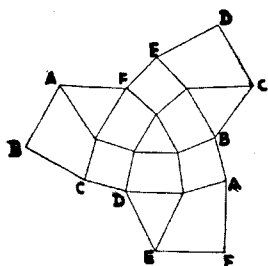
$R [5, 6, 6]$



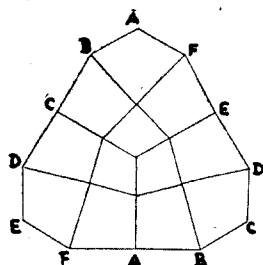
$Q [5, 6, 6]$



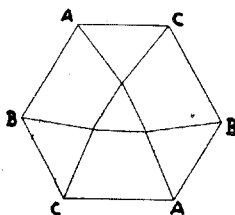
$R[3, 4, 4, 4]$



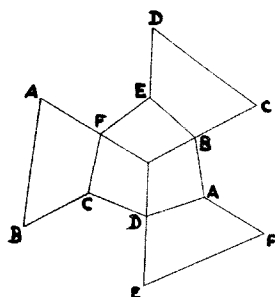
$Q[3, 4, 4, 4]$



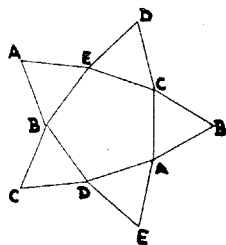
$R[3, 4, 3, 4]$



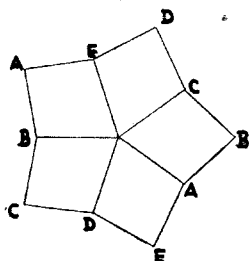
$Q[3, 4, 3, 4]$



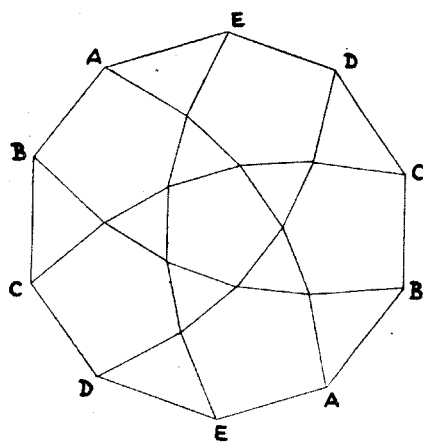
$R[3, 3, 3n] \text{ (na pr. } n=5)$



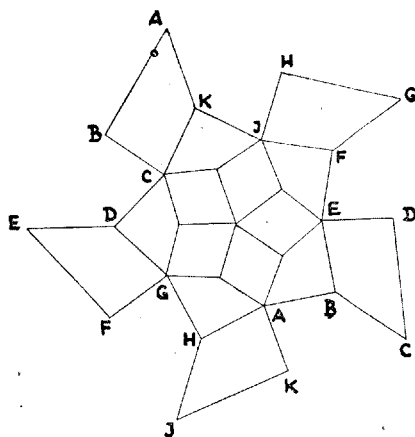
$Q[3, 3, 3n] \text{ (na pr. } n=5)$



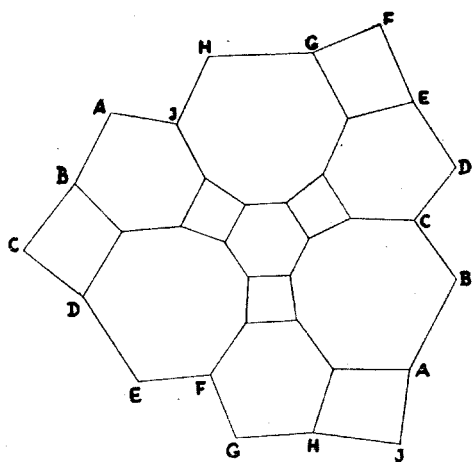
$R[3, 5, 3, 5]$



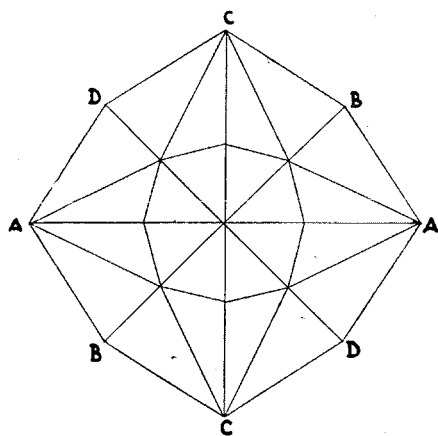
$Q[3, 5, 3, 5]$



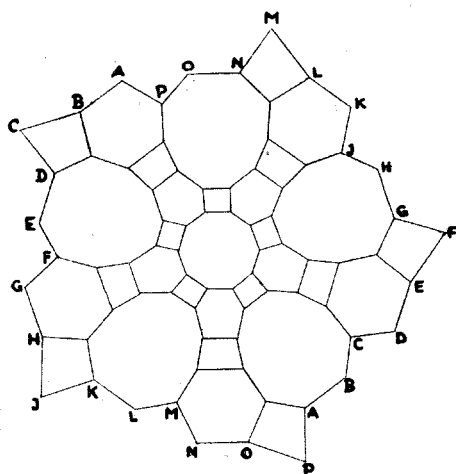
$R [4, 6, 8]$



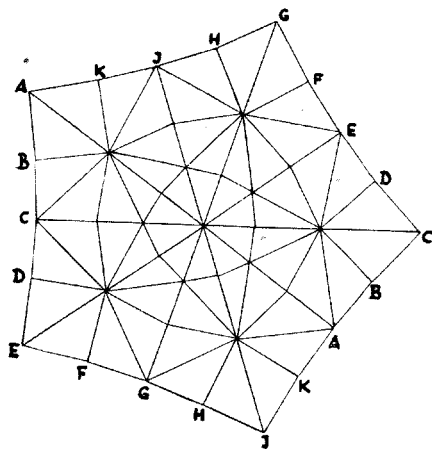
$Q [4, 6, 8]$



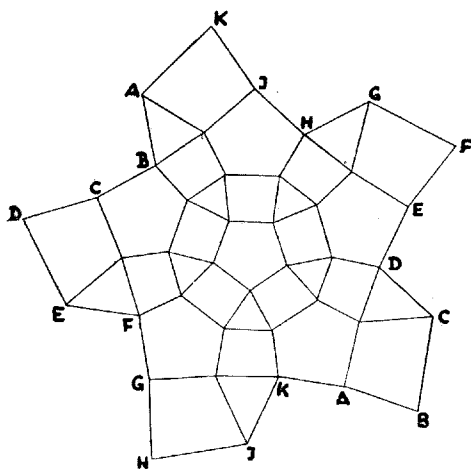
$R[4, 6, 10]$



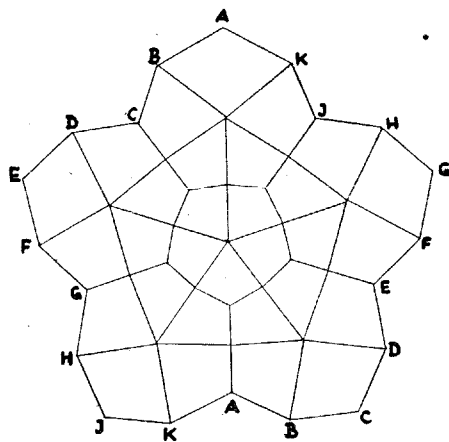
$Q[4, 6, 10]$



$R [3, 4, 5, 4]$



$Q [3, 4, 5, 4]$



LITERATURA

- [1] R. Cesàre: Über die Berechnung von Orthogonalen der hyperbolischen Ebene, Sitzungsber. der Heidelberger Akad. der Wiss., 1932.
- [2] H. Heesch: Über topologisch reguläre Teilungen geschlossener Flächen, Nachrichten von der Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen, Math. Phys. Kl., 1932., str. 268—273.
- [3] H. Heesch: Aufbau der Ebene aus kongruenten Bereichen, Nachrichten von der Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen, Math. Phys. Kl., Fachgruppe I. Math., Neue Folge, Bd. I., Nr. 6., 1935.
- [4] F. Laves: Ebenenteilung und Koordinationszahl, Zeitschrift für Kristallographie, Bd. 78., 1931., str. 208—241.
- [5] W. Nowacki: Homogene Raumteilung und Kristallstruktur, Zürich, 1935.
- [6] K. Reinhardt: Über die Zerlegung der Ebene in Polygone, Frankfurt a. M., 1918.
- [7] K. Reinhardt: Über die Zerlegung der hyperbolischen Ebene in konvexe Polygone, Jahresber. der Deutsch. Math. Ver., Bd. 37., 1928., str. 330—332.
- [8] K. Reinhardt: Zur Zerlegung der Euklidischen Räume in kongruente Polytope, Sitzungsber. der Preuss. Ak. d. Wiss., Math. Phys. Kl., 1928., str. 150—155.
- [9] E. Roeser: Über die regulären hyperbolischen Polyeder mit unendlich vielen Flächen, Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver., Bd. 43., 1934., str. 78.
- [10] R. Sauer: Ebene gleichseitige Polygongitter, Jahresber. der Deutsch. Math. Ver., Bd. 47., 1937., str. 115—124.
- [11] U. Sinogowitz: Die Kreislagen und Packungen kongruenter Kreise in der Ebene, Zeitschrift für Kristallographie, Bd. 100., 1939., str. 461.
- [12] D. M. Y. Sommerville: Semi-regular networks of the plane in absolute geometry, Transactions of the Royal Society of Edinburgh, Vol. XLI, Part III, No. 29., Edinburgh, 1905.
- [13] А. Пубников: Къ вопросу о стрессии кристалловъ. Известия Императорской Академии Наукъ, 1916., стр. 755—779.

S A D R Ź A J

Dr. H. IVEKOVIĆ i Dr. F. MIKIĆ:	
O primjeni statističkih metoda u analitičkoj kemiji	5
Dr. VILIM NIČE:	
Četverostruki fokus unikurzalnih cirkularnih krivulja 3. reda i neki osobiti pramenovi tih krivulja	25
Dr. VILIM NIČE:	
O cirkularnim krivuljama 4. reda roda nultoga s neizmjenno dalekom dvostrukom točkom	33
Dr. STANKO MIHOLIĆ:	
Određivanje natrija kao natrijeva uranil-magnezijeva acetata	42
Dr. VLADIMIR S. VRKLJAN:	
Prilog izvođenju magnetskoga momenta elektrona i pozitrona . . .	45
Dr. F. MIKIĆ:	
Korekcija Halley-eve metode sastavljanja tablica rednica umi- ranja	55
Dr. ing. DANILO BLANUŠA:	
Jedna vrst integralnih teorema Bessellovih funkcija	83
Dr. STANKO BILINSKI:	
Homogene mreže ravnine	145

ŠTAMPARSKI ZAVOD "OGNJEŃ PRICA", ZAGREB

