

Dr. V. S. VRKLJAN

O MAGNETSKOM MOMENTU MEZONA SA SPINOM 1

Poznato je, da su za objašnjenje nekih svojstava mezona (spin, magnetski moment) postavljene izvjesne teorije u okviru valne mehanike. Tako na pr. *L. de Broglie*¹ nastoji poznatom metodom fuzije matrica² dobiti iz *Diracove* teorije elektrona i pozitrona (dakle čestica sa spinom $1/2$) svoju teoriju za čestice sa spinom 1 (foton, neki mezoni³), pa čak i za čestice s povoljnim spinom⁴. Problem magnetskoga momenta mezonu sa spinom 1 u okviru spomenute *de Brogliejeve* teorije, a primjenom *Darwinove* metode valnog paketa⁵ nastojao je nedavno riješiti pisac ovih redaka⁶ pripisujući kod toga *Diracove* valne funkcije pojedinim česticama, koje fuzijom tvore mezon i upotrebivši kod toga kvadratske hermitske matrice 16 reda sa 16 elemenata, različitih od nule. Zadatak je ovoga rada da se odredi magnetski momenat mezonu primjenom općenitijih matrica (kod dosadanjeg računa spomenutih 16 od nule različitih elemenata u svakoj matrici bili su — realne ili imaginarne — jedinice) i pripisujući kod toga čitavomu mezonu kao cjelini valne funkcije po uzoru *de Brogliea*⁷ umjesto da se pripiše,

¹ *L. de Broglie*, Particules à spin, 1943 i La théorie du noyau, II, 1945, str. 66—70.

² *Born-Jordan*, Element. Quantenmechanik, 1930, str. 75.

³ *L. de Broglie*, Particules à spin, 1943, str. 93—137. Budući da bi prema najnovijim izvještajima imao izvjesnim mezonima (t. zv. μ -mezonima) pripadati spin $1/2$ (isp.: *R. E. Marshak*, Phys. Rev. 1949, 75, str. 700—701 i *J. A. Wheeler and J. Thiomno*, Phys. Rev. 1949, 75, str. 1306), jasno je, da se gornji izvodi odnose samo na one mezone, kojima bi se mogao pripisati spin 1.

⁴ *L. de Broglie*, Particules à spin, 1943, str. 138—157.

⁵ *L. de Broglie*, L'Électron magnétique, 1934, str. 167—173.

⁶ *U Proceedings of the Indian Academy of Sciences*, XXX, 1949, str. 205—210.

⁷ *L. de Broglie*, Particules à spin, 1943, str. 112.

kako je to naprijed spomenuto, *Diracove* valne funkcije pojedinim česticama, koje bi po *de Broglieu* imale fuzijom tvoriti mezon.

Da se ne mora pisati eksplicite osam matrica 16 reda, što bi zapremilo velik prostor, napisat ćemo ponajprije *Diracove* matrice u obliku

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g^* \\ g^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 & 0 \end{vmatrix} & \alpha_2 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -ig \\ 0 & 0 & -ig^* & 0 \\ 0 & ig & 0 & 0 \\ ig^* & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \alpha_3 &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & g \\ 0 & 0 & -g^* & 0 \\ 0 & -g & 0 & 0 \\ g^* & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} & \alpha_4 &= \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (1)$$

i iz njih poznatom metodom *L. de Brogliea*, t. j. definicijama

$$(\alpha_r)_{kl, mn} = (\alpha_r)_{km} \delta_{ln}, \quad (b_r)_{kl, mn} = (\alpha_r)_{ln} \delta_{km} \quad (r, k, l, m, n = 1, 2, 3, 4) \quad (2)$$

gdje nam δ_{km} označuje poznati *Kroneckerov* simbol

$$\delta_{km} = \begin{cases} 1 & (k = m) \\ 0 & (k \neq m), \end{cases}$$

odrediti ukupno osam matrica 16 reda, koje onda određuju oblik diferencijalnih jednadžbi mezona. Kako je u tim matricama g povoljan kompleksni broj i vezan samo na uvjet

$$g \cdot g^* = 1, \quad (3)$$

gdje g^* znači konjugirano-kompleksnu vrijednost od g , to nam matrice (1), odnosno matrice (2) zamjenjuju zapravo beskonačno mnogo posebnih matrica. Kao primjer takve veličine g , koja zadovoljava relaciju (3), može se navesti $g = \frac{p_0 - i q_0}{\sqrt{p_0^2 + q_0^2}}$, gdje su p_0 i q_0 realni brojevi po volji, dok je i imaginarna jedinica.

Onda *de Brogliejeve* jednadžbe za mezon izvan elektromagnetskoga polja glase

$$\left\{ \frac{\hbar}{i} \left(a_1 \frac{\partial}{\partial x} + a_2 \frac{\partial}{\partial y} + a_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) + a_4 \mu_0 c + \frac{\hbar}{ic} \frac{\partial}{\partial t} \right\} \Psi_{kl} = 0$$

(k, l = 1, 2, 3, 4) (3a)

i

$$\left\{ \frac{\hbar}{i} \left(b_1 \frac{\partial}{\partial x} + b_2 \frac{\partial}{\partial y} + b_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) + b_4 \mu_0 c + \frac{\hbar}{ic} \frac{\partial}{\partial t} \right\} \dot{\Psi}_{kl} = 0$$

(k, l = 1, 2, 3, 4) (3b)

Ovdje znači $\hbar$ *Planckovu* konstantu, dividiranu s 2π , c brzinu svjetlosti u vakuumu, dok je μ_0 masa mezona u stanju mirovanja (odn. praktički kod malenih brzina). Ψ_{kl} su *de Brogliejeve* valne funkcije mezona. Nadalje *de Brogliejev* izraz za gustoću struje vjerojatnosti (odnosno statističku gustoću struje čestice po *Sommerfeldu*)

$$\vec{j} = \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 \vec{\Psi}_{kl}^* \frac{\vec{a} b_l + \vec{b} a_l}{2} \Psi_{kl}, \quad (4)$$

gdje nam $\vec{\Psi}_{kl}^*$ označuje konjugirano-kompleksnu vrijednost od Ψ_{kl} , vodi s obzirom na matrice (1) i (2) na pr. na ovaj izraz za x -komponentu statističke gustoće električne struje nabita mezona (naboj mezona $\varepsilon = \pm e$)

$$j_x = \frac{\varepsilon c}{2} \left\{ g [(\vec{\Psi}_{31}^* + \vec{\Psi}_{13}^*) \Psi_{33} + \vec{\Psi}_{41}^* \Psi_{43} + \vec{\Psi}_{14}^* \Psi_{34} + \vec{\Psi}_{43}^* \Psi_{23} + \vec{\Psi}_{34}^* \Psi_{32} + \right. \\ \left. + \vec{\Psi}_{44}^* (\Psi_{42} + \Psi_{24})] + g [(\vec{\Psi}_{32}^* \Psi_{34} + (\vec{\Psi}_{42}^* + \vec{\Psi}_{24}^*) \Psi_{44} + \vec{\Psi}_{23}^* \Psi_{43} + \right. \\ \left. + \vec{\Psi}_{33}^* (\Psi_{13} + \Psi_{31}) + \vec{\Psi}_{43}^* \Psi_{41} + \vec{\Psi}_{34}^* \Psi_{14}] \right\} \quad (5)$$

Analogne izraze dobili bismo i za y - i z -komponentu statističke gustoće električne struje nabita mezona. U izrazu za j pod (4) izostavljeni su svi oni produkti $\vec{\Psi}_{kl}^* \Psi_{mn}$, gdje su dva ili više od dva indeksa (između k, l, m, n) manji od 3, a razlog je tomu ovaj: Ako sve valne funkcije Ψ_{kl} , koje imaju $k, l = 3, 4$, izrazimo pomoću *Darwinovih* valnih paketa

$$\Psi_{kl} = A_{kl} e^{-\frac{(x-v_x t)^2 + (y-v_y t)^2 + (z-v_z t)^2}{2\sigma_0^2}} e^{\frac{i}{\hbar} (p_x x + p_y y + p_z z - Ut)}, \quad (6)$$

gdje su v_x , v_y i v_z komponente grupne brzine valnog paketa, p_x , p_y i p_z komponente pripadnih impulza⁸, a U energija čestice, onda možemo iz devete, desete, trinaeste i četrnaeste jednačbe (3a), pa nadalje iz treće, četvrte, sedme i osme jednačbe (b) odrediti one valne funkcije Ψ_{kl} , kod kojih je jedan indeks između k i l veći od 2, a drugi manji od 3. Tako dobivamo primjenom već iz *Diracove* teorije elektrona i pozitrone poznatog postupka⁹ u *Newtonovoj* približnosti i za momenat $t = 0$

$$\begin{aligned}\Psi_{13} &= \frac{g}{2\mu_0 c} \left(A_{33} p_x - i A_{43} p_y + A_{43} p_z + \hbar \frac{i A_{33} x + A_{43} y + i A_{43} z}{\sigma_0^2} \right) P \\ \Psi_{23} &= \frac{g}{2\mu_0 c} \left(A_{43} p_x - i A_{33} p_y - A_{33} p_z + \hbar \frac{i A_{43} x + A_{33} y - i A_{33} z}{\sigma_0^2} \right) P \\ \Psi_{14} &= \frac{g}{2\mu_0 c} \left(A_{34} p_x - i A_{44} p_y + A_{44} p_z + \hbar \frac{i A_{34} x + A_{44} y + i A_{44} z}{\sigma_0^2} \right) P \\ \Psi_{24} &= \frac{g}{2\mu_0 c} \left(A_{44} p_x - i A_{34} p_y - A_{34} p_z + \hbar \frac{i A_{44} x + A_{34} y - i A_{34} z}{\sigma_0^2} \right) P \\ \Psi_{31} &= \frac{g}{2\mu_0 c} \left(A_{33} p_x - i A_{34} p_y + A_{34} p_z + \hbar \frac{i A_{33} x + A_{34} y + i A_{34} z}{\sigma_0^2} \right) P \\ \Psi_{41} &= \frac{g}{2\mu_0 c} \left(A_{43} p_x - i A_{44} p_y + A_{44} p_z + \hbar \frac{i A_{43} x + A_{44} y + i A_{44} z}{\sigma_0^2} \right) P \\ \Psi_{32} &= \frac{g}{2\mu_0 c} \left(A_{34} p_x - i A_{33} p_y - A_{33} p_z + \hbar \frac{i A_{34} x + A_{33} y - i A_{33} z}{\sigma_0^2} \right) P \\ \Psi_{42} &= \frac{g}{2\mu_0 c} \left(A_{44} p_x - i A_{43} p_y - A_{43} p_z + \hbar \frac{i A_{44} x + A_{43} y - i A_{43} z}{\sigma_0^2} \right) P,\end{aligned}\tag{7}$$

⁸ Dakako da se time ne misli reći, da komponente impulza čestice imaju neke posve određene vrijednosti; uistinu postoje samo izvjesne vjerovatnosti za njihovu veličinu (isp.: L. de Broglie, Einf. in die Wellenmechanik, 1929, str. 145). Valja još istaknuti, da veličina σ_0 u jednačbama (6) znači praktično proširenje valnog paketa.

Primijetiti valja još, da broj povoljnih veličina A iznosi ukupno 4 (L. de Broglie, Particules à spin, 1943, str. 164).

⁹ Vidi citat pod ⁵ i osim toga: C. Schaefer, Phys., **III-2**, str. 469—470, 1937.

gdje nam P označuje izraz

$$e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{\sigma_0^2}} e^{\frac{i}{\hbar} (p_x x + p_y y + p_z z)}$$

Iz izraza pod (7) razabiramo, da su tim izrazima određene valne funkcije malene prema onima, koje su određene jednadžbama (6), i to zbog toga, što imaju u nazivniku $2\mu_0 c^2$, a toga one valne funkcije u (6) nemaju. Stoga prema običaju, poznatom iz *Diracove* teorije, nazivamo funkcije, navedene pod (6) velikima, a one navedene pod (7) malenim valnim funkcijama. Razabiramo jednim pogledom na (7), da sve ovdje navedene valne funkcije imaju jedan indeks manji od 3, a drugi veći od 2. Iz jednadžbi pak (3a) i (3b) lako bismo se uvjerali, da su one valne funkcije, koje imaju obadva indeksa manja od 3, još manje [zapravo neznatne prema onima pod (7)], pak ih možemo u računu zanemariti.

Primjena izraza pod (6) i (7) u jednadžbi (5) vodi nas do ove jednadžbe za x -komponentu statističke gustoće električne struje nabita mezona

$$\begin{aligned} j_x = & \left\{ (\dot{A}_{33} A_{33} + \dot{A}_{43} A_{43} + \dot{A}_{34} A_{34} + \dot{A}_{44} A_{44}) \epsilon v_x + \right. \\ & + \frac{\epsilon \hbar}{2\mu_0} \left[(\dot{A}_{33} + \dot{A}_{44}) (A_{34} + A_{43}) + (\dot{A}_{34} + \dot{A}_{43}) (A_{33} + A_{44}) \right] \frac{y}{\sigma_0^2} - \\ & - i \frac{\epsilon \hbar}{2\mu_0} \left[(\dot{A}_{44} - \dot{A}_{33}) (A_{34} + A_{43}) + \right. \\ & \left. + (\dot{A}_{34} + \dot{A}_{43}) (A_{33} - A_{44}) \right] \frac{z}{\sigma_0^2} \left. \right\} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{\sigma_0^2}}, \quad (8a) \end{aligned}$$

odnosno, ako primijenimo matematičke identitete

$$\begin{aligned} \frac{y}{\sigma_0^2} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{\sigma_0^2}} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{\sigma_0^2}} \right), \\ \frac{z}{\sigma_0^2} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{\sigma_0^2}} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left(e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{\sigma_0^2}} \right) \end{aligned}$$

poznate već iz *Diracove* teorije elektrona i pozitrona,

$$\begin{aligned}
j_x = & \left\{ (\dot{A}_{33} A_{33} + \dot{A}_{43} A_{43} + \dot{A}_{34} A_{34} + \dot{A}_{44} A_{44}) \varepsilon v_x + \right. \\
& + \frac{\varepsilon \hbar}{4 \mu_0} \left[- \left\{ (\dot{A}_{33} + \dot{A}_{44}) (A_{34} + A_{43}) - (\dot{A}_{34} + \dot{A}_{43}) (A_{33} + A_{44}) \right\} \frac{\partial}{\partial y} - \right. \\
& - i \left\{ (\dot{A}_{33} - \dot{A}_{44}) (A_{34} + A_{43}) + \right. \\
& \left. \left. + (\dot{A}_{34} + \dot{A}_{43}) (A_{44} - A_{33}) \right\} \frac{\partial}{\partial z} \right] \left. \right\} e^{-\frac{x^2 + y^2 + z^2}{\sigma_0^2}}. \quad (8b)
\end{aligned}$$

Analognim postupkom dobili bismo i y - i z -komponentu statističke gustoće električne struje nabita mezona. Iz triju komponenata statističke gustoće električne struje možemo u analogiji s onim, što nam je poznato iz *Diracove* teorije elektrona i pozitrona¹⁰, napisati statističke srednje vrijednosti za pojedine komponente magnetskog momenta mezona; one su nakon normalizacije, provedene prema *de Brogliejevoj* jednadžbi za statističku gustoću čestice

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}_x &= \frac{\varepsilon \hbar}{4 \mu_0 c} \cdot \frac{2 (\dot{A}_{44} A_{44} - \dot{A}_{33} A_{33})}{\dot{A}_{33} A_{33} + \dot{A}_{43} A_{43} + \dot{A}_{34} A_{34} + \dot{A}_{44} A_{44}} \\
\mathfrak{M}_y &= \frac{\varepsilon \hbar}{4 \mu_0 c} \cdot i \frac{(\dot{A}_{33} - \dot{A}_{44}) (A_{34} + A_{43}) + (\dot{A}_{34} + \dot{A}_{43}) (A_{44} - A_{33})}{\dot{A}_{33} A_{33} + \dot{A}_{43} A_{43} + \dot{A}_{34} A_{34} + \dot{A}_{44} A_{44}} \\
\mathfrak{M}_z &= - \frac{\varepsilon \hbar}{4 \mu_0 c} \cdot \frac{(\dot{A}_{33} + \dot{A}_{44}) (A_{34} + A_{43}) + (\dot{A}_{34} + \dot{A}_{43}) (A_{33} + A_{44})}{\dot{A}_{33} A_{33} + \dot{A}_{43} A_{43} + \dot{A}_{34} A_{34} + \dot{A}_{44} A_{44}},
\end{aligned}$$

gdje nam $\dot{A}_{kl}$ označuje konjugirano-kompleksnu vrijednost od A_{kl} . Sam pak magnetski moment valnog paketa (koji nam daje neku slku mezona), dobivamo oдавde kvadriranjem i zbrajanjem komponenata (i vađenjem drugoga korijena iz dobivena kvadrata). Kod toga valja uvažiti, da je

$$\begin{aligned}
i^2 (A_{34} + A_{43})^2 (\dot{A}_{33} - \dot{A}_{44})^2 + (A_{34} + A_{43})^2 (\dot{A}_{33} + \dot{A}_{44})^2 = \\
= 4 \dot{A}_{33} \dot{A}_{44} (A_{34} + A_{43})^2
\end{aligned}$$

¹⁰ L. de Broglie, *L'Electron magnétique*, 1937, str. 173—177. — C. Schaefer, *Theor. Phys.* **III-2**, 1937, str. 471—473.

$$i^2 (\bar{A}_{34} + \bar{A}_{43})^2 (A_{44} - A_{33})^2 + (\bar{A}_{34} + \bar{A}_{43})^2 (A_{33} + A_{44})^2 =$$

$$= 4 A_{33} A_{44} (\bar{A}_{34} + \bar{A}_{43})^2 \quad (10)$$

$$2 (\bar{A}_{34} + \bar{A}_{43}) (A_{34} + A_{43}) i^2 (\bar{A}_{33} - \bar{A}_{44}) (A_{44} - A_{33}) +$$

$$+ 2 (\bar{A}_{34} + \bar{A}_{43}) (A_{34} + A_{43}) (\bar{A}_{33} + \bar{A}_{44}) (A_{33} + A_{44}) =$$

$$= 4 (\bar{A}_{33} A_{33} + \bar{A}_{44} A_{44}) (\bar{A}_{34} + \bar{A}_{43}) (A_{34} + A_{43})$$

Osim toga je prema *de Brogliejevoj* definiciji složenih valnih funkcija za čestice sa spinom 1 svakako

$$A_{33} A_{44} = A_{34} A_{43} \quad (11)$$

(to vrijedi i za konjugirano-kompleksne vrijednosti), pak zbog toga lako zaključujemo

$$4 (\bar{A}_{44} A_{44} - \bar{A}_{33} A_{33})^2 + 4 \bar{A}_{33} \bar{A}_{44} (A_{34} + A_{43})^2 =$$

$$= 4 (\bar{A}_{33}^2 A_{33}^2 + \bar{A}_{34}^2 A_{34}^2 + \bar{A}_{43}^2 A_{43}^2 + \bar{A}_{44}^2 A_{44}^2). \quad (12)$$

Uvedemo li pomoćnu hipotezu

$$A_{34} = A_{43} \quad (13)$$

(to vrijedi i za konjugirano-kompleksne vrijednosti), koja bi mogla imati svoje opravdanje u tome, što po *de Broglieju* obadvjema česticama, koje bi fuzijom imale tvoriti mezon, pripada jednaka masa u stanju mirovanja $\left(\frac{\mu_0}{2}\right)$ onda nam izrazi na desnoj strani posljednjih dviju jednačbi (10) daju upravo one dvostruke produkte, koji izraz na desnoj strani jednačbe (12) nadopunjuju na potpuni kvadrat. Tako konačno izlazi iz jednačbi (9) opisanim postupkom

$$|\mathcal{M}| = \frac{\epsilon \hbar}{2 \mu_0 c}, \quad (14)$$

što je apsolutni iznos magnetskog momenta mezona.

(Primljeno na sjednici Odjela za matematičke, fizičke
i tehničke nauke dne 24. II. 1950.)

