

RAD

JUGOSLAVENSKE AKADEMIJE

ZNANOSTI I UMJETNOSTI.

KNJIGA LXIV.

MATEMATIČKO-PRIRODOSLOVNI RAZRED.

II.

U ZAGREBU 1882.

U KNJIŽARNICI LAVOSLAVA HARTMANA NA PRODAJU.



Dionička tiskara u Zagrebu.

Sadržaj.

	Strana
O krivuljah u ravnini. Od dra. K. Zahradnika	1
Trahiti Fruške gore. Mikroskopičko iztraživanje prof. dra. M. Kišpatića	66
Zeleni škrljavec petrovaradinskog tunela i njihov kontakt sa trahitom. Od prof. dra. M. Kišpatića	87
Teorija parabole na temelju racionalnoga parametra. Od dra. K. Zahradnika	105
O ledenoj dobi sjeverne polutke naše zemlje. Od prof. M. Sekulića	153
Deset dana u Djakovu. Od Stjepana Schulzera Mügggenburžkoga	173
O svezcih i redovih čunjosjekâ. Od prof. J. S. Vanečeka	184
O obćenitih svezcih te redovih čunjosjekâ. Od prof. J. S. Vanečeka	187
O obćenitoj inversiji te o transformaciji pomoću reciprokih provodnica. Od prof. J. S. Vanečeka	194
K poznavanju lešinskih alkaloidâ. Od dra. G. Janečeka	199

0 krivuljah u ravnini.

*Čitao u sjednici matematičko-prirodoslovnoga razreda jugoslavenske akademije
znanosti i umjetnosti 4. siečnja 1882.*

DOPISUJUĆI ČLAN DR. K. ZAHRADNIK.

Prvi dio.

Tangencialne koordinate p , α .

1. Svaku krivulju možemo smatrati kao zamotaljku svojih tangenata. Pojedina tangenta opredjeljena je kutom α , što ga stvara¹ sa pozitivnim smjerom stanovite osi, te udaljenošću svojom p od neke čvrste točke O na ovoj osi, koju zovemo izhodištem surednica. Veličine α te p , buduć da nam opredjeljuju jednoznačno položaj tangente, možemo smatrati kao koordinate tangente. Svaka relacija medju p te α daje nama zakon ovisnosti promjene udaljenosti tangente od izhodišta o promjeni smjera, t. j. relaciju

$$F(p, \alpha) = 0$$

smatrati možemo jednačbom krivulje kao zamotaljke tangenata u koordinatah tangencialnih p , α .

U sljedećem bavit ćemo se sa krivuljama, koje možemo izraziti sa jednačbom u obliku razvijenom, naime

$$p = f(\alpha). \quad (1)$$

2. Tangenta imajući koordinate p , α , ima za jednačbu

$$T \equiv x \sin \alpha - y \cos \alpha - f(\alpha) = 0. \quad (2)$$

¹

$$\angle(TX) = \alpha = \frac{\pi}{2} - (pX),$$

te može se mienjati od $\alpha=0$ do $\alpha=360^\circ$. Položaj osi izabiremo uz uvjet, da rastućim kutom raste luk krivulje, te da kut raste u smislu analitičke geometrije od pozitivne osi X prema pozitivnoj osi Y. Čvrstu os označit ćemo sa os X te okomicu u izhodištu sa os Y.

Sravnimo li ovu jednačbu sa

$$x\xi + y\eta + 1 = 0,$$

dobivamo jednačbe zamotaljke tangenata u običnih tangencijalnih koordinatah:

$$\begin{aligned}\xi &= -\frac{\sin \alpha}{f(\alpha)} \\ \eta &= \frac{\cos \alpha}{f(\alpha)},\end{aligned}\tag{3}$$

od kojih bi smo došli do jednačbe ove krivulje u obliku $F(\xi, \eta) = 0$ eliminacijom promjenljive veličine α .

3. Nu iz jednačbe (1) možemo lahko doći do jednačbe zamotaljke u koordinatah istosmjernih. Budući da se dvije susjedne tangente na krivulji presjecaju, dobivamo jednačbe točke zamotaljke rješanjem jednačaba

$$T = 0, \quad \frac{dT}{d\alpha} = 0,$$

po x te y ; naime:

$$\begin{aligned}x &= \sin \alpha \, f(\alpha) + \cos \alpha \, f'(\alpha) \\ y &= -\cos \alpha \, f(\alpha) + \sin \alpha \, f'(\alpha),\end{aligned}\tag{4}$$

od kojih jednačba došli bi do jednačbe krivulje u obliku $F(x, y) = 0$ eliminacijom promjenljive veličine α . Da se sbilja tangenta T dotiča zamotaljke u točki (4), koju slovom M označismo, pokazati možemo na sljedeći način. Diferencijacija jednačaba (4) daje naime:

$$\begin{aligned}dx &= [f(\alpha) + f'(\alpha)] \cos \alpha \, d\alpha \\ dy &= [f(\alpha) + f'(\alpha)] \sin \alpha \, d\alpha,\end{aligned}\tag{5}$$

dakle je:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha,$$

t. j. tangenta T_m točke M ima smjer pravca T , koji ovom točkom ide; dakle je pravac T sam ovom tangentom.

Kod opredjelbe surednica točke zamotaljke upotriebili smo jednačbe $\frac{dT}{d\alpha} = 0$ mjesto jednačbe $T(\alpha + d\alpha) = 0$. Presjecištem tangenata $T(\alpha)$ i $T(\alpha + h)$ ide pravac

$$T(\alpha + h) - T(\alpha) = 0.$$

Lieva strana ove jednačbe ima h kao zajednički faktor, kojim možemo dakle prikratiti. Ovako dobivamo:

$$\frac{T(\alpha + h) - T(\alpha)}{h} = 0.$$

Za $\lim h = 0 = \lim \Delta x$ priedje ova jednačba u jednačbu

$$\frac{dT(\alpha)}{d\alpha} = 0,$$

koja nam dakle predočuje pravac idući presjecištem dviju susjednih tangenata

$$T(\alpha) = 0, \quad T(\alpha + d\alpha) = 0,$$

tim je jasno, zašto smo kod opredjelbe presjecišta dviju susjednih tangenata mjesto jednačbe $T(\alpha + d\alpha) = 0$ poslužiti se mogli jednačbom $\frac{dT}{d\alpha} = 0$, t. j.

$$T' \equiv x \cos \alpha + y \sin \alpha - f'(\alpha) = 0. \quad (6)$$

4. Jednačba (6) ima i svoj geometrički znamen. Jednačbom je pravca idućega diralištem M tangente T_m , te stojećega okomito na ovoj tangenti. Dakle je jednačbom normale zamotaljke u točki M , t. j.

$$\frac{dT_m}{d\alpha} \equiv T'_m \equiv N_m = 0.$$

Računamo li taj smjer normale točke M za pozitivan, koji odgovara pozitivnoj osi Y , svedemo li tangentu iste točke okretom u položaj istosmjern sa smjerom čvrste osi X , te označimo li kut, koji stvara pozitivan smjer normale sa pozitivnom osi X sa α_1 , računajući ga kao kut α od pozitivne osi X do pozitivne osi Y , te predpostavljajući, da se mienja na isti način kao kut α : biti će (lik 2):

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{2} + \alpha. \quad (7)$$

Uvedemo li sad smjer normale pomoću ove jednačbe u jednačbu normale (6), dobit ćemo:

$$N_m \equiv x \sin \alpha_1 - y \cos \alpha_1 - f' \left(\alpha_1 - \frac{\pi}{2} \right) = 0, \quad (8)$$

gdje je $f'(\alpha) = f' \left(\alpha_1 - \frac{\pi}{2} \right)$ okomita udaljenost p_1 normale od izhodišta.

Sad možemo i geometrički protumačiti jednačbe (4). Označimo li sa $P_r(p)_x$ projekciju pravca p u os X , je

$$\begin{aligned} x &= P_r(p)_x + P_r(p_1)_x \\ y &= P_r(p)_y + P_r(p_1)_y. \end{aligned}$$

Tangencialne koordinate u , α .

5. Na početku smo pokazali, da možemo veličine p , α smatrati kao koordinate tangente krivulje. Nu iz lika 1. poznajemo, da bi mjesto koordinate p mogli uzeti i udaljenost presjecišta A tangente T_m od izhodišta O. Ova je udaljenost

$$OA = u = \frac{p}{\sin \alpha}, \quad (9)$$

te jednačba

$$u = F(\alpha) \quad (10)$$

predočuje nama jednačbu zamotaljke tangenata (u, α) .

Za surednice dirališta M dobili bi u ovom sustavu tangencialnih koordinata pomoću jednačaba (3, 9):

$$\begin{aligned} x &= u + u' \sin \alpha \cos \alpha \\ y &= u' \sin^2 \alpha. \end{aligned} \quad (11)$$

6. Diralište tangente (u, α) je opredjeljeno, ako znademo duljinu tangente od presjecišta njezinog A sa osi počam do dirališta M, dakle AM, za koju duljinu će nam rabiti slovo t . Spojimo li dakle jednačbu (10) sa jednačbom

$$t = \Phi(\alpha),$$

možemo tim namah ka svakoj tangenti konstruirati i diralište. Nu buduć da već jednačba (10) krivulju kao zamotaljku tangenata podpuno opredjeljuje, mora biti moguće iz jednačbe (10) naći duljinu t tangente (u, α) . Sa opredjelbom duljine t suvisi dakle opredjelba dirališta M, koje je presjecište tangente (u, α) sa svojom susjednom tangentom $(u+du, \alpha+d\alpha)$. Ako su dakle M, M' dvie susjedne točke krivulje, $AM = t$, $A'M' = t + dt$ duljine tangenata ovih točaka, $\overline{MM'} = ds$ elemenat luka krivulje, koji ima ova krivulja zajednički sa tangentom T_m , to je $AM'A'$ trokut, kojega stranice jesu:

$$AM' = t + ds, \quad AA' = du, \quad A'M' = t + dt.$$

Sad je:

$$P_r(AA') = P_r(AM') + P_r(M'A'),$$

bila os projekcije koja mu drago. Uzmemo li za osi projekcije najprije tangentu točke M, potle normalu ove točke, dobivamo za prvu projekciju, predjemo li namah na limitu

$$\cos \alpha \cdot du = d(s-t). \quad (12)$$

Slično dobivamo projekcijom na normalu

$$\sin \alpha \, du = t \, d\alpha.$$

Iz zadnje jednačbe sledi namah :

$$t = \frac{du}{dz} \sin z \quad (13)$$

dakle je

$$t = F'(z) \sin z. \quad (14)$$

Iz jednačbe (14) sledi i geometrički sadržaj derivacije $\frac{du}{dz}$, koja, kako već iz homogeniteta jednačbe (14) proizlazi, mora da predodžuje pravac, te iz oblika ove jednačbe sledi, da je projekcija njezova na tangentu jednaka duljini tangente. Konstruirajmo dakle okomicu u točki A na os X; označimo li njezino presjecište sa normalom točke M slovom B (lik 3), to je:

$$AB = \frac{du}{dz} = \frac{t}{\sin z}.$$

7. Nu već smo bili primietili, da jednačba

$$u = F(z)$$

zamotaljku sasma karakterizira, time si možemo staviti pitanje, kako bi upravno putom geometričkim došli iz ove jednačbe do jednačbe krivulje u surednicah istosmjernih, i to do jednačba (11) te (4).

Iz lika (3) se vidi, da je

$$\begin{aligned} OP = x &= u + t \cos z \\ MP = y &= t \sin z. \end{aligned}$$

Sjetimo li se, da smo geometrički bili našli (9, 13):

$$\begin{aligned} u &= \frac{p}{\sin z} \\ t &= \frac{du}{dz} \sin z = \frac{p' \sin z - p \cos z}{\sin z}, \end{aligned}$$

dobit ćemo:

$$\begin{aligned} x &= \frac{p}{\sin z} + \frac{(p' \sin z - p \cos z) \cos z}{\sin z} = p \sin z + p' \cos z \\ y &= -p \cos z + p' \sin z, \end{aligned}$$

koje se jednačbe posvema slažu sa jednačbami (4), budući da je $p = f(z)$.

Na jednačbe (11) došli bi namah tim, kad bi stavili za t odgovarajuću vrijednost.

Jednačbi zamotaljke odgovara dakle jednačba

$$u = F(\alpha)$$

u tangencijalnih susednicah (u, α) , te jednačba

$$p = \sin \alpha F'(\alpha) = f'(\alpha)$$

u tangencijalnih susednicah (p, α) .

Duljina tangente, normale, subtangente, subnormale.

8. Duljinu tangente od njezinog presjecišta A do njezinoga dirališta M, dakle t , našli smo već u člancima 6. te 7., jest naime:

$$AM = t = p' - p \cot \alpha = u' \sin \alpha. \quad (17)$$

Dio tangente omeđen osi X te osi Y je

$$AE = -\frac{u}{\cos \alpha} = -\frac{p}{\sin \alpha \cos \alpha}. \quad (18)$$

Proznak — proizlazi već iz lika (4) time: da AE te AM jesu smjera obratnoga.

Primjetba. Obličak (18) sledi iz trokuta AEO; nu mogli smo rabiti i sličnost trokuta $\triangle AEO$, $\triangle MAP$, što nama daje

$$AE = \frac{AO \cdot AM}{AP} = -\frac{ut}{x-u}.$$

Uvedemo li pomoću jednačaba (11, 13) vrijednost za t i $(x-u)$, dobivamo opet kao prije

$$AE = -\frac{u}{\cos \alpha}.$$

Buduć da duljina AE ujedno svoj smjer mjenja (te tim i proznak) sa veličinom u , to je valjanost ovoga oblika za slučaj u liku (4) izražen, te i u obće uvidljiva.

9. Za duljinu normale od njezina presjecišta C sa osi X do nožišta M imamo:

$$CM = \frac{y}{\cos \alpha} = \frac{u' \sin^2 \alpha}{\cos \alpha}. \quad (19)$$

te za dio normale ležeći unutra osi X te Y, naime CD dobivamo:

$$CD = \frac{p'}{\sin \alpha \cos \alpha} = \frac{u}{\sin \alpha} + \frac{u'}{\cos \alpha}. \quad (20)$$

Ove duljine normale jesu pozitivne, sudara li se njihov smjer sa pozitivnim smjerom normale; u obratnom slučaju jesu negativne.

10. Duljina subtangente je projekcija duljine tangente do osi X; jest dakle, označimo li sa S_t ovu subtangentu.

$$S_t = AP = t \cos \alpha = u' \sin \alpha \cos \alpha. \quad (20)$$

Izadjemo li od identiteta

$$AP = OP - OA = x - u = y \cot z,$$

dobit ćemo s obzirom na jednačbe (4) izraz za subtangentu u surednicah tangencijalnih (p, α) , naime:

$$S_t = AP = (-p \cos z + p' \sin z) \cot z. \quad (21)$$

11. Duljinu subnormale dobivamo kao projekciju duljine normale na čvrstu os X . Jest dakle, označimo li sa S_n ovu subnormalu:

$$S_n = PC = y \operatorname{tg} z.$$

Obzirom na jednačbe (4) te (11) dobivamo vrijednost za subnormalu u koordinatah (p, α) , odnosno (u, z) , naime:

$$S_n = [-\cos z. p + \sin z. p'] \operatorname{tg} z = \frac{u' \sin^3 z}{\cos z}. \quad (22)$$

Što se tiče smjera subtangente te subnormale, valja pravilo, da jesu pozitivne ili negativne, prema tomu imaju li isti smjer čvrste osi ili jesu li smjera obratnoga.

12. Prije nego budemo dalje išli u teoriji ovih zamotaljka, ćemo pokazati porabu navedenih koordinata na rješitbu nekih zadaća.

Zadaća I. *Naći se ima krivulja, kojoj je dio tangente unutra osi X te Y funkcijom smjera tangente.*

Usljed jednačbe (18) je:

$$AE = \psi(\alpha) = -\frac{u}{\cos z},$$

gdje je $\psi(\alpha)$ dana funkcija smjera. Jest dakle:

$$u = -\psi(\alpha) \cos z$$

jednačba tražene krivulje u koordinatah (u, α) , pa tim je

$$p = -\psi(\alpha) \sin z \cos z$$

jednačba krivulje u koordinatah tangencijalnih (p, α) , te jednačba promjenljive tangente je:

$$x \sin z - y \cos z + \psi(\alpha) \sin z \cos z = 0.$$

Od ovakih krivulja ćemo pobliže promatrati slučaj, gdje je

$$\psi(\alpha) = a,$$

naime veličina stalna. U ovom slučaju bi mogli ovu zadaću na slijedeći način izraziti: „*Pravac stalne duljine a kliza se po pravom kutu; ima se naći zamotaljka svih njegovih položaja*“. Jednačba zamotaljke u koordinatah (u, α) je u ovom slučaju

$$u = -a \cos z,$$

te u koordinatah (p, α) je

$$p = -a \sin z \cos z.$$

Buduć da za $\alpha = 0$ je

$$u_0 = -a, \quad p_0 = 0, \quad t = 0,$$

sliedi, da čvrsta os X je tangentom ove krivulje, te da je $x = -a = OA_0$ (lik 5) abscisa njezinoga diralište.

Jednačba tangente T_α je (2):

$$x \sin \alpha - x \cos \alpha + a \sin \alpha \cos \alpha = 0.$$

Zamotaljka ovih tangenata ima u surednicah istosmjernih, sljedeće jednačbe (11):

$$\begin{aligned} x &= -a \cos \alpha + a \sin^2 \alpha \cos \alpha = -a \cos^3 \alpha \\ y &= a \sin^3 \alpha. \end{aligned}$$

Podignemo li na uzumnož jednaku $^{2/3}$ obie jednačbe,¹ dobit ćemo sbrojitbom

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

Jest dakle zamotaljka izražena jednačbom

$$u = -a \cos \alpha$$

asteroida.

Buduć da je

$$\frac{du}{d\alpha} = a \sin \alpha = AB,$$

te B točkom normale, sliedi, da nacrtamo li u točki A okomicu na os X duljine

$$AB = QE = a \sin \alpha,$$

je okomica iz točke B na tangentu T_α spuštena normalom, a nožište M ove okomice je diralište tangente.

¹ Obje jednačbe izraziti možemo sa ekvipolencijom

$$z = \frac{a}{4} \begin{pmatrix} -ia & 3ia \\ 3e & e \end{pmatrix}$$

gdje je

$$OM = z = x + iy.$$

Jest naime

$$-\cos^3 \alpha + i \sin^3 \alpha = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -ia & +ia \\ e & e \end{pmatrix}^3 - \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -3ia & 3ia \\ e & e \end{pmatrix}^3.$$

Iz ekvipolencije ote krivulje sliedi, da možemo ovu krivulju izvesti kombinacijom dvijuh gibanja rotacije o polumjerih $\frac{3a}{4}$ te $\frac{a}{4}$ sa istom absolutnom brzinom. Gled. *Bellavitis* — *Zahradnik* *Methoda equipolenci* pg. 101. Praha. 1874. Vlastitosti ove krivulje liepo jesu sastavljene od *Haton-a de la Goupillière* u *Nouvelles Annales de Mathématiques* II. Serie, dio 13 pg. 534, dio 19 pg. 94.

Za t bi našli:

$$\overline{AM} = t = a \sin^2 \alpha.$$

Nu budući da je

$$AE = OB = a,$$

leži B na krugu sa polumjerom a te sa središtem u izhodištu. Možemo dakle ovaj rezultat ovako izreći: „Spustimo li iz obodnice kruga okomice na dva okomita premjera, omotava spojnice nožišta $\overline{AE}$ tih okomica, imajući stalnu duljinu, naime polumjera danoga kruga, asteroidu.“

Krug opisani nad $\overline{BH}$ kao premjerom (lik 6) ide diralištem tangente AH, te možemo dokazati, da je:

$$\text{arc } \widehat{A_o B} = \text{arc } \widehat{MB}.$$

Jest naime, označimo li kut $MSB = \varepsilon$

$$\text{arc } \widehat{A_o B} = a \alpha, \quad \text{arc } \widehat{MB} = \frac{a \varepsilon}{4}.$$

Dalje je:

$$\sphericalangle BHA = 2 \sphericalangle EAO = 2 \sphericalangle BOA_o = 2 \alpha$$

$$\sphericalangle MSB = \varepsilon = 2 \sphericalangle BHA,$$

dakle je:

$$\varepsilon = 4 \alpha$$

te tim sblja je $a \alpha = \frac{a}{4} \varepsilon$.

Tim smo dokazali, da je, kao poznato asteroida hipocikloidom sa čvrstim krugom o polumjeru jednakim a te sa valjajućim krugom o polumjeru $\frac{a}{4}$.

II. *Imade se naći krivulja, kojoj tangente se od čvrste točke u istom omjeru udaljuju, u kojem raste kut njihova okreta.*

Uzmemo li onu čvrstu točku za izhodište, te tangentu iduću ovom točkom za os X, izrazimo navedenu vlastitost sljedećom jednačbom:

$$\frac{p}{\alpha} = a$$

gdje znači a stalni omjerni faktor.

Jest dakle

$$p = a \alpha$$

jednačba zamotaljke ovih tangenata u koordinatah tangencijalnih p, α , pa tim je

$$u = a \frac{\alpha}{\sin \alpha}$$

jednačbom iste zamotaljke u koordinatah (u, α) .

Jednačba promjenljive tangente glasi:

$$T_a \equiv x \sin z - y \cos z - a z = 0,$$

te jednačbe zamotaljke u koordinatah istomjernih (4) jesu:

$$x = a [\cos z + z \sin z]$$

$$y = a [\sin z - z \cos z],$$

iz kojih jednačba upoznajemo ovu zamotaljku kao *evolventu kruga* sa polumjerom jednakim veličini a te sa središtem u izhodištu (lik 7).

Jednačbe evolvente kruga možemo izraziti i jedinom jednačbom, naime:

$$OM = z = a (1 - zi) e^{zi},$$

gdje je $z = x + iy$, te $i = \sqrt{-1}$, koja jednačba nama izrazuje gore spomenutu vlastitost evolvente kruga.¹

Za $z = 0$ sudara se promjenljiva tangenta sa čvrstom osi, te diralište M_0 sa presječištem A_0 tangente sa istom osi; jest naime

$$x_0 = u_0 = OA_0 = a \lim_{\sin z} \frac{z}{\sin z} = a, \quad y_0 = 0.$$

Buduć da je udaljenost nožišta Q okomice p od dirališta odgovarajuće tangente T_a , dakle QM , jednaka udaljenosti izhodišta od normale N_a , naime $f'(z)$, sledi usljed jednačbe:

$$p = f'(z) = az,$$

da je

$$OS = QM = f'(z) = az,$$

naime stalan, zaključujemo, da normale naše krivulje zamotavaju krug, kojega je središte izhodište koordinata. Dakle je ta krivulja evolventom kruga.

Ovo je i geometrički jasno. Jest naime

$$SM = OQ = az,$$

dakle je:

$$\text{arc } SA_0 = SM. \quad \text{q. e. d.}$$

III. *Imade se naći zamotaljka pravca, koji se kreće ravnomjerno oko jednu svoju točku, dočim se ova točka ravnomjerno giblje po stanovitom pravcu.*

Uzmemo li za os X pravac, koji opisuje točka A promjenljive tangente (lik 8), jest diferencijalna jednačba ove zamotaljke u su-rednicah (u, α):

$$u' = 2a.$$

¹ Gl. Bellavitis-Zahradnik „Methoda equipollenci“, pg. 93. Praha 1874.

Konstanta integracije ima vrijednost ničice, uzmemo li onaj položaj točke A za izhodište, kada se tangenta promjenljiva sudara sa osi X; biti će dakle

$$u = 2 a \alpha$$

jednačbom krivulje u surednicah (u , α), te tim je njezina jednačba u surednicah tangencialnih (p , α)

$$p = 2 a \alpha \sin \alpha.$$

Jednačbe ove krivulje¹ u surednicah istomjernih (4 ili 11) jesu

$$x = 2 a (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha) = a (2 \alpha + \sin 2 \alpha)$$

$$y = 2 a \sin^2 \alpha = a (1 - \cos 2 \alpha).$$

Paralelno li pomaknemo sustav koordinata do dirališta tangente odgovarajuće smjeru $\alpha = \frac{\pi}{2}$, dakle do točke O' ($a\pi$, $2a$), te okrenemo li potom ovaj sustav koordinata za $-\pi$, koja zadnja transformacija se već tim obavi, da u jednačbah krivulje x sa $-x_1$, te obratno y sa $-y_1$ zamijenimo, dobit ćemo:

$$y_1 = a (1 + \cos 2 \alpha)$$

$$x_1 = -a (2 \alpha - \pi + \sin 2 \alpha).$$

Pišemo li konačno

$$2 \alpha - \pi = -\varphi,$$

t. j. uvedemo li kut $\angle MSB = \varphi$ (gl. lik 8) mjesto kuta α , naći ćemo

$$y_1 = a (1 - \cos \varphi)$$

$$x_1 = a (\varphi - \sin \varphi),$$

naime jednačbe obične cikloide, gdje znači veličina a polumjer valjajućega kruga.

Jesu dakle

$$u = 2 a \alpha, \quad p = 2 a \alpha \sin \alpha$$

jednačbe *cikloide obične* u tangencialnih koordinatah u , α odnosno p , α .

Geometrički sadržaj diferencijalnog omjera u' jest nama poznat (čl. 6); jest naime

$$u' = AB = 2 a.$$

Dana li je dakle tangenta T_α , konstruirajmo u presjecištu njezinom A sa osi okomicu duljine

$$AB = 2 a.$$

¹ Možemo opet ovu krivulju izraziti jedinom jednačbom naime

$$OM = z = a (2 \alpha - i e^{2i\alpha}),$$

koja ekvipolencija nama kaže, da gibanje tvorive točke M sastoji iz ravnomjernoga gibanja te gibanja u krugu sa istom brzinom, što baš karakteriše cikloidu. Na ovoj vlastitosti temelji se *Robervalova* konstrukcija tangente cikloide u nekoj njezinoj točki M.

Okomica iz točke B na tangentu daje nama normalu N_α , te nožište M ove okomice diralište tangente. Iz toga opet sledi konstrukcija tangente te normale neke točke krivulje, ako je krivulja nacrtana kao mjesto točaka. Budući da je $OG=AB$, konstruirajmo nad OG kao premjerom krug, prenesimo točku M paralelno k osi na taj krug, te ju označimo u novom položaju sa M' ; OM' biti će smjer tangente, GM' smjer normale točke M.

Ista konstrukcija sledi iz izraza za duljinu tangente

$$t = AM = 2a \sin z,$$

koji nama kaže, da, ako bi za svaku točku M učinili

$$OM \equiv AM$$

je mjesto krajnjih točaka M' krug sa polumjerom a , dirajući os X u izhodištu. Da pomoću toga kruga nadjemo smjer tangente te normale koje god točke cikloide već smo bili upoznali, nu možemo i dodati, da bi ga jednako rabiti mogli za opredjelbu dirališta M tangente T_α .

Iz jednačbe krivulje

$$u = 2a z$$

možemo i drugu karakterističku vlastitost cikloide izvesti, koja nama obično služi kao geometrička definicija iste krivulje. Jest naime

$$BO' = OG' - OA = 2a \cdot \frac{\pi}{2} - 2az = a(\pi - 2z).$$

Krug nad $\overline{AB}$ kao premjerom opisan, mora da ide točkom M. Ako je S središte tog kruga, je

$$\text{arc } BM = a\varphi,$$

te budući da je

$$\varphi = \pi - 2z,$$

sledi:

$$\text{arc } BM = BO'. \quad \text{q. e. d.}$$

IV. *Imade se naći krivulja, kojoj je subnormala stalna veličina.*

Je li a ova stalna veličina, je obzirom na jednačbu (22) diferencijalna jednačba krivulje

$$\frac{u' \sin^3 z}{\cos z} = a.$$

Integral ove diferencijalne jednačbe je, znači li λ konstantu integracije

$$u = \lambda - \frac{a}{2} \frac{1}{\sin^2 z}.$$

Konstanta integracije proteže se na položaj izhodišta surednica na osi. Izaberemo li za os Y tangentu okomitu na os, dakle presječište ove tangente sa os X za izhodište, biti će za $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $u = 0$, dakle

$$\lambda = \frac{a}{2}$$

za ovako iztaknuto izhodište, te

$$u = -\frac{a}{2} \cot^2 \alpha$$

jednačbom krivulje u tangencijalnih surednicah (u , α),

$$p = -\frac{a}{2} \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha}$$

jednačba ove krivulje u tangencijalnih surednicah (p , α).

Buduć da se izraz za u ne mienja, pišemo li $-\alpha$ za α , je čvrsta os osi simetrije ove krivulje. Jednačbe ove krivulje u istomjernih koordinatah (11) jesu :

$$x = \frac{a}{2} \cot^2 \alpha$$

$$y = a \cot \alpha,$$

ili izlučimo promjenljivicu α :

$$y^2 = 2ax.$$

Jest dakle tražena krivulja *parabolom*, te dana stalna veličina je parametar parabole.

Prema tomu, što smo o tangenti te njezinom kutu α sa osi X na početku bili spomenuli, iztvora točka M parabolu u smislu MOK.

Buduć da je subtangenta

$$S_t = AP = a \cot^2 \alpha$$

sliedi, da je

$$AP = 2OP = 2AO = 2x$$

t. j. tangenta okomita prema osi X razpolavlja sve subtangente krivulje, ili drugom shvatu, uzev ovo rezpolovište za izhodište koordinata, kako smo to gore bili učinili: subtangenta parabole jednaka je dvostrukoj abscisi dirališta odgovarajuće tangente. Ova vlastitost, kao što i ona od koje smo kao definicije bili iššli, pružaju nama jednostavnu konstrukciju tangente i normale koje god točke, ako je krivulja narisana. Diralište M tangente T_α možemo iz diferencijalne jednačbe krivulje opredjeliti. Jest naime

$$u' = AB = \frac{a \cos \alpha}{\sin^3 \alpha}.$$

Konstrukcija duljine AB je jednostavna (lik 10); odmjerimo na tangenti T_α od točke A počam duljinu stalnu $a = AL$. Projicirajmo ju sada u os X, što nama daje $AG = a \cos \alpha$. Konstruirajmo okomicu u točki A na T_α , i u točki G na os X; ove dvie okomice presjecaju se u točki H_1 , te je

$$AH_1 = \frac{AG}{\sin \alpha} = \frac{a \cos \alpha}{\sin \alpha};$$

dalje povučimo $H_1 H_2 \parallel T_\alpha$ te $H_2 H_3 \parallel LG$, što nama daje

$$AH_2 = \frac{a \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}, \quad AH_3 = \frac{a \cos \alpha}{\sin^3 \alpha},$$

jest dakle duljina AH_3 jednaka duljini AB. Okomica iz točke B na T_α daje nama normalu N_α , a njezino nožište M je traženo diralište. Tim je subtangenta

$$S_t = AP$$

a razpolovište O subtangente je diralište tangente okomite na os (vršna tangenta parabole), te

$$OF = \frac{PC}{2} = \frac{a}{2}$$

je abscisa gorišta parabole t. j. točka F je gorište.

Iz ovoga upoznajemo, da možemo iz diferencijalne jednačbe ove krivulje u tangencijalnih koordinatah (u, α) sve razviti.

Još jednostavnija konstrukcija dirališta tangente sledi iz relacije medju duljinom normale te subnormalom. Dobijemo naime, znači li n duljinu normale,

$$S_n = a = n \sin \alpha.$$

Odmjerimo (lik 11) $AK = a$ na osi X. Okomica u K na os X presjeca okomicu u A na T_α u točki R, te

$$AR = \frac{a}{\sin \alpha} = n.$$

Povučemo li dakle točkom R istomjernicu sa T_α , dobivamo kao presjecište sa os X točku C, koja je ujedno presjecištem normale sa osi X; dakle je okomica točke C na T_α normalom N_α , te nožište M diralištem tangente.

V. *Imade se naći krivulja sa stalnom subtangentom.*

Jednačba diferencijalna tražene krivulje je u tangencijalnih koordinatah sliedeća (22):

$$S_t = \overline{AP} = u' \sin \alpha \cos \alpha = a,$$

dakle, označimo li sa λ konstantu integracije,

$$u = \lambda + a \int \frac{dz}{\sin z \cos z} = \lambda + \text{altg} z$$

jednačbom krivulje. Budući da λ ima samo upliv na položaj izhodišta na osi, to ga izaberemo uz uvjet, da je za $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $u = -a$.

Biti će dakle

$$u = \text{altg} z - a$$

jednačbom krivulje u koordinatah tangencijalnih (u , α).

Jednačbe krivulje u istomjernih koordinatah jesu (11):

$$x = a \text{ltg} z$$

$$y = a \text{tg} z.$$

Izlučimo li z iz ovih jednačaba, dobit ćemo:

$$x = a \text{al} \frac{y}{a},$$

ili

$$y = a e^{\frac{x}{a}}.$$

Jest dakle tražena krivulja *logaritmička krivulja*.

Surednice dirališta tangente $T_{\frac{\pi}{4}}$ jesu (lik 12) $x=0$, $y=MO=a$.

Nu ako nebi unapred položaj izhodišta surednica odlučili, dobili bi za jednačbe krivulje

$$x = \lambda + a + \text{altg} z$$

$$y = a \text{tg} z.$$

Eliminacijom veličine z dobivamo, stavimo li

$$\frac{\lambda + a}{a}$$

$$b = a e^{\frac{x}{a}},$$

za jednačbu krivulje

$$y = b e^{\frac{x}{a}}.$$

Jest dakle vrijednost konstante b ovisna samo o izboru izhodišta, te sgodnim izborom izhodišta dobiva, kao što smo prije učinili, vrijednost jednaku a (budući da $\lambda = -a$). Neima dakle konstanta b upliva na razmjer krivulje.

VI. *Imade se naći krivulja te vlastitosti, da je omjer duljina normale te tangente ležećih unutra osi X te Y konstantan.*

Označimo li sa k absolutnu vrijednost ovoga omjera, je diferencialna jednačba tražene krivulje u surednicah p , α (18, 20).

$$\frac{p'}{p} = k.$$

Integracijom dobit ćemo :

$$lp = C + kz,$$

ili dademo li konstanti integracije oblik

$$C = la,$$

biti će jednačba krivulje

$$p = ae^{kz}.$$

Jednačba promjenljive tangente je prema tomu :

$$T_\alpha \equiv x \sin z - y \cos z - ae^{kz} = 0,$$

te jednačbe krivulje u surednicah istosmjernih (4) jesu :

$$x = ae^{kz} (\sin z + k \cos z)$$

$$y = ae^{kz} (-\cos z + k \sin z).$$

Predjemo li na surednice polarne tim da pišemo :

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

dobivamo :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = ae^{kz} \sqrt{1 + k^2}$$

te

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x} = \frac{-\cos z + k \sin z}{\sin z + k \cos z}.$$

Stavimo li :

$$k = \cot \beta,$$

možemo zadnju jednačbu pisati

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{tg} (\alpha - \beta),$$

iz čega namah proizlazi, da je

$$\beta = \alpha - \theta.$$

Nu α je kut tangente T_α sa osi X, te θ kut provodnica dirališta ove tangente sa osi X, dakle je $\alpha - \theta$ kut, što ga zatvara provodnica neke točke krivulje sa tangentom iste točke, nu budući da je taj kut β (lik 13) stalni, sledi, da je tražena krivulja *logaritmička spirala*. Uvedemo li vrijednost za α , naime

$$\alpha = \beta + \theta,$$

u izraz za provodnicu, dobit ćemo

$$r = a \sqrt{1 + k^2} e^{(\beta + \theta)k}$$

ili

$$r = a_1 e^{k\theta}$$

staviv

$$a_1 = a \sqrt{1 + k^2} e^{\beta k}$$

dakle običnu jednačbu *logaritmičke spirale*.

Poznato, da bi dobili istu spiralu, ako bi veličinu a_1 zamienili drugom kojom veličinom b t. j. ako bi pisali

$$r = b e^{k\theta},$$

ovo samo znači, da smo čvrstu os, koja ide polom krivulje, okrenuli za neki kut γ . Jednačba krivulje potegnute na ovu novu os biti će

$$r = a_1 e^{k(\theta + \gamma)}$$

Trebamo dakle

$$b = a_1 e^{k\gamma}$$

staviti, t. j. okrenuti os za kut

$$\gamma = \frac{1}{n} \ln \frac{b}{a_1}.$$

Za $\theta = 0$, je $r = OA_1 = a_1$. Raste li θ pri pozitivnom k od $-\infty$ do $+\infty$ dobit ćemo cijelu spiralu od pola njezinoga počam, za koji je $r = 0$, do bezkonačna; tangenta se rastućim kutem neprestano udaljuje od pola spirale.

Buduć da je

$$-\frac{CD}{AE} = \frac{p'}{p} = k$$

te duljine AE, CD jesu pozitivne, sudara li se njihov smjer sa pozitivnim smjerom tangente resp. normale, sledi, da za pozitivan k jesu duljine CD te AE obratnog proznaka (lik 14). Ako bi k bio negativan, to bi se rastućim kutem tangenta približavala ka polu spirale. Diralište opisuje u ovom slučaju spiralu od točke u bezkonačnosti do pola za $\theta = -\infty$ do $\theta = +\infty$, dakle u smislu obratnom kao prije (lik 15).

Okrene li se tangenta T_α za 2π , udalji se pri pozitivnom k za

$$p_{\alpha+2\pi} - p_\alpha = \Delta p_\alpha$$

od pola, dakle za

$$\Delta p_\alpha = p_\alpha (e^{2k\pi} - 1).$$

Prema tomu jest faktor prirasta udaljenosti tangente od pola za jedan potpun okret

$$e^{2k\pi} - 1,$$

neovisan o početnom položaju tangente naime o kutu α . Za udaljenost tangente $T_{\alpha+2\pi}$ od pola sledi:

$$p_{\alpha+2\pi} = p_{\alpha} e^{\frac{2k\pi}{\theta}}.$$

Ovo očividno valja i za provodnicu kojegod točke spirale logaritmičke; postoji naime:

$$\frac{r_{\theta+2\pi}}{\theta} = \frac{r_{\theta}}{\theta} = \Delta r_{\theta} = r_{\theta} \left(e^{\frac{2k\pi}{\theta}} - 1 \right)$$

$$r_{\theta+2\pi} = r_{\theta} e^{\frac{2k\pi}{\theta}}.$$

Iz zadnje relacije sledi:

$$\frac{\frac{r_{\theta+2\pi}}{\theta}}{\frac{r_{\theta}}{\theta}} = \frac{\frac{r_{\theta+4\pi}}{\theta}}{\frac{r_{\theta+2\pi}}{\theta}} = \dots = \frac{\frac{r_{\theta+2n\pi}}{\theta}}{\frac{r_{\theta+2(n-1)\pi}}{\theta}} = e^{\frac{2k\pi}{\theta}}.$$

Označimo li provodnicu $r_{\theta+2n\pi}$ sa a_n , je:

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = e^{\frac{2k\pi}{\theta}},$$

dakle je takodjer

$$a_n = a_0 \left(e^{\frac{2k\pi}{\theta}} \right)^n,$$

koja vlastitost logaritmičke spirale se dobro rabi¹ pri grafičkom uzmnazanju te izvadjanju koriena.

Rešitba deličkog problema pomoću logaritmičke spirale je sasma jednostavan primier na ovo grafičko izvadjanje korena.

Zadaću, koju smo sada bili riešili mogli bi i posveobčiti te pitati po krivuljah, za koje je spomenuti omjer duljinâ normale te tangente ležećih unutri osi X te Y funkcijom kuta tangente. Je li ovom funkcijom $\psi(\alpha)$, je

$$\frac{CD}{AE} = -\frac{p'}{p} = \psi(\alpha)$$

pa tim je

$$p = ae^{\int \psi(\alpha) d\alpha}$$

gdje znači a konstantu integracije.

¹ Gledaj razpravu prof. J. Šolín-a: „Počátkové arithmographie“ u Časopis. jedn. math. red. Studnička III. dio, pg. 131.

VII. *Ima se naći krivulja, te vlastitosti, da ima dio osi ležeći unutra tangente te normale stalnu duljinu.*

Označimo li ovu stalnu duljinu sa $2a$, slijedi iz trokuta BAC (lik 3)

$$AC = 2a = AB \operatorname{tg} \alpha = u' \operatorname{tg} \alpha,$$

dakle je

$$du = 2a \cot \alpha \, d\alpha$$

diferencijalna jednačba tražene krivulje. Znači li C konstantu integracije, je

$$u = C + 2a \ln \alpha$$

jednačba krivulje u koordinatah (u, α) . Jednačbe njezine u surednicah istomjernih (11) jesu:

$$x = C + 2a \ln \alpha + 2a \cos^2 \alpha$$

$$y = a \sin 2\alpha.$$

Paralelno li pomaknemo os Y u smislu osi X za duljinu $(C+2a)$, dobit ćemo za jednačbu krivulje

$$x = a \ln^2 \alpha - 2a \sin^2 \alpha$$

$$y = a \sin 2\alpha.$$

Iz ovih jednačba lahko možemo upoznati oblik krivulje (lik 16), koja ima os X za asimptotu i za os simetrije. Na daljne vlastitosti ove krivulje doći ćemo tečajem razprave.

Rektifikacija.

13. Dana li je jednačba krivulje u koordinatah p, α , t. j. kao zamotajka tangenata (2), dobivamo usljed jednačba (4) za element luka

$$ds = \pm \sqrt{dx^2 + dy^2} = \pm [p + p''] \, d\alpha \quad (23)$$

Što se tiče dvostrukoga proznaka, uzmimo ga pozitivnim, što baš odgovara našoj pretpostavci o kutu α na početku iztaknutoj, da sa rastućim kutom luk raste, tim je smjer krivulje u svakoj točki opredjeljen te proznak — bi mogli tada uzeti, kad bi pripustili, da sa rastućim kutom luk se umanja, čim bi krivulja u obratnom smjeru izvedena se nama pokazala.¹

Je li dana krivulja u tangencijalnih koordinatah (u, α) , dakle sa jednačbom

$$u = F(\alpha),$$

slijedi, budući da je (9)

$$p = f(\alpha) = u \sin \alpha,$$

za diferencijal luka

$$ds = (2u' \cos \alpha + u'' \sin \alpha) \, d\alpha. \quad (24)$$

¹ Sa proznakom ćemo još se baviti kasnije, kad budemo govorili o krivosti krivulja.

Ovu jednačbu dobili bi i neposredno iz jednačba (12) te (13), do kojih smo bili geometrički došli. Sledi naime iz jednačbe (12)

$$ds = dt + \cos \alpha \, du,$$

te stavimo li u ovu jednačbu vrednost za du iz jednačbe (13), naći ćemo

$$ds = \frac{d(t \sin \alpha)}{\sin \alpha}, \quad (25)$$

koji se oblik posvema slaže sa oblikom (24), samo trebamo za t uvesti vrednost iz (19), naime

$$t = u' \sin \alpha.$$

Hoćemo li sada naći duljinu luka krivulje od dirališta M_0 tangente T_{α_0} do dirališta M_1 tangente T_{α_1} , te označimo li ovu duljinu $M_0 M_1$ sa s , trebamo samo integrirati u medjah α_0 , α_1 . Dobit ćemo ovako

$$s = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} (p + p') \, d\alpha = \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} (2u' \cos \alpha + u'' \sin \alpha) \, d\alpha.$$

14. Za *asteroidu* smo našli [čl. 12, I]

$$p = -a \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{a}{2} \sin 2\alpha.$$

Jest dakle:

$$s = \frac{3}{2} a \int_{\alpha_0}^{\alpha_1} \sin 2\alpha \, d\alpha = \frac{3}{2} a \sin (\alpha + \alpha_0) \sin (\alpha - \alpha_0).$$

Počimamo li integraciju od dirališta tangente odgovarajuće $\alpha_0 = 0$, je

$$s = \frac{3}{2} a \sin^2 \alpha_1;$$

svršimo li integraciju sa $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, dobit ćemo četvrt obodnice cele asteroide, tim je za celu obodnicu

$$S = 6a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\alpha \, d\alpha = 6a$$

II. *Cikloida* obična dana je sa jednačbom [12, III]

$$u = 2a\alpha.$$

Za luk $M_o M$ dobit ćemo

$$s = 4a \int_{\alpha_o}^{\alpha} \cos \alpha \, d\alpha,$$

dakle je

$$s = 4a [\sin \alpha - \sin \alpha_o].$$

Ovaj rezultat daje se i geometrički protumačiti; jest naime za cikloidu (lik 8)

$$AM = t = 2a \sin \alpha,$$

dakle je

$$s = 2 (AM - A_o M_o).$$

Integriramo li od vrha cikloide O počam, je $\alpha_o = 0$, tim je u ovom slučaju

$$s = 4a \sin \alpha = 2t,$$

t. j.

$$\text{arc } OM = 2 \cdot \overline{AM}.$$

Za luk polocikloide dobivamo

$$\text{arc } OO' = 2 G'O' = 4a,$$

tim je luk ciele cikloide, kao poznato, $8a$.

III. *Evolventa* kruga dana je sa jednačbom (čl. 12, II)

$$p = a\alpha,$$

dakle je

$$s = a \int_{\alpha_o}^{\alpha} \alpha \, d\alpha = \frac{a}{2} (\alpha^2 - \alpha_o^2).$$

Računamo li luk evolvente od početne točke evolvente, biti će $\alpha_o = 0$, te tim je (lik 7)

$$\text{arc } A_o M = s = \frac{a\alpha^2}{2}.$$

IV. *Logaritmička spirala* dana je sa jednačbom (čl. 12, VI)

$$p = ae^{k\alpha},$$

dakle je luk $M_o M_1$ omedjen dirališti tangenata $T\alpha_o T\alpha_1$, naime:

$$s = a(1 + k^2) \int_{\alpha_o}^{\alpha} e^{k\alpha} \, d\alpha = \frac{a(1 + k^2)}{k} [e^{k\alpha} - e^{k\alpha_o}].$$

Označimo li zavojak od α_0 .. do $\alpha_0 + 2\pi$ sa S_1 , te slično sljedeći zavojak sa S_2 , je

$$\frac{S_2}{S_1} = e^{2k\pi} = \frac{p_{2\pi+\alpha_0}}{p_{\alpha_0}},$$

koji rezultat možemo ovako izreći:

Količnik dvijuh zavojaka za se sljedećih je stalna veličina, naime jednaka količniku udaljenosti tangenata početnih točaka tih zavojaka od pola spirale.

V. *Parabole* jednačba u surednicah tangencialnih (p , α) (čl. 12, IV.) glasi:

$$p = -\frac{a}{2} \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha},$$

dakle je

$$s = -a \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{d\alpha}{\sin^3 \alpha} = \frac{a}{2} \left/ \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right.$$

Računamo li luk od vrha parabole¹ počam, je $\alpha_0 = \frac{\alpha}{2}$, je

$$s = OM = \frac{a}{2} \left(\frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \right).$$

Integral, koji nama duljinu luka opredjeljuje, je dakle neka funkcija kuteva tangenata krajnjih točaka toga luka, dakle

$$s = \chi(\alpha) - \chi(\alpha_0),$$

ili ako hoćemo

$$s = \chi(\alpha) + C = \psi(\alpha),$$

gdje znači C konstantu integracije, kojoj je vrijednost ovisna o α_0 t. j. o tom, od koje točke krivulje računamo luk krivulje.

Transformacija osi X.

15. Iz jednačbe za duljinu luka lahko upoznajemo sada, kakav ima upliv položaj osi X. Što se tiče izhodišta, to promieni li ovo svoj položaj na osi, mienja se tim doduše koordinata u za neku stalnu veličinu, nu ovo ostaje bez upliva na duljinu luka, budući da u izrazu (26) samo derivacije veličine u dolaze. Nu ako bi

¹ U čl. 12. IV. smo iztakli, da računamo luk parabole (lik 9) od točke M na točku K preko O, tim je izraz za s pozitivan za $\alpha > \frac{\pi}{2}$ te obratno negativan.

okrenuli os X oko izhodišta za kut ε do položaja X_1 , umanja se tim kut svake tangente prema novoj osi za taj kut ε ; jest naime

$$\sphericalangle(XT) = \sphericalangle(XX_1) + \sphericalangle(X_1T) \quad (27)$$

t. j.

$$\alpha = \varepsilon + \alpha_1,$$

pa tim je jednačba luka krivulje potegnute na novu os X_1

$$s = \psi(\alpha_1 + \varepsilon).$$

Sad ćemo tražiti, kako se mienjaju koordinate tangente točke M krivulje, okrenemo li os za kut ε . Iz trokuta OAA_1 (lik 17) sledi:

$$\frac{OA}{\sin \alpha_1} = \frac{OA_1}{\sin(\pi - \alpha)} = \frac{AA_1}{\sin \varepsilon},$$

dakle je

$$OA_1 = u_1 = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_1} u,$$

dakle radi jednačbe (27):

$$u_1 = \frac{\sin(\alpha_1 + \varepsilon)}{\sin \alpha_1} u. \quad (28)$$

Jednačba krivulje

$$u = F(\alpha)$$

potegnute na os X je, potegnemo li ju na os X_1 , pridržav isto izhodište

$$u_1 = \frac{\sin(\alpha_1 + \varepsilon)}{\sin \alpha_1} F(\alpha_1 + \varepsilon).$$

Buduć da se ovom transformacijom p nemienja, je jednačba krivulje u prvih tangencijalnih koordinatah potegnute na os X_1

$$p = f(\alpha_1 + \varepsilon).$$

16. Ako bi sada okrenuli os X za kut ε , te ujedno zamienili i izhodište, t. j. uzeli pravac X_1 kao novu os X_1 te točku O' ovoga pravca za novo izhodište (lik 18), dobit ćemo, pridržavši u ostalom oznaku kao prije, iz trokuta SAA_1 , gdje je S presjecište obijuh osi:

$$\frac{SA_1}{SA} = \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha_1} = \frac{\sin(\alpha_1 + \varepsilon)}{\sin \alpha_1}.$$

Označimo udaljenost staroga izhodišta od presjecišta obijuh osi X, X_1 sa m , slično udaljenost novoga izhodišta O' od iste točke sa m_1 , je

$$\frac{u_1 - m_1}{u - m} = \frac{\sin(\alpha_1 + \varepsilon)}{\sin \alpha_1}$$

dakle je

$$u_1 = m_1 + \frac{\sin(\alpha_1 + \varepsilon)}{\sin \alpha_1} (u - m), \quad (29)$$

čim se ova transformacija pokazuje izvedenom.

Zamienimo li sad izhodište ne mienjajući smjer osi, uzev točku O' (x_0, y_0) kao novo izhodište, je (lik 19).

$$\text{Proj (OQ)} = \text{Proj (OR} + \text{RO}' + \text{O}'\text{Q}' + \text{Q}'\text{Q}).$$

Uzmimo sad OQ za os projekcije, te pišimo za koordinate novoga izhodišta kratko x_0, y_0 , dobit ćemo:

$$p = x_0 \sin \alpha - y_0 \cos \alpha + p_1,$$

te tim je jednačba promjenljive tangente, uzev O' kao izhodište

$$(x - x_0) \sin \alpha - (y - y_0) \cos \alpha - p_1 = 0.$$

Jednačba $s = \psi(\alpha)$ je jednačbom krivulje.

Jednačba za duljinu luka krivulje, naime

$$s = \psi(\alpha), \quad (30)$$

je za krivulju karakteristička, opredjeljuje krivulju samu podpuno, t. j. mi možemo ovu jednačbu smatrati jednačbom krivulje.¹ Ovo dokažemo time, da ju svedemo na oblike 1), 4), 10). Jednačba (23) daje nama direktan prielaz iz jednačbe (30) na jednačbu (1); jest naime prema tomu, što smo o kutu α bili pretpostavili

$$p'' + p = \psi'(\alpha) = \frac{ds}{d\alpha}. \quad (31)$$

Upoznajemo tim, da zahtjevani prielaz postignemo integracijom diferencijalne linearne jednačbe podpune drugoga reda (31). Integral ove diferencijalne jednačbe prikraćene je:

$$C_1 \sin \alpha + C_2 \cos \alpha,$$

te označimo li sa D dopunjak tog integrala, biti će

$$C_1 \sin \alpha + C_2 \cos \alpha + D \quad (32)$$

obćenit integral diferencijalne jednačbe (31). Što se tiče dopunjka, koji je očito partikularni integral, to ga nadjemo pomoću kvadrature, budući da dana diferencijalna linearna jednačba ima koeficiente stalne. Poslužimo li se sa metodom *Cauchy-a* ili sa metodom varijacije konstanta, dobivamo za taj dopunjak

$$\begin{aligned} D &= \frac{e^{i\alpha}}{2i} \int \psi'(\alpha) e^{-i\alpha} d\alpha - \frac{e^{-i\alpha}}{2i} \int \psi'(\alpha) e^{i\alpha} d\alpha \\ &= \sin \alpha \int \psi'(\alpha) \cos \alpha d\alpha - \cos \alpha \int \psi'(\alpha) \sin \alpha d\alpha. \end{aligned} \quad (33)$$

¹ Jednačbu krivulje $s = \psi(\alpha)$, zove W. *Whewell* intrinsic equation of a Curve, u razpravi: „Of the Intrinsic Equation of a Curve, and its Application. 1848 te 1850 u Transactions of the Cambridge Philosophical society. Vol. 8, pg. 659, Vol. 9, pg. 180. U toj razpravi promatra Whewel ujedno i krivulje kojih je jednačba oblika $\alpha = \psi(s)$, te konstruira cio red krivulja. Kasnije, kad se budemo bavili sa evolutami dane krivulje, ćemo se još na ovu razpravu osvrnuti.

Geometrički sadržaj konstanta integracije C_1, C_2 jest jednostavan. Tangenta krivulje dane sa jednačbom

$$s = \psi(\alpha)$$

je s obzirom na jednačbu (32)

$$(x - C_1) \sin \alpha - (y + C_2) \cos \alpha - D = 0. \quad (34)$$

Iz ove jednačbe upoznajemo, da vrijednost konstanta integracije upliva na izbor izhodišta koordinata. Zamienimo li izhodište nemienjajuć smjer osi, mienja se tim vrijednost konstanta integracije, nu nemienja¹ se funkcija D , koja tim samo jedina je karakteristička za krivulju. Premjestimo li dakle izhodište koordinata, koje možemo po volji izabrati, do točke $(C_1, -C_2)$ naime do one točke, za koju je tangenta točke (s, α) udaljena za D , je jednačbom ove tangente

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha - D = 0.$$

Nu ovu transformaciju koordinata*postignemo već tim, da stavimo konstante integracije jednake ništici. Možemo dakle kazati, da je

$$p = D = f(\alpha)$$

jednačba ove krivulje u tangencijalnih koordinatah (p, α) te istosmjerne koordinate točke (s, α) jesu tim (4) takodjer opredjeljene.

18. Nu mogli bi i direktno do jednačba (4) krivulje doći. U ovom slučaju imamo posla mjesto sa integracijom diferencijalne linearne jednačbe drugoga reda sa dvima kvadraturama. Znademo, da je

$$\frac{dx}{ds} = \cos \alpha, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \alpha,$$

pa tim je

$$dx = \frac{ds}{dz} \cos \alpha \, d\alpha, \quad dy = \frac{ds}{dz} \sin \alpha \, d\alpha.$$

Integracijom² dobivamo, označimo li sa x_0 , te y_0 konstante integracije, za jednačbe krivulje:

$$x - x_0 = \int \psi'(\alpha) \cos \alpha \, d\alpha$$

$$y - y_0 = \int \psi'(\alpha) \sin \alpha \, d\alpha.$$

Pomnožimo li prvu jednačbu sa $\sin \alpha$, te drugu sa $-\cos \alpha$ dobit ćemo jednačbu tangente T_α u točki (s, α) krivulje dane, naime:

$$(x - x_0) \sin \alpha - (y - y_0) \cos \alpha = \sin \alpha \int \psi'(\alpha) \cos \alpha \, d\alpha - \cos \alpha \int \psi'(\alpha) \sin \alpha \, d\alpha.$$

¹ Gled. čl. 16.

² Gledaj Dr. F. *Studnička* Vyšši matematika III. dio pg. 101, Praha 1867.

Sravnimo li ovaj rezultat sa (34), dobit ćemo opet za dopunjak D isti izraz kao prije, naime:

$$D = \sin \alpha \int \psi'(\alpha) \cos \alpha \, d\alpha - \cos \alpha \int \psi'(\alpha) \sin \alpha \, d\alpha.$$

Tim smo sbilja iz jednačbe (30) došli do jednačbe (1) te (4), te tim je i prielaz na jednačbe (10) te (11) pomoću relacije (3) neposredno dan.

O nekih slučajevih, gdje je dopunjak D , te tim i prielaz neposredno dan.

19. Dopunjak diferencijalne linearne jednačbe sa stalnim koeficijentima daje se u obće osobito u posebnih slučajevih jako jednostavno nati,¹ gdje je $\psi'(\alpha)$ te tim i $\psi(\alpha)$, oblika $\sum a_n \alpha^n$ ili $ae^{n\alpha}$ ili $a \cos n\alpha + b \sin n\alpha$. Nu baš ovi slučajevi obuhvaćaju cio red poznatih krivulja, pa s toga ćemo je pobliže promatrati.

I. Je li dana krivulja sa jednačbom

$$s = \sum_{n=0}^n a_n \alpha^n,$$

je dopunjak integrala prikraćene diferencijalne jednačbe (31)

$$D = \sum_{r=0}^{n-1} b_r \alpha^r,$$

pa tim je jednačba ove krivulje u koordinatah (p, α) :

$$p = \sum_{r=0}^{n-1} b_r \alpha^r.$$

Koje krivulje nama ta jednačba za kojegod n predložuje, upoznat ćemo kasnije; za $n = 1$, je

$$s = a_0 + a_1 \alpha.$$

Računamo li luk od dirališta tangente istosmjerne sa osi X , je za $\alpha = 0$ takodjer $s = 0$, dakle i $a_0 = 0$. Možemo tim gornju jednačbu kratko pisati

$$s = a_1 \alpha,$$

tim je

$$p = f(\alpha) = a_1,$$

t. j. udaljenost promjenljive tangente od neke čvrste točke, koju smo učinili izhodištem, je stalna veličina. Zamotaljka tangenata

¹ Gledaj. *Studnička*: Beiträge zur Theorie der Integration von complete linearen Differentialgleichungen. Sitzungs. d. kg. böhm. Gesellschaft d. Wissensch. Prag. 1870. (i takodjer u Zprávy jednoty českých matematiků II. pg. 33. Praha. 1870.

(p, α) je dakle krug, te jednačba $s = a_1 \alpha$ izražuje karakterističnu vlastitost kruga, da je duljina luka jednaka umnožku polumjera sa odgovarajućim kutom središnjim.

Za $n = 2$ imamo

$$s = a_0 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2.$$

Računamo li opet luk od dirališta tangente istosmjerne sa osi, je $a_0 = 0$. Možemo dakle uz ovaj uvjet gornju jednačbu pisati:

$$s = a_1 \alpha + a_2 \alpha^2,$$

pa tim je

$$p = f(\alpha) = a_1 + 2a_2 \alpha.$$

Jednačba ove krivulje u surednicah (p, α) , koja je *paralelna krivulja* u udaljenosti a_1 sa krivuljom

$$p = 2a_2 \alpha,$$

što je uvidljivo iz geometričkog značaja koordinate p .

Potražimo dakle krivulju

$$p = 2a_2 \alpha;$$

jednačba promjenljive tangente ove krivulje je:

$$T \equiv x \sin \alpha - y \cos \alpha - 2a_2 \alpha = 0,$$

te jednačbe istosmjerne (4) ove krivulje jesu

$$x = a (\cos \alpha + \alpha \sin \alpha)$$

$$y = a (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha),$$

iz kojih jednačba¹ namah upoznajemo ovu krivulju kao *evolventu kruga*, kojega je središte u izhodištu surednica, te kojega je polumjer $a = 2a_2$. Znači dakle

$$s = a_0 + a_1 \alpha + a_2 \alpha^2 \text{ ili } p = a_1 + 2a_2 \alpha$$

krivulju paralelnu sa evolventom kruga.

II. Budi dana krivulja sa jednačbom

$$s = ae^{k\alpha} + b,$$

¹ Gledaj čl. 12, II. Pomnožimo li drugu jednačbu sa $i = \sqrt{-1}$, te sbrojimo li, dobivamo

$$x + iy = z = ae^{i\alpha} (1 - \alpha e^{\frac{i\pi}{2}}).$$

Pišemo li $e^i = \varepsilon$, $z = OM$, $a = OA_0$, dobivamo:

$$OM \equiv OA_0 \varepsilon^\alpha (1 - \alpha \varepsilon^{\frac{\pi}{2}})$$

t. j. ekvipolenciju evolvente kruga. Gledaj *Bellavitis - Zahradnik Methoda equipollenci*: pg. 93. Praha.

gdje je vrijednost veličine b ovisna o točki u kojoj započimamo računati luk. Računamo li ga od $\alpha = \alpha_0$, je $b = -a^{k\alpha_0}$, dakle je

$$s = a(e^{k\alpha} - e^{k\alpha_0}).$$

Budući da je dopunjak integrala prikraćene diferencijalne jednačbe (31) u tom slučaju

$$D = \frac{kz}{1+k^2} e^{k\alpha},$$

je

$$p = \frac{kz}{1+k^2} e^{k\alpha} = a_1 e^{k\alpha}$$

jednačbom krivulje u koordinatah (p, z) , gdje je izhodište sgodno izabrano, kao što smo već u čl. 17. bili protumačili.

Ako nebi o položaju izhodišta unapred odlučili, je obćenit integral jednačbe (31), naime

$$p = f(z) = C_1 \sin z + C_2 \cos z + \frac{k a e^{k\alpha}}{1+k^2},$$

jednačba ove krivulje u koordinatah (p, z) . Promjenljiva tangenta te krivulje ima za jednačbu

$$T = (x - C_1) \sin z - (y + C_2) \cos z - \frac{k a e^{k\alpha}}{1+k^2},$$

te tim jesu

$$x - C_1 = \frac{k a e^{k\alpha}}{1+k^2} (\sin z + k \cos z)$$

$$y + C_2 = \frac{k a e^{k\alpha}}{1+k^2} (-\cos z + k \sin z)$$

jednačbe ove krivulje u surednicah istosmjernih.

Predpostaviv da je k pozitivan, jesu konstante integracije koordinate dirališta tangente odgovarajuće $z = -\infty$ (ako bi $k = -$, valja ovo za $z = +\infty$).

Uzmemo li dakle ovu točku krivulje za novo izhodište koordinata, te pišemo li

$$\frac{ka}{1+k^2} = a_1,$$

dobit ćemo iste jednačbe krivulje, kao u čl. 12, VI., te tim upoznajemo krivulju danu sa

$$s = a(e^{k\alpha} - e^{k\alpha_0}),$$

kao logaritmičku spiralu, što već iz oblika dopunjka D integrala diferencijalne jednačbe smo mogli upoznati.

III. Neka je dana krivulja sa jednačbom

$$s = a \cos nz + b \sin nz + c. \quad (1_1)$$

Računamo li luk od dirališta tangente Tz_0 , je

$$-c = a \cos nz_0 + b \sin nz_0.$$

Nu pišemo li za

$$a = -a_1 \sin nz_0, \quad b = a_1 \cos nz_0,$$

biti će

$$c = 0,$$

te gornja jednačba predje u

$$s = a_1 \sin n(z - z_0),$$

gdje dakako računamo luk kao prije od dirališta tangente Tz_0 . Ako bi luk krivulje računali od dirališta tangente istosmjjerne, odgovarajuće kutu $z_0 = 0$, imali bi

$$s = a_1 \sin nz,$$

kao traženi oblik jednačbe naše krivulje. Nu ako bi stavili u (1_1) za

$$a = -a_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} + nz_0\right) = -a_1 \cos nz_0$$

$$b = a_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} + nz_0\right) = -a_1 \sin nz_0,$$

biti će

$$c = +a_1,$$

te tim dobijemo:

$$s = -a_1 \cos n(z - z_0) + a_1 = 2a_1 \sin^2 \frac{n(z - z_0)}{2}. \quad (2_1)$$

Kad bi računali luk od dirališta tangente odgovarajuće kutu $z_0 = \frac{\pi}{2n}$, imali bi za oblik jednačbe za istu krivulju:

$$s = -a_1 \cos nz.$$

Buduć da, kao što smo bili upoznali, lahko iz jednog oblika na drugi preći možemo, izaći ćemo od jednoga iz navedenih oblika, na primjer (2_1) te ćemo prihvatiti, da računamo luk krivulje od dirališta tangente odgovarajuće kutu $z_0 = 0$. Izaći ćemo dakle od jednačbe sljedećega oblika:

$$s = a_1 (1 - \cos nz) = 2a_1 \sin^2 \frac{nz}{2}.$$

Diferencijalna jednačba (31) glasi u ovom slučaju

$$p'' + p = a_1 n \sin nz.$$

Dopunjak integrala ove diferencijalne jednačbe bez druge strane t. j. prikraćene, je

$$D = \frac{a_1 n}{1-n^2} \sin nz,$$

ili pišemo li kratko:

$$\frac{a_1 n}{1-n^2} = a,$$

biti će:

$$D = a \sin nz.$$

Jest dakle jednačba naše krivulje u tangencijalnih koordinatah (p, α):

$$p = a \sin nz, \quad (3')$$

te jednačba promjenljive tangente je:

$$T_\alpha = x \sin \alpha - y \cos \alpha - a \sin nz. \quad (3_1)$$

Namiće se nama pitanje, koje krivulje izrazuje jednačba (2₁) ili što je isto, koje krivulje omotava tangenta (3₁). Iz primjera čl. 12, I., ili čl. 14 I. slutimo, da ćemo imati posla sa epicikloidami odnosno sa hipocikloidami, te ćemo sada istinitost ovoga zaključka dokazati.

Znači li r polumjer čvrstoga kruga (lik 19) kojega je središte u O, ρ polumjer valjajućega kruga¹ C, te M njegova točka epicikloidu izvajajuća, koja u početnom položaju se sudara sa točkom A₀, diralištem to krugova O te C, te je li dalje

$$\sphericalangle COX = \theta, \quad \sphericalangle MCO = \varphi,$$

je jednačba epicikloide jednostavne:

$$\begin{aligned} x &= (r + \rho) \cos \theta - \rho \cos (\theta + \varphi) \\ y &= (r + \rho) \sin \theta - \rho \sin (\theta + \varphi), \end{aligned} \quad (4_1)$$

gdje medju θ i φ valja, kao poznato, relacija

$$r\theta = \rho\varphi. \quad (5_1)$$

Pomoću ove relacije mogli bi i jednačbam (4₁) dati sgodniji oblik tim, da bi ili kut θ ili kut φ izlučili. Nu obje jednačbe (4₁) mogli bi takodjer spojiti tim, da bi drugu jednačbu sa i = $\sqrt{-1}$ pomnožili, te potom sbrojili. Dobivamo ovako

$$\begin{aligned} x + iy &= (r + \rho)e^{i\theta} - \rho e^{i(\theta + \varphi)}, \\ \text{ili} \quad OM &\equiv (r + \rho)e^{i\theta} - \rho e^{i(\theta + \varphi)}. \end{aligned} \quad (6_1)$$

Iz lika (20) sledi, da je

$$OC \equiv (r + \rho)e^{i\theta}, \quad MC \equiv \rho e^{i(\theta + \varphi)},$$

dakle je²

$$OM \equiv OC - MC.$$

¹ Kažemo krug C t. j. krug, kojega je središte točka C.

² Gledaj: *Bellavitis - Zahradnik. Methoda equipolenci*, pg. 81. Praha 1874.

Jednačba (6,) izrazuje dobro poznatu vlastitost epicikloide — odnosno hipocikloide — da svaku epicikloidu izvesti možemo pomoću dviju različitih krugova, valjajućih se po jednom te istom čvrstom krugu (lik 20). Razlika polumjera — za slučaj hipocikloide s broj polumjera — obijuh krugova, izvadjućih istu epicikloidu jednak je polumjeru čvrstoga kruga¹ (*Euler*).

Povućimo $MC' \parallel CO$ i $OC' \parallel CM$, biti će C' središte drugoga kruga izvadjućega istu epicikloidu i $C'B_1$ polumjer istoga kruga. Budući da je polumjer $C'B_1$ kruga C' jednak sa OC , je OB' jednako razlici polumjera kruga C' te kruga C . Budući da je dalje $\text{arc } B_1M = \text{arc } B_1A$, te isto tako $\text{arc } B'M = \text{arc } B'A$ sledi gore navedena i ekvipolencijom $OM \equiv OC - MC$ izražena vlastitost epicikloide. Sasma slično se ima stvar za hipocikloidu.

Izrazimo li sad pomoću (5₁) kut θ sa kutom φ , te stavimo li

$$\frac{\rho}{r} = m,$$

dobit ćemo:

$$\begin{aligned} \frac{x}{\rho} &= \frac{m+1}{m} \cos m\varphi - \cos(m+1)\varphi \\ \frac{y}{\rho} &= \frac{m+1}{m} \sin m\varphi - \sin(m+1)\varphi. \end{aligned} \quad (7_1)$$

Odgovarajuće jednačbe za hipocikloidu bi dobili, ako bi u ove jednačbe za ρ , m , φ pisali — ρ , — m , — φ .

Za smjernicu tangente je:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \left(m\varphi + \frac{\pi}{2} \right),$$

dakle jest

$$m\varphi + \frac{\varphi}{2} = \theta + \frac{\varphi}{2} = \alpha, \quad (8_1)$$

što nama daje poznatu konstrukciju tangente epicikloide, (lik 19). Spojimo naime M sa diralištem B' krugova O te C , te tim je $\overline{B'M}$ normala točke M , te $\overline{BM}$ je tangentom iste točke, gdje je B diametralna točka dirališta B' za krug C . U ostalom sledi ova konstrukcija takodjer neposredno iz vlastitosti momentanog središta rotacije.

Iz jednačbe (8₁) sledi:

$$\varphi = \frac{2\alpha}{2m+1}, \quad (8_2)$$

¹ *Salmon - Fiedler*: Höhere ebene Curven pg. 342, kao što i historičku opazku ibid. pg. 464. br. 63.

pa tim možemo jednačbe (7₁) pisati:

$$\begin{aligned}\frac{x}{\rho} &= \frac{m+1}{m} \cos \frac{2m}{2m+1} \alpha - \cos \frac{2m+2}{2m+1} \alpha \\ \frac{y}{\rho} &= \frac{m+1}{m} \cos \frac{2m}{2m+1} \alpha - \cos \frac{2m+2}{2m+1} \alpha.\end{aligned}\quad (9_1)$$

Jednačbu tangente T_a, kao pravca idućega točkom M pod smjerom α dobivamo, pomnožimo li prvu jednačbu sa $\sin \alpha$ te drugu sa $-\cos \alpha$, te sbrojimo li. Dobit ćemo ovako:

$$x \sin \alpha - y \cos \alpha - \rho \frac{2m+1}{m} \sin \frac{\alpha}{2m+1} = 0: \quad (10_1)$$

Sravnilo sad ovu jednačbu tangente epicikloide sa jednačbom (3₁), koja znači tangentu krivulje dane sa jednačbom (2₁) naime:

$$s = a_1 (1 - \cos n \alpha) = 2 a_1 \sin^2 \frac{n \alpha}{2},$$

gdje je

$$a = \frac{a_1 n}{1 - n^2}, \quad (10_2)$$

upoznajemo namah, da se podpuno slažu, stavimo li:

$$\begin{aligned}a &= \frac{2m+1}{m} \rho \\ n &= \frac{1}{2m+1}.\end{aligned}\quad (11_1)$$

Iz ovih dviju jednačba sledi sve, što nama treba za opredjelbu epicikloide, odnosno hipocikloide iz jednačbe (3₁); jest naime:

$$\begin{aligned}m &= \frac{1-n}{2n} \\ \rho &= \frac{1-n}{2} a \\ r &= an.\end{aligned}\quad (12_1)$$

Možemo sada jednačbe epicikloide dane kao zamotaljke tangenata (3₁) t. j. dane jednačbom

$$p = a \sin n \alpha \quad (13_1)$$

u koordinatah (p, α) odmah napisati u koordinatah istosmjernih¹ naime

$$\begin{aligned}x &= \frac{1+n}{2} a \cos (1-n) \alpha - \frac{1-n}{2} a \cos (1+n) \alpha \\ y &= \frac{1+n}{2} a \sin (1-n) \alpha - \frac{1-n}{2} a \sin (1+n) \alpha,\end{aligned}\quad (14_1)$$

¹ Pomoću jednačaba (7₁), (8₂), (12₁).

ili ako bi izašli od jednačbe

$$s = a_1 (1 - \cos n \alpha) = 2 a_1 \sin^2 \frac{n \alpha}{2},$$

morali bi u jednačbe (14₁) pisati.

$$a = \frac{a_1 n}{1 - n^2},$$

te bi našli :

$$\begin{aligned} x &= \frac{n}{2(1-n)} a_1 \cos(1-n) \alpha - \frac{n}{2(1+n)} a_1 \cos(1+n) \alpha \\ y &= \frac{n}{2(1-n)} a_1 \sin(1-n) \alpha - \frac{n}{2(1+n)} a_1 \sin(1+n) \alpha. \end{aligned} \quad (15_1)$$

Nu buduć da je u slučaju epicikloide m veličina pozitivna, to je za epicikloidu nužno $n < 1$, predpostavljajući da je $a > 0$. Ako bi $a < 0$ bilo, moralo bi n biti negativno nu absolutno opet manji nego je jedinica, što već jednačba (3₁) pokazuje, buduć da je $\sin(-n\alpha) = -\sin n\alpha$.

Ako je $n > 1$, imamo hipocikloidu, koji slučaj bi neposredno iz jednačba (7₁) izvesti mogli, upotrebiv prije naznačene odgovarajuće promjene.

Iz jednačbe (13₁) možemo namah preći na jednačbu krivulje u koordinatah (u, α) pomoću jednačbe (9); dobivamo ovako

$$u = \frac{a \sin n \alpha}{\sin \alpha}. \quad (16_1)$$

Tim smo sve transformacije sa jednačbom (2₁) na oblike 1, 2, 4, 10 razvili, te ćemo sad neke posebne slučaje u tablici navesti:

m	n	ime krivulje
1	$\frac{1}{3}$	Kardioida
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	Kaustika reflektiranih trakova svjetla, dopadajućih istosmjerno na krug
$-\frac{1}{2}$	∞	Pravac
$-\frac{1}{3}$	3	Steiner-a hipocikloida
$-\frac{1}{4}$	2	Asteroida

20. Među vrijednostni za m dvie su, naime $m = 0$, te $m = \infty$, za koje se čini, da naše dedukcije nepostoje, s toga moramo se na ova dva slučaja još napose osvrnuti.

I. $m=0$. U ovom slučaju je $r=\infty$, te čvrsti krug prielazi u pravac, a epicikloida u običnu cikloidu.¹ Geometrički je stvar sasna uvidljiva, proizlazi takodjer iz jednačba (7₁) pomoću jednostavne limite; nu mi ćemo ovaj slučaj neposredno deducirati iz obćenitog slučaja.

Ako je $m=0$, je (11₁) $n=1$, te

$$a = \left| \frac{a_1 n}{1-n^2} \right|^{n-1} = \infty$$

$$\rho = \left| \frac{1-n}{2} a \right|^{n-1} = \left| \frac{a_1 n}{2(1+n)} \right|^{n-1} = \frac{a_1}{4}.$$

Polumjer čvrstoga kruga je doduše bezkonačno velik, što već jednačba (12₁) naime $r=an$ neposredno pokazuje. U jednačba (7₁) pojavlja se u ovom slučaju neopredjeljenost, koja ima svoj uzrok u tom, da *ne možemo* sad točku ($C_1, -C_2$) izabrati za *središte* čvrstoga kruga te za izhodište surednica, budući da se čvrsti krug raztavlja u dva pravca, od kojih jedan se nalazi u konačnosti, te drugi je pravcem ubježnim, naime spojnicom imaginarnih kružnih točaka u bezkonačnosti, te tim postaje položaj središta neopredjeljen. Ova geometrička dedukcija ima svoj uzrok i u samoj analizi. Diferencijalna linearna jednačba drugoga reda, koja nama obćenit problem izražuje, naime:

$$p'' + p = a_1 n \sin n z, \quad (17_1)$$

neima u slučaju $n=1$ dopunjak integrala jednačbe prikraćene u obliku desne strane; imamo tim i ovdje iznimni slučaj. Obćenit integral ove jednačbe je

$$p = C_1 \sin z + C_2 \cos z + \frac{a_1 n}{1-n^2} \sin n z, \quad (18_1)$$

te pišemo li

$$C_1 = C^1 - \frac{a_1 n}{1-n^2},$$

biti će integral

$$p = C^1 \sin z + C_2 \cos z + \frac{a_1 n}{1-n^2} (\sin n z - \sin z) \quad (19_1)$$

u ovom obliku sasna opredjeljen² i za slučaj $n=1$, jerbo je:

$$\lim_{n \rightarrow 1} \left\{ \frac{\sin n z - \sin z}{1-n^2} \right\} = -\frac{z \cos z}{2}.$$

¹ Mogli bi ovdje uzeti r = konačan, $\rho=0$, ali ovo nama samo kaže, da se valjajući krug reducira na točku, opisujući čvrsti krug, što takodjer iz jednačba (4₁) namah sledi.

² Ako bi u (18₁) stavili $n=1-\varepsilon$, razvili $\sin(\alpha-\varepsilon z)$, te poslje transformacije $\sin \varepsilon z$, te $\cos \varepsilon z$ izrazili redovi, dobili za $\lim \varepsilon=0$ isti rezultat.

Jest dakle obćenit integral jednačbe diferencijalne (17₁) za $n=1$:

$$p = C^1 \sin \alpha + C_2 \cos \alpha - \frac{a_1}{2} \alpha \cos \alpha$$

jednačbom krivulje u koordinatah (p, α) . Jednačbe ove krivulje u surednicah istosmjernih (4) jesu

$$x = C^1 - \frac{a_1}{2} \cos^2 \alpha$$

$$y = C_2 + \frac{a_1}{4} (2\alpha - \sin 2\alpha).$$

Konstante integracije opredielit ćemo sad tim, da uzmemo tangentu odgovarajuću kutu $\alpha = 0$ za os X, te diralište njezino za izhodište koordinata. Biti će dakle

$$C^1 = \frac{a_1}{2}, \quad C_2 = 0,$$

pa tim je:

$$x = \frac{a_1}{4} (1 - \cos 2\alpha)$$

$$y = \frac{a_1}{4} (2\alpha - \sin 2\alpha),$$

ili pišemo li $2\alpha = \varphi$:

$$x = \frac{a_1}{4} (1 - \cos \varphi)$$

$$y = \frac{a_1}{4} (\varphi - \sin \varphi),$$

što je jednačba obične cikloide, koju opisuje točka M valjajućega kruga sa polumjerom $\frac{a_1}{4}$ po desnoj strani osi Y. U početnom položaju sudara se točka M (lik 21.) sa diralištem kruga sa osi Y, izhodištem to koordinata.¹

¹ Ovaj rezultat bi dobili i transformacijom koordinata p, α (čl. 15). Okrenemo li naime os X za kut $\frac{\pi}{2}$, te uzmemo li točku $\left(\frac{\pi a_1}{4} - C_2, -C^1\right)$ za novo izhodište, biti će po transformaciji (savrjnaj lik 8 sa likom 21):

$$p = \frac{a_1}{2} \alpha \sin \alpha.$$

Sravnimo li ovo sa rezultatom čl. 12. III., naći ćemo, da je

$$a = \frac{a_1}{4}$$

gdje prema ovomu članku znači a polumjer valjajućega kruga.

II. Drugi slučaj je za $m = \infty$ t. j. za $n = 0$. Ovdje¹ je $\rho = \infty$, $r = a'$ t. j. točka pravca valjajućega po krugu opisuje sad našu krivulju, koja je dakle evolventom kruga.²

Ovo proizlazi također iz jednačba (7₁), gdje trebamo samo pisati (5₁) mr za ρ te $\frac{\theta}{m}$ za φ , a obaviti potle jednostavnu limitu za $m = \infty$. Nu mogli bi isto postignuti kraće, ako bi izašli od jednačbe (10₁), naime:

$$p = \rho \frac{2m+1}{m} \sin \frac{\alpha}{2m+1} = r (2m+1) \sin \frac{\alpha}{2m+1}.$$

Predjemo li na limitu, dobit ćemo:

$$p = \lim. r (2m+1) \sin \frac{\alpha}{2m+1} = a' \alpha. \quad \text{za } \lim m = \infty$$

što je jednačba evolvente kruga o polumjeru $r = a'$ uzev središte čvrstoga kruga za izhodište koordinata.

21. Upoznali smo, da jednačbe

$$\begin{aligned} p &= a \sin n \alpha \\ u &= \frac{a \sin n \alpha}{\sin \alpha} \\ s &= a_1 (1 - \cos n \alpha) \end{aligned}$$

znači jednu te istu epicikloidu, gdje računamo luk od dirališta tangente odgovarajuće ka $\alpha = 0$, koju tangentu smo za os X bili uzeli.

Medju a te a_1 postoji kao poznato relacija

$$a = \frac{n a_1}{1-n^2},$$

te obzirom na jednačbe (11₁) te (12₁) čl. 19. sledi:

$$a_1 = \frac{1-n^2}{n} a = \frac{1+n}{n} \cdot 2\rho = 4(m+1)\rho,$$

pa tim je radi

$$\begin{aligned} m &= \frac{\rho}{r}, \\ a_1 &= \frac{4(r+\rho)}{r} \rho \end{aligned}$$

te

$$n = \frac{1}{2m+1} = \frac{r}{r+2\rho}.$$

¹ Ako bi uzeli $\rho = \text{konačan}$, $r = 0$, reducirao bi se temeljni krug na svoje središte, na koju točku bi i epicikloida sama prešla, što također iz jednačba (4₁) proizlazi.

² Gledaj čl. 12, II.

Tim možemo jednačbu

$$s = a_1 (1 - \cos n z)$$

pisati u obliku:

$$s = \frac{4(r+\rho)\rho}{r} \left(1 - \cos \frac{r}{r+2\rho} z \right).$$

Primjetba. Ako bi uzeli neku drugu točku na primjer A_1 za početak luka mjesto točke A_0 , bilo bi:

$$\text{arc } A_1 M = \text{arc } A_0 M - \text{arc } A_0 A_1.$$

Je li sad točka A_1 razpolovište jedne grane epicikloide, t. j. česti luka epicikloide omeđenoga dvima povratiti, biti će

$$\text{arc } A_0 A_1 = a_1 \left(1 - \cos n \frac{\pi}{2n} \right) = a_1,$$

te

$$\text{arc } A_1 M = -a_1 \cos n z.$$

Okrenemo li sad čvrstu os za kut $z = \frac{\pi}{2n}$,

biti¹ će:

$$s = \text{arc } A_1 M = a_1 \sin n z = \frac{4(r+\rho)\rho}{r} \sin \frac{r}{r+2\rho} z.$$

Kako se ovom transformacijom koordinate u te p mjenjaju, bilo je već prije obćenito pokazano.

Za hipocikloidu bi dobili, uzev tangentu odgovarajuću ka $z = 0$ za čvrstu os:

$$s = \frac{4(r-\rho)\rho}{r} \left(1 - \cos \frac{r}{r-2\rho} z \right),$$

te ako bi opet razpolovište jedne grane hipocikloide uzeli za početak luka, imali bi za jednačbu hipocikloide

$$s = \frac{4(r-\rho)\rho}{r} \sin \frac{r}{r-2\rho} z.$$

Tako je za

$$s = 3 \left(1 - \cos \frac{z}{2} \right) \\ \frac{4(r+\rho)\rho}{r} = 3, \quad \frac{r}{r+3\rho} = \frac{1}{2}$$

¹ U spomenutoj razpravi razvija Whewel geometrički navedenu jednačbu za epicikloidu, oslanjajući se na konstrukciju epicikloide po Newtonu [Princip. B. IV. sect. 10. Prop. 49]. Kut z zove Whewel kutom deflekcije kao što i deviacijom.

dakle je

$$\varphi = \frac{1}{2}, \quad r = 1, \quad m = \frac{1}{2}$$

Ovo isto bi dakako dobili iz jednačba (11₁), (12₁) članka 19.

22. Rektifikacija krivulja danih jednačbom

$$s = \psi(z)$$

je neposredno dana: Računamo li naime luk od dirališta M_0 tangente T_{α_0} do dirališta M tangente T_α , naći ćemo za duljinu luka

$$M_0M = \psi(z) - \psi(z_0).$$

Da navedemo jedan primjer, je za epicikloidu

$$s = a_1 (1 - \cos n z).$$

Duljina jedne grane je od $\varphi = 0$ do $\varphi = 2\pi$ dakle obzirom¹ na z od $z = 0$ do $z = \frac{\pi}{n}$. Označimo li sa S duljinu jedne grane, je

$$S = 2 a_1.$$

Usljed jednačba (10') te (11₁) članka 19. je također

$$S = \frac{2(1-n^2)}{n} a = 8(m+1) \rho,$$

ako je epicikloida dana ili jednačbom (3') ili pomoću jednačba (7₁) istog članka.

23. Na temelju relacija članka 19. možemo mimogredce i dokazati vlastitost epicikloide, koja potiče od *Chasles-a*, da *svaki premjer MM' valjajućega se kruga C po krugu O omotava epicikloidu*.²

Surednice središta C jesu naime:

$$x = \frac{m+1}{m} \rho \cos m \varphi, \quad y = \frac{m+1}{m} \rho \sin m \varphi,$$

pa tim je jednačba premjera $\overline{MM'}$:

$$\begin{vmatrix} x & y & \rho \\ \frac{m+1}{m} \cos m \varphi - \cos(m+1) \varphi & \frac{m+1}{m} \sin m \varphi - \sin(m+1) \varphi & 1 \\ \frac{m+1}{m} \cos m \varphi & \frac{m+1}{m} \sin m \varphi & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

¹ Gledaj čl. 19 jednačbe 8' te 11₁.

² Gledaj *J. Vaneček-Křivé čáry rovinné i prostorové*. Jičín 1881. pg. 54. Vlastitosti epicikloide, koje *G. Fouret* u „*Nouvelles annales des math.* T. 19 p. 63. navadja, osobito pg. 66, lahko se namah dokažu ovdje navedenim načinom.

Odbijemo li treći red od drugoga, te ρ struki treći red od prvoga, dobit ćemo nov determinant, koji se reducira na

$$\begin{vmatrix} x - \frac{m+1}{m} \rho \cos m \varphi & y - \frac{m+1}{m} \rho \sin m \varphi \\ \cos (m+1) \rho & \sin (m+1) \rho \end{vmatrix} = 0.$$

Razvijemo li taj determinant, dobit ćemo:

$$x \sin (m+1) \varphi - y \cos (m+1) \varphi - \frac{m+1}{m} \rho \sin \varphi = 0.$$

Nu budući da je (lik 22)

$$(m+1) \varphi = \theta + \varphi = z,$$

dobivamo:

$$x \sin z - y \cos z - \frac{m+1}{m} \rho \sin \frac{z}{m+1}.$$

Iz oblika ove jednačbe zaključujemo, da je zamotaljka premjera $\overline{MM'}$ opet epicikloida, imajući isti čvrsti krug, nu polumjer valjajućega kruga ρ_1 je pol od polumjera ρ valjajućega kruga za danu epicikloidu. Relacija $\rho = 2\rho_1$ sledi i neposredno¹ geometrički. Diralište B krugova O te C je *momentano* središte rotacije, dakle ide ovom točkom normala dirališta tangente $\overline{MM'}$, pa tim je okomica BE iz točke B' na $\overline{MM'}$ normalom dirališta te nožište E ove okomice diralištem tangente $\overline{MM'}$. Valjajući krug C' dotica se dakle u točki B' čvrstoga kruga O, te ide nožištem E, pa tim ide središtem C (lik 22). Premjer valjajućega kruga C' za epicikloidu E naime $2\rho_1 = B'C$ jednak je polumjeru $\rho = MC$ kruga C za epicikloidu M, t. j. $\rho = 2\rho_1$.

24. Od jednačbe krivulje $s = \psi(z)$, predjemo na oblik (10), pomoću jednačbe (25) naime

$$ds = \frac{d(t \sin z)}{\sin z}.$$

Jest dakle

$$\frac{d(t \sin z)}{\sin z} = \frac{ds}{dz} = \psi'(z),$$

pa tim je

$$t \sin z = C + \int \psi'(z) \sin z dz.$$

¹ Gledaj: *Mannheim*: Cours de géométrie descriptive, Paris 1880. pg. 167.

Nu jednačba (13) nam daje

$$u = C_1 + \int \frac{t}{\sin z} dz,$$

dakle je

$$u = C_1 + \int \frac{C + \int \psi'(z) \sin z dz}{\sin^2 z} dz.$$

Računamo li krivulju od dirališta tangente odgovarajuće ka $z=0$, koju tangentu za os X uzmimo, biti će

$$u = \int_0^z \frac{\int_0^z \sin z d\psi(z)}{\sin^2 z} dz. \quad (35)$$

Jest na primjer $s = \frac{3}{2} a \sin^2 z$ jednačba asteroide; izvedemo li za $\psi(z) = \frac{3}{2} a \sin^2 z$ integraciju, dobit ćemo:

$$u = -a \cos z$$

kao jednačbu asteroide u surednicah tangencialnih u, z , (čl. 12, I.).

Polumjer krivosti.

25. Za elemenat luka našli smo

$$ds = \pm (p + p'') dz,$$

gdje smo i dvostruki proznak bili raztumačili.¹ Buduć da je dz kut dvijuh susjednih tangenata, sledi za polumjer² krivosti R dirališta tangente (p, z) .

$$\pm \frac{ds}{dz} = R = p + p'' = u'' \sin z + 2 u' \cos z. \quad (36)$$

Jest dakle polumjer krivosti R točke M funkcijom kuta, što ga čini tangenta iste točke sa osi X , naime

$$R = \varphi(T_a X) = \varphi(z).$$

¹ Kasnije ćemo se još поближе na taj proznak svratiti, za sada budi ovdje još jedanputa primjećeno, da je ovisan taj proznak o izboru pozitivnog smjera normale pridružene ka tangenti istosmjerne sa osi X .

² Poznata to relacija za polumjer krivosti; označimo li provodnicu dirališta tangente T_a sa r , je

$$R = p + p'' = r \frac{dr}{dp}.$$

$R = \varphi(z)$ je jednačbom krivulje.

26. Ova je relacija za krivulju karakteristička t. j. opredjeljuje krivulju podpuno, te bi mogli sa ovom jednačbom jednako postupiti, kao što smo bili sa jednačbom

$$s = \psi(z)$$

učinili. Prielaz na koordinate (p, z) postignemo integracijom diferencijalne jednačbe (36), koja se slaže sa jednačbom 31 čl. 17, trebamo samo u tom članku kao što i u sljedećem pisati R za $\psi'(z)$. Biti će dakle

$$p = C_1 \sin z + C_2 \cos z + D$$

$$D = \sin z \int R \cos z \, dz - \cos z \int R \sin z \, dz$$

$$y - y_0 = \int R \cos z \, dz$$

$$x - x_0 = \int R \sin z \, dz.$$

Što smo za dopunjak u članku 17. bili naveli, dakako i ovdje doslovce valja, te prielaz na jednačbu (30) postignemo jednostavnom integracijom. Jest naime

$$s = \int_{\alpha_0}^{\alpha} R \, dz.$$

Obratno iz jednačbe krivulje $s = \psi(z)$ bi došli do jednačbe $R = \varphi(z)$ jednostavnom derivacijom.

Je li dana krivulja, sa jednačbom u istosmjernih koordinatah naime:

$$y = f(x),$$

naći ćemo jednačbu ove krivulje u obliku $R = \varphi(z)$ na sljedeći način:¹ Stavimo

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \operatorname{tg} z,$$

¹ Gledaj: *Todhunter-Battaglini*: Trattato sul calcolo integrale III. izdanje. Napoli 1880, pg. 109. Todhunter rabi po Whewellu (l. c. pg. 667) $\frac{dy}{dx} = \cot \varphi$. Suvislost φ sa z je očita. Razvijajući teoriju krivulja u koordinatah (p, z) te (u, z) dosljedno smo i ovdje pridržali kut z .

odatle sledi

$$x = F(\operatorname{tg} z);$$

osim toga je,

$$\frac{dx}{ds} = \cos z, \quad \frac{dx}{dz} = \frac{F'(\operatorname{tg} z)}{\cos^2 z},$$

pa tim je

$$R = \frac{ds}{dz} = \frac{F'(\operatorname{tg} z)}{\cos^3 z} = \varphi(z). \quad (37)$$

Integracijom bi dobili jednačbu krivulje oblika $s = \psi(z)$.

Na primjer za

$$y^2 = 2ax$$

je

$$y \operatorname{tg} z = a,$$

dakle

$$x = \frac{a}{2 \operatorname{tg}^2 z},$$

pa tim je¹

$$R = -\frac{a}{\sin^3 z}.$$

27. Prielaz iz jednačbe krivulje

$$R = \varphi(z)$$

na jednačbu u susednicah tangencijalnih u , z dan je diferencijalnom jednačbom 24 čl. 13, u koju trebamo samo staviti

$$u = \frac{p}{\sin z},$$

da dobijemo diferencijalnu jednačbu (36). Razdijelimo li integral transformirane jednačbe sa $\sin z$, dobit ćemo traženu jednačbu krivulje u susednicah (u , z).

28. Ovdje biti će zgodno geometrički protumačiti derivaciju $\frac{dt}{dz}$. Buduć da je (čl. 6 jedn. 12)

$$R = \frac{dt}{dz} + \cos z \cdot u' = \frac{dt}{dz} + \overline{AB} \cdot \cos z,$$

je lik (3):

$$\frac{dt}{dz} = R - \overline{AB} \cdot \cos z = \overline{MS} - \overline{MB} = \overline{BS}.$$

U slučaju da je

$$\frac{dt}{dz} = 0,$$

ide okomica podignuta u presjecištu tangente sa čvrstom osi, kroz središte krivosti dirališta iste tangente.

¹ Srvanjaj čl. 13. V.

Za krivulju ove vlastitosti, da je duljina tangente u svakoj točki stalna, t. j. $AM = a$, okomica u presjecištu kojegod tangente sa čvrstom osi podignuta ide kroz središte krivosti odgovarajuće tangente.

Za tu krivulju bi našli

$$u = a \int_{z_0}^z \frac{dz}{\sin z} = a \lg \frac{z}{2},$$

uzev kao izhodište koordinata, presjecište čvrste osi sa tangentom na nju okomitom.

Jednačba intrinsic biti će

$$s = a \lg \sin z,$$

računajući luk od dirališta tangente na čvrstu os okomite, te polumjer krivosti je

$$R = a \cot z,$$

koje relacije nama naznačenu krivulju dovoljno karakteriziraju.

29. Iz relacije

$$\frac{ds}{dz} = R$$

upoznajemo namah, da bi mogli krivulju danu sa jednačbom

$$s = \psi(z)$$

konstruirati približno pomoću poligona.¹ Raste li broj stranica, umanjuju se stranice toga poligona te krivulju samu smatrati možemo kao medju ka kojoj se takav poligon približava raste li broj njegovih stranica u bezkonačno.

30. Neće biti od mjesta, ako neki primjer na članak 25 navedemo.

I. Koju krivulju karakterizira jednačba

$$R = \frac{a}{\cos^2 z}.$$

¹ Svrnaj čl. 17, te gledaj razpravu dr. W. Whewela l. c. Pisac zove tamo jednačbu $s = \psi(z)$ zato *intrinsic equation*, budući da jesu duljina luka s te deviacija z tangente od početnog položaja naravne elemente krivulje. Konstrukcija mnogih krivulja razolikih je tamo izvedena.

Računamo li ovu krivulju od dirališta tangente istosmjerne sa osi X, je

$$s = \int_0^{\omega} R dz = a \operatorname{tg} z,$$

koja krivulja, kako je već iz mehanike¹ poznato, znači *verižnicu*.

Istosmjerne koordinate ove krivulje jesu

$$x - x_0 = a \int \frac{dz}{\cos z} = a \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2} \right) = a \omega$$

$$y - y_0 = a \int \frac{\sin z dz}{\cos^2 z} = \frac{a}{\cos z} = a \operatorname{Ch} \omega.$$

Konstante x_0 , y_0 opredjelimo tim, da uzmemo točku (0, a) za diralište tangente istosmjerne sa osi X. U ovom slučaju je $x_0 = y_0 = 0$, te

$$x = a \omega = a \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2} \right)$$

$$y = a \operatorname{Ch} \omega = \frac{a}{\cos z}$$

su jednačbe verižnice. Eliminacijom pomoćne promjenljive ω odnosno z sledi:

$$y = a \operatorname{Ch} \frac{x}{a} = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right),$$

što je poznata jednačba² verižnice.

Projekcija ordinate na normalu je

$$MQ = y \cos z = a,$$

t. j. projekcija ordinate na normalu je stalne duljine. Ako bi dakle nad ordinatom opisali krug, daje nama tetiva

$$MQ = M_0 O = a$$

nanešena u krug od točke M na ovu stranu, koja se slaže sa abisom, smjer normale točke M, te PQ je smjer tangente (lik 23).

Za duljinu normale CM sledi iz pravokutnoga trokuta MPC

$$\overline{MP^2} = QM \cdot CM,$$

¹ Gledaj: *Resal*: Traité de mecanique general, I. dio pg. 311. Paris. Gauthier-Villars 1873. Srvnaj *Magnus* Sammlung von Aufgaben Berlin 1833. pg. 637.

² Gledaj: Dr. S. *Günther*: Die Lehre von den gewöhnlichen und verallgemeinerten Ibyperbelfunktionen. Halle 1881. pg. 113. pg. 250.

dakle je:

$$CM = \frac{y^2}{a} = \frac{a}{\cos^2 \alpha} = R.$$

Duljina normale jednaka je polumjeru krivosti za ovu krivulju.

II. Kao drugi primjer budi krivulja dana jednačbom

$$R = a e^{k\alpha} \quad (1^1)$$

Dopunjak integrala diferencijalne jednačbe linearne drugoga reda (36) je istoga oblika, kao što je R , pa s toga sledi, da je odgovarajuća krivulja logaritmicka spirala. Već dvojim putem¹ smo se bavili sa ovom krivuljom, te ćemo ovdje još na drugi način postignuti rezultat. Jest naime:

$$\begin{aligned} x - x_0 &= a \int e^{k\alpha} \cos \alpha \, d\alpha \\ y - y_0 &= a \int e^{k\alpha} \sin \alpha \, d\alpha. \end{aligned} \quad (2^1)$$

Integriramo li djelomično, dobit ćemo sa obzirom na iste jednačbe:

$$\begin{aligned} x - x_0 + k(y - y_0) &= a e^{k\alpha} \sin \alpha \\ k(x - x_0) - (y - y_0) &= a e^{k\alpha} \cos \alpha. \end{aligned} \quad (3^1)$$

Izaberemo li pravac

$$(x - x_0) + k(y - y_0) = 0$$

za os ξ , te za os η novoga pravokutnoga sustava pravac dani sa jednačbom

$$k(x - x_0) - (y - y_0) = 0,$$

biti će susednice točke (xy) krivulje u novom sustavu koordinata:

$$\begin{aligned} \eta \sqrt{1+k^2} &= a e^{k\alpha} \sin \alpha \\ \xi \sqrt{1+k^2} &= a e^{k\alpha} \cos \alpha. \end{aligned} \quad (4^1)$$

Diobom tih jednačba sledi:

$$\frac{\eta}{\xi} = \operatorname{tg} \alpha, \quad (5^1)$$

te sbrojitbom kvadrata gornjih jednačba dobivamo:

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{a^2 e^{2k\alpha}}{1+k^2},$$

¹ Gledaj čl. 12. VI., čl. 19. II. Logaritmicku spiralu, ili kako se i češće zove *exponencialna* ili *ekviangularna*, izumio je *Descartes*.

koju jednačbu i obzirom na (5') pisati možemo:

$$\zeta^2 + \eta^2 = \frac{a^2}{1+k^2} e^{2k \operatorname{arctg} \frac{\eta}{\zeta}} \quad (6')$$

što je jednačba logaritmičke spirale u koordinatih pravokutnih. Predjemo li na polarne surednice r , θ , rabeć

$$a_1 = \frac{a}{\sqrt{1+k^2}},$$

dobit ćemo

$$r = a_1 e^{k\theta} \quad (7')$$

što se sa rezultatom čl. 12, VI. posve slaže.

Primjetba. Mogli bi i jednačbe (3') sbrojiti, pošto smo bili drugu sa $i = \sqrt{-1}$ pomnožili, čim bi našli:

$$x - x_0 + (y - y_0) i = a \int e^{(k+i)z} dz = \frac{a}{k+i} e^{(k+i)z}$$

Stavimo li

$$\frac{a}{k+i} = a_1 e^{\beta i},$$

je

$$a_1 = \frac{a}{\sqrt{1+k^2}}, \quad \operatorname{tg} \beta = -\frac{1}{k}.$$

Uzmemo li (x_0, y_0) za pol polarnih surednica, kojih je os istosmjerna sa os X, te označimo li sa r , ω polarne koordinate točke (x, y) , biti će:

$$r e^{i\omega} = a_1 e^{k\alpha} e^{(\alpha+\beta)i},$$

dakle je:

$$r = a_1 e^{k\alpha} \quad (8')$$

te

$$\omega = \alpha + \beta.$$

Izlučimo li α iz zadnjih dviju jednačba, biti će

$$r = a_1 e^{k(\omega-\beta)} \quad (9')$$

jednačbom logaritmičke spirale. Okrenemo li polarnu os za kut β , t. j. uzmemo li os ξ za polarnu os (sliedi iz jednačbe osi ξ), što postignemo, ako stavimo

$$\omega - \beta = \theta, \quad (10')$$

dobit ćemo

$$r = a_1 e^{k\theta}$$

za jednačbu logaritmičke spirale kao prije. Svravimo li jednačbu (8') sa (10') sliedi da je:

$$\theta = \alpha.$$

Da je $(-\beta)$ stalni kut, koji satvara tangenta sa provodnicom, vidi se već iz lika (14) nu sliedi i namah putem računa; buduće da je

$$\operatorname{tg} V = \frac{r}{r'} = \frac{1}{k},$$

te tim

$$V = (-\beta).$$

31. U članku 12. našli smo jednačbu krivulje iz dane relacije medju tangentom, subtangentom itd. Slično bi mogli sad iz relacije izmedju polumjera krivosti sa spomenutimi duljinami odgovarajuću krivulju naći. Doći ćemo ovako na diferencijalnu jednačbu drugog reda u koordinatah (p, z) ili (u, z) , te integral iste jednačbe rieši zadaću kao kod koordinata istosmjernih.

Navesti ću dva primjera, kojih je rještba u istosmjernih koordinatah poznata iz učevnih knjiga, da se može postupak svrniti.

I. Ima se naći krivulja, kojoj je polumjer krivosti dana funkcija provodnice.

Označimo li provodnicu točke krivulje sa r , biti će

$$R = F(r),$$

dakle je

$$p'' + p = F(\sqrt{p'^2 + p^2}).$$

Rabimo li sad identitet

$$p'' = \frac{p' dp'}{dp}$$

možemo gornju jednačbu pisati

$$dp = \frac{p' dp' + p dp}{F(\sqrt{p'^2 + p^2})}.$$

Stavimo li sad

$$z = \sqrt{p'^2 + p^2},$$

biti će

$$p - C = \int \frac{z dz}{F(z)},$$

što je diferencijalna jednačba prvoga reda naime

$$\Phi(p, p') = 0.$$

Integracijom bi dobili jednačbu tražene krivulje u tangencijalnih koordinatah (p, z) .

Mogli bi doduše rabiti¹ i relaciju spomenutu u članku 25. naime $R = \frac{rdr}{dp}$. Integracijom bi dobili

$$p = \int \frac{rdr}{F(r)} + C = f(r) + C$$

koja jednačba je opet diferencialna jednačba prvoga reda,

$$\Phi(p, p') = 0,$$

buduć da je $r = \sqrt{p'^2 + p^2}$.

U posebnom slučaju, ako bi bilo

$$F(r) = \lambda r,$$

je

$$\lambda(p - C) = \sqrt{p'^2 + p^2}. \quad (1')$$

Za $\lambda < 1$ dobivamo, pisući

$$n = \sqrt{1 - \lambda^2}, \quad a = \frac{1 - n^2}{n^2} C$$

$$n(z - z_0) = \arcsin \left(\frac{p}{a} + 1 \right) \lambda$$

gdje smo sa z_0 označili konstantu integracije; dakle je

$$p = -a + \frac{a}{\lambda} \sin n(z - z_0);$$

tražena krivulja je dakle krivulja² istosmjerna sa krivuljom

$$p = \frac{a}{\lambda} \sin n(z - z_0),$$

koja je epicikloidom odnosno hipocikloidom te je algebraička tada, je li broj n sumjeriv.

¹ *Tisserand* u svojem *Recueil sur l'exercices sur le calcul infinitesimal* pg. 293 rabi takodjer ovu relaciju $R = \frac{rdr}{dp}$, nu poslje prve integracije prielazi na polarne surednice tim da stavi $p = \frac{r^2 d\theta}{\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}}$.

Ovdje navedeni posebni primjer potanko promatra *Tisserand*, ali ipak nedolazi sgodno do prave naravi krivulja tog primjera. Za taj primjer sravnaj: *Serret: Calcul integral* Paris 1868. pg. 501.

² Radi toga, budući da polumjeri krivosti obiju krivulja se razlikuju za stalnu veličinu $-a$. Kašnje ćemo se baviti поближе sa krivuljama istosmjernimi.

Ako bi bilo $\lambda=1$, je integral diferencijalne jednačbe (1') riješen po p :

$$p = \frac{C}{2} \left\{ 1 - (x - x_0)^2 \right\},$$

te znači krivulju istosmjernu sa evolventom evolvente kruga.

U slučaju $\lambda > 1$, je integralna jednačba

$$p = a + \frac{a}{\lambda} \operatorname{Cosh} n (x - x_0),$$

gdje smo opet slavili

$$n = \sqrt{\lambda^2 - 1}, \quad a = \frac{1 + n^2}{n^2} C.$$

II. Ima se naći krivulja, kojoj je polumjer krivosti omjeran sa n -tom uzmoži normale.

Za duljinu normale $\overline{CM}$ našli smo (jednačbe 13 te 19)

$$CM = \frac{u' \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = t \operatorname{tg} \alpha,$$

te buduć da za polumjer krivosti možemo usljed jednačbe 25. pisati

$$R = \frac{d(t \sin \alpha)}{\sin \alpha d \alpha},$$

zrazuje zadaću sljedeća diferencijalna jednačba

$$\frac{d(t \sin \alpha)}{\sin \alpha d \alpha} = \lambda (t \operatorname{tg} \alpha)^n, \quad (1')$$

gdje je λ faktor omjernosti. Diferencijalnu jednačbu (1') možemo pisati

$$\frac{d(t \sin \alpha)}{(t \sin \alpha)^n} = \lambda \frac{\sin \alpha d \alpha}{\cos^n \alpha}, \quad (2')$$

iz koje sledi integracijom

$$(t \sin \alpha)^{1-n} = C - \lambda \cos \alpha,$$

pa tim je

$$t \sin \alpha = (C - \lambda \cos \alpha)^{\frac{1}{1-n}} = u' \sin^2 \alpha.$$

Opetovnom integracijom dobivamo

$$u - C_1 = \int \frac{(C - \lambda \cos \alpha)^{\frac{1}{1-n}}}{\sin^2 \alpha} d \alpha$$

kao tražena jednačba krivulje. Konstantu integracije C_1 bi mogli staviti jednaku ničici, buduć da upliva samo na izbor izhodišta na osi. Mienja li se C_1 , miče se samo krivulja u smislu čvrste osi.

Za $n = 3$ biti će, pišemo li radi kratkoće

$$\sqrt{C \cos^2 \alpha - \lambda} = \Delta$$

$$t \sin \alpha = \frac{\cos \alpha}{\Delta},$$

$$u = \int \frac{\cos \alpha \, d\alpha}{\sin^2 \alpha \Delta} = - \frac{\Delta}{(c-\lambda) \sin \alpha} \quad (3')$$

$$p = - \frac{\Delta}{c-\lambda} \quad (4')$$

$$R = \frac{d(t \sin \alpha)}{\sin \alpha \, d\alpha} = \frac{\lambda}{\Delta^3} = - \frac{\lambda}{(c-\lambda)^3 p^3}. \quad (5)$$

Predjemo li pomoću jednačba (11) na istosmjerne surednice, biti će

$$x = \frac{\lambda \sin \alpha}{(c-\lambda) \Delta}$$

$$y = \frac{\cos \alpha}{\Delta}.$$

Eliminirajmo iz tih dviju jednačba veličinu α , što obavimo tim, da pomnožimo prvu jednačbu sa $\sqrt{c-\lambda}$, drugu sa $\frac{c-\lambda}{\sqrt{c-\lambda}}$, potom podignemo obje jednačbe na drugu uzumnož te sbrojimo. Naći ćemo ovako

$$\left\{ \frac{x}{\sqrt{\frac{c-\lambda}{\Delta}}} \right\}^2 + \left\{ \frac{y}{\sqrt{\frac{c-\lambda}{\Delta}}} \right\}^2 = 1.$$

Tražena krivulja je dakle elipsa za negativan λ , te hiperbola za pozitivan λ . Ovo je i tim jasno, budući da za slučaj elipse ima CM obratan smjer pozitivne normale, jest dakle normala CM negativna, obratno je za hiperbolu pozitivna.

Ako bi označili

$$\frac{\sqrt{c-\lambda}}{c-\lambda} = a, \quad \frac{1}{\sqrt{c-\lambda}} = b$$

je

$$\frac{-\lambda}{(c-\lambda)^3} = a^2 b^2$$

pa tim je:

$$R = \frac{a^2 b^2}{p^3},$$

koji je rezultat iz geometrije dobro poznat.

Jesu dakle jednačbe (3'), (4') jednačbe elipse odnosno hiperbole u surednicah tangencialnih (u, α), (p, α) prema tomu je li $\lambda \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 0$.

Ako bi bio $n = 1$, imamo:

$$\frac{d(t \sin \alpha)}{t \sin \alpha} = \lambda \operatorname{tg} \alpha,$$

pa tim je

$$t \sin \alpha = \frac{a}{\cos^{\lambda} \alpha},$$

gdje znači a konstantu integracije; dakle je

$$u' = \frac{a}{\sin^2 \alpha \cos^{\lambda} \alpha},$$

te

$$u = a \int \frac{d\alpha}{\sin^2 \alpha \cos^{\lambda} \alpha}.$$

Da dobivamo za $\lambda = +1$ verižnicu, za $\lambda = -1$, krug, $\lambda = +2$, parabolu, te za $\lambda = -2$ običnu cikloidu, sledi iz integracije.

Povratišta krivulje.

32. Znademo, da za α , koje zadovoljava uvjetu

$$R = 0 \text{ ili } \frac{ds}{d\alpha} = 0,$$

imamo povratište prve vrsti, te da luk dobiva vrijednost maksimalnu. Uzmimo na primjer krivulju

$$s = a \left(1 - \cos \frac{\alpha}{2} \right).$$

Luk raste počam od $\alpha = 0$ do α , koje dobivamo iz jednačbe

$$s' = \frac{a}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = 0,$$

dakle do $\alpha = 2\pi$ t. j. od točke A do točke A_2 (lik 24) u kojoj grana svrši, te počima druga grana, koja sasma jednako, samo obratno ide preko točku A_3 do A_0 , gdje ta grana krivulje opet svrši. U točki A_2 se svrši pozitivna grana, s nabude u toj točki maximum, te izadjemo li iz točke A_2 sa $\alpha = 2\pi$ doći ćemo do točke A_0 za $\alpha = 4\pi$, gdje svrši negativna grana $A_2 A_3 A_0$ sa svojim minimum.

Ako bi uzeli točku A_1 , u kojoj svrši luk za $\alpha = \frac{\pi}{2}$, t. j. razpolovište grane $A_0 A_2$ za početak luka, te okrenuli čvrstu os za

kut π u pozitivnom smislu, dobili bi (čl. 21. primjetba) za jednačbu iste krivulje

$$s = a \sin \frac{\alpha}{2}.$$

U ovom slučaju je

$$\frac{ds}{d\alpha} = \frac{a}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 0$$

za $\alpha = \pi$ te za $\alpha = 3\pi$ t. j. od $\alpha = 0$ počam, naime od točke A_1 , raste luk do $\alpha = \pi$ gdje svrši grana u točki A_2 (lik 24), dalje teče krivulja od $\alpha = \pi$ do $\alpha = 2\pi$ gdje je $s = 0$. Negativno raste luk dalje do A_0 za $\alpha = 3\pi$, gdje ima krivulja drugo povratište, te se povraća do točke A_1 za $\alpha = 4\pi$.

Da je ta krivulja epicikloida za $m = \frac{1}{2}$, netrebamo ovdje pobliže spominati.

Još ćemo sad na jednu okolnost uputiti, uzev asteroidu kao primjer, koju smo bili prije pobliže promatrali. Jednačba asteroide glasi

$$s = \frac{3}{2} a \sin^2 \alpha = \frac{3a}{4} (1 - \cos 2\alpha).$$

Sad imamo

$$\frac{ds}{d\alpha} = R = \frac{3a}{2} \sin 2\alpha = 0$$

za $\alpha = \frac{k\pi}{2}$, gdje znači k cio broj. Luk krivulje (lik 24) raste od točke A_1 , gdje je $\alpha = 0$ do točke A_3 , gdje je $\alpha = \frac{\pi}{2}$; u toj točki A_3 se svrši jedna grana te započinje druga. Točka A_3 je povratište krivulje. Od $\alpha = \frac{\pi}{2}$ počam je luk negativan do $\alpha = \pi$, gdje ova negativna grana svrši u točki A_5 sa svojim minimum, budući da je

$$\frac{d^2s}{d\alpha^2} = \frac{\pi}{3a \cos 2\alpha} = + 3a.$$

Točka A_5 je dakle drugo povratište krivulje. Slijedimo li dalje krivulju, dakle novu granu njezinu sad pozitivnu, počimajući u točki A_5 , dodjemo do A_7 sa $\alpha = \frac{3\pi}{2}$, gdje je treće povratište krivulje; daljnji luk je opet negativan, te sa $\alpha = 2\pi$ povraćamo se do početne točke A_1 , gdje je dakle četvrto povratište krivulje. Asteroida ima dakle četiri povratišta. Ako bi računali opet luk od točke A_2 ,

dirališta to tangente odgovarajuće ka $\alpha = \frac{\pi}{4}$, te okrenuli čvrstu os za $\frac{\pi}{4}$, bila bi jednačba asteroide

$$s = \frac{3a}{4} \sin 2\alpha.$$

Točka A_2 je opet razpolovište luka $\overline{A_1 A_3}$. Sa tom jednačbom bi mogli jednako postupati kao prije, te bi našli ista povratista. Smjer tangente u povratistu sliedi iz:

$$R = \frac{ds}{dz} = p'' + p = u'' \sin \alpha + 2 u' \cos \alpha = 0,$$

čim ujedno vidimo, kako bi ovo promatranje na tangencijalne koordinate potegnuti mogli.

Sad si možemo dobro protumačiti, kako to dodje, da je

$$\frac{ds}{dz} = R = \varphi(\alpha)$$

za neke vrijednosti za α pozitivan te za neke vrijednosti negativan, t. j. je li prirast luka odgovarajući prirastu pozitivnomu dz negativan, je polumjer krivosti negativan. Nu ovo ima dobar svoj razlog u tom, da, je li pozitivan smjer čvrste osi od desna na lievo, te okomit smjer gore pozitivan, a okret od pozitivne osi X prema pozitivnoj osi Y , to leži uvijek u slučaju, da je ds negativan, polumjer krivosti na negativnoj česti normale. Tako je lik (25) u drugom te četvrtom kvadrantu, naime $A_3 A_5$ te $A_7 A_1$, prirast luka negativan te polumjer krivosti nalazi se u izdubljenoj česti t. j. smjer polumjera krivosti MS u nekoj točki tih kvadranta ima obratan smjer normale ili kratko leži u negativnoj česti¹ normale.

Sad će biti i jasno zašto je kod parabole dane jednačbom (čl. 12, IV)

$$p = -\frac{a}{2} \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha}$$

polumjer krivosti

$$R = -\frac{a}{\sin^2 \alpha}$$

za sve točke parabole negativan, buduć da smo uzeli smjer osi parabole za smjer čvrste osi te pravac okomit u smislu pozitivne osi Y za odgovarajući pozitivan smjer normale, te prihvatili, da točka M

¹ Možemo naime onaj dio normale od nožišta M u pozitivnom smjeru kao pozitivan, te od uožišta u obratnom smjeru uzet kao negativan označiti.

opisuje parabolu u smislu MOK. Tim ide pozitivan smjer koje god točke u izbočitu stranu parabole, pa tim je R negativno. Kad bi pisali

$$R = \frac{a}{\sin^3 \alpha}$$

imali bi istu parabolu samo okrenutu za 180° i bio bi tada R za svaku točku parabole pozitivan.

Opredjelba krivulja pomoću relacija, koje sliede iz navedenih oblika jednačaba krivulje.

33. Upoznali smo, da sliedeće jednačbe:

$$\begin{aligned} p &= f(\alpha), & u &= F(\alpha), \\ s &= \psi(\alpha), & R &= \varphi(\alpha) \end{aligned}$$

i to svaka napose krivulju posvema opredjeljuje. Iz ovih jednačaba mogli bi eliminacijom kuta α izvesti šest sliedećih relacija:

$$\begin{aligned} \Phi_1(p, u) &= 0, & \Phi_2(p, s) &= 0, & \Phi_3(p, R) &= 0, \\ \Psi_1(u, s) &= 0, & \Psi_2(u, R) &= 0, & \Psi_3(s, R) &= 0, \end{aligned}$$

od kojih bi obratno mogli preći na prijašnje jednačbe, kad bi krivulja bila dana sa jednačbom u jednom od tih oblika.

I. Ako je dana krivulja relacijom

$$\Phi_1(p, u) = 0,$$

je njezina jednačba u tangencijalnih surednica (p, α)

$$\Phi_1(u \sin \alpha, u) = 0$$

te u surednica tangencijalnih (p, α)

$$\Phi_1\left(p, \frac{p}{\sin \alpha}\right) = 0.$$

Kad bi na primjer dana bila krivulja sa relacijom

$$p - u = a,$$

kojoj je geometrička tumačba očita, imali bi

$$u = \frac{a}{\sin \alpha - 1} = -\frac{a}{2} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

Transformacije na druge tri oblike jesu u predidućih člancih obavljene.

II. Ako je dana krivulja relacijom

$$\Phi_2(p, s) = 0,$$

riešimo ju prije po s , naime

$$s = \psi_2(p),$$

napokon derivujemo, što nama daje

$$p'' + p = \psi_2'(p).$$

Integral ove diferencijalne jednačbe rieši nama našu zadaću.

III. Slučaj

$$\Phi_3(p, R) = 0$$

se od prijašnjega ne razlikuje, jerbo obzirom na vrijednost od R možemo pisati

$$\varphi_3(p'', p) = 0.$$

Kad bi imali na primjer

$$R = ap,$$

dobili bi

$$p'' - (a-1)p = 0,$$

dakle je

$$p = C_1 e^{x\sqrt{a-1}} + C_2 e^{-x\sqrt{a-1}}$$

Krivulja ovom jednačbom izražena ima tu liepu vlastitost, da je njezina evoluta¹ opet krivulja iste vrsti. Je li jedna konstanta integracije jednaka ničici, te $a > 1$, imamo logaritmičku spiralu. Ako je $a < 1$, možemo pisati

$$C_1 = C \sin \beta, \quad C_2 = C \cos \beta$$

svesti integral na oblik

$$p = C \sin(\beta - x\sqrt{a-1}).$$

Vidimo, da u ovom slučaju imamo posla sa epi — odnosno hipocikloidami, te za $a = 1$ imademo pravac.

IV. Kad bi imali danu krivulju sa relacijom

$$\Psi_1(u, s) = 0,$$

dobit ćemo najprije rješitbom

$$s = \psi_1(u)$$

te derivacijom

$$u'' \sin x + 2u' \cos x = \psi_1'(u).$$

Integral ove diferencijalne jednačbe daje rješitbu zadaće.

V. Slično, kad bi bilo dano

$$\Psi_2(u, R) = 0,$$

koja relacija razvijena vodi do prijašnje diferencijalne jednačbe.

¹ O postupnih evolutah, biti će govor u drugom dielu ove razprave.

VI. Kad bi konačno bila dana krivulja relacijom između luka te polumjerom krivosti, dakle sa

$$\Psi_3(s, R) = 0,$$

mogli bi ovu jednačbu pisati:

$$\Psi_3\left(s, \frac{ds}{dz}\right) = 0,$$

te integracijom bi dobili namah

$$\Phi(s, \alpha, C_1) = 0.$$

Tim je ova zadaća svedena na nama već poznatu zadaću. Opređjelba $p = f(\alpha)$ t. j. prielaz na tangencijalne koordinate p, α iz zadnje jednačbe ovisan je, kao što smo bili prije vidjeli o integraciji linearne diferencijalne jednačbe drugoga reda, čim opet dvie nove konstante integracije ulaze, tako da će obćenit integral izražujući nama $p = f(\alpha)$ obuhvaćati tri konstante integracije.

Za ovaj slučaj ćemo navesti nekoliko primjera.

α) Zadano li

$$R \pm s = a,$$

je

$$\frac{ds}{d\alpha} \pm s = a,$$

dakle je:

$$d\alpha = \frac{ds}{a \mp s},$$

pa tim je

$$\alpha - \alpha_0 = \mp l(a \mp s).$$

Pišemo li $b = e^{\pm \alpha_0}$, prema tomu li smo u danoj jednačbi gornji ili donji proznak uzeli, je

$$a \mp s = be^{\mp \alpha} = R.$$

Krivulja izražena gore navedenom relacijom je dakle logaritmička¹ spirala.

Obje logaritmičke spirale za proznak $+$ te proznak $-$ presjecaju se ortogonalno jedna drugu.

β) Slično opredjeljuje relacija

$$R = ns$$

opet logaritmičku spiralu.

¹ Gledaj čl. 28, II.

γ) Dana li krivulja relacijom

$$R^2 + s^2 = a^2,$$

je

$$R = \frac{ds}{dz} = \sqrt{a^2 - s^2}.$$

Integracijom sledi:

$$\alpha - \alpha_0 = \arcsin \frac{s}{a}$$

ili

$$s = a \sin (\alpha - \alpha_0).$$

Dana relacija opredjeljuje dakle običnu¹ cikloidu.

δ) Ako bi izašli od relacije

$$\frac{R^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} = 1,$$

je:

$$R = \frac{ds}{dz} = a \sqrt{1 - \frac{s^2}{b^2}};$$

integracijom dobivamo:

$$\alpha - \alpha_0 = \frac{1}{a} \int \frac{ds}{\sqrt{1 - \frac{s^2}{b^2}}} = -\frac{b}{a} \arccos \frac{s}{b},$$

dakle je

$$s = a \cos \frac{a}{b} (\alpha - \alpha_0),$$

gdje je α_0 kao što u prijašnjem slučaju konstanta integracije. Iz zadnje jednačbe upoznajemo, da zadana relacija (4) karakterizuje epi- odnosno hipokloidu.

ε) Iz relacije

$$R^2 = 4as$$

sledi

$$s^2 = a (\alpha - \alpha_0);$$

iz koje jednačbe upoznajemo traženu krivulju kao evolventu kruga.

ζ) Ako bi imali konačno

$$s^2 = a (R - a)$$

¹ Značaj konstante integracije α_0 je u članku 15. protumačen; mogli bi integralu dati takodjer oblik $s = a \cos (\alpha - \alpha_0)$, kao što smo u sljedećem primjeru bili učinili samo bi trebali uzeti negativan proznak korena mjesto pozitivnoga.

dobit ćemo, postupajući analogno, kao prije

$$s = a \operatorname{tg} (\alpha - \alpha_0),$$

iz koje jednačbe upoznajemo krivulju izraženu danom relacijom kao verižnicu.¹

Krivulja promjene krivosti.

34. Kako se mjenja polunjer krivosti dane krivulje od točke do točke saznamo najbolje na ovaj način. Odmotamo naime luk krivulje na nekoj tangenti krivuljinoj i to ovako, da uvijek polunjeri krivosti ostanu okomitimi na odgovarajućih elementih i poslje odmotanja. Biti će dakle polunjeri krivosti ordinate središta krivosti, te mjesto središta krivosti poslje odmotanje je tražena krivulja promjene krivosti.

Jednačbu njezinu nadjemo ovako: Za os X uzмимо tangentu odgovarajući kutu $\alpha = 0$ te diralište $[f'(0), f(0)]$ ove tangente za izhodište koordinata. Računamo li luk od ovoga izhodišta biti će

$$\begin{aligned} x &= s \\ y &= R. \end{aligned} \quad (1_1)$$

surednice središta krivosti poslje odmotanje.

Jeli dana krivulja relacijom

$$\Phi(s, R) = 0,$$

je mjesto središta krivulje, poslje odmotanja na tangenti kuta $\alpha = 0$ usljed jednačba (1_1) :

$$\Phi(x, y) = 0.$$

Dana li je krivulja jednačbom

$$s = \psi(\alpha),$$

je

$$R = \psi'(\alpha),$$

te eliminacijom veličine α dobit ćemo jednačbu

$$\Phi(s, R) = 0,$$

dakle i jednačbu krivulje promjene krivosti

$$\Phi(x, y) = 0.$$

¹ Ako bi okrenuli čvrstu os za kut α_0 , dobili bi $s = a \operatorname{tg} \alpha$ kao u čl. 28, I. α_0 je konstanta integracije, te tim je i njezin geometrički značaj pokazan.

Mogli bi izaći takodjer od jednačbe

$$R = \varphi(z);$$
 integracijom bi našli

$$s = \psi(z),$$

te daljni postupak je kao prije.

I. Ako bi imali na primjer jednačbu logaritmičke spirale

$$R = a e^{k\alpha}, \quad (2_1)$$
 je

$$s = R dz = \frac{ae^{k\alpha}}{k} + C.$$

Ima li za $z = 0$ biti ujedno $s = 0$, mora da je

$$C = -\frac{a}{k},$$

tim je

$$s = \frac{a(e^{k\alpha} - 1)}{k}. \quad (3_1)$$

Izlučimo li iz jednačba (2₁) te (3₁) veličinu α dobit ćemo

$$s = \frac{R - a}{k},$$

tim je mjesto središta krivosti logaritmičke spirale poslje odmotanja na tangentu kuta $\alpha = 0$

$$y = kx + a,$$

dakle pravac.

II. Doznali smo, da običnu cikloidu karakterizuje jednačba

$$s^2 + R^2 = a^2,$$

pa tim je mjesto središta¹ krivosti obične cikloide poslje odmotanja na tangentu kuta $\alpha = 0$ krug, kojega je jednačba

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

III. Iz primjera (VI, δ) prvašnjega članka sliedi da je mjesto središta krivosti epicikloide odmotane na njenoj tangenti, elipsa sa jednačbom

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

IV. Evolventi kruga (čl. 34, VI. primjer ζ) odgovara parabola $y^2 = 4 - ax$, kao krivulja promjene krivosti.

¹ Cielomu luku cikloide odgovara polukrug.

V. Verižnici odgovara parabola $x^2 = a(4 - a)$ kao krivulja promjene krivosti.

35. Označimo li sa σ luk krivulje promjene krivosti, te kut tangente sa osi X sa α , biti će

$$\frac{d\sigma}{dz} = \pm \sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2} = \pm \sqrt{\left(\frac{ds}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dR}{dz}\right)^2}$$

dakle je

$$\frac{d\sigma}{dz} = \pm \sqrt{s'^2 + s''^2}$$

te

$$\sigma = \int_{\alpha_0}^{\alpha} dz \sqrt{s'^2 + s''^2}.$$

Za smjernicu tangente dobivamo:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\frac{dy}{dz}}{\frac{dx}{dz}} = \frac{\frac{dR}{dz}}{\frac{ds}{dz}} = \frac{s''}{s'},$$

time je

$$\frac{d\alpha}{dz} = \frac{s' s''' - s''^2}{s'^2 + s''^2}.$$

Označimo li polumjer krivosti, točke krivulje promjene krivosti sa ρ , biti će

$$\rho = \pm \frac{d\sigma}{d\alpha} = \pm \frac{(s'^2 + s''^2)^{3/2}}{s' s''' - s''^2}.$$

Polumjer krivosti, krivulje promjene krivosti dane krivulje, naime ρ , je bezkonačno velik, ako je

$$s' s''' - s''^2 = 0.$$

Stavimo si sada pitanje koja krivulja ima tu vlastitost da je njezina krivulja promjene krivosti pravac? Jedan takav slučaj smo već imali, bio je to prvi primjer prvašnjega članka. Sad ćemo dokazati da logaritmička spirala je jedina krivulja ove vlastitosti.

Diferencijalnu jednačbu tražene krivulje naime

$$s' s''' - s''^2 = 0$$

možemo pisati:

$$\frac{s''}{s'} = \frac{s'''}{s''}.$$

Integriramo li, dobit ćemo :

$$ls' + lk = ls'',$$

gdje smo sa lk označili konstantu integracije. Integral sam možemo opet pisati :

$$s'' = ks',$$

te integriramo li iznovice, dobivamo

$$ls' = k\alpha + lb,$$

gdje znači lb opet novu konstantu integracije.

Rješitba zadnje jednačbe po s daje :

$$s' = be^{k\alpha},$$

pa tim je, ako iznova integriramo :

$$s = ae^{k\alpha} + C$$

gdje smo mjesto $\frac{k}{b}$ stavili a . Iz jednačbe dobivene saznajemo namah traženu krivulju kao logaritmičku spiralu. Dakle je logaritmička spirala ove vlastitosti jedina krivulja.

36. Za ploštinu krivulje promjene krivosti imamo

$$P_1 = \int_{\alpha_0}^{\alpha} y \, dx = \int_{\alpha_0}^{\alpha} R \, ds = \int_{\alpha_0}^{\alpha} R^2 \, d\alpha.$$

Nu

$$P = \frac{1}{2} \int_{\alpha_0}^{\alpha} R^2 \, d\alpha$$

je ploština, koju opisuje polumjer krivosti dane krivulje, tim dobivamo zanimivu relaciju

$$P_1 = 2P$$

t. j. ploština krivulje promjene krivosti je dvaputa tako velika kao ploština koju opisuje polumjer krivosti dane krivulje.

Za cikloidu običnu je krivulju promjene krivosti krug (lik 26) sa polumjerom¹ $a = 4a_1$. Ploština P_1 je očividno ploština polukruga OFG kao krivulje promjene krivosti, dakle je

$$P_1 = 8\pi a_1$$

Za P bi dobili

$$P = 4\pi a_1$$

dakle

$$AFGA = 2 \cdot OA_0HAO.$$

¹ Gledaj čl. 20. I.

37. Obličaka u predidućem članku možemo sada upotrebiti da riješimo sljedeću zadaću.

Ima se naci krivulja te vlastitosti, da je luk krivulje promjene njezine krivosti k puta velik, kao što je odgovarajući luk tražene krivulje. Vlastitost spomenutu izražuje nama jednačba

$$\sigma = k s.$$

Derivujemo li ovu jednačbu dobit ćemo:

$$s'' - (k^2 - 1) s' = 0.$$

Integracijom sledi:

$$s = C_1 + C_2 e^{(k^2 - 1)}$$

Za $k \geq 1$ dobijemo opet logaritmičku spiralu, ako je $k = 1$, predje diferencijalna jednačba u

$$s'' = 0$$

te njezin integral je

$$s = a + b x,$$

što je jednačba kruga. Mogli bi isti rezultat iz obćenite rješitbe za $k = 1$ dobiti, jest naime, ako stavimo

$$\delta = k^2 - 1$$

$$s = C_1 + C_2 + \frac{C_2 \delta}{1} \cdot + \frac{C_2 \delta^2}{1 \cdot 2} \cdot x^2 + \dots \text{in inf.}$$

Buduć da povoljna konstanta C_2 sve moguće vrijednosti od $-\infty$ do $+\infty$ poprimiti može, pišimo

$$C_1 + C_2 = a, \quad C_2 \delta = b,$$

tim dobijemo

$$s = a + b x + \frac{b \delta}{1 \cdot 2} x^2 + \dots \text{in inf.}$$

Približava li se sad k ka jedinici, je $\lim \delta = 0$, te za taj slučaj dobivamo

$$s = a + b x$$

kao gore.

Natračnica.

38. Povucimo iz neke točke na primjer iz izhodišta O duljinu OM' jednaku polumjeru krivosti točke M istosmjerno sa polumjerom krivosti, dakle

$$OM' \equiv MS,$$

dobit ćemo novu krivulju kao mjesto krajnjih točaka M' trakovâ OM' . Ovako dobivenu krivulju zvati ćemo *natračnicu*.¹

Buduć da je $\overline{OM'}$ provodnica točke M' te kut polaran

$$\theta = \alpha + \frac{\pi}{2},$$

je

$$r = \varphi \left(\theta - \frac{\pi}{2} \right)$$

jednačba natračnice u surednicah polarnih ako je dana krivulja jednačbom oblika

$$R = \varphi(\alpha).$$

Ova krivulja bi nama mogla jednako služiti za promatranje promjene krivosti. Razlika sa prijašnjom krivuljom promjene krivosti sastoji u tom, da mjesto da tražimo promjenu krivosti rastućim lukom tražimo promjenu krivosti rastućim uklonom polumjera krivosti prema čvrstoj osi. Prije navedeni postupak čini se nama jednostavniji. Ploština natračnice je očito jednaka ploštini opisanoj polumjerom krivosti dane krivulje.

Tako je ovdje za parabolu danu sa

$$R = -\frac{a}{\sin^3 \alpha}$$

jednačba natračnice

$$r = \frac{a}{\cos^3 \theta}$$

ili

$$x^3 = a(x^2 + y^2).$$

Za logaritmičku spiralu je natračnica opet logaritmička spirala danoj kongruentna, samo pookrenuta oko zajednički pol.

Za verižnicu, danu sa jednačbom

$$R = \frac{a}{\cos^2 \alpha},$$

je jednačba natračnice

$$r = \frac{a}{\sin^2 \theta}$$

ili

$$y^4 = a^2(x^2 + y^2).$$

Za cikloidu običnu danu sa jednačbom

$$R = a \sin \alpha,$$

je jednačba natračnice

$$r = -a \cos \theta$$

ili

$$x^2 + y^2 = -2ax.$$

¹ J. Hoüel navadja u zadaćah ka knjigi III. svojega „Cours de calcul infinitesimal T. II. pg. 269. ovu krivulju pod imenom „la radiale“.

K v a d r a t u r a.

39. Ako je MM' elemenat luka krivulje, te OMM' elemenat plošni, opisani provodnicom OM , biti će

$$2 \Delta OMM' = p ds,$$

buduć da je ds osnovka te p visina tog trokuta, sliedi obzirom na vrijednost dobivenu za ds

$$P = \frac{1}{2} \int_{\alpha_0}^{\alpha} p(p+p') d\alpha$$

ploština omeđjena provodnicama dirališta tangenata $T\alpha$, $T\alpha_0$ te lukom M_0M krivulje.

Za cikloidu običnu je čl.

$$p = 2a \alpha \sin \alpha,$$

dakle je (lik 8.) za ploštinu $OMO'O$

$$P_1 = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \alpha \sin 2\alpha d\alpha = \frac{\pi a^2}{2},$$

te buduće da je

$$\Delta OO'G = \pi a^2,$$

sliedi za ploštinu ciele cikloide

$$P = 3a^2.$$

II. Parabola dana je jednačbom (čl. 12, IV.)

$$p = -\frac{a \cos^2 \alpha}{2 \sin \alpha},$$

dakle je za ploštinu omeđjenu lukom OM te provodnicom OM (lik 9)

$$P_1 = \frac{a^2}{4} \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 \alpha d\alpha}{\sin^4 \alpha} = \frac{a^2}{12} \cot^3 \alpha = \frac{xy}{6}.$$

Označimo li ploštinu OMP sa P , je

$$P = P_1 + \Delta OMP = \frac{xy}{6} + \frac{xy}{2} = \frac{2}{3} xy.$$

III. Kao treći primjer ćemo još navesti epicikloidu, koja je dana u tangencijalnih koordinatah sa jednačbom [čl. 19, (13)]

$$p = a \sin n \alpha.$$

Računamo li ploštinu od provodnice točke A (lik 20) biti će

$$P_1 = \frac{a^2(1-n^2)}{2} \int_0^{\alpha} \sin^2 n x \, dx,$$

dakle je

$$P_1 = \frac{a^2(1-n^2)}{4} \left(\alpha - \frac{\sin 2n\alpha}{2n} \right).$$

Za ploštinu omeđenu jednom granom krivulje te provodnicama krajnjih točaka iste grane biti će gornja medja $\alpha = \frac{\pi}{n}$ (čl. 22), dakle

$$P_1 = \frac{1-n^2}{4n} \pi a^2,$$

ili izrazimo li n te a pomoću m te ρ [čl. 19, (12₁)], dobivamo

$$P_1 = \frac{(m+1)(2m+1)}{m} \pi \rho^2.$$

Zadnju jednačbu bi mogli obzirom na relaciju $\rho = m r$ pisati¹:

$$P_1 = \frac{\rho(\rho+r)(2\rho+r)}{r} \pi.$$

Kod epicikloide, dakle za pozitivan² m , sastoji ova ploština iz sektora kruga te iz one ploštine, koja leži između kruga te grane epicikloide. Budući da je ploština tog sektora kruga jednaka $\frac{\pi \rho^2}{m}$ radi $\theta = 2m\pi$, dobivamo za onu ploštinu između kruga te grane epicikloide

$$\pi \rho^2 (2m+3) = \frac{\pi \rho^2 (2\rho+3r)}{r}.$$

Za kardioidu je $m=1$, krivulja sastoji samo iz jedne grane; ploština ciele krivulje je:

$$P = 6\pi \rho^2.$$

Ploština između kardioidom te temeljnim krugom je $5\pi \rho^2$.

Za asteroidu je $n=2$, $m=-\frac{1}{4}$. Za četvrt ploštine asteroide imamo

$$P_1 = \frac{3}{2} \pi \rho^2,$$

dakle je ploština ciele asteroide

$$P = 6\pi \rho^2 = \frac{3}{8} \pi r^2.$$

¹ Svrnaj za ovu jednačbu *Frenet* Recueil d' exercices sur le calcul infinitesimal. Paris 1873. pg. 277.

² Svrnaj pg. 33 ove razprave.

Trahići Fruške gore.

Mikroskopičko iztraživanje

PROF. DRA. M. KIŠPATIĆA.

(Predano u sjednici matem.-prirodosl. razreda jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti dne 4. siječnja 1882.)

Literatura:

H. Wolf: Bericht über die geologische Aufnahme des Vrdnik-Gebirges. Verhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. 1860, 1861. II. p. 160.

A. Koch: Beitrag zur Kenntniss der geognostischen Beschaffenheit des Vrdniker Gebirges in Ostslavonien. Jahrbuch der geol. Reichsanstalt. 1871, p. 23. — Sanidintrachyt von Rakovacz p. 28—30.

A. Popović: O geološkim odnošajima Fruške gore. I. O fruškogorskim trahitima. Letopis Matice srpske 1873. p. 137—141.

Dr. Oscar Lenz: Beiträge zur Geologie der Frusca gora in Syrmien. Jahrbuch der geol. Reichsanstalt 1873. p. 295, sa navodom mikroskopičkog iztraživanja od dra. *Doeltera* p. 303.

St. Nedeljković: Syrmier Sanidin Trachyt. Verhandlungen der geol. Reichsanstalt 1874. N. 1. p. 15.

Dr. C. Doelter: Trachytvorkommen in Syrmien. Verhandlungen der geol. Reichsanstalt. 1874. N. 3. p. 60.

A. Popović: Neuer Fundort von Trachyt in Syrmien. Verhandlungen der geol. Reichsanstalt 1874. N. 9. p. 226. Notiz.

Dr. J. Szabó: Trachyt Pétervárad és Szerémböl, Földtani Köz-löny, 1874, p. 94—97.

Dr. A. Koch: Neue Beiträge zur Geologie der Frusca Gora in Ostslavonien. Jahrbuch der geol. Reichsanstalt 1876. p. 1. (p. 21, 38—46).

Sudeč po literaturi, koja o trahitih Fruške gore postoji, čovjek bi pomislio, da nije vriedno iznovice se dati na iztraživanje toga eruptivnoga kamenja. Nu tko točnije pregleda navedenu literaturu, morati će doći do protivnoga uvjerenja. Sva dosadanja iztraživanja razilaze se na toliko, da čovjek napokon nezna, u koju hrpu bi doćično eruptivno kamenje smjestio. Dr. *A. Koch* je u zadnjoj svojoj razpravi sve rakovačke i ledinačke trahite opredielio kao *doleritične fonolite*. Dr. *Doelter* opisao je rakovačko kamenje jedan put kao *amfibolne andezite*, a drugi put kao *trahite*. *A. Popović* spominje isto kamenje dielomice kao obične *trahite*, a dielomice kao *kremene trahite*. Sva ta iztraživanja neslažu se prama tomu ni u bitnih sastavnih dielovih, a pri onom, što se navadja, nespominju se nigdje phisiografička svojstva sastavnih ruda, što je svakako najveća pogreška navedenih radnja.

Svi ti razlozi ponukali su me, da sâm potražim razna nalazišta eruptivnoga kamenja u Fruškoj gori i ondje pokupim potrebiti materijal. Na to me je još više nukala ta okolnost, što su baš u zadnje vrieme prokapali tunel kroz petrovaradinski brieg radi gradnje novosadsko-zemunske željeznice, gdje sam mislio naći zanimiva petrografička materijala, u čem se nisam ni najmanje prevario.

Zadnjega ljeta prošao sam mal ne cielu Frušku goru, obašao sva važnija nalazišta trahita u okolici rakovačkoj i ledinačkoj, te varadinski tunel, pa ovdje podnašam rezultate svoga mikroskopičkog iztraživanja, želeći izpraviti i popuniti sva dosadanja iztraživanja. Da je to bilo potrebno, mislim, da će se svatko uvjeriti, tko pročita ovu razpravu.

Najzanimivije mjesto, gdje se trahit u Fruškoj gori nalazi, svakako je petrovaradinski tunel. U rakovačkoj i ledinačkoj okolici tvori trahit čitave bregove i vrhunce, dočim u petrovaradinskom briegu izpunjuje on samo uzke pukotine, te dolazi u dodiru sa drugim kamenom, koji je petrografički od velike zanimivosti.

Da u petrovaradinskom briegu, na kom tvrdja stoji, imade trahita, našao je ponajprije *A. Popović*, prerano umrli profesor novosadske gimnazije, o čem je kratku noticu u spisih geologičkog zavoda napisao. On tu spominje, da trahit, koji probija zapadnu stranu petrovaradinskog briega, sastoji od ortoklasa, oligoklasa i kremena. U razpravi svojoj, tiskanoj u „Letopisu Matice srpske“, spominje u kratko, da trahit probija petrovaradinsku stenu na nekoliko mjesta i da on sastoji od

ortoklasa,
oligoklasa i
kremena

kao temeljnih sastavina, a uzgredice da se u njem pojavljuje

augit,
biotit,
pirit,
kalcit,
nefelin i
magnetit.

U koliko je ovo opredjeljenje krivo, čuti ćemo odmah. Dr. Szabó dodaje ovim sastavinam još i amfibol. U koliko je meni poznato, proviruje trahit iz petrovaradinske pećine na zapadnoj strani uz cestu kameničku u blizini pivare. Trahit tvori tude gredu od 1 metra širine u kamenu, koji je u literaturi poznat pod imenom serpentina. Trahit je tu tako raztrošen, da u njem nije moći ništa razpoznati do ledaca amfibola, koji su ali posve kloritizirani. Jedri-jega kamena našao sam samo u tunelu.

Tunel započinje na zapadnoj strani briega nekoliko metara od Dunava. Tunel je u cijelom 361 metar dugačak, te u prvoj trećini zavrće ponešto na lievo (prama sjeveru) i onda ravnim pravcem izlazi prama Majuru. On prodire s dunavske strane u zelenkasti kamen, od koga sastoji mal ne cijeli petrovaradinski brieg. Kamen taj poznat je u literaturi kao serpentin. Ja sam u svojoj razpravi „o zelenih škrljavcih petrovaradinskog tunela“ dokazao, da tu serpentinu ni traga nejma, nego da su to amfibolni i augitni škrljavci“. — 60 metara daleko od ulaza u tunel provaljuje okomita greda trahita kroz zeleni škrljavac. Greda je ta na lievoj strani 5·5, a na desnoj strani 7 metara široka. Trahit je taj dosta jedar i neraztrošen. Iza trahita nastavlja se opet zeleni škrljavac, koji biva, što dublje u tunel zalazimo, sve to više raztrošen, a u tom raztrošenom kamenu, jedno 160 metara daleko od ulaza, pojavljuje se druga greda trahita od 6 metara debljine. Kao što je obližnji kamen, tako je i sam trahit ovdje jako raztrošen.

Od prve trahitne grede imao sam 18 komada kamenja, od čega sam 24 izbruska napravio. To je kamenje na oko posve jedro. Boje je crvenkasto sive. Trahit je taj uz malenu iznimku sav porfirasta sastava: u gustoj osnovini leže veliki ledci glinenca (Feldspath) i amfibola, a uz to i znatna množina sitnoga piritu. Glinenac je ponajviše mliečno pomućen, a samo gdješto je on posve staklenast.

Meni se čini, da je *A. Popović* morao ove staklenaste glinence smatrati za kremen, o kom on veli, da je bitnom sastavinom petrovaradinskog trahita, jer u kamenu nije moći niti makroskopički niti mikroskopički naći kremenca kao bitnu sastavinu. — Ledci amfibola su dugački. Oni su se sad jednolično po kamenu razširili, a sad se opet na gusto kao u gnezda u kamenu nakupili.

Mikroskopički našao sam u kamenju prve trahitne grede kao stalne sastavine :

1. glinenac, većinom ortotomni,
2. amfibol,
3. apatit i
4. titanit,

a u pojedinih samo slučajevih

5. augit i
6. biotit,

te uz to uvijek skroz kristaliničnu osnovinu i kao sekundarne proizvode pirit, hematit, limonit, te karbonate vapna i željeza. Nefelina nejma, a kremenca našao sam samo u jednom znatno raztrošenom kamenu kao sekundarni proizvod. Prama tim sastavinam moramo eruptivno to kamenje staviti u hrpu trahitâ.

Glinenac u većih ledcih zaostaje doduše množinom svojih individua za amfibolom, ali je za oto ipak tako stalnom sastavinom trahita, da je riedko naići na izbrusak, u kom ga nebi našli. Glinenci su se najviše razvili kao ortotomni glinenci, ali uzanj se pojavljuju skoro uvijek plagioklasi u manjoj množini.

Ortotomni glinenci su ili jedinci ili karlsbadski dvojci. Kod dvojaka mjerio sam kut potamnjenja prama pravcu srašćenja na $12^{\circ}5'$ do 13° . Čisti i nepretvoreni jedinci i sraslaci pokazuju vrlo često najkrasniju i zonalnu gradnju sa 3, 4 do 9 pojasa. Velik dio glinenaca je posve jedar i staklenast, tako da oni tvore najkrasnije sanidine, drugi su se opet već znamenito raztvorili. Kako se kroz glinence provlače nepravilne pukotine, to je viditi, kako se ponajprije na pukotinah pojavljuju produkti raztvorbe, koji se onda sve više ledcem šire. Mutež, koja tim nastaje, tvori obično zaokružen vienac u ledcu, pri čem ostaje nutrnjost i okrajak proziran i staklenast. U množini izbrusaka bili su glinenci posve raztrošeni. Bilo je razpoznati samo njihove obrise, dočim je nutrnjost bila skroz metamorfozirana. Pri velikom povećanju bilo je posve jasno viditi, da pretvorina ova sastoji od neizmjerne množine veoma finih listića. Listići ti poredali su se istim smjerom, te leže paralelno

dugim konturam leđa. Samo mjestimice umetnuli su se uzki nizovi sličnih listića u pravcu, koji tvori sa prijašnjim pravcem kut skoro od 90° . Svi ti listovi pokazuju pri unakrštenih nikolih dosta oštre boje, a potamnjuju paralelno uzdužnom svom smjeru. Ako uzmem u obzir listićavu narav ovih pretvorina, njihovu oštru polarizaciju i optičko orijentiranje, pa još i to, da su se ti listovi razvili kemičkom metamorfozom u kalijevom glinencu: mislim, da neću pogriješiti, ako rekнем, da ti listići nisu ništa drugo nego *kalijev tinjac*. U tom mnijenju potvrđuje me još i to, što metamorfoza glinenca u kalijev tinjac nije tako riedka. Moram spomenuti, da sam sličnu metamorfozu dokazao u gleichenberžkih andezitih i opalih, gdje ju je i kemička analiza potvrdila,¹ pa prisposobljavajući ove pretvorine sa petrovaradinskim pretvorinama nisam mogao nikakve bitne razlike naći. — U pretvorenih ovih glinencih vide se još gdjekad posve nepromienjeni leđci apatita. Raztvorba ova nije se nikad ograničila na same glinence, uvijek su onda u takvu kamenu i druge sastavine znatno promienjene. Pretvoreni ovi glinenci nisu samo ortotomni, nego među njimi ima sigurno i plagioklasa. Zaključujem to iz toga, što se u nekih pseudomorfoza vide, kako sam gore spomenuo, uzki nizovi tinjca paralelno sa pločom 001 (OP), što bi odgovaralo drugim umetnutim sraslačkim lamelam, čega je na nepretvorenih plagioklasih petrovaradinskog trahita više puta naći.

Ortotomni glinenci imadu uvijek u sebi raznovrstnih uklopaka, no oni se nikad nenagomiljuju u tolikoj množini, da bi leđac pomutili. Uklopci su sljedeći:

1. *Apatit*. On je najobičniji pratilac glinenca. Vidi ga je u šestostranih bazičnih prerezih i u dugih iglastih leđcih sa pločami piramide i gdješto još i sa osnovnom pločom. Iglice pokazuju uvijek bazičnu kalavost. Osim apatita vidi ga je u glinencih množinu tako sitnih iglastih leđaca, da ih nije moći opredieliti. Moguće, da su i to apatiti.

2. *Glinenci* sami u manjih zrnih često leže uklopljeni u većih leđcih i to u posve nepravilnom položaju.

3. *Amfiboli* pojavljuju se više put kao uklopak u karakterističnih oblicih, na kojih je viditi znamenit dihiroizam, maleni kut potamnjena, te prizmatičnu kalavost.

¹ Ueber die Bildung der Halbopale im Augit-Andesit von Gleichenberg. Tschermaks „Mineralogische und petrographische Mittheilungen. 1881. pag. 136, 137.

4. *Augit* je vrlo riedak uklopak.

5. Cijeli komadi *osnovine* sa leđci glinenca, *augita*, *amfibola*, *apaita* i zrni crne željezne rude. Veća ta zrna su sigurno pirit, koji se je često na okrajku počeo pretvarati u hematit.

6. *Titanit* je najzanimiviji uklopak u glinencu. On se pojavljuje u žutih sitnih leđcih ili pojedince ili po više ih na okupu. U jednom sanidinu našao sam na jednoj hrpi šest nakupljenih leđaca titanita.

Plagioklasi zaostaju brojem individua daleko za sanidini, a i dimensije su im obično mnogo manje. Više puta sastoji cijela polovica *plagioklasa* od jednog individua, dočim je druga polovica sastavljena od množine finih lamela. Više puta neprolaze pojedine sraslačke lamele skroz do drugog kraja, nego bivaju tanje, pa se gube u drugom individuu. U nekih *plagioklasih* je viditi, kako su se druge kratke lamele, koje nedosižu na nijednoj strani do kraja, poprieko umetnule, tako da leže paralelno sa osnovnom pločom. Složila su se tu dakle oba sraslačka zakona, albitov i Rathov.

U ostalih svojstvih se *plagioklasi* nerazlikuju bitno od sanidina. Pravac, u kom su razni *plagioklasi* potamnili, tvorio je sa pravcem srašćenja kutove 6° , 8° i 14° .

Amfibol je u petrovaradinskom trahitu najglavnija sastavina. *A. Popović* ga u svojoj razpravi ni nespominje, čemu se je tim više čuditi, što se je *amfibol* u tako velikih leđcih razvio, da ih je moći izlupiti i mjeriti. Na takvih izlupljenih leđcih našao sam osim ploča prizme još uvijek oba *pinakoida*, pri čem je uvijek *pinakoid* 100 imao samo vrlo uzke ploče, da ih je jedva bilo zapaziti. K tomu su bile još razvijene ploče 001, 111 i $\bar{1}\bar{1}\bar{1}$. Površina ovih izlupljenih leđaca nije bila ravna, ali su se ipak dali kutovi na toliko izmjeriti, da se je mogla opredieliti narav pojedinih ploča. Tako sam našao:

po računu

$$110 : \bar{1}\bar{1}0 = 55^{\circ}41' \quad 55^{\circ}49'$$

$$111 : \bar{1}\bar{1}0 = 68^{\circ}57' \quad 68^{\circ}47'$$

$$001 : \bar{1}\bar{1}\bar{1} = 34^{\circ}26' \quad 34^{\circ}25'$$

Gdje su *amfiboli* svježi i neraztrošeni, tamo oni pokazuju u raznih svojih prerezih jasan trihroizam. Boja mu je tu žuto-zelena, smeđe-zelena i jasno zelena. Uzdužni prosjeci su jako dihroitični, te potamnjaju pod kutom 6° — 17° . Popriečni prerezi pokazuju savršenu prizmatičnu kalavost sa kutom od $124^{\circ}30'$. Pojedini leđci su zonalno građeni. Leđci su većim dielom jedinci, ali ima i sraslaca, kojim je pravac srašćenja paralelan ortopinakoidu. Nekoliko sraslaca sam našao, kojim pravac srašćenja tvori sa prizmatičnom kalavošću kut od 10° .

Nego veći dio amfibolâ je već znamenito promijenjen i raztvoren. Raztvorba je uvijek od rubova započela, pa se je prama sredini širila, tako da je na takvih prerezih, gdje je sredina ostala još neraztvorena, u njoj moći dobro još razpoznati optička svojstva i kalavost amfibola, no gdje je amfibol posve pretvoren, tu ga je moći još samo prepoznati po njegovih obrisih. Pretvorina sastoji od nakupine lopusastih listova klorita. Listovi su ti sad širji, sad uži i iglasti prama tomu, kako su prerezani. Listovi pokazuju jasan dihiroizam i to žućkastu i kao trava zelenu boju, kako to kod klorita često vidjamo. Mnogi široki listovi ostaju pri unakrštenih nikolih u svakom položaju posve tamni, dočim drugi potamnjuju samo paralelno sa svojom duljinom. Prvi listovi su dakle basični, dočim su drugi uzdužni prosjeci. Kloritična nutrnjost je više puta izkidana, a na takvih mjestih složili su se bijeli, jasno dihiroitični, zrnati karbonati vapna i željeza. Kao proizvod raztvorbe nalazimo u kloritu još i veoma fine grmolike nakupine magnetita.

Najobičniji uklopak u amfibolu je *apatit*, koji malo kojemu amfibolu manjka. Često se po više ledaca apatita razne duljine i debljine u jedan snopić sraščuju. I ondje, gdje je amfibol posve kloritiziran, vide se ledci apatita posve nepromijenjeni. Kao daljnji uklopak amfibola spomenuti je *sanidin*. Nadalje se vrlo često pojavljuju liepi ledci *titanita*. U najvećoj množini ima u amfibolu *pirita* i često njegovih pretvorina, *hrdje* i *hematita*. Hematit se vidja sad u nepravilnih ljuskah, a sad opet u heksagonalnih listovih. U dva razmjerno dosta svježâ amfibola našao sam velike listove biotita uklopljene u posve nepravilnom položaju.

Apatit se je posvuda u znatnoj množini razvio i to nesamo kao uklopak u drugih rudah, nego i samostalno u osnovini. *A. Popović* i dr. Szabó ga nespominju. Moguće, da su oni apatite držali za nefeline, ali ovih u kamenu neima, kako ću to kašnje na drugom mjestu dokazati.¹⁾

Apatit se vidja u svih svojih karakterističnih oblicih. Basični prerezi tvore šestokute, kojim su se ili sve stranice u jednakoj dimenziji razvile, ili su samo tri izmjenične strane jednake. Uzdužni prerezi pokazuju ploče prizme kombinirane sa piramidom, a

¹⁾ Iz privatnoga lista od dra. Szabóa doznajem, da je on kašnje došao do osvjedočenja, da u kamenju tom neima nefelina, pa da je on prije sitne glinence držao za nefelin, no optički bi se lahko dao razlučiti monoklinički glinenac od heksagonalnoga nefelina ili apatita.

gdješto se k tomu još pridružuje i osnovna ploča. Vrlo riedki su ledci, gdje bi se bile razvile samo ploče prizme sa osnovnom pločom. Ledci su razne duljine i debljine. Gdje koji su posve iglasti, te prolaze kroz više ruda, dočim su drugi opet posve kratki i debeli. Svi pokazuju uvijek razvijenu bazičnu kalavost, tako da ledci u više članaka razpadaju. Više puta se sraščuju ledci razne duljine i debljine u pravilnom položaju u snopiće.

Tanji apatiti su vrlo često posve čisti i prozirni, dočim su odeblji ledci obično puni uklopaka. Uklopci se obično nagomiljuju u tolikoj množini, da dotični dieleci ledeca postaju posve sivi i tamni. Oni obično izpunjuju dielecu nutrnjost ledeca, tako da samo vanjski rubovi ostaju čisti. U jednom ledecu tvorili su uklopci vienac, pri čem je sredina i vanjski rub ledeca bila čista. Vanjski dio toga vienca imao je posve ravne obrise, koji su odgovarali točno pločam prizme i piramide, što su se na samom apatitu bile razvile. — Malne svi uklopci u apatitu tako su sićušni, da ih je moći tek pri najvećem povećanju razabrati. Bile su to sad tanke iglice, koje su se uvijek smjerom glavne osi poredale, a sad opet maljušne krugljice. Jedan dio ovih iglica i krugljica bio je smedje-žute boje. U njih je bilo gdje kad viditi malene mjehure, koji se ali nisu niti u kruglastih uklopcih htjeli pomicati, pa ma preparat drмали ili grijali. Smedje žute ove uklopke držim za uklopke stakla. Drugi dio iglastih i okruglastih uklopaka bio je posve jasne boje. I u njih je više puta bilo vidjeti mjehure. Ti mjehuri su se u okruglastih uklopcih pri grijanju odmah počeli micati, ali nisu nikad izčeznuli. Po tom nejma dvojbe, da su to uklopci neke tekućine. Tekuća ugljična kiselina to nije, jer bi inače mjehur pri grijanju morao izčeznuti. I jasne uglaste uklopke sa mjehurom držim za uklopke tekućine, premda se u njih mjehur ni grijanjem nepomiče, jer ga prieči s jedne strane prionljivost, a s druge strane uzkoća iglaste šupljine. Moguće je, da medju jasnimi uklopci bez mjehura ima uklopaka plinovite naravi.

Titanit je u našem trahitu tako običan, da nisam nijednog izbruska imao, u kom nebi našao bar nekoliko ledeca. On se nalazi ne samo kao uklopak u glinencu i amfibolu, nego se je i samostalno u osnovini razvio. U izbrusku od jednog trahita, koji je tako malo osnovine imao, da je skoro zrnat bio, bilo je preko stotine ledeca titanita. U ono malo osnovine bio je na sve strane razbacaan, a nije bilo sanidina, u kom nebi bio po koji ledac uklopljen, a samo u jednom sanidinu bilo je 10 titanita.

Titanit bio je uvijek lahko žućkasto bojadisan, pa uz svu tu slabu boju pokazivao je dosta znamenit dihiroizam. Površina bila je puna pravilnih zavoja, tako da su leđci bili uvijek hrapavi. Uz ta svojstva bio je još i oblik titanita tako karakterističan, da ga je bilo posve lahko razpozhati. Vrlo malo ga je bilo viditi u zrnju, obično se je on bio u leđcih razvio. Sitniji leđci, kojih je najviše bilo, pokazivahu sad više sad manje pravilne rombuse, a gdješto i deltoide, kojim su onda po dvie strane bile kratke, dočim su se druge dvie strane produljile u dug šiljat klin. Kod većih leđaca obično su se razvili rombusi tako, da se je jedan par protuležećih strana produljio, a drugi par posve skratio, tako da su pri tom postali dugi stupasti oblici. Gdje koji leđci, koji su se u običnom svjetlu pričinjali kao prosti leđci, pokazase se u polarizovanom svjetlu kao sraslaci, pri čem je pravac srašćenja uvijek prolazio dugom diagonalom rombusa. Kod nekih sraslaca vidio se je pravac srašćenja već u običnom svjetlu. Jedan sraslac naličio je posve poznatim sraslacem sadre po ortopinakoidu (Schwalbenschwanzzwilling) a gdje koji šestostrani stupovi pokazivahu već u običnom svjetlu pravac srašćenja, koji je stup po sredini u dvie pole dielio. — Leđci titanita bijahu dosta veliki. Množinu tih leđaca sam izmjerio, te navadjam za primjer ove brojeve: 0.18 mm., 0.325 mm., 0.5 mm., 0.575, 0.775, 1.4 mm., a jedan veliki rombus bio je 2 mm. dug. — Leđci titanita nisu bili uvijek čisti. Neki su imali u sebi uklopaka, ali ovi su bili pod hrapavom površinom u toliko skriveni, da ih nije bilo moći razpozhati. U gdje kojih se je samo vidilo, kako su se sitni mikroliti žućkasto zelene boje poredali u leđcu pravcem duge diagonale. — U izbruscih, gdje se je vidilo, da je raztvorba daleko napredovala, počeli su i titaniti dobivati bledu boju, tako da ih je onda čovjek mogao samo po obliku razpozhati.

Augit, koji A. Popović nabraja kao glavnu sastavinu trahita petrovaradinskog briega, razvio se je u istinu samo u gdje kojih partijah trahita. U izbruscih od 14 raznih komada kamenja nisam mogao naći niti jednoga augita. Samo u izbruscih od 4 komada našao sam augita i to u većoj množini, što je upravo dokazom, da se je razvoj augita samo na pojedina mjesta ograničio, jer da ga je i u tih izbruscih malo bilo, mogao bi pomisliti, da ih je u prijašnjih slučajevih izbrusak slučajno mimošao. Gdjegod se je augit razvio, tamo on obično nadnašuje amfibol daleko brojem svojih individua, ali za njim opet zaostaje veličinom svojih leđaca. Leđci augita su obično maleni i zrnati, pa su se često na hrpe sabrali.

Augit je jasno zelene boje. Gdjekad mu je okrajak tamnije bojadisan, a središte posve jasno i bijelo. Dihroizam mu je vrlo slab. Boje u polarizovanom svjetlu su mu vrlo oštre. Uzdužni prosjeci potamnjuju pod kutom od $37-40^\circ$. Popriečni prerezi pokazuju ploče prizme i oba pinakoida, pri čem su uvijek ploče pinakoida znamenito veće od ploča prizme. Vrlo riedko razvile su se samo ploče jednoga pinakoida. Prizmatična kalavost na popriečnih prosjecih nije se uvijek razvila, a i gdje se je razvila, tamo neprolazi uvijek cijelim leđcem. Kalavost ta tvori kut blizu 90° . Augitnih sraslaca našao sam u izbrusih vrlo malo, a među njimi je bilo nekoliko, koji su imali dvie do tri interponirane lamele smjerom ploče $100 (\infty P \downarrow)$.

Augiti pokazivahu uvijek veoma malo uklopaka. U njih je bilo viditi po koji apatit i sitne mikrolite neopredielive naravi. U dva augita našao sam po jedan oveliki smeđje žučkasti list biotita uklopljen.

Biotit se nije kao ni augit jednolično po kamenu razširio. U velikom dielu izbrusaka nisam našao biotitu ni traga. U drugih izbrusih mogao sam naći samo u osnovini po koji veoma riedki sitni listić biotita. Osamljenih većih listova bilo je vrlo malo, a među timi moram jedan spomenuti, koji je bio posve valovito zavinut usljed gibanja raztaljenog kamena. Samo u jednom komadu trahita razvio se je biotit u većoj množini, te se jednolično porazdielio između amfibola i augita. Tu je na kamenu bilo već prostim okom viditi crne svjetlucave listove biotita. Gdješto se je bio tu u tolikoj množini nakupio, da sam ga mogao izlupiti. Šestostrani listovi ostali su među nakrštenimi nikoli u svakom položaju tamni. U konvergentnom svjetlu vidio se crni, ali se je pri gibanju preparata nešto malo razstavio u dvie crne hiperbole, što je dokaz, da je tinjac ovaj optički dvoosan, ali malena kuta optičkih osi. Biotit je smeđje žute boje, jake absorpcije, lamelarne kalavosti. U sebi je imao kadkad uklopljene ljuske hematita i ledce apatita. Osim ovih navedenih slučajeva razvio se je još biotit na više mjestah u trahitu, ali samo u hrpah na okupu. Takve nakupine biotita mogao je čovjek na kamenu ili na izbrusku već prostim okom lahko razpoznati. Nakupnine te, kada sam ih kasnije prisposodobio sa metamorfozom, koja se je dogodila sa zelenim škrljavcem u kontaktu sa trahitom, morao sam smatrati kao metamorfozirane uklopke od obližnjega škrljavca. S toga će o njih govor biti u slijedećoj razpravi „o zelenih škrljavcih petrovaradinskog tunela i njihov kontakt sa trahitom“.

Osnovina petrovaradinskog trahita je skroz kristalinična, nigdje neima ni traga staklu. Gdje ona nije raztrošena, tamo se jasno vidi, da ona sastoji od sitnih ledaca glinenca, među kojima su najpretežniji sanidini jedinci, rjeđe dvojci, a najrjeđe plagioklasi. Uz glinence pojavljuju se u osnovini apatiti, po gdjekoji titanit, gdješto sitni augiti i amfiboli i vrlo riedko sitni listići biotita. U osnovini se je nadalje razširila znatna množina pirit. On se je mjestimice pretvorio u hrdju i u hematit. Kao proizvod raztvorbe nalazimo u osnovini mnogo dihroitičnih karbonata, od kojih se jedni sa solnom kiselinom brzo raztvoraju i jako šume — dakle vapnenac — dočim se drugi lagano raztvoraju i daju sa amonijakom smeđ talog — dakle karbonat željeza. Na gdjekojih mjestih razvio se je vapnenac u većoj množini i pokazuje tu onda svoju romboedričku kalavost. Napokon spomenuti mi je još *kremen*, koji se na nekih mjestih u osnovini pojavljuje. Izbrusci, u kojih sam kremen našao, pokazuju, da se je dotični kamen znatno raztvorio. Amfiboli su tu svi kloritizirani, a glinenci su se pretvorili u nakupinu tinjca. Kremen se tu pojavljuje samo u sitnih mikroskopičkih zrnih, pa se svuda jasno vidi, kako po više nepravilnih zrna izpunjuje uzke i kratke pukotine, tako da je posve sigurno, da je tu kremen sekundarni proizvod.

Više puta se vide apatiti, koji na pola leže u osnovini, a na pola u kremenu ili u vapnencu, pojav je to, koji se često vidja, te koji ni najmanje nemora da govori za prvotnu narav kremenata ili vapnenca, kao što su to mnogi već sigurno dokazali.

Kamenje druge trahitne grede u petrovaradinskom tunelu je jako raztrošeno. Kamen je zelenkaste boje, a u njem leži množina dugih ledaca zelenkasto raztrošena amfibola.

Pod mikroskopom se vidi, da je kamen skroz raztrošen. U njem nije moći više nijednu sastavinu razpoznati osim apatita i obrisa amfibola. Amfiboli su ti na polovicu izpunjeni bielim karbonatom, a ostalu polovicu izpunjuje kloritična ruda. Amfiboli se razpoznaju sigurno samo u gdjekojih slučajih po obrisih, a gdješto i po crnih crtah, koje na popriečnih prerezih označuju prizmatičnu kalavost. Apatiti, koji se nalaze u amfibolu uklopljeni, sačuvali su se posve dobro. Osnovina je skroz raztrošena, te puna karbonata i limonita. Apatiti u osnovini imadu hrapavu površinu. Veće i manje pukotine u osnovini izpunjene su kremenom, u kom se višeput vide ledci apatita.

Trahit se pojavljuje u Fruškoj gori još u rakovačkoj i ledinačkoj okolici. U literaturi spominje ga ponajprije *H. Wolf* u spisih geologičkog zavoda (1861., 1862., II. 160), gdje veli samo, da je našao valutica od trahita u ledinačkom potoku. Kašnje opisuje u spisih istoga zavoda (1871. p. 28) dr. *A. Koch* sanidin-trahit iz okolice rakovačke. Trahit taj potiče, u koliko mogu iz opisa razabrati, sa Buškine ugljare i rakovačkog potoka. Pod mikroskopom našao je *Koch*, da taj trahit sastoji od felsitične osnovine(?); u kojoj leže veliki leđci *sanidina* i uz njih velika množina sitnijih *sanidina*, za tim leđci *amfibola*, *augita*, nekoliko listova *biotita*, mnogo *magnetita* i nešto malo *nefelina*(?).

U letopisu Matice srpske (g. 1873.) opisuje *A. Popović* isti trahit sa Buškine ugljare, te dodaje k sastavnim dielovom, što ih je *Koch* opredielio, još i *kremen*. U istom spisu opisuje *A. Popović* *ledinački* trahit sa Kamenara, Lukina svetca i Crna Čota. O njem veli, da sastoji od *sanidina*, *augita* i *amfibola*, a da se je kemičkom analizom u njem još dokazalo — ali kako, to neveli — *biotita*, *nefelina*(?), *magnetita* i *kremena*(?), pa ga za to nazivlje *ortoklas* — *kvarztrahit*. Slično opredielio je i dr. Szabó fruškogorske trahite.

U citiranoj razpravi od *Os. Lenza* (1893.) opredielio je dr. *Doelter* trahit iz rakovačkog potoka kao amfibolni andezit, jer je u njem našao *mnogo plagioklasa*(?). *Doelter* nije našao u tom trahitu *augita*, niti *kremena*, ali spominje heksagonalne proreze valjda od *nefelina*(?).

St. Nedeljković u svojoj kratkoj objavi u spisih geologičkog zavoda (1874.) nije bio svojim iztraživanjem puno sretniji. On spominje kao sastavne dielove trahita *sanidin*, *amfibol* i *magnetit*, a za osnovinu veli, da ona sastoji od kremene kiseline(?), vapna i željeznih spojeva.

Dr. *Doelter* opisao je po drugi put u spisih geologičkog zavoda (1874.) ledinački trahit, gdje samo to nova veli, da u njem nije našao *nefelina*, a da za *augit* nije siguran.

Dr. *Koch* je u novoj svojoj razpravi (1876.) opredielio trahite iz Fruške gore kao *doleritičke fonolite*. Dr. *Koch* izveo je cjelokupnu analizu rakovačkog trahita, izlupiv iz njega ponajprije sve *sanidine*, pa je na temelju te analize došao do toga zaključka, da se taj kamen po kemičkom svom sastavu približuje *doleritom*. Koliko ovakve cjelokupne analize malo vriede za petrografičko opredjeljivanje kamenja, mislim, da ovdje nemoram dokazivati. Stvar

je to dobro poznata. Dr. Koch sam priznaje, da se rakovačko kamenje znamenito razlikuje po mineralogičkom sastavu od dolerita, pa ipak je to ime zadržao za svoje kamenje. Dr. Koch nebi sigurno učinio tu pogrešku, kad nebi bio već u drugu još veću pogrešku zagreznuo. On je naime držao sriemske trahite za fonolite. Ti fonoliti mu nisu po mineralogičkom sastavu baš puno naličili ostalim poznatim fonolitom, pa je osjećao nuždu, da im valja dati drugo ime i tako postadoše doleritni fonoliti. Na tu misao, da on imade pred sobom fonolite, doveli su ga nefelini, za koje je mislio, da ih u kamenu nalazi. Dr. Koch je prvi u svojoj prvoj razpravi napomenuo, *da mu se čini*, da u sriemskom trahitu ima nefelina, a za njim se poveo Popović i dr. Doelter. Pri tom je dr. Koch i kašnje ostao, premda nikakve dokaze nenavadjajući, da pred sobom ima nefeline. On veli, da je to samo heksagonalna ruda, a ni nesluti, da bi to mogao i apatit biti. Što spominje, da u kamenu ima zeolitâ, nije moći ozbiljno uzeti, jer i za to nikakvih dokaza nenavadjajući. Navadjajući svoja mikroskopička iztraživanja na izbrusih sa raznih mjesta, u više slučajevah ni nespominje, da bi u kamenu nefelina našao, a na jednom mjestu gdje navadja nefelin kao sastavni dio kamena, stavio je uz nefelin u zaporku znak pitanja. Pa uza te sve sumnje drži on ipak dotično kamenje za fonolite. Kasnije navesti ću sigurne dokaze, da Kochovi nefelini nisu ništa drugo nego apatiti, pa da dotično kamenje nemože fonolitom biti.

Kao što Koch, tako i svi ostali pisci opisujuć sastavne dijelove sriemskih trahita spominju samo imena pojedinih ruda, neobziruć se na njihova fiziografička svojstva, kojimi bi tek morali dokazati mineralogičku narav dotičnih ruda. Koliko ovakvi opisi mogu povjerenja imati, netrebam dokazivati.

Trahit u okolici rakovačkoj i ledinačkoj probio je kroz pješčanike i škriljeve kredine formacije. On tvori tu čitave bregove, koji dopiru sve do „vienca“, a sa bregova spušta se u duboke potočne dolove. Obilazeć rakovačku i ledinačku okolicu naišao sam na trahit ponajprije u iztočnom rakovačkom potoku. Crni a onda sivi kredini pješčanci dopiru sve do *Buškinе ugljare*, iztočnog pritoka u rakovački potok. Kod Buškinе ugljare proviruje izpod pješčanika trahit, koji se s desnog briega u dol spušta. Trahit proteže se potokom gore do 80 metara daleko (po dr. Kochu 40 met.). On je tu u tavane odlučan, pa je svjež i dobro sačuvan. Povrh trahita pojavljuju se kredni brusilovci, u kojih leže umetnuti do 2 metra

debeli slojevi pješčanika. Nad brusilovci pojavljuje se opet trahit, koji ide 150 metara daleko (po dru. Kochu 20 met.) potokom. Nad trahitom leži vapnenac i onda serpentin.

U ledinačkoj okolici započinje trahit kod „Kamenarskog potoka“ na briegu „Kamenaru“, gdje cijeli brieg tvori. Na Kamenaru nalaze se dva kamenoloma, odakle su kamen za ceste lomili. Sa Kamenara prelazi trahit dole u „Ratorski potok“, gdje izpod tinjčastog pješčanika proviruje. Iz „Ratorskog potoka“ diže se trahit desno na brieg „Lukin svetac“, koji opet od samog trahita sastoji. Na njem se nalaze takodjer kamenolomi. Odavle prelazi trahit na „Crni Čot“, te se spušta na drugu stranu u „Zovin dol“. Iduć od „vienca“ sa „Trešnjove ante (medje)“ po popriečnom hrbtu, koji ide paralelno sa Gradcem, prelazi se preko dvie glavice „Lišajev vrh“, koji sastoji od posve raztrošena trahita. Dr. Koch spominje u ovoj okolici u blizini „vienca“ trahit na briegu „Oštra glavica“ sa dva vrhunca. Meni rekoše ljudi, da nepoznađu u cijeloj okolici briega „Oštra glavica“, pa mi se po celom opisu čini, da je moj „Lišajev vrh“ Kochova „Oštra glavica“.

To su najvažnija nalazišta trahita, koja su meni poznata i koja sam sâm pohodio. Nedvojim ni najmanje, da se je trahit razvio u ponešto većem obsegu, nego što sam ga opisao, pa da će se moći još po koje nalazište naći, što bi bilo i željeti, da se uzmogne točna karta Fruške gore načiniti.

1. **Trahit u Rakovačkom potoku** je modrušasto sive boje, te porfirasta sastava. Prostim okom razpoznaju se u njem veliki leđi staklenasta sanidina, te leđi amfibola i augita.

Pod mikroskopom očituju se glinenci većim dielom kao *sanidini*, a samo u gdjekojih izbruscih preteže *plagioklas*, tako da kamenje ovo nemožemo uvrstiti u amfibolne andezite, kao što je to jednom dr. Doelter učinio.

Sanidini su se ponajviše razvili u velikih dimensijah, te tvore sad jedince, a sad opet dvojke. Jedna i druga vrst je gdjekad zonalno gradjena. U jednom dvojku mjerio sam kut potamnjenja 8°. Oni su obično uvijek posve sveži, te su se malo kada počeli trošiti. Uklopci u sanidinu nisu nikada mnogobrojni, premda nikada nemanjaju. Samo u jednom slučaju tvorili su sićušni uklopci zakružen vienac. Kao redoviti uklopak vidjamo u sanidinu *apatit*, te sitne iglaste mikrolite, valjda takodjer od *apatita*. Nadalje nalazimo u sanidinu dosta često uklopljene leđce *titanita* u rombičkih prerezih. Daljuji uklopak tvore sitniji jedinci ili dvojci od *sanidina*,

te oveći ledci *augita*, na kojih sam mogao mjeriti kut potamujenja na 39° . Višeput se vidjaju u sanidinu uklopljeni cieli komadi *osnovine*, u kojih je moći razpoznati apatit, sitne glinence, amfibol i augit, a u jednom takvom amfibolu bio je opet uklopljen list *biotita*. Napokon spomenuti mi je još riedke uklopke tekućine sa pomičnom libelom.

Plagioklasi nedosižu nikada onih dimenzija, što ih je na sanidinu viditi. Oni su kadkad zonalno gradjeni, a nose uvijek vrlo malo uklopaka.

Amfibol razvio se je ovdje uvijek u dugih i velikih ledcih, sitniji ledci su veoma riedki. Boje je tamno zelene i tamno žute. Dihroizam mu je uvijek znamenit. Na uzdužnih prosjecih tvori os elasticiteta sa prizmatičnom kalavošću kut od 5° , 6° do 14° . Na popriečnim prerezih jasno se je uvijek razvila njegova karakteristična prizmatična kalavost. Više puta je on zonalno gradjen, gdje su onda zone jasnije i tamnije bojadisane. Manji dio amfibolâ nejma osim apatita nikakvih drugih uklopaka. Takvi amfiboli su obično na rubovih obkoljeni viencem magnetita. Ali veći dio amfibola razvio se sa tako karakterističnim uklopci, da ih je vriedno napose opisati, tim više, što to niti Kochu, niti kom drugom nije palo u oči.

Amfiboli ti obkoljeni su redovito sitniji ledcima *augita*, između kojih se je smjestio još i magnetit. Augiti i magnetiti tvore tu neprekinut viencem oko celog amfibola. Slične vience *augita* i magnetita oko amfibola poznati su u fonolitih kod Aussiga, Roche Sanaire, Route du Mont Dore à Murat u Auvergne-i i Tekuta u Africi.¹

Ako je kamen ponešto raztrošen, onda su sitni augiti pobledili, a gdje su se i tako promienili, da ih nije moći razpoznati.

Rubovi naših amfibola nisu cieli, nego su izkidani, fino razčehani i završuju gdje su sitnim, žučkastim zrnjem. Kao što je okrajak, tako je i nutrnost amfibola izkidana, te izpunjena najzanimivijim uklopci. Među timi uklopci spomenuti mi je ponajprije glinenac. On izpunjuje ponajprije prostor između *augitna* vienca i samog amfibola, te onda zalazi u razkidane dielove amfibola. Uz glinenac pridružuju se u nutrnosti amfibola sitni, zrnati augiti, te magnetitovo zrnje, a u jednom slučaju i pirit, te napokon apatit i gdješto titanit. Ali najzanimiviji uklopak je ovdje svakako biotit. On dolazi ovdje u velikih listovih smedje žute boje, koji pokazuju

¹ Rosenbusch, Mikro. Physiogr. der massigen Gesteine, p. 220, 221.

svoju lamelarnu kalavost, jak dihiroizam i optičko orientiranje paralelno sa kalavošću. Listovi su se ti kadkad posve pravilno umetnuli među prizmatične razejepine amfibola, ali još češće ih je viditi, kako leže u posve nepravilnom položaju napram amfibolu. Biotit zapremilje sa ostalimi uklopci sad veći sad manji prostor u amfibolu, tako da gdjekad svi uklopci daleko nadmašuju množinu amfibola. U izbruscih je često naći nakupina, kod kojih se vidi vienac augita i magnetita, dočim se je u nutrinosti razvio sitni augit, apatit, glinenac i veliki listovi biotita, a amfibolu nejma ni traga. Čovjek bi na prvi pogled lahko pomislio, da se je ovdje biotit razvio kemičkom metamorfozom iz amfibola, kao što to spominje *Rosenbusch* (Mikr. Physiographie, II., p. 261) u jednom esthlandskom dioritu. No proti toj metamorfozi govore mnogi razlozi. Ponajprije nevide se ovdje na amfibolu takve kemičke promjene, koje bi govorile za metamorfozu, jer je on razmjerno dosta svjež, a onda se nevidi nigdje prelaza i saveza između amfibola i biotita. Nadalje proti tomu govori nepravilni položaj, u kom se mnogi biotitni listovi nalaze, a napokon jamče nam i ostali mnogobrojni uklopci, da su oni kao i biotit prvotne naravi u amfibolu, da su zajedno sa amfibolom nastali. Moram spomenuti odmah ovdje, da ni u jednom izbrusku nisam mogao naći biotita, koji bi se *samostalno* u osnovini razvio. Sav biotit, što sam ga našao, razvio se je samo u opisanih nakupinah. Dr. Koch, dr. Doelter i Nedeljković spominju biotit u rakovačkom trahitu kao sastavni dio, pa se čudim, da nisu zapazili ili bar za vrijedno pronašli, da spomenu, u kojih odnošajih se je biotit razvio. — Sve što bi govorilo za sekundarnu narav biotita, bio bi ovaj njegov ekskluzivni položaj, koji ali ipak u ovom slučaju nije odlučan. Sličan takav primjer navadja *Rosenbusch*,¹ gdje doslovce veli: „In einem prächtigen Quarzdiorit von Guernsey durchspicken zahlreiche Magnesiaglimmerblättchen die Hornblende in allen möglichem Richtungen, während das Mineral selbständig nirgends im Gestein auftritt. Man könnte an eine genetische Beziehung der beiden Mineralien denken, wenn nicht die Art der Einlagerung dagegen spräche“.

Augit razvio se je u rakovačkom trahitu svuda jednolično. Brojem svojih individua daleko nadmašuje amfibol, ali su mu leđi mnogo sitniji, često žrnati. Dr. *Doelter* pri svom prvom iztraživanju rakovačkog trahita ili po njegovu „amfibolnog andezita“ ni nespo-

¹ Mikr. Physiographie II., p. 261.

minje augita, dočim pri drugom iztraživanju veli, da mu se čini, da bi neki prosjeci mogli augit biti, što je tim čudnovatije, što se je augit svuda u velikom broju razvio.

Ledci augita su ponajviše, kako rekoh, sitni. Boje su jasno zelene. Dihroizma neimaju skoro nikakva, samo u nekoliko slučajevah bio je dihydroizam znatan: žute i zelene boje, ali tu je bio augit kloritiziran. Uzdužni prosjeci potamnjuju pod vrlo velikim kutom, oko 40° . Na popriečnim prerezih vide se uz ploče prizme još i oba pinakoida, te se tu često vidi kalavost od blizu 90° . Gdje koji ledci su fino zonalno gradjeni. Uklopaka u augitu nejma mnogo. Najčešće je još naći okruglih, žućkastih uklopaka stakla, gdješto i sa mjehurom, te kadkad koji apatit, a u dva augita našao sam po jedan oveći list biotita uklopljen u posve nepravilnom položaju.

Biotita nejma, kako sam već spomenuo, samostalno razvijena.

Apatit se je u rakovačkom trahitu posvuda razvio. Dr. *Doelter* ga nespominje, a za nefelin, bar u zadnjem svom iztraživanju veli, da ga nejma. Dr. *Koch* takodjer ga nespominje, ali za to veli, da u osnovini rakovačkog trahita ima nefelina.

Apatit se pojavljuje ne samo kao uklopak u glinencu i amfibolu, nego ga je još naći i posvuda u osnovini. Popriečni prosjeci tvore mu šestokute, koji ostaju među unakrštenimi nikoli u svakom položaju tamni. Uzdužni prosjeci pokazuju malne uvijek samo ploče prizme sa piramidom, a potamnjuju pravcem glavne osi. Nedvojbeno je tim njihova heksagonalna narav dokazana, ali bi prama tomu još uvijek ledci ti mogli biti apatit i nefelin. Ledci nisu skoro nikada dugački, nego obično kratki i razmjerno dosta debeli, ali pri tom uvijek duljina nadmašuje širinu, a uz to pokazuju takvi ledci uvijek bazičnu kalavost, kojom ledac u dva ili više članaka raspada. Da se podpuno osvjedočim, da li imadem pred sobom apatit ili nefelin, to sam išao pod mikroskopom iztraživati njihova kemička svojstva. Sa solnom i dušičnom kiselinom raztopili su se ledci uvijek. U raztopini sa solnom kiselinom nisam nikada mogao naći kockastih ledaca od kamene soli, a tim sam se osvjedočio, da dotični ledci nemogu nefelin biti. Al kada sam raztopini od dušične kiseline dometnuo molibdenovo-kisela amonijaka, ili ako sam odmah na ledac reagirao sa raztopinom molibdenovo-kisela amonijaka u dušičnoj kiselini, to sam dobio uvijek žuti talog karakteristični za fosfornu kiselinu. Tim sam došao do sigurna osvjedočenja, da pred sobom imam *apatit*, a ne *nefelin*. Te pokuse opetovao sam sa više

ledaca iz raznih izbrusaka, te na izbrusih ledinačkog i petrovaradinskoga trahita, i došao sam uvijek do istoga rezultata, a tim je odlučeno, da ovo fruškogorsko eruptivno kamenje nije fonolit, nego običan trahit po Rosenbuschevoj definiciji.

Apatit u rakovačkom trahitu malo je kada čist, nego je obično pun presitnih uklopaka. Uklopci su se obično nakupili prama sredini ledca, tako da je sredina ledca smeđja i tamna, dočim su rubovi jasniji i čišći. Pri najvećem povećanju (1080 puta) pokazuju se ovi uklopci kao žućkasto smeđe krugljice ili kao žućkasto smeđe iglice, koje su se pravcem glavne osi poredale. U gđjekojih uklopcih vide se nepomični mjehuri, tako da je te uklopke smjeti držati za uklopke stakla.

Titanita našao sam u svakom izbrusku i to uvijek po više velikih ledaca, sad kao uklopak, sad opet u osnovini. Vidjaju se tu jedinci i sraslaci upravo tako, kao što sam to opisao u petrovaradinskom trahitu.

Magnetit razvio se je posvuda po osnovini, te kao uklopak u raznih rudah. Pirit bio je vrlo riedak.

Osnovina rakovačkog trahita je skroz kristalinična. Na sastavu te osnovine udioničtvuju u najvećem broju leđci glinenca. Oni su obično jedinci i dvojci, a gdješto i plagioklasi. U sebi imadu kadšto žućkaste mikrolite. Već u običnom svjetlu vidi se, kako se ovi leđci glinenca stišću i razno zavijaju oko većih ledaca sanidina, augita i amfibola, a pri nakrštenih nikolih vidi se najkrasnija fluidalna struktura, što si čovjek pomisliti može. Očiti ovaj dokaz gibanja pričinja se čudnovat radi toga, što između ledaca nejma nikakva stakla, u kom bi oni svoje gibanje izvadjali. Al je to pojav, koji je već više puta zapažen. — Uz sitne leđce glinenca pridružuju se u osnovini ponešto augit, apatit, magnetit i apatit. Kao sekundarni proizvod razvili su se u osnovini ponešto i karbonati. Kremena nisam nigdje našao. — Veće pukotine i razkoline u kamenu bile su obliepljene bielom rudom, za koju sam mogao kvalitativno opredieliti, da sastoji od željezna, vapnena i magnezijeva karbonata.

2. Iz ledinačke okolice skupio sam i iztražio samo svežije trahite sa Kamenara, Ratorskog potoka, Lukina svetca i Crna čota blizu „Zovina dola“.

a. *Trahit sa Kamenara* bio je modrušasto siv sa velikimi leđci sanidina, amfibola i augita.

Pod mikroskopom bili su *glinenci* većinom sanidini, jedinci i dvojci, rjedje plagioklasi. Uklopci: apatit. *Amfibol* naliči posve amfi-

bolu u rakovačkom trahitu. On je obkoljen viencem augita i magnetita. U njem leže listovi biotita, leđci glinenca, augita i magnetita. U mnogih nakupinah nejma amfibolu ni traga. Biotit nije se inače razvio. *Augit* dolazi u većoj množini nego amfibol, ali u zrnatih i manjih leđcih. U svih drugih svojstvih naliči rakovačkom augitu. *Apatita* ima mnogo i to u kratkih i dugih leđcih, obično prizme sa piramidom. Oni su puni smeđjih uklopaka stakla. U jednom se je svietli uklopak sa dva mjehura razvio kao negativ leđca. *Titanit* dolazi u pojedinih sraslacih. Jedan sraslac naličio je sraslacu sadre. *Osnovina* bila je kristalinična. Leđci glinenca poredali su se fluidalno. Uz nje bilo je viditi apatit, magnetit, augit i dosta raztrošine i to siderita i vapna.

b. *Trahit iz Ratorskog potoka* naličio je makroskopički posve rakovačkom trahitu.

Pod mikroskopom istu onu sliku, koju smo opisali kod rakovačkog i kamenarskog trahita. Mnogi *glinenci* bili su u sredini pomućeni. Mutež ta poticala je većim dielom od finih uklopaka i neopredjeljive raztrošine. *Amfibol* naličio je posve prijašnjim amfibolom. *Augit* se i ovdje u većem broju razvio. *Biotita* samostalno razvijena nejma ni ovdje. *Apatiti* su izpunjeni smeđjimi uklopoci stakla, koji su se poredali smjerom glavne osi. U *osnovini* su se uz fluidalno poredane glinence razvili još augit, apatit, magnetit i gdješto titanit. Sitni ovi glinenci imaju često uklopke stakla sa nepomičnim mjehurom i žučkasto zelene mikrolite.

c. *Trahit sa Lukina svetca* je u glavnom makroskopički i mikroskopički naličio prijašnjim trahitom. *Sanidini* su bili malne svi zonalno građeni. *Plagioklas* bio je riedak. Kod *amfibola* je radi raztvorbe augitni vienac izčeznuo, a magnetit se pretvorio u limonit. U amfibolu bilo je osim biotita i glinenaca naći i titanita. *Augit* bio je mnogobrojan, gdje koji leđci imali su uklopljene listove biotita. *Apatita* bilo je mnogo, a bili su puni smeđjih uklopaka. U kristaliničnoj fluidalnoj *osnovini* bilo je nekoliko titanita.

d. *Trahit sa Crna čota* blizu Zovina dola bio je posve sličan prijašnjim. *Sanidin* bio je u velikih leđcih, a isto tako i *amfibol*, koji se je i ovdje upravo tako razvio kao u rakovačkom trahitu. *Augita* bilo je mnogo. *Biotit* razvio se je samo ili u amfibolu ili u nakupinah, koje su u svem naličile nakupinam prijašnjim samo što u njih nije amfibola bilo. *Apatita* bilo je u znatnoj množini. Oni su bili puni smeđjih uklopaka. U jednom leđcu bili su okruglasti i iglasti uklopoci jasne boje, a često bilo je u njih mje-

hure viditi. U okruglih uklopcih su se mjehuri grijanjem micali. *Titanita* bilo je više povećih ledaca. U kristalimičnoj fluidalnoj *osnovini* bilo je dosta siderita, vapna i limonita. — U ovom trahitu spominje dr. *Koch*, da je u jednom sanidinu našao uklopak titanita, koga drugdje nije nigdje vidio.

Prispodobimo li ove pojedine opise, osvjedočiti ćemo se, da između pojedinih trahita iz okolice Rakovca i Ledinaca nejma upravo nikakove razlike. Jedinstvena ova njihova mineralogička narav dovadja nas na tu misao, da su svi oni trahiti proizvodom jedne podulje provale. Petrovaradinski trahit razlikuje se od rakovačkog i ledinačkoga trahita, što se u njem nije augit jednolično razvio, pa što se biotit nije razvio u amfibolu, nego posebice, premda ponajviše uvijek na okupu. Jeli to bila istodobna, ili ponešto starija ili mlađja provala, nemože se dakako izreći.

Na koncu želim još navesti pregled pojedinih sastavnih dielova raznih trahita iz Fruške gore, kako sam ih ja i kako su ih drugi našli.

Petrovaradinski trahit.

<i>Popović</i>	<i>Ja</i>
Ortoklas	Ortoklas
Oligoklas	Plagioklas riedje
Kremen	—
—	Amfibol
Augit	Augit riedje
Biotit	Biotit
Nefelin	—
—	Apatit
Magnetit	Magnetit riedko
Pirit	Pirit
—	Osnovina kristalinična

Rakovački trahit.

<i>Ja</i>	<i>Popović</i>	<i>Dr. Doelter</i>	<i>Dr. Koch</i>
Sanidin	Sanidin	Ortoklas	Sanidin
Plagioklas riedje	—	Plagioklas	Plagioklas riedak
Amfibol	Amfibol	Amfibol	Amfibol
Augit	Augit	—	Augit
Apatit	—	—	—
Titanit	—	—	—
Magnetit	Magnetit	Magnetit	Magnetit
Biotit samo uklopak	Biotit	Biotit malo	Biotit
Osnovina kristalinična	—	Osnovina kristalinična	Osnovina kristalinična
—	Kremen	—	—
—	Nefelin	Nefelin (?)	Nefelin.

Ledinački trahit.

<i>Ja</i>	<i>Popović</i>	<i>Nedeljković</i>	<i>Dr. Koch</i>
Sanidin	Sanidin	Sanidin	Sanidin
Plagioklas riedak	—	—	Plagioklas
Amfibol	Amfibol	Amfibol	Amfibol
Augit	Augit	—	Augit
Apatit	—	—	—
Titanit	—	—	Samo u trahitu Jovin dol
Magnetit	Magnetit	Magnetit	Magnetit
Biotit samo uklopak	Biotit	—	Biotit
Osnovina kristalinična	—	—	Osnovina kristalinična
—	Nefelin	—	Nefelin.

Zeleni škriljavci petrovaradinskog tunela i njihov kontakt sa trahitom.

Čitao u sjednici matematičko-prirodoslovnoga razreda jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti 10. lipnja 1882.

PROF. DR. M. KIŠPATIĆ.

Serpentini Fruške gore a među njimi i petrovaradinski serpentin u strukovnoj literaturi su upravo od svjetskoga glasa. Serpentine se ti spominju svuda kao *gromadno kamenje*, koje je provalilo u kredinoj formaciji. Serpentine, što se protežu trupom Fruške gore, u istini su pravi serpentine, no da li ih smijemo smatrati gromadnim kamenjem, o tom neželim za sada još svoga mnijenja izreći. Za sada obazrijeti ću se samo na kamenje petrovaradinske tvrđje, jer ono nestoji mineralogički u nikakovu одношају sa ostalimi serpentine Fruške gore. Petrovaradinsko kamenje je tim zanimivije, što među njim nije moći naći niti traga kakvom serpentinu, premda se ono svuda u literaturi spominje kao serpentin, pa je dakako i na geologičkih kartah kao serpentin označeno. Priznati moram, da sam bio golemo iznenadjen, kada sam prve izbruske od petrovaradinskog kamena pod mikroskopom razgledao. Nisam mogao biti pripravan, da pomislim, da su se svi iztražitelji do mene prevarili, pa još tomu tako, da su svi u kamenju nešto vidili, što međjutim nije ni najmanje serpentinu slično.

Petrovaradinsko kamenje spominje ponajprije *Beudant*¹ u svom djelu „Voyage mineralogique et geologique en Hongrie pendant l'année 1818“, gdje veli, da petrovaradinska tvrđja stoji na *serpentinu*. Pogriješku ovu usvojiše kasnije svi geolozi, koji su Frušku goru iztražili. Tako spominje *H. Wolf*,² da petrovaradinski brieg sastoji od serpentina.

¹ Jahrbuch der geol. Reichsanstalt, 1873. p. 296.

² Bericht über die geologische Aufnahme des Vrdnik-gebirges. Verhandlungen der geol. Reichsanstalt 1860. i 1861, II. p. 160.

Dr. *Oskar Lenz*,¹ navadjajući serpentine u trupu Fruške gore, veli: „isolirt, aber offenbar mit dem nördlichen Zug in Beziehung stehend, ist die Serpentin-*kuppe*, auf welcher die Festung Peterwardein errichtet ist“. Od važnosti je, što *Lenz* dalje veli: „mit Ausnahme des Peterwardeiner Felsens tritt der Serpentin nirgends massig oder stockförmig auf, sondern ist lagerförmig den Schieferen oder den jüngeren Gesteinen angelagert“. Velim, od važnosti je to, jer petrovaradinsko kamenje nije gromadno, nego je to pravi škrljavec, pa tim odpada i zaključak, što ga je iz toga kašnje dr. A. Koch izveo i na ostale serpentine u Fruškoj gori preneo. *A. Popović*,² bio je prvi, koji je stao sunnjati, da petrovaradinsko kamenje nije pravi serpentin, ali kako se nije upustio u petrografičko iztraživanje, to se nije mogao ni on otresti stare pogriješke. On veli: „Neverujem, da će to obilježje (kao serpentin) biti točno držim, da je to upravo zelenjak, ali se ponešto mjestimice n. p. prema dunavskoj strani nalazi u obliku i sastavu, koji potpuno odgovara serpentinu, te se može reći o toj strani, da tu prelazi zelenjak u serpentin.“

Gledom na petrovaradinsko kamenje u cijeloj su literaturi svakako najvažniji najnoviji podatci od dra. *A. Kocha*,³ jer se je on prvi upustio u samo petrografičko iztraživanje dotičnoga kamenja. Ponajprije želi dr. Koch dokazati, da je serpentin u trupu Fruške gore eruptivnog porekla, pa veli „dass er wirklich als eruptives Gestein aufgefasst werden muss, dafür ist der Peterwardeiner Festungsberg ein Beweis, dessen Gestein — ein nicht vollständig umgewandelter Serpentin — einen *massigen Stock* bildet“. I to mu je jedini dokaz, da su ostali serpentine Fruške gore eruptivne naravi. No i taj dokaz gubi mu svaku vrijednost, jer petrovaradinsko kamenje nije gromadno, nego škrljavavo, pa jer ono nesastoji od serpentina. Što je dr. Koch smatrao petrovaradinsko kamenje gromadnim kamenjem, lahko bi se oprostilo, jer škrljavost dotičnog kamenja nije uvijek i svuda jasno izražena. No njegovo mineralogičko iztraživanje, po kom je dotično kamenje kao serpentin opredijelo, skroz i skroz je krivo. On piše doslovce:

¹ Beiträge zur Geologie der Fruška gora in Syrmien. Jahrbuch der geol. Reichsanstalt, 1873. p. 300.

² O geološkim odnošajima Fruške gore. Letopis Matice srpske 1873. p. 139. i 140.

³ Neue Beiträge zur Geologie der Frusca Gora in Ostslavonien, Jahrbuch der geol. Reichsanstalt, 1876., p. 23. i 24.

„Das Gestein des Peterwardeiner Festungsberges ist schon, mit freiem Auge betrachtet, nicht gleichartig, denn hellere und dunklere grüne Körner und braune oder schwarzgraue, perlmutterglänzende Schuppen bilden seine Gemengtheile. Die braunen Schuppen erwiesen sich ihren physischen Eigenschaften nach, besonders im polarisirten Lichte betrachtet, als *Bronzit*. Die beiden anderen Gemengtheile sind Umwandlungs-producte. In Dünnschliffen sieht man unter dem Mikroskope eine wasserhelle, körnige oder fasrige Grundmasse, in welcher grüne Krystallschnitte eingestreut liegen. Diese sind netzartig von dunkleren Adern durchzogen. Zwischen gekreuzten Nicols zeigten sowohl die helle Grundmasse, als auch die grünen Einschlüsse bunte Interferenzfarben und nur die dunkleren Adern blieben in jeder Stellung dunkel. Daraus folgt erstens, dass die ursprünglichen Gemengtheile noch theilweise ihre Doppelbrechung beibehielten und das Gestein noch nicht vollständig serpentinisirt ist; zweitens, dass die grünen Einschlüsse wahrscheinlich halbserpentinisirte Olivinkörner sind. Das ursprüngliche Gestein war also jedenfalls ein Olivingestein, ob Bronzit oder Enstatit den zweiten Gemengtheil bildete, bleibt sich ziemlich gleich, der dritte Gemengtheil war nicht zu ermitteln. Dieser unvollständige Serpentin bildet neben dem Kamenitzer Thor hervorragende Felsblöcke.

„Weiter gegen die Schiffbrücke, wo einige Steinbrüche eröffnet wurden, ist das Gestein äusserlich gleichartiger, aber doch noch feinkörnig. *Bronzitschuppen* zeigen sich nicht, nur hie und da Magnetitkörner. Interessant ist auch hier, dass ein mehrere Klafter langes Stück röthlichgrauen Thonglimmerschiefers in dem Serpentin eingekeilt vorkommt und das im Hangenden dieses Schiefers der Serpentin selbst schiefrig ist, weiter aber wieder massig wird. Dieses Stück Thonglimmerschiefer wurde jedenfalls vom eruptiven ursprünglichen Olivingestein umschlossen und emporgerissen. Es beweist zugleich, dass dieser Serpentinstock mit dem südlichen Serpentinzuge der Frusca Gora in naher Beziehung, wenn nicht vielleicht gar in directer Verbindung — unter der tertiären Decke — steht“.

Mikroskopička ova slika, što nam je dr. Koch o petrovaradinskom kamenju daje, nejasna je a i kriva. Zelena, razpucana zrna, što ih dr. Koch spominje, nemoraju biti olivinom samo zato, što oštro polarizuju, kao što u istinu i nisu. Nerazumljivo mi je nadalje, što on misli o jasnoj osnovini, a broncit ili enstatit morao bi se kao rombički piroxen pod mikroskopom jasno očitovati.

Istina je, da se petrovaradinsko kamenje već po vanjštini na dvoje razdijeliti daje, ali ta razlika neleži u tom, što bi se u jednom nalazio broncit, a u drugom ne. Komad crna brusilovasta kamena, što leži u petrovaradinskoj pećini, negovori ni najmanje za eruptivnu narav obližnjeg kamenja, jer on po svom mineralogičkom sastavu ide u obseg obližnjeg kamenja i neda se od njega odijeliti, kako ćemo to kasnije viditi.

Da sam se dao na iztraživanje petrovaradinskog kamenja, bilo je uzrokom poglavito to, što su upravo prošle godine prokopali tunel kroz petrovaradinsku pećinu za željezničku prugu, koja će spojiti Zemun sa Novim Sadom. Ja sam se nadao, da ću u prokopu naći jedrijeg kamenja, koje bi mi ponešto razjasnilo pitanje o postanku petrovaradinskog serpentina, pa ako mi se i nije ispunila želja, koju sam pred očima imao, to sam ipak došao do rezultata, koji su u toliko zanimiviji, što imaju izpraviti starije podatke.

Tunel počinje na dunavskoj strani skoro sasvim od zapada, tvori odmah u početku maleni zavoj prama severu i izlazi prama Majuru. Širina tunela iznosi 6·3 m., a visina mu je 6·5 m., dočim mu duljina iznosi 361 metar. Tunel probija upravo sredinom petrovaradinskog briega, pa prolazi kroz sve vrste i odlike kamenja, što se nalaze na vanjskom obsegu celoga briega. Za iztraživanje sakupio sam materijal među kamenjem, što je iz tunela izveženo, onda u samom tunelu, te napokon izvana sa raznih točaka oko briega, tako da nemogu vjerovati, da bi još gdje god moglo biti kamenja, do kojega ja nebi bio došao, pa da tako nebi možda naišao na serpentin, što ga Koch opisuje.

U tunelu se mnogo jasnije vidi nego izvana, da je kamenje jasno uslojeno. Slojevi su sad nešto deblji sad nešto tanji od pol metra, no gdješto bivaju oni posve tanki i pločasti, a tude se onda njihova lističava i škrljjava narav posve jasno očituje.

Na početku tunela sa dunavske strane pružaju se slojevi od s. iz. prama j. z, a stoje uzdignuti za 60°. Ovo pravilno redanje slojeva ide prostorom od 60 metara. Ovdje provalila je kroz škrljavce greda trahita. Trahit ovaj opisao sam u zadnjoj svojoj razpravi „o trahitih Fruške gore“. Iza trahitne grede leže slojevi slabije nagnuti (30°) a protežu se od sjevera prama jugu. U polovici tunela provaljuje druga trahitna greda, a iza nje leži škrljavac u svom prvotnom položaju. Između pojedinih slojeva našega škrljavca provlače se 1 do 5 cm. debele naslage vapnenca, u kom obično ima znatna množina žućkasta epidota. Jedno i drugo je

očito sekundarne naravi. Na početku tunela nalazili su u zelenom škriljavcu pojedina gnjezda od uledjena kremenata prozirca. Nešto dalje od ulaza pojavljuje se u zelenom škriljavcu pirit, koji se je mjestimice u znatnijoj množini i u ovelikih leđih razvio. Uz pirit provlače se kroz kamen pojedine sitne žice olovna sjajnika. Oko polovice tunela biva škriljavac sve to više raztrošen, a gdje koji slojevi pretvorili su se skoro sasvim u crvenkasto žutu glinu. Gdje je ovo raztrošenje najviše napredovalo, tamo se uz glinu pojavljuju slojevi crvenkasta i zelenkasta kremenata. Na iztočnom izlazu tunela naslanjaju se na škriljavac 36 metara debele naslage ilovače.

Svi petrovaradinski škriljanci dadu se po mineralogičkom sastavu u dvie hrpe razdijeliti. Obe ove hrpe moći je već i na vanjštini lahko razpoznati. Prva vrst, koju ću ponajprije ovdje opisati, pojavljuje se na početku tunela sa dunavske strane, te dopire nedaleko iza prve trahitne grede. Izvana tvore oni severo-zapadni dio petrovaradinskog briega, dakle onu stranu, koja je okrenuta prema novosadskom mostu. Škriljanci ovi su sivkasto-zelene boje, čemu se pridružuju fine žučkaste udrobine od epidota. Makroskopički nije moći razpoznati pojedine sastavne rude osim epidota, te onda vapnenca, koji se je u pojedinim žicah po kamenu razširio. Sa solnom kiselinom šumi kamen, što je znak, da je vapnenac i mikroskopički dosta obilno u kamenu razširen.

Pod mikroskopom vidimo, da kamenje prve ove hrpe sastoji poglavito od glinenca, amfibola, epidota i klorita, a tomu da se još pridružuje vapnenac, hematit i pirit. Razmatrajuć mikroskopičku sliku ovoga kamenja, pričinjalo mi se je, kao da imam pred sobom zelene škriljavce od Stangenberga, Galgenberga i Bleiberga iz dolje Slezke, što ih je opisao dr. *Kalkowsky* u Lipskom.¹

Ogromna ova sličnost potaknula me je, da sam se obratio na g. prof. *Kalkowskoga*, koji mi je najvećom pripravnosću zamoljeno kamenje iz Slezke priposlao, pri čem sam se osvjedočio, da između petrovaradinskog i spomenutog slezkog kamenja nikakve bitne razlike nejma.

U našem kamenju tvori *glinenac* glavnu i bitnu sastavinu. Riedko sam naišao na izbruske, u kojih bi bilo malo glinenca, obično je on u tolikoj množini razvijen, da tvori tako rekuć neku vrst osnove. Glinenci su se razvili sad u tankih, podugih iglicah, a sad

¹ Ueber grüne Schiefer Niederschlesiens, Mineralogische Mittheilungen, 1876., II. p. 87.

opet u ponešto širjih ledcih. Iglasti ledci su najviše kao dvojci razvijeni, ali dosta često i kao trojci. Širji ledci su ponajviše razvijeni kao polisintetični sraslaci, rjedje kao jedinci. Najveći dio ovih glinenaca je nedvojbeno *plagioklas*, jer vrlo često pokazuju jedinci i dvojci iste kutove potamnjenja kao i polisintetični sraslaci. Najveći dio jednostavnih sraslaca i očitih plagioklasa potamnjuje pod kutom od 2 do 10°, pri čem su ali manji kutovi (2°—5°) mnogo običniji. Samo u jednom izbrusku pokazivahu fino lamelirani plagioklasi kut potamnjenja od 15—16°. Naravno je, da uz ova optička svojstva nije moći odlučiti, da li nejma među glinenci i ortoklasa. Među *uklopci*, što ih u glinencih nalazimo, najvažniji je *amfibol*. On se tu obično pojavljuje u znatnijoj množini, pa gdjekad zauzimalje u glinencu trećinu celoga prostora. Amfibol se je tu razvio u veoma finih, tankih iglicah, koje sad pojedince, sad u celih snopovih sa strane u glinence prodiru — upravo tako kao kod slezkih zelenih škrljavaca. Amfibolne iglice dopiru sad do sredine glinencu, a sad opet prolaze skroz na drugu stranu. Da su to zbilja amfibolne iglice, moći se je lahko pri velikom povećanju po malom kutu potamnjenja osvjedočiti. Boje su one jasno zelene. Gdje su se glinenci stali trošiti, tamo su amfibolne iglice izčeznule, a mjesto njih se vidi listnati klorit. Kao uklopak u glinencu spomenuti je napokon presićušna zrnca, slabo žute boje, koja bi čovjek mogao kao epidot smatrati.

U ovoj i u sljedećoj hrpi petrovaradinskoga kamenja glinenac je tako stalna sastavina, da se nemogu dosta načuditi, kako ga dr. Koch nije opazio.

Druga bitna sastavina ovih škrljavaca je *amfibol*. On se je ovdje razvio kao i u slezkih zelenih škrljavcih u finih iglastih ledcih, a ima ga uvijek i svuda u vrlo velikoj množini. Iglice su se po kamenu vrlo raznovrstno poredale. One su sad posve nepravilno izpletene i porazbacane, a sad se opet skupile u snopiće, koji se metlasto razilaze. Vrlo riedko da su se amfibolne iglice ravno i paralelno poredale, pa da tvore onda odeblje kristaloide. Kristaloide su ti onda uvijek na krajevih raznovrstno razkidani i razčihani. Popriečni prerezi ovakvih kristaloida pokazuju u svojih sastavnih dielovih kutove amfibola.

Amfibol je malne uvijek jasno zelene boje, a samo gdjekad biva on modrušast ili modrušasto-zelen. Modrušasta ova boja iglicâ nije se uvijek protegnula celim ledcem, tako da su gdjekoje iglice dvojbojne. Dihroizam amfibolnih iglica nije jak, ali je uvijek jasan i

očit. Amfibol potamjuje pod kutom od 8° do 25° . Najčešći su maleni kutovi od 8 do 15° , a rjedji veći kutovi. Najčešći kutovi, koje sam mjerio, bijahu 8° , 9° , 10° , 14° , 15° i 20° .

Amfibol je ponajviše posve svjež. Gdje se je on počeo trošiti, tamo nalazimo klorit kao sekundarni proizvod. Gdje kad se vidjaju u takvih kloritnih nakupinah još pojedini sitni, iglasti dielovi, koje je moći optički odmah kao amfibol prepoznati. Očiti je to dokaz, da je dotični klorit postao od amfibola.

Kao daljnji sastavni dio zelenih ovih škrljavaca spomenuti je *klorit*. On se pojavljuje sad u većoj sad u manjoj množini, a svuda se jasno vidi, da je on sekundarne naravi. Njega tim više ima, čim se je više amfibol raztrošio, a u gdje kojih slučajevih se upravo vide u njem, kako sam to malo prije spomenuo, ostanci od još neraztrošena amfibola. Klorit se je ili jednolično po celom kamenu razširio, ili se je uz žice vapnenca i epidota u većoj množini nakupio. On se pojavljuje ili u širjih listovih ili u tankih, uzkih prugah. Kloritni listovi pokazuju očit dihiroizam, i to žućkastu i zelenkastu boju, koje su tako karakteristične za klorit. Listovi ti ostaju među unakrštenimi nikoli u svakom položaju tamni. Kloritne uske pruge potamnjuju samo onda, kada leže paralelno jednom ili drugom nikolu. Tim je dovoljno dokazana njihova optička narav.

Epidot, koji se u velikoj množini u kamenu pojavljuje, pokazuje svuda svoju sekundarnu narav. Čim je raztvorba u kamenu više napredovala, tim ga više ima, a najviše ga je naći, gdje ili sam ili sa vapnencem ciele pukotine izpunjuje. U pukotinah je epidot razvijen u povećih ledcih, na kojih se vide i pojedini ledčani obrisi. Epidot, što je po kamenu nepravilno razbacan, obično je zrnata oblika, te stoji malne uvijek u savezu sa kloritom. Epidot je narančasto ili zelenkasto žute boje, malo kada posve proziran. On pokazuje dosta očit pleohroizam, a polarizuje vrlo ostrimi bojami. Razvijeni ledčani oblici obično su produljeni smjerom ortodiagonale. Oni pokazuju dosta često bazičnu kalavost. Ovakvi prerezi potamnjuju paralelno sa kalotinom, a u konvergentnom svjetlu viditi je na njih jednu optičku os sa hiperbolom i uz to neznatnu disperziju boja. Na gdje kojih drugih prerezih bilo je u konvergentnom svjetlu viditi crni križ, koji se je pri gibanju preparata razišao u hiperbole, koje su odmah radi velikog kuta optičkih osiju iz vidika izčeznule. Među tom velikom množinom epidota, što sam ih u polarizovanom svjetlu motrio, našao sam samo jedan sraslac, koji je bio srasao

smjerom ortopinakoida, i koji je uz to pokazivao poprieko basičnu kalavost. Jedan individuum potamnjuje pod kutom 1° , a drugi pod kutom od 3° . — Mjestimice, gdje su se epidoti u veliko razvili, viditi je u njih silnu množinu iglastih ledaca. Iglice te sastoje možda od amfibola; no one su tako fine, da ih nije moći optički opredieliti.

Vapnenac, što ga je moći pod mikroskopom jasno razpoznati, sakupio se je u pukotinah, gdje mu se obično pridružuje još klorit i epidot. On je tu u obliku zrnja, koje pokazuje razvijenu romboedričku kalavost, a na zgodnih prerezih u konvergentnom svjetlu poznatu sliku njegove optičke osi. U gdjekojem zrnu vapnenca vide se sitni iglasti ledci nalik onim, što sam ih pri epidotu spomenuo.

Ako spomenem još pojedine riedke listove hematita i pojedina zrnca pirita, onda bi predočio podpunu sliku onoga kamenja, što tvori severo-zapadni dio petrovaradinskoga briega. Nejma tu nigdje o olivinu ni govora, niti čega drugoga, što bi nas na serpentin sjećalo. Sve sastavne rude ovog kamenja imadu tako jasno izražena svojstva, da o kakvoj prievári nemože biti govora. Ja sam nastojao u ovoj razpravi, da upravo iztaknem što točnije sva očita fiziografička svojstva pojedinih ruda, da što jasnije pokažem, da ovo kamenje nejma sa serpentinom nikakva posla.

Kamenje ovo, što sam ga ovdje opisao, jest ono isto, što ga dr. Koch spominje, da dolazi na dunavskoj strani prama novosadskom mostu, pa u kom da nejma bronceita. U prvoj ovoj hrpi zelenih škrljavaca nalazi se, kako sam već na početku spomenuo, neka vrst brusilovasta kamena, o kom dr. Koch veli, da je to „Thonglimmerschiefer“. Kamen je taj posve škrljav. Boje je crne, koja neznatno malo u zeleno preljeva. Pod mikroskopom sam se odmah osvjedočio, da ovaj kamen stoji genetički u savezu sa zelenimi škrljavci. Kamen je u izbrusku vrlo malo proziran i to zelenkastom bojom. Na najtanjih mjestih se vidi, da on sastoji poglavito od sitnih listova *klorita*, koji ostaju pri unakrštenih nikolih u svakom položaju tamni. Klorit se je u tolikoj množini razprostro, da tvori neku vrst osnovine. U polarizovanom svjetlu se vidi, da u toj osnovini leže iglasti ledci *amfibola* kao i u samom zelenom škrljavcu. Amfibol oštro polarizuje, a potamnjuje pod kutom od $14-18^\circ$. Uz amfibol pojavljuje se u osnovini velika množina kratkih stubastih ledaca *epidota*. Epidot polarizuje oštro, posve je jasan i proziran, samo mu je sredina puna tamnih uklopaka. K tomu se još pridružuje ogromna množina sićušnih ledaca *magnetita*, na

kojih se malne uvijek vidi oblik oktaedra. Uz magnetit se vide krvavi listovi *hematita*. Glinenca tu nisam vidio.

Druga vrst zelenih škriljavaca, što se je razvila jugo-istočnim dielom petrovaradinskoga briega, razlikuje se dosta znatno od prve vrsti. Kamenje se ovo izvan tunela najljepše vidja oko kameničkih vrata. Potanje mikroskopičko iztraživanje od dra. Kocha, što sam ga s početka naveo, proteže se upravo na ovo kamenje, a mi ćemo se odmah osvjedočiti u koliko je ono vjerno.

Kamenje druge ove vrsti je tamnije zelene boje, a često i pjegavo. Ono je puno teže od prijašnjega, a i ponešto tvrdje, što se odmah pri brusenju osjeća. Pod mikroskopom nam pokazuje ovo kamenje posve drugu sliku. Mi vidimo tu kao glavne sastavine glinenac, augit i titanovo željezo, a amfibol se je kao i klorit razvio kao sekundarni proizvod.

Glinenac u ovom kamenju je dosta obilan. Ledci su mu obično stubasti, a razvili su se skoro uvijek kao plagioklasi sa tri do četiri lamele. On potamnjuje pod vrlo malenimi kutovi; ponajviše pod kutom 2° , 3° , 5° , a rjeđe 8° , 10° , 15° . Dvojci, koji su se među plagioklasi razvili, pokazuju takodjer skoro uvijek malene kutove potamnjenja ($2-3^{\circ}$). Glinenci su se ili poredali uz ostale sastavne dielove ili zalaze u ledce augita. U glinencih nije ovdje viditi uklopljenih amfibolnih iglica, kako u kamenju prve vrsti. Glinenci su dosta raztrošeni, a kao proizvod te raztrošine pojavljuju se u njih ljage i krpe neke kloritične rude. Dr. Koch u svom opisu nespominje glinenca.

Drugi i to najzanimiviji sastavni dio ovoga kamenja jest *augit*. On se je razvio u velikoj množini, a mikroskopički je na kamenu viditi, kako on tvori u jasnijoj osnovini tamno zelene pjege. No on ipak nije izrasao porfirički u velikih crnih ledcih, kao što je to viditi u srodnih slezkih zelenih škriljavcih. Augitni ledci su vrlo riedko cjeloviti, da bi pokazivali svoje kristalografičke obrise. Obično su se oni razpucali u veliku množinu sitnih i nepravilnih zrnaca. Zrna su ponajviše odijeljena zelenim kloritom. Da pojedine ovakove hrpe zrnaca pripadaju jednom individuu, lahko se je osvjedočiti u polarizovanom svjetlu, jer sva zrnca jedne hrpe zajedno potamnjuju. Augit je putenaste boje ili posve bez boje i proziran. On neposjeduje nikakva pleohroizma, a među unakrštenimi nikoli pokazuje vrlo živahne boje. Prizmatična kalavost nije osobito razvijena. Gdje je orijentiranje u augitu izraženo, moći je lahko izmjeriti, da je kut potamnjenja vrlo velik. On obično stoji između 33° i 38° .

U prorezu, koji ide paralelno ortopinakoidu, potamjuje augit paralelno sa nikoli. U takvom prorezu sa konvergentnim svjetlom izlazi postrance optička os A, koja je s nutra crveno a s vana modro obkoljena.

Pojedina augitna zrnca su čista i svježja, pa ipak se ona nalaze u neprestanoj metamorfozi. Ta metamorfoza započela je na rubovih i onda na onoj silnoj množini pukotina, što se kroz augit protežu. Napredovanjem ove metamorfoze razpao se je augit u pojedina zrna, koja sve to manja postaju, dok napokon sasvim neizčeznu. Produkt ove metamorfoze je ponajprije amfibol. Sva zrna su obično uvijek obkoljena sitnim amfibolom. Amfibol je tu uvijek listnat i razčihan, a nikada nije onako iglast, kako smo to vidili kod prve vrsti petrovaradinskog kamenja. Da taj amfibol nije prvotan, pa samo srasao sa augitom, lahko se je moći osvjedočiti, kada samo pregledamo nekoliko izbrusaka. Amfibolni listovi uvijek leže paralelno sa augitom. Oni zalaze u sam augit, a gdjekad je augit pun ovakvih listova. Kada augit potamni ($34-36^\circ$), ostaju ovi listovi svjetli, a sami potamnjuju pod kutom od $14-18^\circ$. Višeput je viditi velike amfibolne kristaloide, u kojih se samo još u sredini vidi po koje zrnce augita, a ima ih i takvih, gdje augitu neima više ni traga.

Amfibol ovaj, mi bi ga mogli nazvati uralitom, pokazuje sva svoja karakteristična svojstva. Dihroitičan je, modrušasto i jasno zeleno; pokazuje malen kut potamnjenja (do 18°), a veći kristaloidi pokazuju na popriečnih prerezih poznatu prizmatičnu kalavost. No amfibol nije obično u ovom kamenju duga obstanka. Samo sam u pojedinim izbruseih našao, gdje se je sav metamorfozirani amfibol sačuvao. Obično se on tu, upravo kao i u slezkih zelenih škrljavcih, odmah pretvara u zeleni, dihroitični *klorit*, tako da ga je onda naći samo u malenih listićih. Amfibol je tude samo prelazni stadij, jer je konačni rezultat augitne metamorfoze uvijek napokon klorit. Obično se onda vidja, kako je augit ponajprije obkoljen pojasom amfibolnih listova i onda pojasom klorita. U svem tom kamenju neima nigdje amfibola, koji nebi bio od augita postao.

Sav *klorit*, što se u ovom kamenju nalazi, sekundarne je naravi. Njega je naći sad više sad manje prama tomu, da li je metamorfoza augita ili amfibola slabije ili bolje napredovala. On izpunjuje obično prostor između pojedinih augitnih zrna. Najviše je listnat i ostaje onda među unakrštenimi nikoli u svakom položaju taman. Gdjekad je u tom slučaju još viditi, kako u njem leže raztrešeni

pojedini listići amfibola, koji su svoje optičko orijentiranje još dobro sačuvali. U kloritu kad i kad leži po koje prozirno zrnce *epidota*.

Kao stalnu sastavinu ovoga kamenja spomenuti mi je još jednu rudu, a to je *titanovo željezo*. Ono se je u kamenu posvuda razvilo u velikoj množini, a viditi ga je u crnih, neprozirnih, zubastih i kockastih nakupinah. Lahko ga je prepoznati po njegovoj bijeloj raztrošini, koja je već toliko puta opisana. Trošenje titanova željeza razno je napredovalo. Gdje kad je ono samo na rubovih u leukoxen pretvoreno, a gdje kad je ono samo do malih zrnaca u sredini ili sasvim pretvoreno u bijelu raztrošinu.

Ako još spomenem *hematit*, koji se u pojedinim riedkih listovih u izbrusih vidja, te vapnenac, a kadšto i kremen po žicah, onda sam predočio podpunu sliku ovoga kamenja. Što je dr. Koch o ovom kamenju pisao, nije nit izdaleka ovoj slici nalično, pa ipak je to jedno te isto kamenje. Ako podjem prisposodbljati Kochovo iztraživanje sa mojim, to ću lahko naći, u čem leži njegova zabuda. On je našao u ovom kamenju olivina, koji mu je u polarizovanom svjetlu pokazivao živahne boje. No da je išao iztraživati optičko orijentiranje te rude, odmah bi se osvjedočio, da ima posla sa monokliničkom rudom, da to dakle nemože biti rombički olivin. Pri pomnijem motrenju morao bi viditi i opisano pretvaranje u uralit, čega olivin nikad nepokazuje. Amfibol, ili bolje rekuć uralit, koji se više put pojavljuje u velikih kristaloidih, smatrao je dr. Koch po svoj prilici za bronzit i to valjda radi njihovog finog prutanja. No i tu bi se lahko optičkim iztraživanjem osvjedočio o njihovoj monokliničkoj naravi. Napokon one tamnije žice, koje ostaju pri unakrštenih nikolih uvijek tamne, nisu, kako dr. Koch misli, serpentin, nego one sastoje, kako smo to vidili, od listnata klorita.

Ovim mislim, da je iztraživanje petrovaradinskog kamenja završeno, da tu više nemože dvojbe biti, da petrovaradinski brieg sastoji od zelenih škriljavaca, a ne od serpentina. Ja sam za ovo kamenje pridržao ono isto ime, što ga je dr. Kalkowsky za slično kamenje poprimio. No ja to ime, kao što i on, nesmatram zgodnim. Ono obuhvaća vrlo različite vrste kamenja. Nomenklatura kristalinih škriljavaca danas je još u razvoju, ona će se tek morati onako jedinstveno preudeliti, kako se je to učinilo kod gromadnoga kamenja. Na to misliti već danas, možda bi bilo još prerano, jer su kristalini škriljavci još premalo iztraženi, oni su još uvijek ostali pravo pastorče kod petrografa. Ako bi se imao već sada odlučiti za koje zgodnije ime, to bi mi se najviše milio postupak

dra. Beeke-a, kako je on dielomice krstio škrljavce u bečkom Waldviertel-u¹. Ja bi prama tomu krstio prvi dio petrovaradinskih škrljavaca *dioritnimi škrljavci*, a drugu vrst *diabaznimi škrljavci*, te se nebi pri tom obazirao na oblik i boju amfibola i augita.

Kako sam već s početka napomenuo, provalile su kroz zelene škrljavce petrovaradinskoga briega na dva mjesta trahitne grede. U tunelu samom vidi se točno granica između trahita i škrljavca, pa to me je prinukalo, da idem iztraživati promjene, koje su se dogodile pod uplivom eruptivnog trahičnog kamenja. Za iztraživanje nabrao sam si ponajprije u samom tunelu na trahitnoj granici potrebno kamenje, a onda sam našao izvan tunela među izveženim materijalom mnoge komade kamenja, na kojih je bio škrljavac i trahit u dodiru.

Mikroskopičko iztraživanje ovoga kamenja dovelo me je do toga rezultata, da su kontaktni pojavi na trahitnoj granici dvovrstni. Malne u svih slučajevih bili su kontaktni pojavi endomorfne naravi, a samo u dva slučaja bili su oni očito exomorfne naravi.

Ponajprije da počnem sa kontaktimi pojavi endomorfne naravi. Pojave ove proučavao sam vrlo često na izbruscih, u kojih su se sticale obe vrsti kamena, gdje se je uvijek moglo točno viditi, da su se promjene, što su dodirom nastale, samo na trahit ograničile. Kamenje na kontaktnoj granici se je doduše znatno metamorfoziralo, ali najveći dio tih promjena ima se poglavito pripisati kemičkom uplivu vode, koja je na tih mjestih mogla laglje u kamenje ulaziti. Tako su sve promjene, što ih vidjamo kod zelenih škrljavaca na kontaktnoj granici, uplivom vode postale. Imao sam zgođe na velikom broju izbrusaka motriti jednu i drugu opisanu vrst zelenih škrljavaca, gdje se prislanjaju na trahit, gdje su s njim upravo prirasli. Pa uvijek su tude, izuzam dva slična slučaja, koja ću kašnje opisati, ostali zeleni škrljavci posve nepromijenjeni. Glinenac i to poglavito plagioklas, ostao je posve jednolično razvijen u svojih karakterističnih oblicih sve do trahita. On se je razmjerno još u najsvježijem stanju sačuvao. Kod škrljavaca prve vrsti bilo je kadkada viditi u neposrednoj blizini trahita, kako su glinenci još izpunjeni finimi iglicami amfibola. Sav ostali amfibol, a često i amfibol u glinencih, pretvorio se kemičkim djelovanjem vode u klorit. Položaj kloritnih listova jasno pokazuje, da se je klorit razvio iz

¹ Tschermaks: Min. petrogr. Mittheilungen, 1881, III., p. 237.

porazbacanih iglicah amfibola, kao što svjedoči pogdjekoja riedka svježa iglica amfibola, koja se je u kloritu sačuvala. Inače vidja se u izbrusku velika množina karbonata. K tomu se još pridružuje ogromna množina sitnog zrnja, koje sastoji od nagomilana praha. Na debljih mjestih u izbrusku i pri slabijem povećanju pričinjaju se ova zrna neprozirna kao kakva željezna ruda; no na tanjih mjestih i pri većem povećanju, osobito kada se tubus približuje i odstranjuje, vidi se jasno, da te zrnate nakupine sastoje od prozirne, žućkasto zelene rude. Rudu tu držim za epidot, što je tim vjerovatnije, jer na takvih mjestih neima većih epidota, premda je kamen jako raztrošen. — Kontaktni komadi druge vrsti zelenih škriljavaca pokazuju skroz slične odnošaje. Vidja se tu nepromienjen plagioklas, razpucan augit, kako se pretvara u amfibol i onda u klorit, onda ostale raztrošine kao i u prvoj vrsti. Sva promjena, što se je kontaktom proizvela, ograničila se je na trahit. Trahit ovaj ima, kako sam to u svojoj zadnjoj razpravi opisao, u svom normalnom razvoju čisto kristaliničnu osnovinu. U toj osnovini leži uvijek velika množina velikih glinenaca i amfibola, a mjestimice i augita, a uz to uvijek mnogo sitnijih apatita. Kontaktni trahit, premda je u veliko raztrošen, ipak jasno pokazuje, da se je kontaktom promienio. Osnovina je smeđe prozirna. Tik uz granicu je ona tamnije boje i u struje zavijena. Da li je ta osnovina bila stakleno ili kristalinično razvijena, neda se sada reći, jer je ona posve raztrošena. Ona sastoji od samih dvolomnih čestica, medju kojima je moći razabrati kloritične listove, vapnenac, te sitna zrnca žućkasto prozirna epidota, kao i u škriljavcu, onda ima tu još nešto piritu, listova hematita i množina neopredjeljivih raztrošina.

Medju većimi sastavnimi dielovi, koje bi ovdje očekivali, bio bi glinenac, no on ovdje manjka posve. On se na cijeloj kontaktnoj zoni nije nigdje razvio. Sudeć po uklopcih, što ih glinenac ima u normalno razvijenom petrovaradinskom trahitu, kako sam to u zadnjoj svojoj razpravi opisao, morao je glinenac biti zadnja ruda, koja se je u trahitu izlučila, jer u njem nalazimo sve ostale rude kao uklopak. No ovdje je u dodiru trahit tako naglo otvrdnuo, da nije bilo vremena, da se bar veći glinenci izluče. Ja nemogu pomisliti, da se je ovdje glinenac tako raztrošio, da je posve izčeznuo, jer bi on morao ma i svojimi raztrošini ostaviti iza sebe trag, kao što to on uvijek i u još više raztrošenom kamenju čini. To bi se ovdje tim prije dogoditi moralo, što sam naišao na izbruske, gdje su se ostali već sastavni

dielovi u dosta svježem stanju sačuvali. *Amfibol* se je u kontaktnoj zoni uvijek razvio i to u većih i u sitnijih ledeih. On je malo kada svjež, ali onda pokazuje sva svoja karakteristična svojstva. Obično je on sada posve raztrošen, tako da ga je moći samo po obrisih prepoznati. On se je tu pretvorio u nakupinu kloritnih listova i vapnenca. Kroz raztrošinu proteže se dendritičko poredana sićušna zrnca, koja su slabo žućkasto prozirna, o kojih sam već prije rekao, da ih za epidot držim. Apatit, što je bio u amfibolu uklopljen, sačuvao se je uvijek posve čist i neraztrošen.

Kao što u normalno razvijenom trahitu, tako se je i ovdje mjestimice razvio i *augit*. On je uvijek isto onako raztrošen kao i amfibol, a poznati ga je po popriečnih prerezih, gdje pokazuje karakterističnu prizmu sa oba pinakoida. *Biotit* pojavljuje se samo u pojedinih komadima u većoj množini. Gdje kad je on posve svjež, a gdje kad se on opet pretvara u klorit. *Apatit*, koji se nedvojbeno u trahitu ponajprije izlučio, vidja se u kontaktnoj zoni u znatnijem broju. On je uvijek svjež i pokazuje ploče prizme sa piramidom. Gdje kad je on pun smeđjih iglastih uklopaka, koji će valjda od stakla poticati.

Mnogo zanimiviji su kontaktni pojavi exomorfne naravi. Kako sam već spomenuo, našao sam samo dva komada, gdje se je ova exomorfna metamorfoza razvila. Kamenje to potiče od prve trahitne grede, gdje trahit stoji u dodiru sa zelenimi škrljavci, koji sastoje od glinenca i iglasta amfibola. Imao sam upravo komade, gdje su se oba kamena u jedno sliepila, pa sam si napravio izbruske upravo od kontaktne granice, gdje sam imao ujedno trahit i škrljavac, pa i od sama škrljavca, koji je nešto dalje od trahita stajao.

Trahit je na kontaktnoj ovoj granici bio posve normalno razvijen. Osnovina, amfibol, glinenac, titanit i apatit bili su u istom omjeru i veličini razvijeni kao što i u ostalom trahitu. Nije tu bilo viditi ni traga kakvoj promjeni, ali za to je zeleni škrljavac bio skroz metamorfoziran. U metamorfozi ovoj nije bilo zapaziti kakvih prelaza i granica, u koliko sam to mogao ustanoviti na razmjerno malenih komadima, koji su mi na razpolaganje stajali. *Glinenac*, koji se je u normalnom škrljavcu bio razvio u stubastih ledeih, nije doduše u kontaktnoj zoni izčeznuo, ali je dobio posve drugi oblik. On se ovdje pojavljuje poglavito samo u sitnijih zrnatih oblicima, pa se razprostro kamenom kao kakva osnovina. Zrna su ta čista, prozirna i svježja, u njih više nejma iglasta amfibola. U

daljini od jedno 6 cm. od kontaktne granice bila su ta zrna samo mjestimice nešto veća, a tu se vidjaju pojedini sraslaci dvojci a i polisintetični sraslaci sa veoma finimi lamelami. Medj svimi ostalimi glinenci nije bilo viditi sraslaca.

Iglastom *amfibolu* na kontaktnoj zoni u škriljavcu nije bilo više ni traga. Mjesto njega pojavila se zelenkasta jedna ruda u obliku krugljastih listova i krpa. Listovi ovi bijahu veoma sićušni, tako da ih je čovjek mogao promatrati tek pri velikom povećanju. Listovi su se poredali u pojedinim pravcih od trahita u škriljavac i stvorili tu guste hrpe, tako da su listovi jedan na drugom ležali kao opeke na krovu. U onih hrpah, gdje su listovi bili najrjedji i najsitniji, tamo su oni bili svietle boje, drugdje su oni bili jasnije ili tamnije zeleni. Najveći komadi bijahu obično dvobojni, kao da su zonalno gradjeni. Vanjski rub bio je zelen, dočim je sredina bila žućkasto-zelena. Zrna i listovi nepokazivahu nigdje kristalografičke obrise, samo na povećih komadih prolazili su duljinom ovih oblika jedna ili dvie oštre crte, koje bi imale odgovarati prizmatičnoj kalavosti dotične rude. Ruda ova pokazivala je uvijek dosta očit dihiroizam i to žućkastu i zelenkastu boju. Po ovom dihiroizmu bio bi pomislio, da imam pred sobom amfibol, no kada sam stao mjeriti kutove potamnjenja prama prizmatičnoj kalavosti, osvjedočio sam se, da ta ruda uza sav svoj dihiroizam nemože amfibol biti. Najveći dio individua potamnjavao bi pod kutovi od 32—43°, premda je bilo i manjih kutova (17—24°). Kutovi ovi mi nedvojbeno jamče, da je to *augitična* ruda, koja se je uplivom kontakta iz amfibola razvila.

Treća ruda, koja se je u kontaktnoj zoni u zelenom škriljaven razvilu, bio je *biotit*. Kao što augit, tako se je i biotit uvijek u hrpe i redove sredao, tako da medju njim augit nedolazi. Ovi nizovi biotitnih listova nisu se ograničili na koju stanovitu udaljenost od trahita. Mi vidjamo točno na trahitnoj granici, kako uzporedno započimlju redovi augita i redovi biotita. U raznoj udaljenosti od trahitne granice započimlju opet drugi nizovi biotita, svršuju i opet s nova započimlju. Listovi biotita su vrlo sićušni, tako da im čovjek može oblik razpoznati tek pri povećanju od 500—600 puta. Oni su malne uvijek zagasito žute boje. Vidjaju se tu uzdužnimi prutovi, koji se pri biotitu uvijek pojavljuju, a medju njimi nalaze se vrlo često heksagonalni bazični listovi. Uzdužni listovi pokazuju vrlo jak dihiroizam: crno i žuto. Oni potamnjuju, kada im prutovi stoje paralelno jednom ili drugom nikolu. Bazični listovi ostaju

među nakrštenimi nikoli u svakom položaju tamni. Sva ova svojstva su tako očita, da je njimi narav rude nedvojbeno opredjeljena.

Na pojedinim mjestih nalazi se uz augit i glinenac čeli niz neke rude putenasto žute boje. Oblik te rude je zrnat, a samo kadkad se vide nepravilni heksagonalni prerezi, a uz to kadkad vidi se u zrnih heksaedrička kalavost. Ruda lomi svjetlo jedanput, jer ostaje među nakrštenimi nikoli uvijek tamna. Ruda se ta dakle teseralno ledi. Na jednom mjestu u kamenu vidio sam veoma sićušne ledce te rude. Tu se je moglo još viditi, da je staklena sjaja i da je znatne tvrdoće, jer reže staklo. Po ovih svojstvih držim, da je ta ruda *granat*, koji se je uplivom kontakta u škrljavec razvio. U normalnom škrljavcu nije bilo tog rudi nigdje ni traga.

Napokon spomenuti mi je još jednu crnu, neprozirnu železnu rudu, koja se je razvila u ovoj kontaktnoj zoni. Ona se pojavljuje na samoj granici pri trahitu u povećih komadima i u većoj množini. Dalje od trahita nalazimo ju u većoj množini samo među listovi biotita, a nešto manje među svjetlim augitom. Nakupine tamnijega augita su obično bez te rude. Sitnija zrnca ove rude su se obično skupila u okruge nakupine. Na svih većih zrnih bilo je u odraženom svjetlu viditi, da ona sastoje od pirita, pa je vjerovatno, da su i presićušna ona zrnca pirit.

Ako li prispodobimo sliku ovu sa slikom, što sam ju opisao kod normalnoga škrljavca, to ćemo shvatiti, kakve su se tu promjene dogodile. Trahit je svojom velikom toplinom pretvorio stubasti glinenac u zrnati glinenac. Amfibol se je raztalió, iz njega se je izlučio jedan dio željeza, a iz preostale stvari se je razvio augit, biotit i mjestimice granat. Kako se je kontaktni trahit rude posve normalno razvio, to je on morao tude biti pri tako visokoj temperaturi, da je mogao obližnje kamenje metamorfozirati, a da se sam nije naglo ohladio, nego da je još imao vremena, da se normalno razvije.

U savezu sa ovimi kontaktnimi promjenama moram spomenuti napokon uklopke tudjega kamenja u trahitu, na koje sam pri iztraživanju trahita naišao. Narav ovih uklopaka postala mi je tek onda jasna, kada sam proučio bio exomorfnu metamorfozu u zelenih škrljavcih. U svih tih slučajevih, koji su mi pod ruku došli, našao sam samo metamorfozirane zelene škrljavce prve vrsti, kroz koje je trahit bio probio. Uklopljeni ovi komadi bili su sada nekoliko milimetara a sad opet po više centimetara veliki. Čovjek ih je uvijek mogao u kamenu već prostim okom razpoznati po njihovoj tamnijoj

boji. Jedan takav presićušni uklopak naličio je u izbrusku crnoj ljagi. Pod mikroskopom bila je ta ljaga oštro odijeljena od samoga trahita, tako da je čovjek odmah na prvi pogled osvjedočiti se morao, da je to tudji uklopak. Uklopljeni taj dio je sastojao se ponajprije od sitnog glinenca, medju kojim je bilo viditi nekoliko dvojaka i pojedine plagioklase. Medju glinencem sredala se velika množina sitnoga biotita. Jedan dio biotita bio je žute, a drugi jasno zelene boje. Bilo ih je viditi u oba karakteristična oblika: u šestostranih bazičnih listovih i u uzdužnih lameliranih listovih. K tomu se je pridružila znatna množina jedne željezne rude. Cjelokupni utisak od ovoga uklopka bio je onaj isti, što sam ga bio opisao kod exomorfne netamorofoze u zelenom škriljavcu, samo što je ovdje manjkala augitična ruda. Drugi jedan ponešto veći uklopak bio je takodjer oštro od trahita odijeljen. On je sastojao od glinenca i augita; biotit se ovdje nije razvio. Glinenac nepokazivaše ovdje ništa novoga. Augit je posve naličio onom, što se je razvio u kontaktnom škriljavcu, samo su mu zrna bila puno veća. Boje je bio jasno zelene, a gdješto je bio dvobojan: izvana tamnije, a u sredini jasnije zelen. Dihroizam mu je bio slab. Prizmatična kalavost bila je bolje izražena, a kut potamnjenja iznosio je do 40° .

Treći još veći uklopak vidio se je prostim okom na izbrusku, kako on sastoji od dvie tamnije pruge, medju kojima se je nalazio jasniji prostor. Pod mikroskopom se je vidilo, da svjetlija ova partija sastoji od sitnoga glinenca, kakav je bio viditi i u metamorfoziranom zelenom škriljavcu. I u obih crnih pruga razvio se isti glinenac, ali tu su u njem ležali mnogobrojni biotiti. Malne svi biotiti poredali su se istim smjerom, koji je bio ponešto nagnut prema samom smjeru ciele pruge, upravo tako kao u metamorfoziranom škriljavcu. Bili su to većim dielom uzdužni prosjeci, a rjedje bazični šestostrani listovi. Veliki dio listova bio je jasno žute boje. Po duljini pokazivahu svi savršenu lamelarnu kalavost i jaku absorpeiju. Neki žuti listovi bijahu na okrajcih pozelenili a bilo je i posve zelenih listova. Medju timi bojadisanimi listovi bila je znatna množina posve bijelih i prozirnih listova. Bijeli ti listovi nepokazivahu dakako nikakva dihydroizma, ali su oblikom i kalavošću posve naličili bojadisanim listovom. U sve tri vrsti listova ležale su osi elasticiteta smjerom kalavosti i okomito na taj pravac. Šestostrani listovi ostali su medju nakrštenimi nikoli tamni, a u konvergentnom svjetlu pokazivahu crn križ, koji se je pri gibanju preparata neznatna razilazio u hiperbole. U biotitu bile su više puta

urasle crvene ljuske hematita. Između biotita bila je veoma velika množina finih dugih iglica, koje su se sad u snopovih sad opet posve nepravilno porazredale. Iglice te bile su najviše posve bez boje, samo deblje iglice pokazivahu slabu žućkasto-zelenu boju. Iglice bile su dvolomne, a potamnijvale su pod kutom od $3-5^{\circ}$. Mislim, da neću pogriješiti, ako ih držim za *amfibol*. K tomu vidili su se u uklopku pojedini sićušni oktaedri od jedne željezne rude, valjda magnetita. Cijeli uklopak bio je tako jasno odijeljen od samog trahita, da mu je čovjek lahko granicu vidio. Po svemu tomu viditi je, da i taj uklopak potiče od zelena škrljavca, koji je pri provali u trahit dospio. Osim ova tri opisana uklopka našao sam još dva, ali ona su u glavnom prvomu posve naličila, tako da ih netrebam ovdje napose opisivati.

Pri sakupljanju cjelokupnog ovog materijala išao mi je osobitom pripravnosću na ruku g. C. Riedl, kr. ug. odsječni mjernik, koji je gradnju tunela izveo, pa vršim tim svoju ugodnu dužnost, što mu ovdje izričem svoju duboku zahvalnost.

Teorija parabole na temelju racionalnoga parametra.

Čitao u sjednici matematičko-prirodoslovnoga razreda jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti 10. lipnja 1882.

DOPISUJUĆI ČLAN DR. K. ZAHRADNIK.

Uvod.

Racionalan parametar, pomoću kojega koordinate kojegod točke čunjosjeka jednoznačno izraziti možemo, sudara se stvarno sa djelivim omjerom pridruženih trakova dvijuh projektivčkih svezaka trakova. Sbilja ako sa M_t , N_t označimo dva pridružena traka dvijuh projektivčkih svezaka trakova, naime

$$\begin{aligned} P_1 - t P_2 &= 0 \\ Q_1 - t Q_2 &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

izvadjajući čunjosjek

$$(P_1 Q_2) = 0, \quad (2)$$

kao mjesto presjecišta M_t N_t pridruženih trakova, sliede rješitbom jednačaba (1) za surednice presjecišta

$$\begin{aligned} x &= \frac{a_0 + a_1 t + a_2 t^2}{c_0 + c_1 t + c_2 t^2} \\ y &= \frac{b_0 + b_1 t + b_2 t^2}{c_0 + c_1 t + c_2 t^2}, \end{aligned} \quad (3)$$

dakle algebraičke racionalne slomljene funkcije, sa istim nazivnikom, djelivog omjera t kao parametra. Jesu dakle jednačbe (3) jednačbe točke odgovarajuće parametru t , ili kratko jednačbe točke t .

Rabimo li koordinate pravca u , v , možemo točku t izražiti jedinom jednačbom, naime

$$\begin{aligned} (a_0 + a_1 t + a_2 t^2) u + (b_0 + b_1 t + b_2 t^2) v + (c_0 + c_1 t + c_2 t^2) &= 0 \\ \text{ili} \quad (a_0 u + b_0 v + c_0) + (a_1 u + b_1 v + c_1) t + (a_2 u + b_2 v + c_2) t^2 &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Za svaku posebnu vrijednost za u , v , dobivamo dvie vrijednosti za t t. j. dvie točke, naime presjecišta tog pravca (uv) sa čunjosjekom (2).

Uvjetna jednačba, da pravac u , v je tangentom čunjosjeka, t. j. da taj pravac čunjosjek u dvijuh sudarajućih točkah presjeca, je

$$(a_1 u + b_1 v + c_1)^2 - 4(a_0 u + b_0 v + c_0)(a_2 u + b_2 v + c_2) = 0, \quad (5)$$

te je ujedno jednačbom tog čunjosjeka u tangencijalnih surednicah.

2. Dva projektivická svezka trakova (1) naime (p), (q) imaju jedan trak zajednički i to trak $pq = Q$. Taj trak u (p) odgovara vrijednosti $t = \infty$, te u (q) vrijednosti $t = 0$. Jednačbe danih dvijuh projektivických svezaka možemo tim pisati u obliku

$$\begin{aligned} P_1 - t Q &= 0 \\ Q - t Q_2 &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

ili

$$P_1 : Q : Q_2 = t^2 : t : 1.$$

Ako sa x_1 , x_2 , x_3 označimo omjerne udaljenosti točke čunjosjeka od pravaca

$$P_1 = 0, \quad Q = 0, \quad Q_2 = 0,$$

imati ćemo¹

$$x_1 : x_2 : x_3 = \lambda^2 : \lambda : 1,$$

što nama daje parametričku predočbu točaka čunjosjeka u homogenih surednicah x_1 , x_2 , x_3 .

Kako bi došli do parametričke predočbe tangenata tog čunjosjeka u tangencijalnih surednicah sliedi iz jednačbe (5) na isti način.

Geometrički sadržaj parametra t je opet djelivi omjer pridruženih trakova. Jednačba čunjosjeka, kao proizvoda projektivických svezaka trakova (6) biti će sad

$$Q^2 - P_1 Q_2 = 0, \quad (7)$$

te rješitba jednačaba (6) vodila bi nas opet do jednačaba točke čunjosjeka u obliku (3).

Jednačba (7) znači čunjosjek, koji se dotica pravaca P_1 , Q_2 u njihovih presjecištih sa pravcem Q . Istoga je oblika jednačba čunjosjeka

$$y^2 = 2px + qx^2, \quad (8)$$

trebamo samo staviti

$$\begin{aligned} Q &\equiv y = 0 \\ P_1 &\equiv x = 0 \\ Q_2 &\equiv 2p + qx = 0. \end{aligned}$$

¹ Salmon - Fiedler Kegelschnitte. Teubner Leipzig 1866. 2. Auflage pg. 340.

Jednačba čunjosjeka je oblika (8), ako uzmemo jedan premjer za os X, te tangentu krajne točke premjera za os Y. U pravokutnih surednica je osi X glavna os čunjosjeka, te osi Y je tangenta krajne točke osi t. j. vrha to čunjosjeka, u kojem slučaju i jednačba (8) se obično vršnom jednačbom čunjosjeka zove. Jednačbe projektivčkih svezaka (6) izvadjajućih taj čunjosjek glase ovdje

$$x - ty = 0$$

$$y - t(2p + qx) = 0,$$

pa su tim surednice točke (xy) čunjosjeka¹ (8)

$$x = \frac{2pt^2}{1 - qt^2}$$

$$y = \frac{2pt}{1 - qt^2}.$$

Prema tomu, je li $q \gtrless 0$, imamo slučaj hiperbole ili elipse, te za $q = 0$ imamo parabolu, sa kojom se ćemo ovdje baviti.

Parametrička predočba točaka parabole.

3. Projektivčka dva svezka trakova, izvadjajući parabolu.

$$y^2 = 2px,$$

imaju za vrhe u slučaju pravokutnih surednica vrh parabole te ubježnu točku osi parabole. Drugi svezak trakova, imajući vrh bezkonačno udaljen prelazi dakle u sustav istosmjernih pravaca sa osi X.

Označimo li provodnicu točke, koja ima parametar t sa T , biti će

$$t = \cot(TX) = \frac{x}{y},$$

tim su surednice ove točke

$$\begin{aligned} x &= 2pt^2 \\ y &= 2pt. \end{aligned} \tag{9}$$

¹ Gledaj razpravu *dr. Em. Weyra: Über rationale Curven*. Sitzb d. pg. böhm. Gesellsch. 3. Wissenschaften Prag 1872., gdje tamo pokazuje, kako sgodno se može rabiti racionalni parametar u teoriji čunjosjeka. Kao parametar rabi reciproku vrijednost od t dakle $u = \frac{1}{t}$.

Sekanta.

4. Spojnica dviju točaka parabole, odgovarajućih parametrom t_1, t_2 je

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2pt_1^2 & 2pt_1 & 1 \\ 2pt_2^2 & 2pt_2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ili u razvijenom obliku, pošto smo bili sa zajedničkim faktorom $(t_1 - t_2)$ pokrtili,

$$x - (t_1 + t_2)y + 2pt_1t_2 = 0. \quad (10)$$

Smjernica ove sekante je

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{t_1 + t_2},$$

pa tim je

$$\cot \varphi = t_1 + t_2.$$

Istosmjernica, sa sekantom $\overline{t_1t_2}$ povučena iz vrha parabole, presjeca parabolu u točki t_3 , kojoj je parametar

$$t_3 = t_1 + t_2.$$

Iz jednačbe (10) sliedi, da su dvie točke, za koje valja

$$t_1 + t_2 = 0,$$

simetričke prema osi parabole. Nadalje sliedi iz (10):

Spojnice para točaka na paraboli, kojih parametri su uzajam negativno reciproki, sačinjavaju svezak trakova, kojega je vrh na osi parabole ili drugimi riečmi:¹

Kreće li se pravi kut oko vrha parabole, presjecaju traci tog kuta parabolu u dviju točkah, kojih spojnica ide čvrstom točkom na osi parabole.

Tangenta.

5. Sekanta prielazi u tangentu točke t za $t_1 = t_2 = t$. Biti će dakle jednačba tangente točke t :

$$x - 2ty + 2pt^2 = 0. \quad (11)$$

U toj jednačbi su (xy) surednice promjenljive točke na tangenti, te t parametar dirališta; obratno bi mogli smatrati (xy) kao surednice neke čvrste točke u ravnini parabole a t parametrom nepo-

¹ Ova vlastitost valja u obće za čunjiosjek kao poznato, te netreba ni biti baš vrh čunjiosjeka vrhom pravoga kuta, nu potlem neleži ta čvrsta točka na osi čunjiosjeka. Sravnaj: Weyr: l. c. čl. 23.

znatoga dirališta tangente iz točke (xy) na parabolu povučene. Budući da je ta jednačba glede t stupnja drugoga slijedi, da iz neke točke na parabolu dvie tangente povući možemo, t. j. parabola je krivulja drugoga razreda.

Tangencijalne surednice u, v , tangente (11) naći ćemo sravnitbom sa jednačbom

$$ux + vy + 1 = 0;$$

jesu dakle

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2pt^2} \\ v &= -\frac{1}{pt} \end{aligned} \quad (12)$$

tražene tangencijalne surednice, te ujedno daju nama jednačbe (12) parametričku predočbu parabole u tangencijalnih surednicah. Eliminacijom parametra t dobili bi jednačbu parabole u tih koordinatah, naime

$$pv^2 = 2u.$$

6. Parametre dirališta tangenata točke (xy) dobivamo kao korienne jednačbe (11) glede t , naime

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{y + \sqrt{y^2 - 2px}}{2p} \\ t_2 &= \frac{y - \sqrt{y^2 - 2px}}{2p}. \end{aligned}$$

Objektangente se sjedine, leži li točka (xy) na paraboli; vriednosti za t se naime sudaraju.

Kut δ , što ga stvaraju tangente iz točke (xy) na parabolu povučene, dan je sa

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{2(t_2 - t_1)}{4t_1 t_2 + 1} = \frac{2\sqrt{y^2 - 2px}}{2x + p}.$$

Nu možemo i obratno pitati po mjestu točaka (xy) , za koje je kut δ stalni. Stavimo li $\operatorname{tg} \delta = a$, dobit ćemo iz jednačbe gornje za jednačbu spomenutog mjesta:

$$4(y^2 - a^2 x^2) + 4p(a^2 - 2)x + a^2 p^2 = 0.$$

Taj rezultat možemo i ovako izreći.¹ *Miče li se stalni kut po paraboli, tako da su kraci njegovi tangente parabole, opisuje vrh tog kuta hiperbolu, koja je istostranična u slučaju da je $\delta = 45^\circ$.*

¹ Salmon-Fiedler l. c. pg. 254. Auf. 8.

7. Smjernica tangente parabole u točki t je

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2t},$$

te smjernica provodnice dirališta je

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{t},$$

dakle je

$$2\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi,$$

što je dobro poznata vlastitost parabole, te nas namah geometrički vodi do druge vlastitosti, da je subtagenta parabole jednaka dvostrukoj usjeci dirališta. Jeli naime A presjecište tangente sa osi X , M diralište tangente, MP ordinata, OP usjeka tog dirališta, možemo gornju jednačbu pisati

$$\frac{2MP}{AP} = \frac{MP}{OP},$$

iz česa namah sledi uvedena vlastitost, naime:

$$2OP = AP.$$

Pol te polara.

8. Upoznali smo, da iz točke (xy) na parabolu dvie tangente povući možemo. Relacije medju parametri dirališta sledie iz jednačbe (11), naime:

$$\begin{aligned} t_1 + t_2 &= \frac{y}{p} \\ t_1 t_2 &= \frac{x}{2p}. \end{aligned} \quad (13)$$

Vriednosti parametara samih smo bili doduše već našli, nu ho-teći naći spojnicu dirališta bolje se poslužimo sa gore navedenimi relacijami.

Označimo li sa $\xi \eta$ surednice promjenljive točke na polari, biti će

$$y\eta - p(\xi + x) = 0$$

jednačbom polare kao dodirne tetive tangenata točke (xy) .

Obratno bi našli koordinate pola odgovarajućega polari $(u_1 v_1)$. Polara $(u_1 v_1)$ presjeca parabolu u dvijuh točkah, kojih parametre dobivamo, ako koordinate točke parabole u jednačbu polare $u_1 v_1$ naime:

$$u_1 x + v_1 y + 1 = v$$

substituiramo. Dobivamo ovako kvadratičku jednačbu

$$2pu_1 t^2 + 2pv_1 t + 1 = 0,$$

a označimo li sa t_1, t_2 korijene ove jednačbe, i sa (xy) susednice presjecišta tangenata točaka t_1, t_2 , biti će:

$$\begin{aligned}x &= 2pt_1t_2 = \frac{1}{u_1} \\ y &= p(t_1 + t_2) = -\frac{pv_1}{u_1}.\end{aligned}\quad (14)$$

Jest dakle jednačba pola (xy) polare (u_1v_1) obzirom na danu parabolu

$$pv_1v - (u + u_1) = 0,$$

koja jednačba na isti način sledi iz jednačbe dane parabole u tangencijalnih susednica naime:

$$pv^2 = 2u,$$

kao što jednačba polare neke točke u susednicah Descartes-ovih. Pomoću jednačba (14) možemo namah napisati jednačbu krivulje polarno reciproke k nekoj krivulji, obzirom na danu parabolu, neka je već ta krivulja dana u susednicah točaka ili u tangencijalnih susednicah.

Udaljenost pola od polare.

9. Smatrajući polaru kao spojnicu dirališta t_1t_2 tangenata iz neke točke na parabolu povučenih, dobivamo za udaljenost d pola (xy) od njegove polare

$$d = \frac{(t_1 + t_2)y - x - 2pt_1t_2}{\sqrt{(t_1 + t_2)^2 + 1}},$$

te obzirom na jednačbe (14):

$$d = \frac{y^2 - 2px}{\sqrt{y^2 + p^2}}.$$

Iz dobivenog rezultata sledi, da je za stalnu udaljenost d mjesto odgovarajućih polova krivulja četvrtoga stupnja

$$(y^2 - 2px)^2 - d^2(y^2 + p^2) = 0.$$

10. Za duljinu b tetive $\overline{t_1t_2}$ naći ćemo

$$b^2 = 4p^2(t_1 - t_2)^2[1 + (t_1 + t_2)^2].$$

Smatrajući sad ovu tetivu kao polarnu tetivu, kojoj je pol (xy) , možemo pisati obzirom na jednačbe (14)

$$b^2 = \frac{4}{p^2}(y^2 - 2px)(y^2 + p^2).$$

Ako se sklize tetiva stalne duljine po paraboli, opisuje dakle njezin pol krivulju četvrtoga¹ stupnja :

$$(y^2 - 2px)(y^2 + p^2) - \frac{b^2 p^2}{4} = 0.$$

Trokut tangenata te polare neke točke.

11. Dirališta tangenata točke (xy) sačinjavaju sa točkom danom trokut, kojega je ploština :

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} y & x & 1 \end{vmatrix} = p^2 \begin{vmatrix} 2t_1 & t_1^2 & 1 \\ 2t_2 & t_2^2 & 1 \\ t_1 + t_2 & t_1 t_2 & 1 \end{vmatrix},$$

gdje smo za sureduice pola (xy) rabili jednačbe (14). Razvijemo li taj determinant, naći ćemo

$$\Delta = 2p^2 (t_1 - t_2)^3.$$

Sa obzirom na jednačbe (14) možemo pisati

$$p\Delta = (y^2 - 2px)^{3/2},$$

što sledi i neposredno iz članaka predidućih, buduće da je

$$2\Delta = bd.$$

Iz gornje jednačbe sledi, da mjesto pola, kojega tangente te polara satvaraju trokut stalne ploštine, sastoji iz trijuh parabola, od kojih jesu dvie imaginarne te jedna je realna,² naime

$$y^2 - 2px - \sqrt[3]{p^2 \Delta^2} = 0.$$

Ta je parabola kongruentna sa danom, samo pomaknuta paralelno u smislu osi X.

Težište ovog trokuta.

12. Označimo li sa $\xi\eta$ sureduice težišta trokuta tangenata te polare neke točke, valja :

$$\xi = \frac{2p(t_1^2 + t_2^2 + t_1 t_2)}{3} = \frac{2y^2 - px}{3p}$$

$$\eta = p(t_1 + t_2) = y$$

¹ Gledaj moju razpravu: O mišće bodu, jehož tětiva styku má pro danou kuželosečku stálom délku. Časopis jednoty math. díl 6. pg. 139. Praha.

² Gledaj: O nekih krivuljah izvedenih iz sjeka čunja. Rad knj. XL.

Nu obratno je rešitbom:

$$y = \tau$$

$$x = \frac{2\tau^2 - 3p\zeta}{p}.$$

Postoji dakle medju polom te težištem *kvadratička racionalna srodnost*.¹ Opiše li na pr. pol pravac, proteče odgovarajuće središte parabolu i to kongruentnu sa danom, imajući isti smjer osi, itd. Da je $\tau = y$, je i geometrički uvidljivo, budući da leži težište na spojnici pola sa središtem polarne tetive, te budući da ova spojnica ide središtem parabole, koje je bezkonačno udaljeno u smjeru osi parabole, idu sve ovake spojnice istosmjerno sa ovom osi.

Označimo li sa d udaljenost pola od težišta trokuta, naći ćemo

$$d = \zeta - x = \frac{2}{3p} (y^2 - 2px).$$

Iz ovog rezultata dobivamo jednostavnu geometričku tumačbu rezultata substitucije koordinata koje god točke ravnine parabole u jednačbu parabole

$$y^2 - 2px = 0;$$

ujedno upoznajemo, da je mjesto točke, koja od težišta trokuta, što ga čine tangente ote točke te polara obzirom na danu parabolu, ima stalnu udaljenost, je parabola kongruentna sa danom, samo pomaknuta u smislu osi X.

Trokut upisan paraboli.

13. Budi dan trokut $M_1 M_2 M_3$ upisan paraboli; parametri njegovih vrha neka su t_1, t_2, t_3 , tim će biti ploština toga trokuta

$$M_1 M_2 M_3 = 2p^2 \begin{vmatrix} t_1 & t_1^2 & 1 \\ t_2 & t_2^2 & 1 \\ t_3 & t_3^2 & 1 \end{vmatrix} = -2p^2 (t_1 - t_2)(t_1 - t_3)(t_2 - t_3).$$

Povucimo vrhom parabole istosmjernicu sa tetivom $M_1 M_2$, neka je M'_3 presjecište ove istosmjernice sa parabolom. Označimo li sa t'_3 parametar točke M'_3 , dobivamo (čl. 4)

$$\lambda'_3 = \lambda_1 + \lambda_2$$

pa tim je za trokut $M_1 M_2 M'_3$:

$$M_1 M_2 M'_3 = -2p^2 (\lambda_1 - \lambda_2) \lambda_1 \lambda_2.$$

¹ Za ovu srodnost gledaj moju razpravu: *Vlatitosti nekih trojina točaka na cisoidi*; Rad, knjiga LXI., kao što i tamo navedene historičke bilješke.

Surednice težišta tog trokuta jesu

$$\xi' = 4p \frac{(t_1 + t_2)^2 - t_1 t_2}{3}$$

$$\eta' = 4p \frac{t_1 + t_2}{3}.$$

Ako je sad M_3'' diralište tangente parabole istosmjerne sa tetivom $M_1 M_2$, te t_3'' parametar tog dirališta, biti će

$$t_3'' = \frac{t_1 + t_2}{2},$$

te za ploštinu trokuta $M_1 M_2 M_3''$ dobivamo:

$$\begin{aligned} M_1 M_2 M_3'' &= 2p^2 \begin{vmatrix} t_1 & t_1^2 & 1 \\ t_2 & t_2^2 & 1 \\ \frac{t_1 + t_2}{2} & \frac{(t_1 + t_2)^2}{4} & 1 \end{vmatrix} = \frac{p^2}{2} \begin{vmatrix} t_1 & t_1^2 & 1 \\ t_2 & t_2^2 & 1 \\ 0 & -(t_1 - t_2)^2 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{p^2 (t_1 - t_2)^3}{2}, \end{aligned}$$

iz kojega rezultata uvidjamo, da je taj trokut četvrti dio onoga, što ga čine tangente točaka t_1 te t_2 sa dodirnom tetivom tih točaka.

Označimo li surednice težišta trokuta $M_1 M_2 M_3''$ sa ξ'' η'' naći ćemo:

$$\xi'' = \frac{p}{6} [5(t_1 + t_2)^2 - 8t_1 t_2]$$

$$\eta'' = p[t_1 + t_2].$$

Buduć da je $y = \eta = \eta' = \eta''$, sledi, da težišta ovih trijuh trokuta leže na spojnici razpolovišta polarne tetive sa polom, koja je istosmjerna sa osi parabole, koju smo bili za os X uzeli.

Količnik ploština trokuta $M_1 M_2 M_3''$ te $M_1 M_2 M'$ je funkcija količnika parametara krajnjih točaka zajedničke osnovke $M_1 M_2$. Označimo li taj količnik

$$\frac{t_1}{t_2} = \mu,$$

biti će količnik tih trokuta $\varphi(\mu)$, naime:

$$\varphi(\mu) = -\frac{1}{4} \frac{(\mu - 1)^2}{\mu}.$$

Za vrednost $\mu = -1$, dobivamo maximum funkcije $\varphi(\mu)$, naime $\varphi(-1) = +1$, te za $\mu = +1$ dobivamo minimum ote funkcije, naime $\varphi(+1) = 0$. Pišemo li $\mu = x$, $\varphi(\mu) = y$, možemo gornju jednačbu pisati:

$$4xy + (x - 1)^2 = 0,$$

te konstrukcijom hiperbole ovom jednačbom predočene upoznajemo k svakomu količniku parametara $\mu = x$ odgovarajući količnik ploštinâ dotičnih trokuta

U slučaju maxima sudara se M_3' i M_3'' sa vrhom parabole te za slučaj minima reducira se trokut $M_1 M_2 M_3''$ na jedinu točku, gdje usuprot u trokutu $M_1 M_2 M_3'$ samo dvie točke se sudaraju.

Mjesto težišta trokuta $M_1 M_2 M_3''$ za slučaj minima je opet dana parabola, što dobivamo, ako u vrijednosti za $\zeta'' \eta''$ stavimo $t_1 = t_2 = t_3$, gdje usuprot mjesto težišta trokuta $M_1 M_2 M_3'$ je parabola imajući zajednički vrh te zajedničku os, kojoj je parametar velik $\frac{8}{9}$ parametra dane parabole.

Nu za koju god danu stalnu vrijednost za μ opisuje težište navedenih trokuta parabolu, imajući zajedničku os i vrh sa danom parabolom, nu parametar njezin je x^{ti} dio parametra dane parabole. Je dakle jednačba mjesta težišta

$$y^2 = 2kpx.$$

Za trokut tangenata te polare neke točke je

$$k = \frac{3}{4} \cdot \frac{(1+\mu)^2}{1+\mu+\mu^2},$$

za trokut $M_1 M_2 M_3'$ je:

$$k = \frac{2(1+\mu)^2}{3(1+\mu)^2 - \mu},$$

te za trokut $M_1 M_2 M_3''$ je

$$k = \frac{3(1+\mu)^2}{5(1+\mu)^2 - 8\mu}.$$

14. Nu uvjet $t_1 = \mu t_2$ opredjeljuje posvema sled tetiva. Jednačba tetive $t_1 t_2$ glasi naime:

$$x - (t_1 + t_2)y + 2pt_1 t_2 = 0,$$

dakle je uz gornji uvjet

$$x - (1+\mu)t_2 y + 2\mu t_2^2 = 0.$$

Mienja li se sad t_2 , omotava ova tetiva parabolu, kojoj je jednačba

$$(1+\mu)^2 y^2 = 8\mu px,$$

te pol tih tetiva opisuje takodjer parabolu, kojoj su jednačbe

$$x = 2\mu t_2^2$$

$$y = p(1+\mu)t_2$$

ili, ako bi eliminirali parametar t_2 :

$$2\mu y^2 = (1+\mu)^2 px.$$

15. Nu mogli bi i stvar obćenitije shvatiti, te mjesto relacije $t_1 = \mu t_2$ uzeti, da postoji

$$F(t_1, t_2) = 0.$$

Ova relacija opredjeljuje krivulju posvema kao zamotaljku¹ tetiva $\overline{t_1 t_2}$. Riešimo li naime jednačbu tetive $\overline{t_1 t_2}$ glede t_1 , dobivamo:

$$t_1 = \frac{x - t_2 y}{y - 2t_2 p}.$$

Diskriminant jednačbe $F = 0$, pošto smo bili prije t_1 navedenim gore izrazom zamjenili, daje nama jednačbu zamotaljke tetiva $\overline{t_1 t_2}$. Mislimo li si jednačbu $F = 0$ u obliku

$$t_1 = \varphi(t_2),$$

te stavimo li ovu vrijednost za t_1 u izraze za težišta navedenih trokuta dobivamo namah jednačbe mjesta težišta tih trokuta.

Konstrukcija je jako jednostavna za slučaj, gdje postoji među t_1 i t_2 linearna relacija, u tom slučaju omotava tetiva čunjosjek, koji možemo narisati. Svaka tangenta toga čunjosjeka presjeca danu parabolu u traženom paru točaka t_1, t_2 ; pol ove tetive obzirom na danu parabolu daje točku t_3 . Povučemo li vrhom parabole istosmjernicu sa $\overline{t_1 t_2}$, dobivamo točku M_3' , te povučemo li sad tangentu istosmjernu sa $\overline{t_1 t_2}$ naći ćemo M_3'' , čim su pojedini trokuti, tim i težišta tih trokuta opredjeljeni.

Trokut tangenata.

16. Dan budi trokut tangenata $T_1 T_2 T_3$, gdje sa T_i označujemo tangentu, koje diralište ima parametar t_i .

Surednice vrha $T_1 T_2 = A_3$ su

$$\begin{aligned} x_3 &= 2pt_1 t_2 \\ y_3 &= p(t_1 + t_2), \end{aligned}$$

a surednice ostalih vrha sliede cikličkom zamjenom kazala.

Ploština toga trokuta opisanoga paraboli je:

$$\Delta = p^2 \begin{vmatrix} t_1 + t_2 & t_1 t_2 & 1 \\ t_1 + t_3 & t_1 t_3 & 1 \\ t_2 + t_3 & t_2 t_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Odbijemo li prvi red od trećega, te drugi red od prvoga reda, dobit ćemo namah:

$$\Delta = -p^2 (t_1 - t_2) (t_1 - t_3) (t_2 - t_3).$$

¹ Sravnaj, *Em. Weyr*: Beiträge zur Curvenlehre. Wien 1880. čl. 10.

Sravnimo li taj rezultat sa onim, što smo ga dobili za trokut upisani paraboli, dobivamo poznat rezultat, da je *ploština trokuta opisanoga paraboli pol ploštine trokuta što ga čine dirališta stranica*.

Za surednice težišta trokuta tangenata rabimo li parametre dirališta tih tangenata, dobivamo:

$$\xi = \frac{2p}{3} \Sigma t_1 t_2$$

$$\eta = \frac{2p}{3} \Sigma t_1.$$

Označimo li sa ξ_1 , η_1 surednice težišta trokuta dirališta, naime trokuta točaka t_1 , t_2 , t_3 , valja

$$\xi = \frac{3\eta_1^2 - 2p\xi_1}{4p}$$

$$\eta = \eta_1.$$

Iz ovih oblika upoznajemo odmah, da su težište trokuta tangenata te trokuta dirališta tih tangenata u *racionalnoj kvadratičnoj srodnosti*.

Označimo li udaljenost tih težišta sa d_1 , naći ćemo

$$d_1 = \xi - \xi_1 = \frac{3}{4p} (\eta_1^2 - 2p\xi_1)$$

ili

$$d_1 = -\frac{3}{2p} (\eta^2 - 2p\xi).$$

Mienja li se trokut tangenata uz uvjet, da je udaljenost težišta toga trokuta od težišta dirališta stalna, opisuju težišta tih trokuta dvie parabole, koje su kongruentne sa danom, samo paralelno pomaknute u smislu osi X.

Presjecište visinâ trokuta opisanoga paraboli.

17. Jednačba visine trokuta opisanoga paraboli na tangentu točke t_3 kao osnovku, iz suprot ležećega vrha spuštene glasi:

$$y + 2t_3x = p(t_1 + t_2) + 4pt_1t_2.$$

Jednačbe drugih visina dobivamo ciklickom zamjenom kazala, naime

$$y + 2t_1x = p(t_2 + t_3) + 4pt_1t_2$$

$$y + 2t_2x = p(t_3 + t_1) + 4pt_1t_2t_3.$$

Visine trokuta presjecaju se u jednoj te istoj točki. Da nadjemo usjhecku, odbit ćemo zadnje dvie jednačbe, što nama daje:

$$x = -\frac{p}{2}.$$

Mjesto, da sada ovu vrijednost u jednu izmedju tih trijuh jednačba substituiramo, učinimo ovo za sbroj tih jednačba, da dobijemo rezultat u obliku simetričkom. Sbroj tih jednačba je

$$3y + 3x\Sigma t_1 = 2p\Sigma t_1 + 12pt_1t_2t_3,$$

dakle je odgovarajuće y presjecišta visinâ:

$$y = p\Sigma t_1 + 4pt_1t_2t_3.$$

Visine trokuta opisanoga paraboli presjecaju se dakle na ravnalici parabole¹ u visini

$$y = p\Sigma t_1 + 4pt_1t_2t_3.$$

Kvadratička involucija točaka na paraboli.

18. Spojnica kojih god dvijuh točaka parabole ima jednačbu oblika :

$$x - (t_1 + t_2) y + 2pt_1t_2 = 0 \quad (I)$$

Smatrajmo sad (xy) kao surednice čvrste točke, vrha to svazka trakova, a t_1, t_2 kao parametre presjecišta kojega god traka tog svezka. Budući da t_1 i t_2 dolaze samo u prvom stupnju, slijedi projektivnost sustava (t_1) i (t_2) , te zamjenljivost — involucija — tih točaka slijedi iz simetričnosti jednačbe (I) glede t_1 i t_2 . Budući da ta involucija sastoji iz para točaka, zove se kvadratička involucija točaka. Dvotočke ove involucije naći ćemo, ako u jednačbu stavimo $t_1 = t_2 = t$, što nas vodi do jednačbe

$$x - 2ty + 2pt^2 = 0, \quad (II)$$

ili poredano po t :

$$t^2 - \frac{y}{p} t + \frac{x}{2p} = 0.$$

Parametre dvotočaka, koje ćemo sa t_{12}, t'_{12} označiti, dobivamo rešitbom gornje jednačbe kao korijene, naime

$$t_{12} = \frac{y + \sqrt{y^2 - 2px}}{2p}$$

$$t'_{12} = \frac{y - \sqrt{y^2 - 2px}}{2p}$$

Nu jednačba (II) sudara se sa jednačbom tangente u točki t (11) t. j. parametre dirališta tangenata točke (xy) sa obzirom na parabolu su dvotočke kvadratičke involucije točke (xy) .

¹ Sravnaj: *Salmon-Fiedler* Kegelschnitte pg. 253 Aufg. 3. pg. 447 Aufg. 8.

Sad ćemo naći jednačbu ovake kvadratičke involucije u obliku normalnom. Svaki trak svezka trakova (xy) presjeca parabolu u dvijuh točkah, kojih parametre nalazimo kao korijene kvadratičke jednačbe oblika:

$$t^2 + at + b = 0.$$

Nu budući da među koeficijenti a , b postoji linearna jednačba (I), naime

$$x + ay + 2bp,$$

možemo iz tih dvijuh jednačaba jednu veličinu na pr. b izlučiti, te tim nadjemo:

$$2pt^2 - x + a(2pt - y) = 0, \quad (15)$$

kao jednačbu involucije točke (xy) [t. j. svezka trakova, kojega je vrh točka (xy)]. Za dvotočke involucije mora imati jednačba (15) dva jednaka korijena t. j. parametri tih dvotočaka zadovoljavaju i derivaciji jednačbe (15) glede t . Taj uvjet opredjeljuje parametar involucije

$$a = -2t,$$

te jednačba (15) prielazi u tom slučaju u

$$x - 2ty + 2pt^2 = 0$$

iz koje jednačbe opet kao prije upoznajemo ove dvotočke kao dirališta tangenata povučenih iz točke (xy) na parabolu. Ujedno upoznajemo, kada leži središte (xy) involucije izvan, ili unutra parabole. U prvom slučaju jesu tangente točke (xy) realne, u drugom imaginarne, što postoji prema tomu, je-li

$$y^2 \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 2px.$$

Presjecišta kruga sa parabolom.

19. Svaki krug presjeca parabolu u četirijuh točkah, kojih parametre nadjemo, ako središnice kojegod točke parabole u jednačbu toga kruga, naime

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + m^2 = 0 \quad (16)$$

stavimo. Naći ćemo ovako bikvadratičku jednačbu glede t , naime

$$t^4 + \left(1 - \frac{\alpha}{p}\right)t^3 - \frac{\beta}{p}t + \frac{m^2}{4p^2} = 0, \quad (17)$$

a korijeni ove jednačbe su parametre presjecišta kruga (16) sa parabolom. Budući da već tri točke krug posvema opredjeljuju, mora da postoji među parametri tih presjecišta neka relacija, neovisna o položaju i veličine kruga, koja nama kaže, kada u obće četiri točke parabole leže na jednom te istom krugu.

Iz jednačbe (17) sledi namah ova tražena relacija, glasi

$$\Sigma t_1 = 0; \quad (18)$$

daljne relacije medju parametri presjecišta danog kruga sa parabolom su:

$$\begin{aligned} \Sigma t_1 t_2 &= 1 - \frac{z}{p} \\ \Sigma t_1 t_2 t_3 &= \frac{\beta}{p} \\ \Sigma t_1 t_2 t_3 t_4 &= \frac{m^2}{4p^2}. \end{aligned} \quad (19)$$

Iz jednačbe (18) sledi namah cio red vlastitosti parabole, od kojih ćemo ovdje neke navesti.

Proložimo li naime parom presjecišta kruga K sa parabolom na pr. t_1, t_2 koji god krug K' , te isto tako drugim parom t_3, t_4 koji god krug K'' , dobit ćemo četiri nova presjecišta koje leže na jednom te istom krugu K''' .

Dokaz. Za točke t_1, t_2, t_3, t_4 valja usljed jednačbe (18)

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 0.$$

Za presjecišta krugova K' te K'' sa parabolom valja slično

$$t_1 + t_3 + t_3' + t_4' = 0$$

$$t_1' + t_2' + t_3 + t_4 = 0.$$

Sbroj zadnjih dviju jednačaba daje obzirom na prvu jednačbu

$$t_1' + t_2' + t_3 + t_4 = 0,$$

što nama i navedenu vlastitost dokazuje.

Označimo presjecište istosmjernice iz izhodišta sa tetivom $\overline{t_h t_k}$ te parabole sa t_{hk} . *Proložimo točkama t_1, t_2, t_{12} krug, taj sječe parabolu u daljnoj točki t' , slično sječe krug točaka t_3, t_4, t_{34} parabolu u daljnoj točki t'' , te točke t_{12}, t_{34}, t', t'' leže opet na jednom te istom krugu.*

Dokaz. Radi

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 0$$

sledi iz jednačaba

$$t_1 + t_2 + t_{12} + t' = 0$$

$$t_3 + t_4 + t_{34} + t'' = 0,$$

jednačbe $t_{12} + t_{34} + t' + t'' = 0$ q. e. d.

20. Krug se dotica parabole, ako se dvie presjecišta sudaraju t. j. parametre dviju presjecišta su jednaka. Čemo li dakle

točkama t_1, t_2 proložiti krug, koji bi se doticao parabole, moramo samo u (18) staviti $t_3 = t_4 = t$, biti će dakle

$$t_1 + t_2 + 2t = 0.$$

Parametar dirališta kruga, idućega točkama t_1, t_2 parabole, jednak je dakle

$$t = -\frac{t_1 + t_2}{2},$$

koji rezultat ovako izraziti možemo:

Proložimo dvima točkama parabole t_1, t_2 krug dodirni sa parabolom, to je diralište njegovo točka simetrička sa osi prema diralištu tangente istosmjerne sa tetivom $\overline{t_1 t_2}$.

Proložimo li uvijek dvima iz presjecišta nekog kruga sa parabolom dodirni krug na parabolu, dobiti ćemo šest točaka $t_{12}, t_{13}, t_{14}, t_{23}, t_{24}, t_{34}$, gdje je

$$t_{hk} = -\frac{t_h + t_k}{2},$$

od kojih leže triput po četiri na jednom te istom krugu.

21. Krug, kojega se tri presjecišta sa parabolom sudaraju, na pr. $t_2 = t_3 = t_4 = t_1'$, zove se krugom oskulatornim parabole u točki t_1' . Među točkom oskulacije t_1' te danim presjecištem — priredjenom točkom ka točki oskulacije — postoji relacija (18)

$$3t_1' + t_1 = 0.$$

Možemo opet kazati: *Konstruiramo li u presjecištim kruga sa parabolom krugove oskulacije, dobit ćemo četiri nova presjecišta, koja leže na jednom te istom krugu.*

Točke oskulacije, krugova oskulacije proloženih presjecišti kruga nekog sa parabolom na parabolu leže na jednom te istom krugu.

Parametre vrhâ četverokuta kružnoga upisanoga paraboli pomnožene sa stalnom veličinom jesu opet parametre novog četverokuta kružnoga na paraboli.

Dokazi tih trijuh izreka su sasna analogne sa prijašnjimi dokazi.

22. Označimo li sa α, β susednice središta kruga K , koji sieče parabolu u točkah t_h , $h = 1, 2, 3, 4$, te se α_1, β_1 susednice sdružena kruga K^1 , koji sieče parabolu u točkah kt_h , $h = 1, 2, 3, 4$, valja za ovaka dva kruga:

$$\alpha_1 = p(1 - k^2) + k^2\alpha$$

$$\beta_1 = k^3\beta.$$

Ako je mjesto središta sustava krugova $\mathbf{K}$ neka krivulja, to je mjesto središta sdruženoga sustava krugova $\mathbf{K}'$ krivulju sa prvom projektivička.

Mjesto središta pojedinih sustava krugova $\mathbf{K}$, $\mathbf{K}'$ je elipsa uz uvjet, da je udaljenost središta odgovarajućih krugova stalna.

Je-li $\mathbf{P}$ ploština mjesta središta prvoga sustava krugova $\mathbf{K}$, je ploština mjesta središta drugog sustava krugova $\mathbf{K}'$ jednaka $k^5 \mathbf{P}$.

Za $t_3 = t_4 = t$ (čl. 20) dotica se krug parabole u točki t . U ovom slučaju prielazi jednačba (18) u

$$2t + t_1 + t_2 = 0$$

te jednačbe (20) sa obzirom na ovu jednačbu staviv

$$\begin{aligned} t_1 t_2 &= \lambda, \\ \Sigma t_1 t_2 &= \lambda - 3t^2 = 1 - \frac{z}{p} \\ \Sigma t_1 t_2 t_3 &= 2\lambda t - 2t^3 = \frac{\beta}{p} \\ \Sigma t_1 t_2 t_3 t_4 &= \lambda t^2 = \frac{m^2}{4p^2}. \end{aligned} \quad (19')$$

Ako bi sad uzeli, da taj krug dirajuć parabolu u točki t ide vrhom parabole, imali bi $\lambda = 0$; surednice središta ovakova kruga su

$$\begin{aligned} z &= p + 3pt^2 \\ \beta &= -2pt^3; \end{aligned}$$

Dakle je:

Mjesto središta svih krugova, koji idući vrhom parabole, ovu tiču, je racionalna krivulja trećega stupnja, kojoj jednačbu dobivamo u običnom obliku, ako parametar t eliminiramo. Naći ćemo ovako:

$$\beta^2 = \frac{4}{27} \frac{(z - p)^3}{p},$$

što je semikubička parabola, te je *evolutom parabole obične sa parametrom $p' = 2p$.*

Ako bi sad uzeli, da polumjer krugova dirajućih parabolu je stalni, naime a , dobivamo za treću od jednačaba (19')

$$z^2 + \beta^2 - a^2 = 4p^2 \lambda t^2.$$

Eliminiramo-li sad iz ove jednačbe te prvih dvijuh jednačba u (19') veličine promjenljive λ i t , dobit ćemo jednačbu mjesta središta krugova o stalnom promjeru¹ dirajućih danu parabolu, koje je mjesto kao poznato *krivulja istosmjerna sa parabolom* u udaljenosti jednakoj a .

Točka srednjih udaljenosti četverokuta kružnoga upisanoga paraboli.

23. Točka srednjih udaljenosti četverokuta kruženoga upisanoga paraboli ima za surednice

$$y = \frac{p}{2} \Sigma t_1 = 0$$

$$x = \frac{p}{2} \Sigma t_1 t_2 = \alpha - p,$$

gdje je α , kao što i prije usječka središta kruga opisanoga ovomu četverokutu. Udaljenost d točaka (xy) te $(\alpha\beta)$ je

$$d = p$$

t. j. točka srednjih udaljenosti četverokuta kružnoga upisanoga paraboli leži uvijek na osi parabole, te je od središta kruga ovomu četverokutu opisanoga udaljena za stalnu duljinu, naime za parametar parabole p .

Harmonički četverokut kružni na paraboli.

24. Upoznali smo, da parametre presjecišta nekoga kruga (16) sa parabolom dobivamo kao korijene bikvadratičke jednačbe (17) glede t . Ova presjecišta tvore četverokut kružni upisani paraboli, te ima li taj četverokut vlastitost, da se njegovi vrši iz vrha parabole u harmoničkom svezku projiciraju, zovemo taj četverokut harmoničkim četverokutom kružnim upisanim paraboli.

Četiri točke, kojih parametre su korijeni bikvadratičke jednačbe

$$At^4 + 4Bt^3 + 6Ct^2 + 4Dt + E = 0, \quad (20)$$

su harmoničke, ako koeficienti ove jednačbe zadovoljavaju uvjetu²

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ B & C & D \\ C & D & E \end{vmatrix} = 0. \quad (21)$$

¹ Sravnaj: *Salmon-Fiedler* Kegelschnitte pg. 441. Auf. 2.

² *Cremona-Weyr*: Úvod do geometrické theorie křivek rovinných. Praha 1873 pg. 13.

U našem slučaju imamo četiri presjecišta kruga sa parabolom. Svrnitbom jednačbe (20) sa jednačbom (16) sledi:

$$A = 1, B = 0, C = \frac{1}{6} \left(1 - \frac{\alpha}{p} \right)$$

$$D = \frac{\beta}{p}, E = \frac{m^2}{4p^2},$$

dakle je uvjetna jednačka (21), da se ove četiri točke projiciraju iz pola parabole u svezku harmoničkom

$$2(p - x)^3 - 18(x^2 + \beta^2 - a^2)(p - x) + 27p\beta^2 = 0, \quad (22)$$

gdje smo sa a označiti polumjer kruga.

Jednačba ova nama kaže da je *mjesto središta svih krugova sa stalnim polumjerom a , koje presjecaju parabolu u četiriju harmoničkih točkah, krivulja trećega stupnja.*

Ekvianharmonički četverokut kružni na paraboli.

25. Četiri točke, kojih parametri su korieni jednačbe (20) su ekvianharmoničke,¹ zadovoljavaju-li koeficienti njezini jednačbi

$$AE + 3C^2 - 4BD = 0. \quad (23)$$

Za presjecišta kruga sa parabolom možemo dakle kazati, da čine ekvianharmonički četverokut kružni t. j. vrsi njegovi projiciraju se iz vrha parabole u svezku ekvianharmoničkom, ako koeficienti jednačbe (17) zadovoljavaju relaciji:

$$3(x^2 + \beta^2 - a^2) + (p - x)^2 = 0. \quad (24)$$

gdje smo opet sa a označili polumjer kruga.

Ova jednačba nama kaže, da *središta svih krugova sa stalnim polumjerom a , koji parabolu u točkah ekvianharmoničkih presjecaju, leže na elipsi.*

Diagonalni trokut četverokuta kružnoga upisanoga paraboli.

26. Označimo-li presjecište stranica $\overline{t_1 t_2}$ i $\overline{t_3 t_4}$ kružnoga četverokuta $\overline{t_1 t_2 t_3 t_4}$ upisanoga paraboli sa a_1 , slično sa $a_2 = \overline{t_1 t_3}$, $\overline{t_2 t_4}$, $a_3 = \overline{t_2 t_3}$, $\overline{t_1 t_4}$, te sa ξ_n , η_n surednice diagonalnoga vrha a_n , biti će za točku a_1 :

$$\xi_1 = -p(t_1 t_2 + t_3 t_4)$$

$$\eta_1 = p \left[\frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} + \frac{t_3 t_4}{t_3 + t_4} \right];$$

¹ Cremona-Weyr l. c. pg. 32.

sasma slične izraze bi dobili za surednice obijuh ostalih diagonalnih vrha. Ako sad sa ξ, η označimo surednice težišta toga diagonalnoga trokuta $a_1 a_2 a_3$, biti će:

$$\xi = -\frac{p}{3} \Sigma t_1 t_2$$

$$\eta = \frac{p}{3} \Sigma \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2}.$$

Surednice težišta diagonalnoga trokuta, kružnoga četverokuta upisanoga paraboli, su dakle simetričke funkcije vrhova četverokuta. Pišemo li

$$\Sigma \frac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} = \frac{B}{N},$$

je

$$B = 2\Sigma t_1^3 t_2^3 t_3 + 6\Sigma t_1^3 t_2^2 t_3^2 + 14\Sigma t_1^3 t_2^2 t_3 t_4 + 10\Sigma t_1^2 t_2^2 t_3^2 t_4.$$

Rabeći tablice, koje *Faa de Bruno* za simetrične funkcije u svojoj knjizi¹ navadja, uzevši u obzir, da je taj četverokut kružni t. j. da postoji $\Sigma t_1 = 0$, dobivamo:

$$B = -2\Sigma t_1 t_2 t_3 [13\Sigma t_1 t_2 t_3 t_4 - (\Sigma t_1 t_2)^2].$$

Slično nalazimo za nazivnik:

$$N = (\Sigma t_1 t_2 t_3)^2,$$

dakle je

$$\xi = -\frac{p}{3} \Sigma t_1 t_2$$

$$\eta = \frac{2p}{3} \frac{(\Sigma t_1 t_2)^2 - 13\Sigma t_1 t_2 t_3 t_4}{\Sigma t_1 t_2 t_3}. \quad (25)$$

Ako je sad taj četverokut ekvianharmonički, valja (23)

$$12\Sigma t_1 t_2 t_3 t_4 + (\Sigma t_1 t_2)^2 = 0,$$

dakle je za težište diagonalnoga trokuta ekvianharmoničkoga četverokuta kružnoga upisanoga paraboli

$$\xi = -\frac{p}{3} \Sigma t_1 t_2$$

$$\eta = \frac{25p}{18} \frac{(\Sigma t_1 t_2)^2}{\Sigma t_1 t_2 t_3},$$

ili obzirom na vrijednost (19)

$$\xi = -\frac{p-\alpha}{3}$$

$$\eta = \frac{25}{18} \frac{(p-\alpha)^2}{\beta}. \quad (26)$$

¹ Théorie des Formes binaires. Turin 1876. pg. 27, 28, kao što i Tab. I.

Postoji dakle među središtem kruga opisanoga četverokutu ekvianharmoničkomu na paraboli te središtem njegovog diagonalnoga trokuta kvadratička srodnost i to racionalna, jerbo je i obratno

$$\alpha = p + 3\xi$$

$$\beta = \frac{25\xi^2}{2\gamma},$$

t. j. k svakoj točki $(\alpha\beta)$ odgovara jedina točka $(\xi\gamma)$ i obratno.

Krug krivosti.

27. Ako se iz četirijuh presjecišta kruga sa parabolom tri sudaraju, zovemo taj krug, kako već prije navedeno, krugom krivosti — oskulacije — u dotičnoj točki.

Neka je dakle $t_2 = t_3 = t_4 = t$, jednačba (18) prielazi u ovom slučaju u

$$3t + t_1 = 0, \quad (27)$$

te jednačbe (19) jesu sad:

$$3t^2 + 3tt_1 = 1 - \frac{\alpha}{p}$$

$$t^3 + 3t^2t_1 = \frac{\beta}{p} \quad (28)$$

$$t^3t_1 = \frac{m^2}{4p^2},$$

ili sa obzirom na jednačbu (27)

$$1 - \frac{\alpha}{p} = -6t^2$$

$$\frac{\beta}{p} = -8t^3 \quad (29)$$

$$\frac{m^2}{4p^2} = -3t^4.$$

Iz ovih jednačaba možemo sad naći i surednice $(\alpha\beta)$ središta kruga krivosti točke t , kao što i polumjer krivosti. Jest naime

$$\alpha = (1 + 6t^2)p$$

$$\beta = -8t^3p, \quad (30)$$

ili

$$\alpha = p + 3x$$

$$\beta = -\frac{y^3}{p^2},$$

te polumjer krivosti ρ sliedi iz

$$\rho^2 = \alpha^2 + \beta^2 - m^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = \frac{(y^2 + p^2)^3}{p^4}.$$

Nu buduć da je duljina normale točke t jednaka

$$n = \sqrt{y^2 + p^2},$$

možemo, kao poznato gornji rezultat i pisati

$$\rho = \frac{n^3}{p^2},$$

koji izraz u obće za čunjosjeke valja.

Mjesto središta krugova krivosti točaka parabole, t. j. evolutu parabole naći ćemo, ako iz jednačaba (30) eliminiramo promjenljivi parametar t . Naći ćemo ovako

$$\beta^2 = \frac{8}{27} \frac{(\alpha - p)^3}{p}, \quad (31)$$

je krivulja trećega stupnja sa povratistom na osi X u udaljenosti $\alpha = p$, te se zove obično *semikubička* ili *Neil-ova* parabola.

Da je zamotaljka zajedničkih tetiva krugova krivosti točaka parabole sa parabolom opet parabola sa zajedničkom osi te vrhom sliedi iz članka 14. Jest naime u ovom slučaju

$$3t + t_1 = 0 \quad \text{t. j.} \quad \mu = \frac{t}{t_1} = -\frac{1}{3}, \quad \text{te} \quad k = -3.$$

Normala točke parabole.

28. Jednačba normale točke t parabole glasi:

$$y - 2pt = -2t(x - 2pt^2)$$

ili

$$y + 2tx - 2pt(1 + 2t^2) = 0. \quad (32)$$

Ova jednačba predočuje nama relaciju medju surednicama neke točke (xy) na normali te parametrom nožišta. Smatramo li sad (xy) za surednice čvrste točke, možemo iz ove jednačbe naći parametre nožišta normala iz točke (xy) na parabolu spuštenih kao korijene jednačbe (32) glede t . Poredamo li ovu jednačbu po uzumnožih parametra t , naći ćemo:

$$t^3 + \frac{p-x}{2p}t - \frac{y}{4p} = 0. \quad (33)$$

Jednačba ta je stupnja trećega glede t , t. j. iz koje god točke $P(xy)$ ravnine parabole možemo na ovu tri normale spustiti. Među parametri nožišta postoje sliedeće relacije

$$\begin{aligned}\Sigma t_1 &= 0 \\ \Sigma t_1 t_2 &= \frac{p-x}{2p} \\ \Sigma t_1 t_2 t_3 &= \frac{y}{4p}.\end{aligned}\tag{34}$$

Prva je relacija naime $\Sigma t_1 = 0$

o položaju točke (xy) neovisna, daje nama dakle uvjet, kada normale trijuh točaka parabole se u jednoj te istoj točki presjecaju. Ovake tri točke t_1, t_2, t_3 parabole označit ćemo kao trojinu nožišta pridruženih ka točki (xy) ili kao trokut nožišta točke (xy) .

Iz prve te treće jednačaba (34) sledi, da samo jedino nožište sa točkom (xy) na istoj strani osi parabole leži te ostala dva nožišta dakle da leže na drugoj strani.

Dalje sledi iz jednačaba (34), da ako točka (xy) leži na osi parabole, uvijek jedno nožište se sudara sa vrhom parabole te druga dva nožišta da leže simetrički prema osi parabole. U ovom slučaju je naime jedan korien jednačbe (33) jednak ničtici, ostala dva imaju doduše jednaku absolutnu vrijednost, ali su obratnoga proznaka, te za

$$\Sigma t_1 t_2 = \frac{p-x}{2p}$$

dobivamo u ovom slučaju obzirom na jednačbu (9):

$$x_1 = x - p.$$

Nožišta ležeća simetrički prema osi X jesu dakle realna¹ prema tomu je li $x > p$, imaginarna za $x < p$, sudaraju se sa trećim nožištem u vrhu parabole za $x = p$.

¹ Ovo se vidi iz *Chasles-a*, konstrukcije „*Traité des sections coniques*“ Gauthier Villars Paris 1865, pg. 114“. Jest naime mjesto presjecišta okomica, iz točke P na tangente parabole spustenih, sa premjeri dodirnih točaka istostranična hiperbola, koja prolazi točkom P te točkom bezkonačno udaljenom parabole. Ova hiperbola presjeca parabolu osim u njihovoj točki ubježnoj u daljnjih trijuh točkah, koje su tražena nožišta normala točke P . Leži li točka na osi X , reducira se hiperbola na njezine asimplete, od kojih je jedna os parabole te druga pravac na ovu os okomiti, što se sa gore navedenim iztraživanjem slaže.

Jednačba spomenuto hiperbole je $p(\eta - y) + \eta(\xi - x) = 0$.

U sliedećem navadjamo jednostavniju konstrukcije. Gledaj moju razpravu: Über das Normalenproblem für die Parabel. Sitzb. d. kg. böhm. Gesellsch. d. Wissensch. 1879.

Evoluta, kao mjesto točaka, za koje se dvie normale sudaraju.

29. Ako se dvie od trijuh normala iz točke (xy) na parabolu spuštenih sudaraju, je ova točka središtem krivosti nožišta sudarajućih se normala.

U ovom slučaju biti će $t_2 = t_3 = t$, a jednačbe (34) prielaze u

$$\begin{aligned} 2t + t_1 &= 0 \\ 2tt_1 + t^2 &= \frac{p-x}{2p} \\ t^2 t_1 &= \frac{y}{4p} \end{aligned} \quad (35)$$

Stavimo li vrijednost za t_1 iz prve jednačbe u obje ostale, dobit ćemo

$$\begin{aligned} -3t^2 &= \frac{p-x}{2p} \\ -2t^3 &= \frac{y}{4p} \end{aligned} \quad (36)$$

Mjesto točaka (xy) , za koje dvie normale na parabolu spustene se sudaraju, dobivamo eliminacijom parametra t iz gornjih jednačaba. Naći ćemo ovako

$$y^2 = \frac{8}{27} \cdot \frac{(x-p)^3}{p} \quad (37)$$

Sravnimo sad ovu jednačbu kao što i jednačbe (36) sa jednačbami (30) i (31), to upoznajemo namah istovjetnost ovoga mjesta sa evolutom parabole.

Ovdje se nama pojavlja točka (xy) kao presjecište dvijuh susjednih t. j. sudarajućih se normala, morali bi dakle opet doći do jednačaba (36), ako bi jednačbu normale te njezinu derivaciju po t riješili glede x te y ; te ako bi iz tih jednačaba eliminirali parametar t , došli bi opet do jednačbe evolute parabole (37) kao zamotajke normala parabole.

Sravnimo li jednačbu normale sa jednačbom

$$ux + vy + 1 = 0,$$

dobivamo

$$\begin{aligned} u &= -\frac{1}{p(1+2t^2)} \\ v &= -\frac{1}{2pt(1+2t^2)} \end{aligned} \quad (38)$$

kao jednačbe evolute parabole u surednicali tangencijalnih u para-

metričkoj predočbi; jednačbu običnu bi našli eliminacijom parametra t iz jednačaba (31), naime

$$p(u^2 + 2v^2)u + v^2 = 0. \quad (39)$$

Presjecište normala dvijuh točaka parabole.

30. Normale točaka t_1 i t_2 parabole presjecaju se u točki Q , kojoj su surednice:

$$\begin{aligned} x_1 &= p + 2p(t_1^2 + t_2^2 + t_1 t_2) \\ y_1 &= 4pt_1 t_2 (t_1 + t_2). \end{aligned} \quad (40)$$

Nu za pol P spojnice $\overline{t_1 t_2}$ smo bili našli (14)

$$\begin{aligned} x &= 2p t_1 t_2 \\ y &= p(t_1 + t_2), \end{aligned}$$

postoji dakle među točkama P te Q sljedeća suvislost:

$$\begin{aligned} x_1 &= p - x + \frac{2y^2}{p} \\ y_1 &= \frac{2xy}{p} \end{aligned} \quad (41)$$

Svakoj točki P odgovara dakle sasma opredjeljena točka Q , kao presjecište normala krajnjih točaka polarne tetive točke P obzirom na parabolu, nu obratno k svakoj točki Q odgovaraju tri točke P . Sliedi naime iz druge od jednačaba (41) rešitbom

$$y = \frac{py_1}{2x}, \quad (42)$$

što stavljeno u prvu jednačbu daje

$$x^3 + (x_1 - p)x^2 - \frac{p}{2}y_1^2 = 0.$$

Dobivamo dakle za usječku točke P tri vriednosti x', x'', x''' , te odgovarajuće vriednosti za y daje jednačba (42). Danoj točki Q , kao presjecišti dvijuh normala parabole odgovaraju tri točke P , kao polovi spojnicâ nožišta normala obzirom na parabolu.

Ovo smo mogli iz geometričkih razloga unapred kazati, buduće da točki Q odgovara trokut nožišta $t_1 t_2 t_3$ na paraboli. Trokut polova $P_1 P_2 P_3$ je trokut tangenata nožišta, te ploština toga trokuta polâ je dakle pol ploštine trokuta nožišta.

Još ćemo nadovezati rešitbu jedne zadaće. Ima se naime naći mjesto presjecišta normala parabole nacrtanih u krajnjih točkah te-

tive iduće točkom (xy) . Parametre t_1, t_2 krajnjih točaka tetive iduće točkom (xy) moraju da zadovoljavaju jednačbi (10):

$$x - (t_1 + t_2)y + 2pt_1t_2 = 0$$

te surednice presjecišta nomala tih točaka dane su jednačbami (40). Kreće li se sad tetiva oko točku (xy) mienjaju i parametre t_1, t_2 svoju vrijednost. Eliminiramo li sad iz jednačaba (40) te zadnje jednačbe parametre t_1, t_2 , dobit ćemo jednačbu traženoga mjesta.

Riešimo li zadnju jednačbu po umnošku t_1t_2 te substituiraemo li ovu vrijednost u jednačbu (40) pišuć ujedno

$$t_1 + t_2 = \lambda$$

dobit ćemo

$$\begin{aligned}x_1 &= p + x - y\lambda + 2p\lambda^2 \\ y_1 &= -2x\lambda + 2y\lambda^2.\end{aligned}$$

Surednice presjecišta izrazili smo kao cielistve racionalne funkcije drugoga stupnja glede parametra λ t. j. mjesto presjecišta je krivulja drugoga stupnja naime:

$2[-py_1 + y(p + x - x_1)]^2 - (y^2 - 2px)[yy_1 + 2x(p + x - x_1)] = 0$ i to parabola¹, kojoj je os istomjerna sa okomicom na polaru točke (xy) .

Trokut normala.

31. Dan budi trokut $t_1t_2t_3$ upisan paraboli, te bi tražili sad trokut normala vrha. Označimo li presjecište normala N_1, N_2 točaka t_1, t_2 sa A_3 , biti će surednice ovoga presjecišta dane jednačbami (40), te surednice ostalih presjecišta $A_1 = N_2, N_3, A_2 = N_3, N_1$ dobivamo cikličkom zamjenom kazala. Za ploštinu trokuta $A_1 A_2 A_3$ naći ćemo, ako ploština trokuta $t_1t_2t_3$ sa Δ označimo,

$$A_1 A_2 A_3 = 2 \Delta (\Sigma t)^2.$$

Ako je sad trokut Δ trokutom nožišta, normale N_i vrha t_i tog trokuta presjecaju se u jednoj te istoj točki, mora dakle biti ploština trokuta

$$A_1 A_2 A_3 = 0,$$

pa tim je

$$\Sigma t_i = 0,$$

koju relaciju nama već poznatu dobivamo sad iz drugoga opet gledišta.

¹ Sravnaj: *Salmon-Fiedler*. Kegelschnitte pg. 255 i pg. 438.

Težište trokuta nožišta.

32. Označimo li sa $\xi' \eta'$ surednice težišta trokuta nožišta točke (xy) , biti će sa obzirom na relacije (34)

$$S. \begin{cases} \xi' = \frac{2p}{3} \Sigma t_1^2 = -\frac{2}{3} (p - x) \\ \eta' = \frac{2p}{3} \Sigma t_1 = 0, \end{cases} \quad (43)$$

koje jednačbe nama kažu, da *težište trokuta nožišta, koje god točke u ravnini parabole leži na osi parabole.*

Nožištni trokuti točaka na pravcu istosmjernom sa vršnom tangentom parabole imaju zajedničko težište.

33. Upoznali smo prije, da svakoj točki Q odgovara trokut polova $P_1 P_2 P_3$, kojega stranice se dotičaju parabole u vrsih nožištnoga trokuta (čl. 30). Surednice vrha P_3 tog trokuta su dani sa

$$P_3 \begin{cases} x_3 = 2pt_1 t_2 \\ y_3 = p(t_1 + t_2); \end{cases}$$

surednice vrha P_1, P_2 sliede cikličkom zamjenom kazala. Označimo li sad surednice težišta toga trokuta sa $\xi'' \eta''$, valja

$$\begin{aligned} \xi'' &= \frac{2p}{3} \Sigma t_1 t_2 = \frac{1}{3} (p - x) \\ \eta'' &= \frac{2p}{3} \Sigma t_1 = 0. \end{aligned}$$

Za trokut pola nožištnoga trokuta valja dakle ono isto, što smo malo prije za trokut nožišta bili naveli.

Udaljenost d težištâ tih trokuta pridruženih k točki Q je

$$d = x - p.$$

Za točke Q pravca istosmjernoga sa vršnom tangentom je ova udaljenost stalna, te leži li točka Q na pravcu

$$x = p,$$

sudara se težište nožištnog trokuta sa težištem trokuta polova.

Presjecište visina nožištnog trokuta.

34. Jednačba pravca idućega točkom t_1 parabole okomito na tetivu $t_2 t_3$ glasi

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2pt_1^2 & 2pt_1 & 1 \\ 1 & -(t_2 + t_3) & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Sačinjavaju li točke $t_1 t_2 t_3$ trokut nožišta, valja $\Sigma t_1 = 0$, pa tim možemo gornju jednačbu pisati:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2pt_1^2 & 2pt_1 & 1 \\ 1 & t_1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ili u obliku razvijenon

$$y - t_1 x + 2pt_1^3 - 2pt_1 = 0. \quad (44)$$

Slično bi našli za jednačbu okomice iz vrha t_2 na stranicu $\overline{t_3 t_1}$:

$$y - t_2 x + 2pt_2^3 - 2pt_2 = 0.$$

Odbijemo li gornju jednačbu od doljne, dobivamo pokrativ sa faktorom $(t_1 - t_2)$ za usječku presjecišta

$$x_1 + 2p - 2p(t_1^2 + t_2^2 + t_1 t_2) = 0.$$

Nu u svakom trokutu presjecaju se visine u jednoj te istoj točki,¹ dakle se izraz za x_1 ne mienja cikličkom zamjenom kazala. Sbrojimo li ovako dobivene tri jednačbe, naći ćemo:

$$3x_1 + 6p - 2p[2\Sigma t_1^2 + \Sigma t_1 t_2] = 0,$$

dakle je obzirom na jednačbu (34):

$$x_1 = x - 3p, \quad (45)$$

Iz sbroja jednačba svih trijuh visina dobivamo radi $\Sigma t_1 = 0$ za ordinatu presjecišta visina:

$$y_1 = -\frac{2p}{3} \Sigma t_1^3 = -\frac{y}{3}. \quad (45_1)$$

Iz jednačbe (44) sledi, da visine trokuta nožišta kod promjenljivog t omotavaju semikubičku parabolu, kojoj je parametar četiri put tako velik, nego je parametar dane parabole. Jednačba ove zamotaljke visina je:

$$y^2 = \frac{2}{27} \cdot \frac{(x+2p)^3}{p}.$$

¹ Svi trokuti opisani istostraničnoj hiperboli idu, kao poznato, presjecištem visina toga trokuta. Moraju dakle surednice točke H zadovoljavati jednačbi hiperbole spomenute u opazci članka (29), o čem se možemo lahko uvjeriti time, da vrijednosti za x_1 y_1 mjesto ξ , η substituiraemo. U ostalom sledi ovo iz reciprokog odnošaja k izreci na svršetku članka (36). Sravnaj *Salmon-Fiedler* Kegelschnitte pg. 531.

Ploština nožištnoga trokuta.

35. Ploština trokuta $t_1 t_2 t_3$ upisanoga paraboli, je, kako u čl. 13. navedeno:

$$\Delta = -2p^2 \begin{vmatrix} t_1^2 & t_1 & 1 \\ t_2^2 & t_2 & 1 \\ t_3^2 & t_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Buduć da vrši tog trokuta imaju biti nožišta normala točke (xy) , valjaju relacije (34). Nu Δ^2 je simetrička funkcija parametra t_1, t_2, t_3 , možemo ju dakle izraziti pomoću vrijednosti (34). Dobit ćemo ovako:

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= 4p^4 \begin{vmatrix} 2(\Sigma t_1 t_2)^2 & 3\Sigma t_1 t_2 t_3 & -2\Sigma t_1 t_2 \\ 3\Sigma t_1 t_2 t_3 & -2\Sigma t_1 t_2 & 0 \\ -2\Sigma t_1 t_2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{8p(x-p)^3 - 27p^2 y^2}{4}. \end{aligned} \quad (46)$$

Stavimo li

$$\frac{4\Delta^2}{p} = c^3$$

dobivamo izreku: Mjesto točaka, kojih trokut nožišta ima stalnu ploštinu je krivulja trećega stupnja

$$8(x-p)^3 - 27p^2 y^2 = c^3, \quad (47)$$

koja obuhvaća evolutu parabole kao poseban slučaj, naime za $c=0$.

Iz jednačbe (46) upoznajemo dalje, da evoluta parabole ravninu parabole razdieljuje u dvie česti te vlastitosti, da točkam unutri evolute realni trokut nožišta pripada t. j. tri normale ovakih točaka jesu realne, gdje usuprot točkam izvan evolute imaginiran trokut nožišta pripada t. j. dvie od trijuh normala ovakih točaka jesu imaginarne. Točke evolute čine medju; ploština trokuta nožišta ovakih nožišta jednaka je ničtici, t. j. dvie od normala se sudaraju.¹

¹ Sasma analogan rezultat dobio je *Legendre* za elipsu [Traité des fonct. ellipt. T. I. pg. 348] gdje promatra, mnogo li presjecišta hiperbole te elipse ostaje realnih. Za točke unutri evolute elipse jesu sve četiri normale realne, za točke izvan evolute elipse jesu dvie normale realne te dvie imaginarne. Za točke na evoluti dobivamo tri realne normale. Liepo ovo predočuje *Joachimsthal* u svojoj razpravi: „Über die Normalen der Ellipse und des Ellipsoids“ Crelle Journal Bd. 26 pg. 175. Srvnaj: *Salmon-Fiedler*: Kegelschnitte, pg. 459., Aufg. 13.

36. Sad ćemo promatrati taj slučaj, gdje leži točka (xy) na paraboli samoj. U ovom slučaju zadovoljavaju surednice ove točke jednačbi dane parabole, postoji naime:

$$y^2 = 2px$$

te jednačba (46) glasi:

$$\Delta^2 = 2p(x-p)^3 - \frac{27}{2} p^3 x,$$

iz koje jednačbe upoznajemo, da uvijek šest točaka parabole imaju trokut nožišta dane ploštine, te da jesu ove točke podvojno simetričke prema osi X. Usječke tih točaka opredjeljuju na osi X kubičku involuciju točaka, o kojoj ćemo kasnije u ovoj razpravi govoriti. U ovom slučaju je točka (xy) sama već jedno nožište, te neka je t' njezin parametar. Iz te točke t' na paraboli možemo dakle dvie normale na parabolu spustiti (osim normalu u točki t' samoj). Parametre tih točaka naći ćemo, ako surednice točke t' , naime

$$x = 2pt'^2$$

$$y = 2pt'$$

uvedemo u jednačbu normale (32). Pokratimo li potle sa faktorom $(t-t')$, koji nama kaže, da je $t=t'$ jedno nožište, dobiti ćemo

$$1 + 2t(t+t') = 0, \quad (47)$$

iz koje jednačbe kvadratičke glede t parametre normala iz točke t^1 na parabolu spuštenih rešitbom dobivamo. Označimo li sa t_1 te t_2 korieni jednačbe (47), valja

$$t_1 + t_2 = -t'$$

$$t_1 t_2 = \frac{1}{2},$$

od kojih nama prva samo potvrđuje, da točke t_1, t_2, t^1 stvaraju trokut nožišta. Nu u članku (7.) smo našli, da je

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{1}{2t_1},$$

te označimo li kut provodnice točke t_2 sa osi X sa φ_2 , biti će:

$$\cot \varphi_2 = \operatorname{tg} \alpha_1$$

t. j.

$$\alpha_1 + \varphi_2 = \frac{\pi}{2},$$

koju relaciju možemo sad ovako izreći:

Jesu li t_1, t_2 nožišta normala iz točke t' parabole na parabolu spuštenih, je tangenta jednoga nožišta okomita na provodnici drugoga nožišta.

37. Da su spojnice $\overline{t^1 t_1}$, $\overline{t^1 t_2}$ normale točkaka t_1, t_2 parabole, bilo na početku čl. 36. iztaknuto, tim je i zamotaljka spojnice $\overline{t_1' t_2}$ evoluta dane parabole.

Nu mogli bi pitati po zamotaljki spojnice nožišta $\overline{t_1 t_2}$. Uvedemo li iz jednačba (48) vrijednosti u jednačbu (10), dobit ćemo

$$x + t'y + p = 0,$$

iz koje jednačbe proizlazi, da „spojnice točkaka na paraboli, kojih normale se na paraboli presjecaju, idu čvrstom točkom $(-p, 0)$ na osi parabole, ili drugim riječmi: svezak trakova sa vrhom $(-p, 0)$ opredjeljuje na paraboli kvadratičku involaciju te vlastitosti, da normale sdruženih točkaka se presjecaju na paraboli.

Tangencijalni trokut nožišta.

38. Smatramo li vrhe trokuta nožišta Δ kao dirališta trokuta D opisanoga paraboli (t. j. trokuta polova), valja (čl. 16)

$$2D = \Delta.$$

Jest dakle mjesto točkaka, za koje trokut polova ima stalnu ploštinu, krivulja trećega stupnja, koja spada u sustav krivulja (47). Jednačba ove krivulje je:

$$8(x - p)^3 - 27py^2 = \frac{c^3}{4}.$$

Trokut polova kao trokut opisani paraboli čini sa diralištama stranica šestistran *Brianchonov*. Označimo li tangentu točke t_h sa T_h , presjecište $T_1 \cdot T_2 = A_3$ i t. d. je jednačba diagonale $\overline{A_3 t_3}$:

$$3t_3 x + (2t_1 t_2 - t_3^2) y - 4p [t_3^3 - \Sigma t_1 t_2 t_3] = 0. \quad (48)$$

Jednačbe ostalih diagonalu dobivamo cikličkom zamjenom kazala. Diagonale tog šestistрана presjecaju se u točki *Brianchonovoj* B , kojoj surednice x', y' ovako lahko nadjeme. Očito moraju surednice točke B zadovoljavati i sbroju jednačaba diagonalu, budući da to čine za svaku napose. Sa obzirom na jednačbe (34) je

$$\Sigma t_1^3 = 3 \Sigma t_1 t_2 t_3,$$

dakle sledi za ordinatu točke B :

$$y' = 0.$$

Uvedemo li ovu vrijednost za $y = y'$ u jednačbu (48), dobit ćemo pokrativše sa t_3 :

$$3x - 4p (t_3^2 - t_1 t_2) = 0.$$

Nu ovaj rezultat se nemienja cikličkom zamjenom kazala, je dakle

$$9x' - 4p[2\Sigma t_1^2 + \Sigma t_1 t_2] = 0,$$

dakle je radi već spomenutih jednačba (34)

$$3x' = 4p\Sigma t_1 t_2 = -2(p - x),$$

pa tim su

$$\begin{aligned} x' &= -\frac{2}{3}(p - x) \\ y' &= 0 \end{aligned} \quad (49)$$

surednice točke *B*. Sravnimo li sad ove jednačbe sa jednačbami (43), upoznajemo namah točku *B* kao težište *S* nožištnoga trokuta, tim možemo kazati: *U svakom trokutu opisanom paraboli, kojega dirališta stvaraju trokut nožišta, razpolavlja spojnica dirališta jedne tangente sa presječištem obijuh ostalih tangenata tetivu tih tangenata.*

Krug opisani trokutu nožišta.

39. Jednačba kruga idućega trima točkama (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3$, glasi $(\xi^2 + \eta^2)|xy1| - \xi x^2 + y^2, y, 1| + \eta|x^2 + y^2, x, 1| - |x^2 + y^2, x, y| = 0$.

Uzmemo li sad u obzir, da dana točka (x_i, y_i) leži na paraboli, te da joj pripada parametar t_i , valja:

$$\begin{aligned} |x y 1| &= 4p^2 |t^2 t 1| \\ |x^2 + y^2, y, 1| &= 8p^3 |t^4 + t^2, t, 1| \\ |x^2 + y^2, x, 1| &= 8p^3 |t^4 t^2 1| \\ |y^2 + y^2, x, y| &= 16p^4 |t^4 t^2 t| \end{aligned} \quad (50)$$

Buduć da ove točke stvaraju trokut nožišta valjaju relacije (34) dakle je, ako determinant $|t^2 t 1|$ sa Δ označimo:

$$\begin{aligned} |t^4 t 1| &= -\Delta\Sigma t_1 t_2 = -\frac{\Delta}{2p}(p - x) \\ |t^4 t^2 1| &= -\Delta\Sigma t_1 t_2 t_3 = -\frac{\Delta}{4p}y \\ |t^4 t^2 t| &= -\Delta\Sigma t_1 \cdot \Sigma t_1 t_2 t_3 = 0. \end{aligned} \quad (51)$$

Umetnemo li ove vriednosti u jednačbu kruga, dobit ćemo po krativ sa zajedničkim faktorom $4\Delta p^2$.

$$\xi^2 + \eta^2 - (x + p)\xi - \frac{y}{2}\eta = 0. \quad (52)$$

Iz ove jednačbe upoznajemo namah, da krug opisani trokutu nožišta uvijek prolazi vrhom parabole t. j. *vrh parabole je zajed-*

ničko presjecište krugova opisanih trokutom nožišta. Krugovi opisani trokutom nožišta stvaraju dakle mrežu krugova.

40. Označimo li surednice središta kruga opisanoga trokutu nožišta sa α , β te sa r polumjer toga kruga, sliedi iz jednačbe (52):

$$M \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{p+x}{2} \\ \beta = \frac{y}{2} \end{array} \right\} \quad (53)$$

$$r^2 = \alpha^2 + \beta^2 = \left(\frac{p+x}{2} \right)^2 + \left(\frac{y}{2} \right)^2. \quad (54)$$

Krug opisani trokutu nožišta je dakle uvijek realan za koji god položaj točke (xy) , iz koje smo bili normale na parabolu spustili. Iz jednačba (53) sliedi lahka konstrukcija trokuta nožišta normala neke točke (xy) t. j. rešitba problema normala za parabolu. *Konstruiramo linearno sdruženo središte M kruga, te opišimo iz ove točke sa polumjerom OM krug; taj krug sieče parabolu osim u zajedničkom svima krugovom opisanim trojinam nožišta presjecištu O , u dalnjih trijuh točkah koje su tražena nožišta.*

Iz navedene vlastitosti kruga opisanoga trokutu nožišta, da ide vrhom parabole možemo i konstrukciju središta krivosti u nekoj točki na pr. P' parabole izvesti. Okomica u razpolovištu provodnice $\overline{OP'}$ presjeca normalu točke P' u središtu odgovarajućega kruga opisanoga trokutu nožišta normala, koji sieče parabolu u točki P_1 . Normala točke P_1 presjeca sad normalu točke P' u središtu kruga krivosti ove točke.¹

Jednačba (54) rieši nama ujedno i pitanje po mjestu točke (xy) , za koju je polumjer kruga opisanoga trokutu nožišta stalni. Traženo mjesto je elipsa, kojoj se mala os sudara sa osi parabole, te kojoj je središte točka $(-p, 0)$.

Osi ove elipse su $2r$, $4r$. Središte krugova opisanih trokutom nožišta odgovarajućih točkam ove elipse leže na krugu K , koji ima vrh parabole O za središte te r za polumjer. Zamotaljka tih krugova je opet krug koncentrički sa krugom K te sa dvostrukim polumjerom.

¹ Gledaj moju razpravu: Über das Normalenproblem für die Parabel. Sitzb. d. kg. böhm. Gesellsch. d. Wissensch. Prag 1879.

Feuerbachov krug trokuta nožišta.

41. Neka je $B_1(a_1, b_1)$ razpolovište stranice $\overline{t_2 t_3}$ slično $B_2(a_2, b_2)$, $B_3(a_3, b_3)$ neka su razpolovišta stranica $\overline{t_3 t_1}$, $\overline{t_1 t_2}$. Jednačba kruga idućega točkama¹ $B_1 B_2 B_3$ glasi:

$$(\xi^2 + \eta^2) |a, b, 1| - x |a^2 + b^2, b, 1| + y |a^2 + b^2, a, 1| - |a^2 + b^2, a, b| = 0.$$

Sad je radi jednačba (34)

$$a_h = p(\Sigma t_i^2 - t_h^2)$$

$$b_h = -pt_h,$$

dakle valja

$$\begin{aligned} |a, b, 1| &= p^2 |t^2, t, 1| = p^2 \Delta \\ |a^2 + b^2, b, 1| &= 2p^3 \Delta \cdot \Sigma t_i^2 - p^3 |t^4 + t^2, t, 1| \\ |a^2 + b^2, a, 1| &= -p^3 |t^4, t^2, 1| \\ |a^2 + b^2, a, b| &= -p^4 \Sigma t_i^2 [\Delta \Sigma t_i^2 - |t^4 + t^2, t, 1|] + \\ &\quad + p^4 \Sigma t_i t_2 t_3 \cdot |t_1^2 t_1|. \end{aligned}$$

Uzmemo li sad obzir na vrijednosti u jednačbah (51), naći ćemo namah:

$$|a^2 + b^2, b, 1| = -p^3 [3 \Sigma t_i t_2 + 1] \Delta = (5p - 3x) p^2 \Delta$$

$$|a^2 + b^2, a, 1| = p^3 \Sigma t_i t_2 t_3 \cdot \Delta = \frac{p^2 y}{4} \Delta,$$

dakle je, ako označimo sa α_1, β_1 surednice središta M_1 Feuerbachova kruga trokuta nožišta:

$$M_1 \begin{cases} \alpha_1 = -\frac{5p - 3x}{2} \\ \beta_1 = -\frac{y}{8}. \end{cases} \quad (55)$$

41. Točke S, H, M, M_1 leže kao znamenite točke trokuta na jednom te istom pravcu, naime Euler-ovom pravcu trokuta; ovo nama može baš služiti kao kontrola računa. Točke S, M, H leže na jedinom pravcu, budući da je:

$$\begin{vmatrix} -\frac{2}{3}(p-x) & 0 & 1 \\ \frac{p+x}{2} & \frac{y}{4} & 1 \\ x-3p & -\frac{y}{4} & 1 \end{vmatrix} \equiv 0,$$

¹ Taj krug zove se i krugom deviti točaka, njegov polumjer je pol polumjera kruga opisanoga trokutu, te središte njegovo je razpolovište spojnice središta opisanoga trokutu sa presjecištem visina, što iz naših oblićaka neposredno sledi. Taj krug ima liepe vlastitosti, na koje već Euler i Feuerbach bili uputili.

te slično sledi iz identiteta:

$$\begin{vmatrix} -\frac{2}{3}(p-x) & 0 & 1 \\ x-3p & -\frac{y}{4} & 1 \\ -\frac{5p-3x}{2} & -\frac{y}{8} & 1 \end{vmatrix} \equiv 0,$$

da točke S , M , H_1 leže na jednom pravcu, koji je sa prvašnjim identički, budući da oba imaju dvie točke S , H zajednički.

Da točke S , H duljinu MM_1 kao poznato harmonički razdjeljuju sledi iz oblika:

$$\frac{\eta' - \beta}{y_1 - \beta} : \frac{\eta' - \beta_1}{y_1 - \beta_1} = -1,$$

o kojega valjanosti se možemo lasno osvjedočiti substitucijom vrijednosti za koordinate.

0 projektivčkoj srodnosti sustava točaka P prema sustavom točaka H , M , M_1 .

42. Iz linearnosti jednačaba (45), (53), (55) sledi neposredno projektivčka srodnost, sustava točaka P sa sustavi točaka H , M , M_1 , te iz oblika tih jednačba upoznajemo ovu srodnost kao afinitet. Na temelju ove srodnosti mogli bi središte M kruga, opisanoga trokutu nožišta, odgovarajući k točki P linearno konstruirati, čim je i problem normala za parabolu riešen. Opisuje li točka P krivulju, kojoj je ploština $F(P)$, opisuju odgovarajuće točke H , M , M_1 krivulje istog stupnja, ali ploštine tih krivulja su neovisno o stupnju i obliku usljed afiniteta u stalnom omjeru, naime je:

$$F(P) : F(H) : F(M) : F(M_1) = 32 : -16 : 4 : -3. \quad (56)$$

Da plošinam $F(H)$, $F(M_1)$ negativan proznak odgovara, proizlazi već tim, da točke H i M_1 neležu sa M te P na istoj strani osi X .

Točka P te odgovarajući njoj Eulerov pravac nožišta II.

43. Točki P odgovaraju linearno znamenite točke trokuta nožišta, dakle i spojnica tih točaka, koja se zove Eulerovim pravcem, te koju ćemo sa Π označiti. Odgovara ovako točka i pravac uza-

jam obzirom na parabolu. Ako je točka $P(xy)$ dana, odgovara njoj pravac $\Pi(u, v)$ gdje je

$$\begin{aligned} u &= \frac{3}{2(p-x)} \\ v &= \frac{x-7p}{y(p-x)}, \end{aligned} \quad (57)$$

te obratno, ako je pravac $\Pi(u, v)$ dan kao Eulerov pravac trokuta nožišta, odgovara mu samo jedina točka $P(xy)$, naime

$$\begin{aligned} x &= \frac{2pu-3}{2u} \\ \eta &= -\frac{1+4pu}{v}. \end{aligned} \quad (58)$$

Krivulji n tog stupnja $f(xy) = 0$ kao mjestu točaka P odgovara krivulja $2n$ tog razreda kao zamotaljka pravaca Π , kojoj je stupanj $2n(2n-1)$. Nu ako je krivulja $f(x, y) = 0$ racionalna, n tog stupnja, t njezin racionalan parametar, možemo jednačbu

$\Pi \equiv 3y\xi + 2(x-7p)\eta + 2y(p-x) = 0$,
pisati u obliku

$$\sum_{r=0}^{2n} a_r t^r = 0, \quad (59)$$

gdje su a_r linearne funkcije¹ promjenljivica ξ, η . Diskriminant jednačbe (59) stavljen jednak ničici daje nama odmah jednačbu zamotaljke pravca Π .

Razred zamotaljke je $2n$, te stupanj $2(2n-1)$. U najjednostavnijem slučaju, ako točka $P(x, y)$ opiše danu parabolu, je

$$\Pi \equiv 3t\xi + (2t^2-7)\eta + 2pt(1-2t^2) = 0,$$

te zamotaljka pravca Π je u ovom slučaju racionalna krivulja trećega razreda te četvrtoga stupnja. Razlog, zašto se razred ove krivulje umanjio je taj, da je ordinata točke parabole samo stupnja prvoga u parametru, te tim je jednačba (59) u ovom slučaju samo stupnja trećega.

¹ Gledaj: *Salmon-Fiedler* Höhere ebene Curven, pg. 83.

0 kubičnej involuciji na paraboli.

44. Elementi parabole, kojih parametre zadovoljavaju jednačbi

$$a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 + \lambda(b_3 t^3 + b_2 t^2 + b_1 t + b_0) = 0, \quad (60)$$

stvaraju na paraboli kubičku involuciju¹ točaka, ili kubičku involuciju tangenata, prema tomu li smatramo t parametrom točke ili tangente parabole. Veličina λ je *promjenljivi parametar* involucije, te t *karakteristički parametar* involucije.

Za svaku bo vrijednost promjenljivog parametra involucije dobivamo tri vrijednosti za t , te tim tri elemente parabole; obratno ako bi znali jednu vrijednost za $t = t_1$ t. j. jedan element parabole, to nadujemo najprije

$$\lambda = - \frac{a_3 t_1^3 + a_2 t_1^2 + a_1 t_1 + a_0}{b_3 t_1^3 + b_2 t_1^2 + b_1 t_1 + b_0},$$

te stavimo li ovu vrijednost sad za λ u danu jednačbu, dobivamo za t tri korijene, od kojih je jedan jednak već prihvaćenoj vrijednosti za t naime t_1 . Možemo i kazati: svakoj vrijednosti za λ pripada skupina trijuh elemenata na paraboli, odgovarajuće trima korijenom jednačbe (60). Sustav ovakih skupina elemenata parabole, koje dobivamo tim, da za λ stavimo postepeno različite vrijednosti, zove se *kubička involucija na paraboli*, i to involucijom točaka, ako su elementi točke, te involucijom tangenata, ako su elementi tangente parabole. Involucija t. j. zamjenljivost elemenata u skupini t_1, t_2, t_3 sledi odavle, da za isto λ , koja god iz vrijednosti t_1, t_2, t_3 jednačbi (60) zadovoljava, t. j. koji god element jedne skupine reproducira pomoću jednačbe (60) oba ostala elementa iste skupine.

Korijeni jednačba

$$\varphi(t) = a_3 t^3 + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 = 0$$

$$\psi(t) = b_3 t^3 + b_2 t^2 + b_1 t + b_0 = 0$$

dadu nama parametre elemenata dvijuh trojina t. j. skupina trijuh elemenata, involucije odgovarajuće vrijednostima parametra involucije $\lambda = 0, \lambda = \infty$. Dvie skupine involucije opredjeljuju prema tomu involuciju posvema.

¹ Za teoriju kubičke involucije gledaj liep spis dr. Emila Weyra: Grundzüge einer Theorie der cubischen Involutionen Abhandl. d. kg. böh. Gesellschaft d. Wissensch. Prag 1874. Na dalje srađvaj: *Cremona-Weyr* Úvod de geometrické theorie křivek rovinných. Praha 1873. pg. 25.

Može se dogoditi, da u jednoj skupini dva elementa se sudaraju, ovakav elemenat zove se dvostruki elemenat. Ovakomu dvostrukom elementu pridružena točka u skupini zove se *razgranište*. Broj dvostrukih elemenata nadjemo, tim da diskriminant jednačbe

$$\varphi(t) + \lambda\psi(t) = 0$$

glede t slavimo jednak ničtici, naime

$$\varphi(t)\psi'(t) - \varphi'(t)\psi(t) = 0, \quad (61)$$

koja je jednačba stupnja četvrtoga obzirom na parametar t . Svakoju vrijednosti za t , koju dobivamo kao korien jednačbe (61) odgovara dvostruki element, tim vidimo, da kubička involucija ima četiri dvostruke elemente tim dakako i četiri razgraništa. Dvostruki element sa odgovarajućim razgraništem zovemo *skupinom razgranjivom*.

45. Jednačbu srodnosti medju dvima parametri jedne te iste skupine lahko nadjemo. Ako su t_1, t_2 parametri dvijuh elemenata pripadajućih ka jednoj te istoj skupini, valja :

$$\varphi(t_1) + \lambda\psi(t_1) = 0$$

$$\varphi(t_2) + \lambda\psi(t_2) = 0,$$

dakle je

$$\varphi(t_1)\psi(t_2) - \varphi(t_2)\psi(t_1) = 0.$$

Pokratimo li još zajedničkim faktorom $t_1 - t_2$, dobivamo u obliku razvijenom :

$$(3, 2)t_1^2t_2^2 + (3, 1)t_1t_2(t_1 + t_2) + (3, 0)(t_1 + t_2)^2 + [(2, 1) - (3, 0)]t_1t_2 + (2, 0)(t_1 + t_2) + (1, 0) = 0 \quad (62)$$

gdje radi kratkoće rabimo :

$$(h, k) = a_hb_k - a_kb_h.$$

U ovoj jednačbi, koja je glede t_1 i t_2 stupnja drugoga, upoznajemo namah, da k svakomu elementu skupine priredjena su dva elementa a iz simetričnosti sliedi zamjenljivost — involucija.

Kad bi u toj jednačbi pisali $t_1 = t_2 = t$, dobili bi parametre dvostrukih elemenata, te dobivena jednačba :

$$(3, 2)t^4 + 2(3, 1)t^3 + [3(3, 0) + (2, 1)]t^2 + 2(2, 0)t + (1, 0) = 0 \quad (63)$$

slaže se dakako sa jednačbom (61).

Elementi skupine kubične involucije stvaraju trokut, taj je u našem slučaju upisan ili opisan paraboli, prema tomu, su li elementi točke ili tangente parabole.

„Stranice toga trokuta omotavaju čunjosjek J koji se zove čunjosjekom kubičke involucije točaka.“ U drugom slučaju: „Vrsi

tog trokuta opisuju čunjosjek J' , koji se zove čunjosjekom kubičke involucije tangenata.“

Ovo slutimo već iz toga, budući da kroz svaku točku parabole t_1 samo dvie tangente idu, naime spojnice ove točke sa obima točkama pridruženima. Nu svakom točkom u ravnini parabole idu dvie tangente zamotaljke. Ova točka opredjeljuje na paraboli kvadratičku involuciju točaka, koja sa danom kubičkom involucijom točaka na paraboli ima dva para točaka zajednički. Spojnice tih točaka idu iztaknutom točnom te su ujedno i tangente zamotaljke.

Iz jednačbe (10) spojnice $\overline{t_1 t_2}$ sledi:

$$t_1 t_2 = \frac{(t_1 + t_2) y - x}{2p}.$$

Stavimo li ovu vrijednost u jednačbu (62), te pišemo li mjesto

$$t_1 + t_2 = v,$$

i stavimo li napokon diskriminant ovako dobivene jednačbe glede v jednakim ničici, dobivamo jednačbu tražene zamotaljke, koja je stupnja drugoga koordinatih Deskaesovih, te bi ju dobili u koordinatnih Plückerovih, kad bi pisali

$$t_1 + t_2 = -\frac{v}{u}$$

$$t_1 t_2 = \frac{1}{2pu},$$

te ove vrijednosti umetnuli u jednačbu (62).

Slično se stvar ima, ako bi bili izašli od involucije tangenata na paraboli.

Nu budući da dvie skupine involuciju posvema opredjeljuju, možemo izreći namah poznatu izreku:

„Jesu li danoj paraboli dva trokuta upisana te ujedno drugomu čunjosjeku opisana, to postoji bezkonačno mnogo ovakovih trokuta, koji su paraboli upisani te ujedno drugomu čunjosjeku opisani.“

„Jesu li danoj paraboli dva trokuta opisana, te ujedno drugomu čunjosjeku upisana, to postoji bezkonačno mnogo trokuta, koji su opisani paraboli te drugomu čunjosjeku upisani.“

Pomoću tog čunjosjeka involucije možemo jednostavno naći k danomu elementu jedne skupine odgovarajuće elemente iste skupine.

Ono što sam dosada o kubičkoj involuciji naveo, valja za kubičku involuciju na čunjosjeku u obće, te je dovoljno za daljnje naše razmatranje.

Kubička involucija na osi parabole.

46. U članku 36. imali smo za ploštinu trokuta nožišta normala odgovarajućega k točki (xy) na paraboli:

$$\Delta^2 = 2p(x-p)^3 - \frac{27}{2} p_3 x, \quad (64)$$

iz koje jednačbe upoznajemo, da usječke vrhova trokuta nožišta sačinjavaju na osi kubičku involuciju, uzmemo li $\Delta^2 = \lambda$ kao parametar involucije.

Jednačba srodnosti (62) glasi u ovom slučaju

$$x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 - 3p(x_1 + x_2) - \frac{15}{4} p^2 = 0. \quad (65)$$

Parametre dvotočaka jesu korieni jednačbe

$$x^2 - 2px - \frac{5}{4} p^2 = 0. \quad (66)$$

Nu iz oblika jednačbe involucije sledi, da ima ta involucija trotočku $x = \infty$, odgovarajuć vriednosti parametra involucije $\lambda = \infty$. Ovo isto sledi iz sravnitbe jednačbe (66) sa jednačbom (63). Trotočka involucije zastupa dakle dvie dvotočke pa tim i dva razgraništa. Parametre drugih dvijuh dvotočaka su

$$x' = \frac{5}{2} p, \quad x'' = -\frac{1}{2} p,$$

odgovarajuća razgraništa su

$$x_1 = -2p, \quad x_2 = -4p,$$

te parametre involucije

$$\lambda' = -27p^4, \quad \lambda'' = 0.$$

Kubička involucija tangenata na paraboli.

47. Skupine tangenata, kojih dirališta imaju za parametre koriene jednačbe (60), stvaraju kubičku involuciju tangenata na paraboli.

Označimo tangente jedne skupine sa T_1, T_2, T_3 , dirališta tih tangenata odnosno sa t_1, t_2, t_3 , vrh $T_1 T_2 = A_3$, $T_2 T_3 = A_1$, $T_3 T_1 = A_2$. Dalje ćemo rabiti oznaku

$$c_k = a_k + \lambda b_k, \quad (67)$$

pa tim možemo i jednačbu (60) pisati:

$$t^3 + \frac{c_2}{c_3} t^2 + \frac{c_1}{c_3} t + \frac{c_0}{c_3} = 0.$$

48. Težište skupine kubične involucije tangenata označimo sa S' , biti će dakle (čl. 16) surednice toga težišta

$$\begin{aligned}\xi' &= \frac{2p}{3} \Sigma_1 t_2 = \frac{2p}{3} \cdot \frac{c_1}{c_3} = \frac{2p}{3} \frac{a_1 + \lambda b_1}{a_3 + \lambda b_3} \\ \eta' &= \frac{2p}{3} \Sigma_1 t_1 = -\frac{2p}{3} \frac{c_2}{c_3} = -\frac{2p}{3} \cdot \frac{a_2 + \lambda b_2}{a_3 + \lambda b_3}\end{aligned}\quad (68)$$

Mienja li se sad λ opisuje točka S' pravac, to jest: mjesto težišta skupinâ kubične involucije tangenata parabole je pravac ili drugimi riečmi:¹ *Mienja li se trokut ovako, da je opisan danoj paraboli te upisan nekomu čunjosjeku (čunjosjek involucije), opisuje njegovo težište pravac.*

Jednačbu toga pravca bi dobili, ako bi iz jednačaba (68) promjenlivi parametar λ eliminirali.

49. Surednice središta $M'(\alpha', \beta')$ kruga opisanoga trokutu tangenata parabole jesu

$$\begin{aligned}\alpha' &= \frac{p}{4} + p \Sigma_1 t_1 t_2 \\ \beta' &= \frac{p}{2} \Sigma_1 t_1 - 2p \Sigma_1 t_1 t_2 t_3.\end{aligned}$$

Ove jednačbe bi našli ili sličnim načinom, kao što smo u čl. (39) bili postupali, ili možemo i ovako postupati. Označimo li razpolovište stranice $\overline{A_2 A_3}$ sa B_1 , te sa ξ_1 , η_1 surednice toga razpolovišta biti će:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= p (t_2 + t_3) t_1 \\ \eta_1 &= \frac{p}{2} (t_1 + \Sigma_1 t_1),\end{aligned}$$

pa tim jednačba okomice $B_1 C_1$ u točki B_1 na stranicu $\overline{A_2 A_3} = T_3$:

$$y + 2t_1 x = \frac{p}{2} [t_1 + \Sigma_1 t_1] + 2pt_1^2 [\Sigma_1 t_1 - t_1].$$

¹ *M. Weill* u Nouvelles annales de Mathématiques. II. Serie Tom. 19 pg. 367 razvija u razpravi: „*Théorèmes sur la parabole*“ neke vlastitosti kubičke *involucije tangenata* na paraboli, te uzimlje za karakteristički parametar reciproku smjernicu tangente, te za jednačbu involucije kubičke

$$t^3 + \lambda t^2 + (A\lambda + B)t + C\lambda + D = 0.$$

Mi uzimamo stvar obćenitije i drugim načinom, te navadjamo i vlastitosti kubičke involucije točaka parabole, o kojih spomenuta razprava negovori ništa.

Jednačbe okomicâ u razpolovištih obijuh drugih stranica sliede cikličkom zamjenom kazala.

Odbitbom jednačaba okomica $\overline{B_1 C_1}$, $\overline{B_2 C_2}$ dobivamo usječku njihovog presjecišta, a buduć da je ovo zajedničko presjecište svih trijuh navedenih okomica, nemienja se rezultat cikličkom zamjenom kazala, na temelju česa dobivamo gore navedeni simetrički izraz za usječku α' . Nu buduć da surednice presjecišta jednačbi pojedine okomice zadovoljavaju, mora da i sbroju tih jednačaba zadovoljavaju, naime jednačbi:

$$3y + 2x\Sigma t_1 = 2p\Sigma t_1 + 2p\Sigma t_1 \Sigma t_1 t_2 - 6p\Sigma t_1 t_2 t_3.$$

Stavimo li sad u ovu jednačbu dobivenu vriednost za $x = \alpha$, dobivamo gore navedeni izraz za ordinatu presjecišta $y = \beta'$.

Nu buduć da sad trokut tangenata parabole ima sačinjavati skupinu involucije tangenata parabole, dane su jednačbom (60), biti će, rabimo prije navedeni pokratak:

$$\begin{aligned} \alpha' &= \frac{p}{4} \cdot \frac{c_3 + 4c_1}{c_3} \\ \beta' &= \frac{p}{2} \cdot \frac{4c_0 - c_2}{c_3}. \end{aligned} \quad (69)$$

Nu buduć da su c_k linearne funkcije parametra λ , sliedi, da je mjesto središta krugova opisanih skupinam kubičke involucije tangenata parabole pravac ili drugimi riečmi¹:

Mienja li se trokut ovako, da je uvijek danoj paraboli opisan te nekome čunjosjeku upisan, opisuje središte kruga, ovomu trokutu opisanoga, pravac.

Jednačbu tog kruga opisanoga promjenljivome trokutu možemo uz primjetbu,¹ da je

$$\frac{|x^2 + y^2, x, y|}{|x, y, 1|} = -p^2 \Sigma t_1 t_2,$$

glasi:

$$c_3(x^2 + y^2) - \frac{p}{2}(c_3 + 4c_1)x - p(4c_0 - c_2)y + p^2 c_1 = 0, \quad (70)$$

ili označimo li desnu stranu ove jednačbe sa K_c , možemo ju usljed jednačbe (67) pisati:

$$K_a + \lambda K_b = 0 \quad (70')$$

¹ Sravnaj ovu razvitbu sa onom l. c. p. 371.

Iz ove jednačbe upoznajemo, da *krugovi opisani skupinam involucije tangenata na paraboli stvaruju svezak krugova*, t. j. imaju dvie čvrste točke u konačnosti zajedničke.

Jednačba chordale zajedničke glasi:

$$b_3 K_a - a_3 K_b \equiv 2(a_1 b_3)x + [(a_2 b_3) + 4(a_0 b_3)]y - p(a_1 b_3) = 0$$

t. j.

$$y[(a_2 b_3) + 4(a_0 b_3)] = (p - 2x)(a_1 b_3)$$

iz koje jednačbe upoznajemo, da ta chordala ide kroz točku:

$$y = 0, x = \frac{p}{2},$$

a budući da susednice ove točke jednačbi (70) zadovoljavaju, upoznajemo u toj točki jednu od zajedničkih čvrstih točaka, vrha to srezka krugova (70). Iz ovoga sledi poznata izreka:

*Svaki krug opisani trokutu tangenata parabole ide dakle kroz točku $y = 0, x = \frac{p}{2}$ t. j. kroz gorište parabole*¹

50. Krug Feuerbachov za trokut tangenata parabole neka ima za središte M'' , te neka su α'' , β'' susednice njegove. Za ove susednice bi našli poznatim već načinom.

$$\alpha'' = \frac{p}{2} \left(\Sigma t_1 t_2 - \frac{1}{4} \right)$$

$$\beta'' = p \left(\Sigma t_1 t_2 t_3 + \frac{3}{4} \Sigma t_1 \right).$$

Budući da taj trokut sačinjava skupinu kubičke involucije tangenata na paraboli opredjeljene sa jednačbom (60), je:

$$\alpha'' = \frac{p}{8} \cdot \frac{4c_1 - c_3}{c_3}$$

$$\beta'' = -\frac{p}{4} \cdot \frac{4c_0 + 3c_2}{c_3}, \quad (71)$$

iz kojih jednačaba opet upoznajemo da: „*Mienja li se trokut uz uvjet, da je opisan danoj paraboli te upisan nekomu čunjosjeku, opisuje središte Feuerbachova kruga tog promjenljivog trokuta pravac.*“

¹ Gledaj: Dr. Em. a Ed. Weyr: Základové vyšší geometrie II. díl Praha pg. 142, Salmon-Fiedler Kegelschnitte pg. 255.

51. Mienja li se trokut, uz uvjet, da je uvijek opisan paraboli te upisan nekomu čunjosjeku, opisuje njegovo težište S' prava Π_s , središte M' kruga opisanoga ovomu trokutu opisuje pravac $\Pi_{m'}$, središte M_1 Feuerbachova kruga tog trokuta opisuje pravac Π_{m_1} , te osim toga presjecište visina toga trokuta, buduć da trokuta tangenata parabole opisuje ravnalicu parabole Π_h .

Sustavi točaka S, M', M_1, H stvaraju dakle na pravcima $\Pi_s, \Pi_{m'}, \Pi_{m_1}, \Pi_h$ projektivne redove točaka, te buduć da ubjezne točke tih redova točaka jesu pridružene točke, jesu ovi redovi slični (parametar ubjezne točke sledi iz $c_3 = 0$, je dakle $\lambda = -\frac{a_3}{b_3}$).

Spojnice pridruženih točaka kao znamenitih točaka trokuta leže na jednom te istom pravcu naime Eulerovom pravcu E . *Zamotaljka Eulerova pravca je dakle parabola*,¹ koja tiče pravce $\Pi_s, \Pi_{m'}, \Pi_{m_1}, \Pi_h$.

Ovo dobivamo lahko i računski. Jednačba pravca E kao spojnice SM' glasi:

$$\begin{vmatrix} x & y & p \\ 2c_1 & -2c_2 & 3c_3 \\ c_2 + 2c_1 & 8c_0 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Nu buduć da je $c_k = a_k + \lambda b_k$, možemo ovu jednačbu i pisati

$$A\lambda^2 + B\lambda + C = 0,$$

gdje jesu A, B, C linearne funkcije promjenljivica x, y , pa tim je jednačba zamotaljke tog pravca:

$$B^2 - 4AC = 0$$

t. j.: čunjosjek te izvedeni račun pokazuje, da je taj čunjosjek parabolom.

52. Jednačbu čunjosjeka involucije, naime tog čunjosjeka, kojemu je taj promjenljiv trokut tangenata parabole uvijek upisan, naći ćemo, ako u jednačbu srodnosti (62) pišemo:

$$\begin{aligned} p(t_1 + t_2) &= y \\ 2pt_1 t_2 &= x. \end{aligned}$$

¹ Eulerov pravac se javlja ovdje kao sponica pridruženih točaka sličnih projektivskih redova točaka, dakle je njegova zamotaljka parabola. Ovo sledi i odavle: Pravac E presjeca pravce $\Pi_s, \Pi_{m'}, \Pi_h$ u točkah S, M', H tako da je $SH = 2SM'$, odatle opet sledi, da je zamotaljka E parabola.

Sravnaj: *Cremona-Deuwilf Elements de géométrie projective*. Paris 1875. pg. 114 i 115.

Pomnožimo li dakle jednačbu srodnosti sa $4p^2$, te obavimo li ovu substituciju, dobivamo:

$$(3, 2)x^2 - 2(3, 1)xy + 4(3, 0)y^2 + 2p[(2, 1) - (3, 0)]x + \\ + 4p(2, 0)y + 4p^2(1, 0) = 0,$$

gdje je: $(h, k) = (a_k, b_k)$.

Kubička involucija točaka na paraboli.

53. Tri točke parabole stvaraju skupinu kubične involucije na paraboli, zadovoljavaju li parametre tih točaka jednačbi (60). Ovdje bi mogli opet pitati po mjestu težišta tih skupina točaka kubičke involucije na paraboli.

Označimo li sa S'' težište ovake skupine, te sa ξ'' , η'' surednice toga težišta, biti će

$$\xi'' = \frac{2p}{3} \Sigma t_1^2 = \frac{2p}{3} \cdot \frac{c_2^2 - 2c_1 c_3}{c_3^2} \\ \eta'' = \frac{2p}{3} \Sigma t_1 = -\frac{2p}{3} \cdot \frac{c_2}{c_3}.$$
(72)

Je li M'' (α'' , β'') središte kruga opisanoga trojini točaka involucije na paraboli, je

$$\alpha'' = p[1 + \Sigma t_1^2 + \Sigma t_1 t_2] = p \frac{c_3^2 + c_2^2 - c_1 c_3}{c_3^2} \\ \beta'' = -p[\Sigma t_1 \cdot \Sigma t_1 t_2 - \Sigma t_1 t_2 t_3] = p \frac{c_1 c_2 - c_0 c_3}{c_3^2}.$$
(73)

Označimo li sad sa M_1'' središta Feuerbach-ova kruga za trojinu točaka involucije na paraboli, te sa α_2 , β_2 surednice toga središta, biti će:

$$\alpha_2 = \frac{p}{2} [\Sigma t_1^2 - \Sigma t_1 t_2 - 1] = \frac{p}{2} \frac{c_2^2 - 3c_1 c_3 - c_3^2}{c_3^2} \\ \beta_2 = \frac{p}{2} [\Sigma t_1 \Sigma t_1 t_2 - \Sigma t_1 t_2 t_3] = \frac{p}{2} \frac{c_0 c_3 - c_1 c_2}{c_3^2}.$$
(74)

Možemo dakle na temelju oblika navedenih jednačaba kazati: *Mjenja li se trokut, koji je uvijek upisan paraboli te opisan nekomu čunjosjeku, opisuju težište, središta kruga opisanoga, i Feuerbachova kruga tog promjenljivog trokuta parabole.*

54. Ako bi u jednačbi, koja nama kubičku involuciju točaka na paraboli opredjeljuje, falio kvadratički član, t. j. ako bi bilo $a_2 = 0$, $b_2 = 0$ pa tim $c_2 = 0$, imali bi za ove točke $\Sigma t_1 = 0$ t. j. trojine točaka involucije bile bi ujedno trojine nožišta normala. U ovom slučaju mogli bi kazati, uvaživše rezultate članaka 32, 39, 40:

U ravнини parabole P postoji jedna parabola P_1 te vlastitosti, da trokuti nožišta točaka parabole P stvaraju trokute, koje jesu stano-vitomu čunjosjeku opisani. Mjesto središta krugova opisanih tima trokutom je parabola, isto tako je mjesto središta Feuerbachovih kru-gora tih trokuta parabola.

55. Jednačba čunjosjeka kubičke involucije točaka na paraboli dane jednačbom (60) bi dobili ovako.

Pravac, kojega jednačba

$$ux + vy + 1 = 0,$$

presjeca parabolu u dvijuh točkah, kojih parametri su korieni jed-načbe

$$2put^2 + 2pvt + 1 = 0.$$

Sudara li se sad taj pravac sa spojnicom parametra točaka $\overline{t_1 t_2}$ iz skupine kubične involucije na paraboli, moraju vriednosti, koje za kombinacije koriena naime $(t_1 + t_2)$, $t_1 t_2$, iz ove jednačbe dobi-vamo, zadovoljavati jednačbi srodnosti involucije. Naći ćemo¹ ovako kvadratičku jednačbu glede u , v , t. j. jednačbu čunjosjeka u tan-gencijalnih koordinatah.

56. Kao primjer kubičke involucije točaka na paraboli navadjamo sljedeće:

Dani budi pravac

$$ax + by + c = 0.$$

Iz točaka tog pravca spuščamo okomice na parabolu; parametri nožišta dani su sa (33), koju jednačbu uslied gornje jednačbe pi-sati možemo

$$4pbt^3 + 2pbt + c + x(-2bt + a) = 0. \quad (75)$$

¹ Sravnaj čl. 45.

Giblje li se sad točka (xy) po danom pravcu, opredjeljuju skupine nožišta normala promjenljive točke kubičku involuciju točaka na paraboli danu sa jednačbom (75), gdje je x promjenljiv parametar involucije.

Resultati dobiveni prije obćenito mogli bi sad lahko prenesti na taj slučaj, što samo ovdje spominjem.

Izpravak: U ovoj razpravi na strani 113, redku 6. od ozdol, pogrešno je tiskano $\lambda'_3 = \lambda_1 + \lambda_2$ mjesto $t'_3 = t_1 + t_2$. Na istoj strani redku 4. od ozdol tiskano je $(\lambda_1 - \lambda_2) \lambda_1 \lambda_2$ a mora biti $(t_1 - t_2) t_1 t_2$.

Izpravei za razpravu „ θ -krivuljah u ravnini“ u ovoj knjizi.

Strana	Redak	Mjesto	Čitaj
20	9 (ozdol)	$\alpha - \alpha_0$	$\alpha_0 - \alpha$
20	6 „	$s =$	$s = -$
20	3 „	$S =$	$S = -$
22	13	$\frac{\alpha}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
39	5 (ozdol)	$\sin \alpha$	$\sin \alpha d\alpha$
43	6	$\int_{\alpha_0}^{\alpha}$	$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}$
44	1 (ozdol)	I hyperbelfunktionen	Hyperbelfunktionen
46	11 „	$e^{(k+i)}$	$e^{(k+i)\alpha}$
52	14 „	24	25
54	14 „	(p, α)	(u, α)
61	8 „	krivulju	krivulja
64	13 „	$3a^2$	$3\pi a^2$

0 ledenoj dobi sjeverne polutke naše zemlje.

Čitao u sjednici matem.-prirodosl. razreda jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti dne 4. siječnja 1882.

DOPISUJUĆI ČLAN PROF. MARTIN SEKULIĆ.

Ob ovom predmetu jedva bi bio ikada razmišljao, da me nisu neki osobiti odnošaji na to prinukali, osobito me na razmišljanje potaknu razprava g. dra. Pilara razglašena u „Radu“ XXX. Osim toga me je g. dr. Pilar jednom na svečanom sastanku članovah jugoslavenske akademije za moje nazore o ovom predmetu pitao. Priznajem, da sam si onda zamišljao revoluciju na površini naše zemlje usljed razpadnuća onoga planeta, na mjesto kojega se nalaze danas toli brojni planetoidi. I sbilja se može putem mekanike poremećenje slobodnih osih krećućih se planetah ne samo protumačiti, već događaj razpadnuća jednoga planeta upravo zahtieva poremećenje slobodnih osih ostalih planetah. Po što je pako razpadnuće onoga planeta tako hypotetična stvar, da nijedne činjenice nemožemo za vjerovatnost ove hipoteze navesti, to nisam mogao pokraj daljega razmišljanja pri gore rečenomu nazoru ostati.

Prvo nego svoje iztraživanje opišem, imam se osvrnuti na dosad postojeće nazore o ledenoj dobi, i na uzroke iz kojih se na ledeno doba sluti.

1. Geolozi su opazili da se kamenje ogromne veličine na nekih mjestih nalazi, koje niti najmanje srodnosti neima sa kamenjem okolice onoga mjesta, već da je ovim tudjincem domovina više putih prilično daleko. Ob ovom eratičnom kamenju tvrde geolozi, da je samo pomicanjem i puzanjem ledenjakah donešeno u tudje zavičaje.

2. Geolozi tvrde, da se tragovi nalaze po cijeloj Europi, Americi i Aziji, kuda se je led njegda puzao, te doline izrovao i kamenje izlizao.

3. Grönlandija, zemlja danas pokrivena vjekovitim sniegom, bijaše nekadašnji pasnjak i to godine 982. poslije Krsta; ali već godine 1408. bijaše Grönlandija tako sniegom pokrivena, da se tamošnji stanovnici moradoše natrag u Skandinaviju odseliti.

Iz toga zaključuju geolozi, da se sjeverna polutka naše zemlje opet ledenoj dobi približuje.

4. Opazilo se je, da se ledenjaci na Alpah spuštaju sve niže te niže, tako da već danas njeka mjesta zapremaju, gdje pred jedan čovječanski rod leda nebijaše. I ovo se čini geologom razlog, da se naša polutka ledenoj dobi približuje. To ćemo pako dobro zapamtiti, da imade još i danas živih ljudi, koji znadu kazati, za koliko se je led na Alpah spustio.

5. I botanici tvrde da se njeke biljke od sjevera prama jugu sele; dakle bi se i od ovud slutilo, da se sjeverna polutka ledenoj dobi približuje.

Sve ove pojave naumio sam kritično prorešetati, kao što i do sad navedene uzroke o ledenoj dobi. Najprvo ćemo razglabati obstojeće nazore o uzroku ledene dobe.

Pošto se je o toj ledenoj dobi na sve strane uzrok tražio, dodjoše geolozi u najzadnje vrijeme i do toga, da uzrok ledenoj dobi može biti samo u planetarnih odnošajih naše zemlje; i to ako sam dobro razumio, drže jedni uzrokom ledene dobe, pomicanje perihela naše zemlje, drugi ga traže u promjeni ekscentriciteta zemaljske putine, a treći spajaju oba ova uzroka.

Koliko sam radnje ob ovom predmetu pročitao, moram priznati, da me ovi nazori nezadovoljiše, jer sam opazio, da geolozi cielu stvar odviše idealiziraju, te strogom fizikalnom i kritičnom izpitivanju izbjegavaju, samo valjda da sebi zadovolje; nemislim osobno, već tvarno.

Promjena ekscentriciteta:

Iz astronomije poznato je, da se ekscentricitet zemaljske putine svake godine umanjuje za 0.00004299 velike osi. Le Verrier je teoretičnim putem našao da ekscentricitet može narasti do 0.07775. Danas godine 1880. iznaša ekscentricitet naše zemaljske putine 0.01679225 velike osi. Naravno je, da postaje pitanje: koliko je godina trebalo da ekscentricitet spane od 0.07775 na 0.01679225?

Ako razliku ovih dvaju brojeva podielimo brojem, za koji se ekscentricitet svake godine umanjuje, to doznajemo, da prodje 141790 godina dok ekscentricitet naraste od današnje veličine na onu koju je Le Verrier proračunao.

Ovo razdoblje od 141790 god. nestoji za sigurno u nikakovu savez sa pojavom na Grönlandiji, a još manje sa današnjim pužanjem ledenjakah niz Alpe; jer jedan čovječanski život od 100 godina, dapače i pojav na Grönlandiji od skoro 1000 godina izčezava u ništa napram 141 veku.

Nedvojbeno je, da ne samo naša kratka opažanja već i celo historičko doba čovječanskoga života nebi dostatno bilo točno ustanoviti neprekidne promjene jednoga pojava koji traje 141790 godina, jer te bi promjene, kada bi i bile, bile bi tako malene, da bi ih jedva i najtočnijim astronomičnim aparatom pratiti mogli, a ni pošto tako surovim opažanjem, kano što je opažanje pomicanje ledenjakah niz Alpe.

Pomicanje perihela.

Astronomija nas uči, da se perihel uplivom mjeseca i sunca svake godine pomakne za $50.233''$ u okrug, a uplivom ostalih planeta za $11.24''$, dakle sveukupno za $61.473''$.

Na temelju ovoga astronomičnoga opažanja računa se, da perihel treba 20990 godina, dok opuze celu kružnicu. Buduć da duljina perihela za godinu 1880. jest $100^{\circ} 15' 32.47''$: to možemo od ove godine nazad računati vrijeme, kada je u kojoj točki nebeske kružnice perihel bio.

Pošto se je danas perihel odmakao od zimskoga solsticija za $10^{\circ} 15' 32.47''$: to nam daje račun, da je perihel bio god. 1283. u zimskom solsticiju.

Kada pako perihel stoji u zimskom solsticiju, onda sjaje sunce na sjevernu polutku u godini dana za 7 danah i 18 sati dulje nego li na južnu polutku. Iz ovoga se zaključuje, da je u ovo doba sjeverna polutka toplija nego li južna, po što je sjeverna polutka sunčanim zrakam dulje izvržena nego li južna.

Kada perihel dodje u proljetni ili jesenski ekvinokcij, onda je na obe polutke godina jednako razdijeljena.

Kada perihel dodje u ljetni solsticijum, onda je južna polutka 7 danah i 18 sati u godini danah dulje sunčanim zrakam izvržena nego li sjeverna, zaradi toga veli se, da je u to doba južna polutka toplija nego li sjeverna.

Polovicu puta perihelova pada toplina na sjevernoj polutci, a polovicu puta raste, na južnoj polutci je obratno. Računamo li one dane i noći, koje sad jednoj sad drugoj polutci manjkaju, to iznosi na onoj polutci, na kojoj toplina pada za polovicu puta peri-

helova do 142 godinah zime i noći više nego na onoj polutei na kojoj toplina raste.

Iz ovoga se zaključuje, da se na onoj polutei na kojoj toplina pada, mora zametnuti vjekovit led i to tako dugo trajati, dok usljed pomicanja perihela nepočne toplina rasti.

Ova je teorija sbilja posve logično izmišljena, samo nastaje pitanje, je li se ona sa iskustvom slaže; na to pitanje mislim sa sliedećim odgovoriti.

Pogledajmo sada na Grönlandiju. Kako rekosmo bijaše perihel 1283. god. u zimskom solsticiju, dakle sjeverna polutka u najtoplijem razdoblju; nu Grönlandija bijaše 982. god. zelena i napučena, dakle prije 300 god., ako ne i više nego li sjeverna polutka teoretično najtoplija postala. 200 god. poslje toga moradoše stanovnici Grönlandiju radi leda napustiti, te se u Norvežku preseliti (1408).

Pomislimo, da maksimum topline svaki dan nepada uprav na podne, već 2—3 sata kašnje, pomislimo da maksimum godišnje topline nepada na 26. junija već na mjesec srpanj i kolovoz, to mora i maksimum sekularne topline 2—300 godina kašnje one dobe pasti, kada se perihel u zimskom solsticiju nalazi.

Zaradi toga morala bi baš sada u našem vjeku sjeverna polutka najtoplija biti, a ne 300 godinah prije teoretičnoga maksimuma, kako bi to pojav na Grönlandiji pokazivao.

Iz istih razloga nebi se danas ledenjaci niz alpe spuštali, već bi se na svom podnožju uprav taliti morali, te bi jih prama visini nestajalo.

Nazor, što ga prvo izrekoh, da je uprav logičnim putem izmišljen, i koji veli, da je ona palutka toplija na kojoj ljeto i proljetje dulje nego zima i jesen, stoji, kako ćemo sada vidjeti, u protuslovlju sa iskustvom.

Gospodin Ferrel napisao je knjigu izašlu u sjevernoj Americi pod naslovom „Meteorological Recherche pour the use of the coast pilot.“ U ovoj knjizi obradjuje g. Ferrel uz zračni tlak i vjetrove i toplinu na zemaljskoj površini. Na ime on traži iz opažanjah meteorologičkih suvislost topline sa geografičnom širinom, te postavlja jednačbu sliedeće forme

$$t = t_0 + a \cos \varphi + b \cos 2\varphi + c \cos 3\varphi + d \cos 4\varphi.$$

Prispodabljujuć ovu jednačbu sa iskustvom to jest sa meteoro-

logičkim opažanjem po cijeloj zemlji, nalazi Ferrel za nepromjenljive a , b , c , d , sljedeće numerične vrijednosti

$$\begin{aligned} t_0 &= 8.50^\circ\text{C} \\ a &= -1.75 \\ b &= -20.95 \\ c &= -1.00 \\ d &= -2.66. \end{aligned}$$

Na temelju gornje jednačbe i ovih iz iskustva izvadjenih nepromienljivih stavlja Ferrel najposlje integral topline za svaku polutku napose, te nalazi

za sjevernu polutku

$$\int_0^\pi t \sin' \varphi = t_0 + \frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b - \frac{1}{2}c - \frac{1}{15}d = 15.03^\circ\text{C}$$

za južnu polutku

$$\int_0^\pi t \sin' \varphi = t_0 - \frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b + \frac{1}{2}c - \frac{1}{15}d = 16.05^\circ\text{C}.$$

Iz česa sledi, da je sada južna polutka za 0.75°C toplija nego li sjeverna. Ovo dakle pobija sa svim teoriju o perihelu, jer bi, kako malo prije rekosmo, upravo sada morala biti sjeverna polutka puno toplija nego li južna.

Kako je god ona teorija liepo izmišljena, opet neodgovara izkustvu; jer sigurno na toplinu zemaljske površine djeluju drugi faktori, koji su baš onom suprotivni što o pomicanja perihela očekujemo. Po što ovi faktori nadmašuju učinkom one učinke, koji postaju usljed pomicanja perihela, to moramo te faktore držati uzrokom ledene dobe. Koji su to faktori, to ćemo čuti tečajem naše razprave.

Ovim, što sam do sad rekao, mislim da sam objektivno i kritično obrazložio dosadanje teorije o ledenoj dobi, te ujedno i opravdao ono, što sam na početku ove razprave rekao, da me ove teorije ne zadovoljuju.

Pošto ovim niječem postanak ledene dobe iz planetarnih odnošajah naše zemlje, nastojati ću sljedećim na temelju meteoroloških opažanja dokazati, da se ima postanak ledene dobe u vjekovitom talasanju zemaljske kore, daklem u promjenah kopna i mora tražiti.

Prije nego pristupimo dokazivanje ove izreke, moramo točno proučiti iz meteoroloških opažanjah termometričnu toplinu na zemaljskoj površini. Da mi bude to moguće, obratio sam se na ravnatelja centralnog meteorologičkog zavoda u Beču gosp. dr. Hanna sa molbom, da mi pruži što obilniji broj meteoroloških opažanjah. Isti mi je gospodin sa najvećom prijaznosti odmah poslao knjigu od Dovea „Klimatologische Beiträge II.“, u kojoj knjizi nadjoh do 900 meteoroloških stacija posijanih po cijeloj zemlji. Za ove stacije naznačen je geogr. položaj, i opažena mjesečna, četvrgodišnja i godišnja srednja termometrična toplina. Osim toga išao mi je g. dr. Hann u obće tako na ruku, da mu ovdje svoju iskrenu zahvalnost izrazujem.

Toplina na zemaljskoj površini.

Kako sam taj obilati material u ruke dobio, stao sam tražiti ma kakov zakon, po kom se toplina na zemaljskoj površini ravna. Evo rezultata toga moga posla.

U priloženoj slici neka bude $AIAS$ jedan meridian. AOA projekcija ekvatora. S sjeverni a J južni pol. Pravac AT neka znači visinu žive u toplomjeru za srednju godišnju toplinu na polutniku. ab neka znači visinu žive u toplomjeru za geografičnu širinu φ , cd visinu žive za geogr. širinu φ_2 itd. i to sve za srednju godišnju toplinu. Ako tako po cijelom meridianu za svako mjesto naznačimo visinu žive za srednju godišnju toplinu: onda možemo sve skrajnje točke b, d, f jednom krivuljom spojiti, koju krivulju, krivuljom topline nazivljem. Nedvojbeno je, kako narav te krivulje saznadem, da znamo i zakon po kom se toplina sa geogr. širinom ravna.

Da izpitam narav ove krivulje, tražio sam jedan meridian, o kome ima najpouzdanijih i dugotrajnih opažanjah, a taj meridian jest trinaesti od Greenwicha prema istoku, okolo kojega sliedeće stacije leže: Tripolio, Palermo, Napulj, Rim, Mletci, Trst, Plzno, Draždani, Torgava, Potsdam, Berlin, Heinrichshagen, Stralsund, Lund, Karlstadt, Jemteland. Kada sam u prednju sliku visinu žive, koja predstavlja srednju godišnju toplinu za ova mjesta, po geografičnoj širini ovih mjestah pometao, našao sam pokušavajuć, da je krivulja topline skoro kružnica, kojoj je središte u točki C .

Ovaj empirični pokus, koji može i slučajan biti, valja dalje istraživati. Da dokažemo, da skrajne točke žive leže u kružnici, moramo matematički aparat upotriebiti.

U slici vidimo trokut OCd , iz koga sledi po Carnotovu pravilu

$$\overline{Cd}^2 = \overline{Of}^2 + \overline{OC}^2 - 2of \cdot OC \cos \varphi. \quad 1$$

CD je polumjer kružnice, koju držimo krivuljom topline, te ćemo ga zvati ρ . Od je iz dvoje sastavljeno i to iz polumjera poldnevnik $O = a$ i $cd = x$ visine žive za ovu geogr. širinu. Ekscentricitet OC ovih dviju kružnica zovem amplitudom topline za ovaj meridian i bilježim ju slovom E .

Poslje toga prelazi gornja jednačba u sljedeću:

$$\rho^2 = (a + x)^2 - E^2 - 2E(a + x) \cos \varphi. \quad 2$$

Uzdruž pravca OT nalazimo dalje, da je

$$a + AT = \rho + E. \quad 3$$

Buduć da nam $AT = t$ predstavlja srednju godišnju toplinu na polutniku, za koju ćemo odmah dokazati, da je okolo ciele zemlje jednaka, to imamo iz jednačbe 3

$$\rho = a + t - E. \quad 4$$

Ili ako spojenjem jednačbe 4 i 2 eliminiramo olinu ρ , to sledi

$$E = \frac{(a + t)^2 - (a + x)^2}{2(a + t) - 2(a + x) \cos \varphi}. \quad I.$$

Mi smo rekli, da smo pokusom našli da je krivulja topline kružnica, ako je to istina, onda mora olinu E za pojedina mjesta ovoga meridiana istu vrijednost imati; da se o tom osvjedočimo, treba olinu E za pojedina mjesta proračunati, te će nam konačni brojevi pokazati što je na stvari.

Da uzmognemo E za pojedina mjesta računati, treba nam prije nješto razjasniti od ostalih olinah, koje se u jednačbi I. nalaze. Najprije mi je napomenuti, da se ima nedvojbeno srednja godišnja toplina po polutniku saznati, jer u ovoj jednačbi je olinu t kano nepromjenljiva uzeta. Da to podje za rukom, pobrao sam sve stacije okolo polutnika, na kojih su pouzdano opažanja vodjena, te ih u sljedećoj tablici sastavio. Znakovi $+$ i $-$ za geografičnu duljinu i širinu znače, da se ova broji od Greenwichkoga meridiana prama istoku i prama zapadu, po tom od polutnika prama sjeveru i jugu.

Mjesto	φ	ψ	h	Mjeseci												Zima	Proljeće	Ljeto	Jesen	Srednja godišnja toplina	Kako se je dugo opazalo
				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12						
Padang . . .	+0°56'	+100°2'	—	26-46	26-58	26-76	26-80	26-81	26-82	26-49	26-29	26-42	26-26	26-17	26-75	26-60	26-80	26-54	26-29	26-55	7
Banjer-massing . . .	—3°34'	+114°30'	—	26-72	26-87	27-13	27-41	27-53	27-12	26-38	26-66	27-12	27-42	27-16	26-72	26-72	27-36	26-72	27-23	27-01	9
Singapore . .	+1°17'	+103°50'	—	25-66	26-55	27-05	27-13	27-45	27-55	27-61	27-16	27-22	26-82	26-55	26-45	26-22	27-20	27-43	26-87	26-93	3
Amboine . . .	—3°41'	+128°15'	—	26-97	27-07	26-90	26-20	26-22	25-56	25-02	25-21	25-46	26-10	26-77	27-08	27-05	26-41	26-51	26-11	26-21	5
Christianborg	+5°24'	+0°10'	—	27-30	27-62	28-21	28-53	28-31	26-11	25-05	24-32	25-52	26-95	27-65	27-23	27-40	28-35	25-16	26-71	26-90	4½
Para	—1°30'	48°29'	—	26-71	26-04	26-06	26-30	27-00	27-02	27-55	27-45	27-31	27-52	27-71	27-40	26-71	26-45	27-34	27-51	27-00	4½
Georgetown . .	+6°50'	—58°11'	—	25-81	25-74	26-02	26-39	26-26	26-00	27-16	26-71	27-21	27-40	26-88	26-11	25-87	26-23	26-27	27-15	26-39	11
Cayenne . . .	+4°56'	—52°19'	—	26-17	25-47	25-72	26-02	25-92	25-72	25-91	26-27	26-81	26-82	26-52	25-84	25-82	25-90	25-94	26-72	26-10	7½
Palembang .	—2°50'	+104°53'	—	26-49	26-67	27-05	27-87	27-27	26-83	26-69	26-62	27-22	27-16	26-95	26-57	26-57	27-13	26-71	27-11	26-90	5½
Poprieko . . .	—	—	—	26-47	26-51	26-77	26-87	27-19	26-52	26-31	26-27	26-72	26-94	26-93	26-68	36-33	26-87	26-51	26-68	26-66	—

U ovoj tablici znači φ geogr. širinu, ψ geogr. duljinu, h visinu nad morem, koji će se znakovi i u ostalih tablicah pridržati. Brojevi, koji pokazuju kako se dugo opazalo, znače godine.

Iz ovih pouzdanih opažanja, kojim je cijela zemlja po polutniku opasana, vidi se, da je srednja godišnja toplina na polutniku $t = 26.66^{\circ}\text{C}$. Iz te tablice vidi se i to, da je izmedju navedenih mjestah najveća razlika 0.90°C (Para 27.00 i Cayenne 26.10°C). Ova je razlika tako malena, da se na nju obazirati nesmiemo.

Kad smo to ustanovili, imamo još nešto reći o polumjeru pol dnevnika a . Ovaj broj uzeo sam povoljnim, jer sam u istih jedinicah mjerio i visinu žive za pojedina mjesta, s toga razloga dobivamo i E u istoj jedinici. Po što sam slučajno pri prvotnoj konstrukciji uzeo $a = 180$ mm., a istom mjerom mjerio i visinu žive, to sam pri ovom slučajno uzetom broju i u cijeloj razpravi ostao.

Da na temelju jednačbe I. uzmognemo proračunati E za svako mjesto, treba nam samo u ovu jednačbu redom metati opaženu srednju godišnju toplinu, i odnosno geogr. širinu dotičnoga mjesta. Tako računajući dobio sam sljedeću tablicu, u kojoj znači t toplinu dotičnoga mjesta, a broj godina kako se dugo pazilo. Visina nad morem mjeri se metrom.

I m e	φ	ψ	h	t°	n	E
Tripolis	$32^{\circ}50'$	$12^{\circ}5'$	—	20.44	—	33.10
Palermo	$38^{\circ}7'$	$13^{\circ}22'$	—	17.75	62	35.26
Napulj	$40^{\circ}52'$	$14^{\circ}15'$	—	15.49	20	38.18
Rim	$41^{\circ}54'$	$12^{\circ}28'$	—	15.54	26	36.58
Mljetei	$45^{\circ}26'$	$12^{\circ}21'$	—	13.25	20	37.74
Trst	$45^{\circ}39'$	$13^{\circ}46'$	—	14.50	16	34.49
Plzno	$49^{\circ}45'$	$13^{\circ}23'$	981	9.76	21	39.85
Draždjani	$49^{\circ}45'$	$13^{\circ}23'$	360	8.83	15	40.08
Torgava	$51^{\circ}34'$	$13^{\circ}0'$	291	8.94	12	39.28
Potsdam	$52^{\circ}23'$	$13^{\circ}4'$	106	8.30	14	39.52
Berlin	$52^{\circ}30'$	$13^{\circ}3'$	—	9.00	36	38.16
Heinrichshagen .	$53^{\circ}28'$	$13^{\circ}29'$	—	7.50	18	39.74
Stralsund	$54^{\circ}19'$	$13^{\circ}5'$	—	8.07	20	37.84
Lund	$55^{\circ}42'$	$13^{\circ}11'$	—	7.30	50	37.70
Karlstadt	$59^{\circ}23'$	$13^{\circ}30'$	—	6.38	10	32.93
Poprieko	—	—	—	—	—	37.36

Iz ove tablice vidimo, da se amplituda E za razna mjesta mjenja, i da ove promjene nesliede u nikakvom redu, pošto se odnose na geografičnu širinu sad pozitivno sad negativno, a ove promjene imamo samo lokalnim odnošajem pripisati; tako vidimo pri gradovima Berlin i Potsdam, da je za Berlin amplituda manja nego za Potsdam, akoprem su ova dva grada skoro tik jedan drugoga, a tomu je uzrok, što je Berlin veći grad, a u većih gradovima je toplina vazda po nešto veća nego li u okolici. Slično ćemo opaziti pri gradovima London i Greenwich; lokalni upliv vidimo i pri gradovima Trst i Mletci, jer Trstu iza ledja leži kameniti Kras, koji jedan dio svoje topline odsieva prama Trstu, zarad česa je toplina veća u Trstu nego li u Mletcih, a zarad toga ima i amplituda drugu vrijednost.

Ako dakle negledamo na lokalne odnošaje, onda nalazimo u istinu da je krivulja topline za ovaj meridian kružnica. A amplituda ovoga meridiaua je popriečni broj $E = 37.36$.

Što sam ovdje pokazao za trinaesti meridian, to bi mogao i za svaki meridian dokazati, jer sam se u istinu o tom osvjedočio; nu držim, da je suvišno ovdje to dalje dokazivati, a viditi ćemo tečajem razprave još za dva druga meridiaua iste odnošaje.

Na temelju onoga, što do sad rekosmo, možemo sada već sljedeći zakon izreći:

Krivulja topline je za svaki poldnevnik na sjevernoj polutci kružnica; a amplituda topline mjenja se od meridiaua do meridiaua.

Nedvojbeno je sada, da smo u stanju za svako povoljno mjesto na jednom meridianu srednju godišnju toplinu izračunati, samo ako nam je amplituda toga meridiaua poznata, jer za tu svrhu treba samo jednačbu I. po olini x riješiti, a to je

$$x = a - E_x \cos \varphi + \sqrt{(a+t)^2 - 2E_x(a+t) + E_x^2 \cos^2 \varphi}. \quad \text{II.}$$

U ovoj jednačbi znači E_x amplitudu povoljnoga meridiaua.

Kada smo ovako daleko došli, nastaje sada pitanje, kako se amplitude za razne meridiane mjenjaju sa geografičnom dužinom.

Da ovo pitanje uzmognem riješiti, morao sam za nekoliko meridianah amplitudu proračunati, te onda tražiti zakon, po kom amplituda sa geogr. dužinom raste ili pada.

Pri tom iztraživanju našao sam, da amplitude neprekidno od Greenwichkoga meridiaua svedjednako prama istoku i zapadu rastu.

Da vidimo, kako se to sa izkustvom slaže evo ovdje umećem dve proračunate tablice za Greenwichki meridian, i za neworleanski, koji teče skoro sredinom Amerike.

Za Greenwichski meridian.

M j e s t o	φ	ψ	h	t	n	E
Oran	35°44'	0°41'	49	17 00	12	41 77
Saintes	45°44'	0°39'	26	15 36	2½	32 23
Rochelle	46°9'	1°10'	23	11 68	7	39 82
Poitiers	46°35'	0°21'	126	11 73	10	40 45
Isle of Wight . .	50°45'	1°20'	—	10 24	10	37 76
Greenwich	51°29'	0°0'	47	8 94	79	39 38
London	51°30'	0°5'	—	10 46	49	36 51
Boston	52°48'	0°5'	—	9 50	29	36 90
York	53°51'	1°5'	—	9 32	12	36 14
New Malton . . .	54°8'	0°44'	25	8 66	8	37 00
Kinfaus	56°13'	3°19'	42	8 28	27	35 44
Aberdeen	57°9'	2°3'	15	9 55	8	32 80
Stromnes	58°57'	3°18'	—	7 98	12	33 60
Sandwich	59°5'	3°17'	—	7 90	29	33 60
Unst	60°45'	1°1'	—	7 05	3	33 49
Poprieko	—	—	—	—	—	36 45

Za Neworleanski meridian.

M j e s t o	φ	ψ	h	t	n	E
Rivas	11°15'	86°15'	—	25 16	nije rečeno	57 74
New Orleans . . .	29°59'	90°0'	—	19 77	„	58 99
Memphis	35°8'	88°0'	—	15 98	3	48 46
St Louis	38°37'	90°16'	—	13 27	24	50 01
Muscatine	41°26'	91°5'	1 7	9 26	16	54 96
Beloit	42°30'	89°4'	240	9 71	6	52 05
Millwaukee	43°4'	87°57'	189	8 02	8	53 06
Poprieko	—	—	—	—	—	53 61

Ova dva karakteristična meridiana moradoh navesti, jer iz ovih dvajuh meridianah može se izvesti amplituda za svaki povoljni meridian 90^0 stupnjeva od Greenwicha prama istoku i zapadu po sliedećoj formuli, koju sam sastavio iz svih proračunatih amplitudah.

Ako E_x znači amplitudu za povoljni meridian, E_o amplitudu za orleanski, a E_g amplitudu za Greenwichki meridian, najposlje ψ geografičnu širinu povoljnoga meridiana: onda naša formula glasi ovako

$$E_x = E_o - (E_o - E_g) \cos \psi \quad (\text{III.})$$

Ovu empiričnim putem postavljenu jednačbu možemo na razni način verificirati; i to ako proračunamo amplitudu jednoga meridiana, za koji je već amplituda drugim načinom poznata, dalje ako na njezinu temelju proračunamo toplinu za povoljna mjesta na naznačenom prostoru, te ako tim uvjetom zadovolji, onda ju valjanom držati možemo. Najposlje možemo na temelju ove jednačbe i jednačbe I. isoterme proračunati, te se ošvjedočiti, da li se ove isoterme slažu sa onima, koje su po Doveu povučene.

Verifikacija jednačbe III.

1. Najprvo ćemo po ovoj jednačbi izračunati amplitudu trinaestoga meridiana, koju smo već drugim načinom našli. Po ovoj jednačbi biti će amplituda trinaestoga meridiana istočno od Greenwicha

$$E_{13} = 53\ 61 - [53\ 61 - 36\ 45] \cos 13_0$$

Od ovud sledi $E_{13} = 36\ 89$, po prijašnjoj tablici imamo $E_{13} = 37\ 36$ dakle je razlika $0\ 47$. Ova je razlika tako malena, da se njezin upliv na toplinu povoljna mjesta ovoga meridiana tekak u drugoj desetinki pokazuje, dakle puno manje iznaša nego li moguće pogreške pri opažavanju toplomjera.

2. Sada idemo proračunati toplinu jednoga mjesta u srednjoj Aziji iz amplitude greenwičkoga i neworleanskoga meridiana; a to možemo jednostavno, ako metnemo u jednačbu II. mjesto E gornji izraz iz jednačbe III. Onda sledi

$$\text{IV. } x = a - [E_o - (E_o - E_g) \cos \psi] \cos \varphi + \\ + \sqrt{(a+t)^2 - 2(E_o - (E_o - E_g) \cos \psi)(a+t) + [E_o - (E_o - E_g) \cos \psi]^2 \cos^2 \varphi}$$

Grad Barnaul leži u srednjoj Aziji, njegove su geograf. koordinate $\varphi = 53^0 20'$ a $\psi = 83^0 27'$

Ako u gornju jednačbu pomećemo vrijednosti poznatih olinah, tada sledi

$$x = 0.33^{\circ}\text{C}$$

kano srednja godišnja toplina ovoga mjesta.

Na ovom se mjestu opažava toplina već ima 30 godina, i to za prvih 19 godina iznosi srednja godišnja toplina 0.25°C , zadnjih 11 godina premješteno je pazilište, te se opažava toplina sa registrirajućim nastrojem, koji svaki četvrt sata bilježi meteorološke pojave, za ovih 11 godina pokazuje nastroj kano srednju godišnju toplinu 0.46°C . Računom nadjen broj leži medju ova dva broja, te se od njihove sredine razlikuje samo za 0.03°C . Pogreška tako malena, da o njoj govora više biti nemože.

3. Grad Zagreb. Njegove koordinate su $\varphi = 45^{\circ}49'\psi = 16^{\circ}$, visina nad morem $h = 144$ *m*. Polag jednačbe IV. sledi za Zagreb $x = 13.30^{\circ}\text{C}$.

Nalazim za Zagreb u izvješću meteorol. centr. zavoda u Beču od godine 1868. srednju godišnju toplinu $t = 9.71^{\circ}\text{R} = 12.14^{\circ}\text{C}$. Buduć da Zagreb nad morem leži 144 *m*, to dolazi kao popravak zaradi visine nad morem gornjoj toplini još 0.89° pribrojiti: po tom je srednja godišnja toplina grada Zagreba na morsku površinu reducirana $t = 13.03^{\circ}\text{C}$. Naš račun daje 13.30, dakle je razlika 0.27°C , iz koje se sigurno na nevaljanost naše teorije zaključiti nesmiје.

Ja mislim, da sam već i sa ovim podpuno dokazao, da se naša teorija podpuno ili barem toliko, koliko svaka dobra teorija sa izkustvom slaže. Pošto pako nam za svrhu naše razprave treba pregled topline na cijeloj površini naše zemlje, ili barem na onom dielu, koji na naše glavno iztraživanje o ledenoj dobi sjeverne polutke spada: to ću u tu svrhu i ujedno kano verifikaciju naših jednačbah proračunati isoterme, te ih staviti u jednu kartu, a njeke glave prisposodobiti sa onima, koje su već po drugih vještacih ustanovljene.

Računanje isotermah nije ništa drugo, nego algebraička i aritmetička operacija sa našom jednačbom IV.; jer ona nosi u sebi sve elemente, o kojih toplina na površini onoga diela naše zemlje, na kojega smo do sad iztraživanja protegli, i to 90° geogr. širine od Greenwicha prama istoku i prama zapadu. Ovu četvrtinu površine naše zemlje zovem prednjom polovicom sjeverne polutke, drugu četvrtinu zadnju polovicu.

Isoterme imaju se ovako računati. Po što je toplina isoterme poznata, to moramo koordinate svih onih točaka tražiti, koje istu toplinu imaju, budući da su dvie koordinate a jedna jednačba, dakle moramo jednu koordinatu poznatom uzeti, te onda točku tražiti u kojoj ju druga koordinata sječe. Rješenje naše jednačbe po koordinati ψ jest jednostavnije, zaradi toga uzimljemo geografičnu širinu kao poznatu, te ćemo za svaki drugi meridian tražiti prosjek sa drugom koordinatom.

Riešivši jednačbu IV. po olini ψ sledi

$$\cos \psi = \frac{E_o}{E_o - E_g} - \frac{(a+t)^2 - (a+x)}{2(E_o - E_g)(a+t) - 2(E_o - E_g)(a+x) \cos \varphi} \quad \text{V.}$$

Računanje po ovoj jednačbi nije tako tegotno, kako bi se na prvi pogled mislilo; jer kad se umetnu numerične vrijednosti za pojedine poznate oline, prelazi formula u sljedeću jednostavniju

$$\cos \psi = 3.1242 - \frac{42708 - (180 - x)^2}{7092 - 34.32(180 - x) \cos \varphi} \quad \text{V.a}$$

Na temelju ove jednačbe proračunao sam isoterme za prvu polovicu sjeverne polutke od -25°C do $+25^{\circ}\text{C}$. No u priloženu kartu, koja ima posebnu svrhu protezati se samo na naslov ove razprave, unesao sam isoterme od 25°C do $\pm 0^{\circ}\text{C}$. Pokraj toga proračunao sam isoterme i za drugu polovicu sjeverne polutke sa nekom malom promjenom naše jednačbe, te sam i te isoterme unesao u kartu, jer mi se čini, da je već sad zanimivo znati nešto o toplini okolo sjevernoga pola, ujedno sam unesao u kartu na mnogo mjestah srednju godišnju toplinu, da se već sad može valjanost proračunatih isotermah može prosuditi.

U ostalom ću proglasiti u posebnoj djelu kartu za sve isoterme sjeverne polutke, kako mi vrijeme dopusti ovo djelo dokončati.

U sljedećoj tablici su proračunane koordinate u karti unešenih isotermah.

Koordinate isotermah.

— 25	φ	90	86°	84°	82°	80°	79°	77°56'	—	—	—	—	—
	ψ	60°44'	69°51'	74°35'	79°36'	84°31'	87°07'	90	—	—	—	—	—
— 20	φ	90	88°	86°	84°	82°	80	78°	76°	74°	72°53'	—	—
	ψ	44°37'	49°51'	54°57'	60°02'	65°03'	70°16'	75°33'	80°37'	86°42'	90	—	—
— 15	φ	90°	89°	88°	86°	84°	82°	80°	78°	76°	74°	72°	70° 67°
	ψ	19°46'	24°25'	28°31'	35°41'	42°05'	48°04'	53°51'	59°34'	65°16'	71°00'	76°57'	83°02' 90°
— 10	φ	84°11'	84°	82°	80°	78	76°	74°	72°	70°	68°	66°	64° 62°44'
	ψ	0°00'	6°4'	22°15'	31°28'	39°09'	46°05'	52°40'	59°04'	65°28'	71°56'	78°34'	85°39' 90°
— 5	φ	76°29'	76°	74°	72°	70°	68°	66°	64°	62°	60°	58°	57°31' —
	ψ	0°00'	11°02'	25°38'	35°15'	43°27'	51°00'	58°17'	65°28'	72°45'	80°15'	88°03'	90° —
0	φ	68°44'	67°	66°	65°	64°	62°	60°	58°	56°	54°	53°	52°07' —
	ψ	0°00'	22°06'	29°53'	34°28'	40°28'	47°52'	56°39'	64°51'	73°06'	81°37'	89°59'	90° —

Pošto smo na ovaj način stvorili našim računom glavni pregled topline na prednjoj polovici sjeverne polutke, to možemo ovdje još prisposodobiti isoterme proračunane sa toplinom pojedinih stacija, koja su na našoj karti crvenom bojom brojkami označena; ujedno sam unesao zelenom bojom Doveovu isotermu $x = 0^{\circ}\text{C}$. Ovu isotermu možemo prisposodobiti sa proračunanom. Tom sgdodom vidimo, kako se Doveova isoterma na istočnoj obali sjeverne Amerike iz-

bača prama jugu, isto tako okolo istočne obale južne Grönlandije: tim izbočinam je uzrok ledena morska struja, koja ove obale polieva, te se ima u lokalne odnošaje pisati. Dalje vidimo, da se Doveova krivulja izmedju Islandije i Skandinavije izbača prama sjeveru. Za što je Dove ovu krivulju ovdje tako jako izbočio, to mi nije poznato, jer na ovom mjestu kano na moru nema nikakvih meteoroloških opažanjah, barem takovih makar vodjenih i na ladjah nenadjoh u njegovoj knjizi. Slično se opažava veća izbočina i na skandinavskom poluotoku, koja je prama jugu od već snižena, jer prama sjeveru leži Tornea sa $-0^{\circ}52'$, blizu koga grada ova bi Doveova isoterma prolaziti morala. U ostalom se obe krivulje dostatno slažu.

O toplini na površini sjeverne polutke mislim da smo sljedeće nedvojbeno ustanovili:

1. Zapadne obale velikih kontinentah na sjevernoj polutci su najtoplije, a tomu je sljedeći razlog. Svaka struja, bila zračna bila vodena, koja potiče od polutnika prama sjeveru, dobiva usljed vrćenja naše zemlje od zapada prama istoku smjer, koji odgovara jugozapadu, usljed toga mora i toplija od polutnika tekuća voda zapadne obale polievati, na suprot tomu teče svaka od sjevera prama polutniku tekuća struja smjerom sjevero-istočnim, dakle polieva istočne obale kontinentah. Ovo potvrđuje iskustvo.

2. Sredina velikih kontinentah je najhladnija.

3. Toplina pada od polutnika prama sjeveru, sa geografičnom širinom. Krivulja topline je kružnica.

4. Toplina pada od najtoplijega meridiana prama sredini kontinentah po jednostavnom zakonu.

Pošto smo ovim načinom ustanovili odnošaje topline na zemaljskoj površini, možemo sada tražiti uzrok ledenoj dobi u promjeni zemaljske površine; jer kako vidimo nedvojbeno stoji, da je toplina zemaljske površine jedino zavisna o njezinoj konfiguraciji.

Na tom temelju opažavamo, da je od velikoga upliva na toplinu kopna svako more, koje se proteže od polutnika prama sjeveru, jedno, što prenosi svojom strujom toplu vodu od polutnika prama sjeveru, drugo, što prenosi ekvatorialnu toplinu u vodenih parah zatajenu prama zapadnim obalam kontinentah. Vodene se pare kondensiraju skoro odmah kako se kopna dirnu, te puštaju zatajenu toplinu, te tako čine zapadne obale toplije. To vidimo jasno na kartah, koje nam pokazuju oborine. One su najjače u Europi po

Englezkoj, Škotskoj i Skandinaviji, a u Americi okolo otoka Sitke, po kojih mjestih je razmjerno i najveća srednja godišnja toplina.

Kada smo ovo sve ovako razjasnili, prelazimo tražiti uzrok ledenoj dobi na ovom temelju.

Hipoteza.

Na mjesto današnjega atlantičnoga oceana morao je biti u ledeno doba jedan kontinent, ili barem taki savez između Afrike ili Europe sa Amerikom, da niti topla morska struja, nije mogla do sjeverno-zapadnih obala Europe dopirati, niti su se mogle vodene pare zrakom dolazeć na današnjih mjestih kondensirati, već puno južnije i valjda okolo Pyreneah.

Vjerovatnost ove hipoteze:

1. Platon pripovieda, da je u današnje atlantično more potonula zemlja Atlantis zvana.

2. U ovo pripoviedanje vjeruje i vjerovalo je više učenih ljudi, naime Buffon, po tom francuski astronom Bailly, koji u svojoj knjizi „Histoire de l'ancienne astronomie“ predmnieva, da su stanovnici ove potonule zemlje morali uzobraženi biti, te da je od njih kultura na Egipćane prešla.

3. Strabo kaže: Promjena medjah između kopna i mora ima se pripisati snizivanju i podizanju zemaljske površine, a ne silnim poplavam. Strabo veli: Tim promjenam nisu podvrženi manji ili veći otoci, već cijeli kontinenti.

4. Humboldt veli ovako doslovce u svom kosmosu: „Dass die Hebung der Kontinente eine wirkliche Hebung, nicht bloss eine scheinbare der Gestalt der Oberfläche des Meeres zugehörige sei, scheint nach einer jetzt allgemein verbreiteten Ansicht der Geognosten, aus langen Betrachtungen der Thatsachen, wie aus der Analogie wichtiger vulkanischen Erscheinungen zu folgen“ na drugom mjestu „Sinken und Steigen des festen oder flüssigen in ihrem einseitigen Wirken so entgegengesetzt, dass das Steigen des einen, das scheinbare Sinken des andern hervorruft — sind die Ursache aller Gestaltsveränderungen der Continente.“

5. Snizivanje i podizanje kopna i mora opažavamo danas tako jasno na Skandinavskom poluotoku.

6. Vulkani po centralnoj Americi, na kapverdičkih i kanarskih otocih, zatim na Islandiji i otoku Mayenu, pokazuju, da još i danas

pod Atlantičnim oceanom njeke silne promjene biti moraju, a isto tako i potresi, kojih je krug djelatnosti u Humboldtovu Kosmosu naznačen, protežu se većinom na atlantični ocean, te odjekuju kano onaj Lisabonski tja na američanske obale.

Svi ovi vulkani i potresi stoje u uzkom savezu sa potonulim kontinentom, te se daju veoma lako na temelju mehanike kao posljedica na lavu slegle se zemaljske kore protumačiti.

Iz svega ovoga sliedi, da naša hipoteza njeku vjerovatnost u sebi nosi.

Ja mislim, da će svatko morati spoznati, nakon ovoga što sam rekao, da kontinentalna sveza staroga i novoga svijeta mora biti od velika upliva na meteorološke odnošaje ovih kontinentah, naime Europe.

Potonuli kontinent Atlantis nemoramo si za ovu svrhu Bog zna kako velik predstavljati, da navedene meteorološke promjene pro-uzrokuje; treba samo da zabrani toploj ekvatorialnoj struji prelaziti četrdeseti stupanj geograf. širine, a ujedno toliku širinu od juga prama sjeveru imati, da se vodene pare od polutnika tekuć na njegovih visočinah kondensirati moraju; tako da sjeverni dio atlantičnoga oceana ostane bez upliva na meteorološke odnošaje, kako je to danas sjeverno njemačko more i baltički zaljev.

Sada ćemo približno proračunati upliv toga kontinenta na toplinu prednje polovice sjeverne polutke, ja rekoh približno, jer nemamo nikakvih podataka za točan račun; ali mislim, da će nam se tim približnim računom barem pokazati slika toga upliva, jer inače nebi imali pojma od toga upliva.

Kada bi nam ma i jedna amplituda iz one dobe poznata bila, mogli bi i posve točno upliv toga kontinenta na ostalu površinu proračunati, budući pako da to nije, to neostaje drugo nego si misliti, da toplina od zapadne američanske obale, koju je u ono vrijeme valjda polievala topla struja mirnoga oceana kano i danas, pada po istom zakonu prama sredini sjedinjenoga staroga i novoga svijeta. Na temelju tome mislimo si da je amplituda topline na neworleanskom meridianu u ono doba bila ista, koja je i danas, jer ju označuje zapadna obala Amerike; od toga meridiana morala je toplina prama Greenwichkom meridianu padati, a mi mislimo, da po istom zakonu: dakle možemo amplitudu Greenwichkoga meridiana proračunati.

Danas je razlika amplitudah između neworleanskoga i greenwichkoga meridiana $53^{\circ}61' - 36^{\circ}45' = 17^{\circ}16'$. Recimo, da je u ono

doba Greenwichka amplituda bila za ovu razliku veća od neworleanske, onda je Greenwichka amplituda iznosila $E_g = 70.77$.

Ako nam je na ovaj način greenwichka amplituda poznata, onda možemo na temelju jednačbe V. isoterme za ono doba proračunati. Usljed promjene amplitudah ima se ona jednačba sada ovako pisati

$$\cos \psi = \frac{E_g}{E_g - E_o} = \frac{(a+t)^2 - (a+x)^2}{2(E_g - E_o)(a+t) - 2(E_g - E_o)(a+x) \cos \varphi} \quad \text{VI.}$$

$$\text{ili} \quad \cos \psi = 4.1242 - \frac{42708 - (180+x)^2}{7092 - 34.32(180+x) \cos \varphi} \quad \text{VI.a}$$

Na temelju ove jednačbe proračunao sam koordinate isotermah $x = 0$, $x = -5$ i $x = -10$; te ih u sljedećoj tablici naznačio. Pošto su i ove isoterme za ono doba samo približne, to bi bio uzaludni rad, kada bi i dalje isoterme za ovo doba računao bio. Ove sam samo zato proračunao, da dobijemo pregled topline za ono doba, i iz toga pregleda možemo na ledeno doba zaključiti.

—	φ	72°53'	70	68°	66°	64°	62°	60
10	ψ	0°	32°22'	43°17'	52°49'	61°41'	70°19'	79°1'
—	φ	62°44'	61°	60°	58°	56°	54°	52°
5	ψ	0°	27°38'	35°14'	47°42'	58°44'	69°14'	79°41'
0	φ	52°07'	51°	50°	48°	46°	44°	41°58'
	ψ	0°	24°49'	34°41'	50°10'	63°43'	76°33'	90°

Ove sam koordinate unesao u priloženu kartu, te isotermu $x = 0^\circ\text{C}$ naznačio modrom bojom, a ostale dvije istom bojom situo natočkao.

Iz ove karte vidimo da isoterma srednje godišnje topline $x = 0^\circ\text{C}$ prolazi sjevernom Spanijom po prilici po Pyreneih, onda južnom Francuskom i srednjom Italijom kroz sredinu Hrvatske i Magjarske, te prelazi povrh crnoga mora u Aziju.

U ovome slučaju bila je dakle po ovih mjestih srednja godišnja toplina upravo onaka kakva je danas po južnoj Sibiriji. Nije dakle nikakovo čudo, da se je vjekoviti led ne samo po gorah srednje Europe prostirao, već je i po nizinah sjeverne Njemačke ležati morao većinom godine, pošto ovuda prolazi isoterma $x = -5^\circ\text{C}$, iz česa sledi, da su u ono doba sjevero-njemačke tundre bile u istih klimatičnih odnošajih, u kojih su danas one okolo ušća rieke Ob.

Ovim dobivamo pojam o klimatičnim odnošajih u onom slučaju, ako bi stari svijet bio sa novim u kontinentalnoj svezi, a nedvojbeno sliedi iz ovoga cieloga iztraživanja, da ledeno doba prednje sjeverne polutke imamo tražiti ne u planetarnih odnošajih, već u promjeni zemaljske površine. Nelaskam si najmanje, da sam ovom razpravom ovo pitanje nedvojbeno riešio, već mislim, da sam strukovnjake i vještake na ovo pitanje upozorio, i da je vrijedno isto i dalje rešetati, ujedno se nadam, da će vještijemu nego sam ja poći za rukom ovo pitanje jasnije riešiti.

Na ovom istom temelju veoma je lako pojav na Grönlandiji protumačiti. Da Grönlandija opet zelenom postane, netreba drugo nego morsko dno u Davisom prolazu tako podignuti, da se ledena morska struja preko ovoga klanca nemože izlievati u atlantički ocean, te da neodbija one tople struje koja uprav na južnu Grönlandiju smiera; mogućnost, da se je zemaljska kora na ovom mjestu slegla, te ledenu struju propustila, stoji izvan pitanja, kada promislimo, kako se još i danas kopno i more mienja, i gdje cieli otoci izčezavaju a novi se zameću; dapače treba samo da Baffinov zaljev tako jako zamrzne, da se od ovud oni ledeni bregovi otiskivati nemogu, pak će biti labradorska i grönlandska zemlja toplija.

Deset dana u Djakovu.

OD STJEPANA SCHULZERA MÜGGENBURŽKOGA.

(Predano u sjednici matematičko-prirodoslovnoga razreda jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti 15. listopada 1881.)

„Posjetite me u Djakovu, okolica će vam se dopasti!“ glasio je prijatni oproštaj, kad sam se njekoč u Vinkovcih Njegovoj Preuzvišenosti, našem veleštovanomu crkvenomu pastiru i pokrovitelju najvišega znanstvenog zavoda u domovini, poklonio i njegov si blagoslov izprosio. — Taj poziv bje nastupom nove godine milostivo opetovan.

Buduć da si ja svojom zadaćom smatram, da odkrijem našu domaću floru gljiva, koja je u pravom smislu rieči „terra incognita“, jer se prije mene još nikada stopa ikakvoga mykologa ovoga tla taknula nije: nastojao sam, da si za taj pohod i najzgodnije vrijeme odaberem, i tako 9. rujna prošle godine u Djakovo prispjeh.

Što mogu više ob ondje probavljenih dnevi reći, nego da spadaju medju najsretnije moga života! Gostoljubje u djakovačkoj biskupskoj residenciji tako je sve obće poznato, kao što su traci sunčani; a da onu nježnu pažljivost na sve moje želje i potrebe osobe moje, koja mi se je sa svih strana, tja do onog momka, kojega mi kano poslužnika dodieliš, izkazala, samo od prilike nactam, zato mi je pero preslabo. To zahvalno srdce moje ćutiti može, ali sve to izreći ili napisati nemogu.

Okolica je djakovačka vinkovačkoj slična. Ista ona valovita naplovina, samo nješto viša; javnocvietke, poimence stabalje, je u glavnom isto. — Samo onaj liepi, prostrani, uzorito uredjeni perivoj sa raznovrstnimi biel- i crnogoricami mogaše gljivam nješto nova obećati.

Nu medju ine mnoge čudnovate tajne gljiva spada i to, da se gdjejoja vrst samo na nekome stanovitom, često veoma stegnutom

mjestancu nalazi, dočim je po celom, inače prividno posve istovjetnom okolišu neima; a povrh toga još i to, da mnogobrojne vrsti često po godine, deset godišta, a i duže sasvim izostaju, pak onda opet svojim pojavom iztražitelja iznenade.¹ — Ja se dakle ni najmanje nezaplašen latih potraživanja, te ću ovdje sve one gljive, što sam ih za deset dana, bud sam našao, bud mi ih drugi donieli, navesti.²

Kao što je rečeno, sastoji se zadaća preostalih mi dana života u tom, da od naših gljiva toliko odkrijem, koliko mi bude dosuđeno, drugim riečmi: da na svojem drugom velikom, slikami providjenom djelu: „Formen des Pilzreiches aus Slavonien“, koje danas 1196 vrsti sadržaje, dotle radim, dok mi to bude moguće. — One vrsti, koje su u spomenutom vremenu u okolici djakovačkoj nadjene,³ i koje su za ono djelo nove, označiti ću zvjezdicom, a one, koje su za mykologiju u obće nove, priobćiti ću sa potpunom diagnosom.

P. znači perivoj; N. njivu; G. gaj; K. kuću, gdje još spomenuti moram, da sam šumu, koju zovu „gaj“, samo jedanput pohodio.

1. *Ustilago Maydis* (DC) Fr. N.
2. *Cystopus Bliti* (Bivon) Lév. P.
3. *Caeoma* (Uredo) *flavum* Bonord. P.
4. „ *Helioscopiae* Schlchtd. P.
5. „ *Leguminosarum* Lnk. var. *Trifoliorum* DC. P.
6. „ (*Epitea*) *aurea* Bon. P.

¹ Valjda je najčudnovatiji meni poznati primjer *Agaricus* (nunc *Lentinus*) *hispidosus* Scopoli, što ga je ovaj istinu ljubeći pisac u Kranjskoj našao, opisao i naslikao. Sto je godina međjutim prošlo, da te gljive nije nitko nigdje opazio. Posljedicom bijaše: da se je ta vrst napokon iz svih knjiga izpustila, pak tek u zadnjem djelu dr. Friesa pojavljuje se opet, jer je slučajno meni sreća prijala, te sam ju iz nova našao.

² Osim g. dvorskoga kapelana i ceremoniara Mija Čepelića, koji se, kao što je poznato, pomologijom, lepidopterologijom i javnoevietkami uspješno bavi, a sada i gljivam svoju pozornost obraća, osvrtahe se i drugi na nje, dapače i nježne ručice izkazaaše znanosti čast, donajšući mi, što bi našle.

³ To se neima tako razumjeti, kao da sam ja sve one vrsti, koje su za moje djelo nove, na mjestu iztražio, naslikao i opisao. Tomu nedostaje deset dana. Tako sam samo sa prolaznimi gljivami postupao, a jače sam gljive samo sa potrebnimi bilježkama providio, kući ponio i ondje ih još duže vremena proučavao.

7. *Uromyces Phaseolarum* dB. P.
8. *Phragmidium bulbosum* Schlecht. P.
9. *Sporidesmium Eremita* Cda. P.
10. *Torula Albuginis* Schlzr var. *Cucurbitae* N.
11. *Oidium fructigenum* Ehrb. P.
12. *Penicillium glaucum* Lnk. K.
13. *Sepedonium mycophilum* Lnk. G.

14. *Sporotrichum cinereum* n. sp. Hyphis ramosis, insepatis repentibus, intricatis; conidiis globosis, 0.0015—0.002 mm. in diam.

Ovu mi gljivu donese velečastni gospodin Josip Vallinger, biskupski tajnik, konsistorijalni prisjednik, kod kojeg na crnilu kožnatu pepeljastu koru sačinjavaše.

15. *Mucor Mucedo* Fresen. K.

16. *Coryneum betulinum* n. sp. Receptaculum seu stroma primo epidermide tectum, deinde transverse erumpens et epidermide elevata cinctum, extus nigrum, intus brunneum; conidiis disco immersis, e strato hymenico crassiusculo oriundis, fusiformibus, 1—5 septatis, 0.016—0.04 mm. longis, 0.009—0.014 mm. crassis, fuscis, stipitibus hyalinis, ramoso-filiformibus, usque 0.04 mm. et parum ultra longis. In ramis aridis Betulae albae. Saepissime sterile. Sept. P.

Ova se gljiva sa Cordinom slikom od C. disciforme Kuze et Smdt na hrastovih i brezah, što se ustrojstva tiče, slaže, ali predstavlja okruglu ploču sa izrežanim rubom; moguće je ipak, da ta gljiva na hrastovih u tom, na brezah pako u eliptičkom obliku niče; to bi trebalo još dokazati.

17. *Trichoderma viride* P. P.

18. *Cytispora Salicis babilonicae* n. sp. Sacculis nigris, plerumque irregulariter multilocularibus, rarius simplicibus; spermatiis cylindraceis, saepe curvulis, hyalinis, 0.003—0.004 mm. longis, parum ultra 0.001 mm. crassis. In ramulis emortuis adhuc pendentibus Salicis babilonicae. Sept. P.

Jednostavni posudički oblik nalazi se najčešće na najtanjih grančicah, te naliči posvema posudici (*Perithecium*) *Calosphaerije* br. 22, ali je znatno manji, s toga se dakle nemože pretpostaviti, da si *Cytispora* kućice *Calosphaerije* prisvaja. Baš usuprot ja mislim, da su obe različiti oblici *jedne te iste* gljive, da se naime kličući trus od *Calosphaerije* ondje, gdje substrat (tlo) za proizvodjanje kesičnog oblika prikladan nije, ili kakve druge za to neprikladne okolnosti vladaju, kao *Cytispora* oplodjuje.

Do toga sam zaključka došao promatrajuć odnošaj obitavanja obih tih gljiva. Na debljem kraju grane nalazi se izključivo i u značajne hrpe skupljena *Calosphaeria* (vidi 22); čim se pako grana više tanji, pokazuju se u sve većem broju individua *Cytisporae* sa prijašnjom pomiješana, a poredanja *Calosphaerie* na hrpe malo po malo nestaje, dok ih napokon na najtanjih grančicah više niti neima, na kojih lih *Cytisporae* stanuju.

19. *Phragmotrichum gigasporum* n. sp. Peritheciis mox liberis, infra globosis, superne in collum brevem abeuntibus, 0.5—0.57 mm. latis, 0.6 mm. altis, nigris, corneis 0.05 mm. crassis, demum dehiscentibus et dilabentibus. Sporae concatenatae, inaequali-fusiformes, plerumque ventricosae, utrinque plus minusve acuminatae, 0.034—0.08 mm. longae, in medio 0.019—0.027 mm. crassae, primitus dense cincinnato-pilosae, demum glabrae, obscurissimae. Subsparsim ad cortices Populorum pyramidalium vetustarum, diu prostratarum. Sept. P.

Da li trus imade pregradke (Septa), toga za vrijeme iztraživazja nisam više mogao razlučiti, jer su truske već posvema dozrele i pod vodom neprozirne bile. Usuprot zamietio sam izmedju krhkoga, lomnoga, bezbojnoga episporija i endosporija uzak, prividno prazan prostor, rek bi neki svietli rub oko zadnjega, koji u ostalom sa omotom drhćenine kod trusa Massarije ništa zajedničkog neima.

20. *Erysiphe communis* var. *Convolutacearum* Link. P.

21. *Valsa* (*Euvalsa*) *betulaecola* n. sp. Stroma valseum, sub epidermide nidulans, parenchymati corticis interioris immersum, ab ejus substantia parum mutata infuscata compositum, friabile, subinde sterile. Peritheciis in quoque stromate paucis, saepe tantum singulis, monostichis, atris, corneis, subsphaeroideis, ad basin quandoque applanatis aut impressis, 0.3—0.55 mm. latis, cum ostiolo 0.5—0.65 mm. altis; ostiolis cylindraceutis, 0.07—0.15 mm. crassis, 0.2—0.3 mm. longis, nec prominulis. Asci cylindraceuto-clavati, subsessiles, 8spori, 0.086—0.092 mm. longi, 0.013—0.014 mm. crassi. Paraphyses nullae. Sporae cylindraceutae, saepe curvulae, 0.016—0.036 mm. longae, 0.004 mm. crassae, hyalinae, irregulariter guttulae.

Ad ramos dejectos Betulae albae. Sept. P.

Neslaže se dosta sa nijednom vršću *Valsah* na brezah, što ih je Nitschke u tolikom broju naveo. Odnosajja, bud srodnoga, bud protivničkoga, izmedju ove Valse i *Coryneuma* br. 16, što sam ga na istoj grani našao, nisam mogao naći.

22. *Calosphaeria Salicis babylonicae* n. sp. Stroma nullum. Peritheciis singularibus, nonnunquam quasi in orbem dispositis, peridermio tectis, sphaeroideis, 0.38—0.48 mm. latis, nigris, tenuibus sed firmis, collibus crassiusculis, brevibus, ostiolis fere orbiforme-dilatatis, parum prominulis. Asci ramoso-pedicellati; pars sporifera fusiformis aut apice rotundata, 0.04—0.051 mm. longa, 0.005—0.006 mm. crassa, 6—8spora. Paraphyses non observavi. Sporae cylindraceae, leviter curvatae, 0.01—0.014 mm. longae, circa 0.002 mm. crassae, hyalinae.

Ad ramulos *Salicis babylonicae* gregatim et socialiter cum *Cytispora* Nr. 18. Sept. P.

U hrpi, koja sastoji od 3—5 individua, imadu one posudice, što se na okrajcih nalaze, ponješto kos, prema sredini nagnut položaj. Ako se na to obazremo, dolazimo odmah do misli, da se ovdje njeki iz posve nepromijenjene kore sastavljeni trusnjak (Stroma), kao kod mnogih vrstih *Diaporthe*, nalazi. Što se ovdje nikakov tamniji rub nevidi, načini ništa, jer sam ja i vrstih *Diaporthe* našao, kod kojih ovoga ruba nebijaše.

Premda je ovaj razpored u hrpe pretežniji, našao sam ipak i na istoj grani osamljenih individua. Kod takovih se je već opisana tvorba vrata sa razširenim (u oblik ploče) ušćem, znatno manje razlučiti dala, kod nekotih je dapače *nije ni bilo*; kesice (Asci) se stvarahu na *jednostavnih* stručih, i bijahu 0.058—0.075 mm. duge, od čega je nješto više od trećega diela na prilično jaki končasti stručak odpadalo; napokon bijahu truske samo 0.008—0.011 mm. duge. Paraphysam nisam ni ovdje traga našao, kao što je u obće sve ostalo jednako.

Po mojem nazoru bilo bi krivo, da se radi takvih razlika ova dva oblika kao posebne vrsti uzimlju; ta braća Tulasne našli su, da vrat kod njihove „*Calosphaeria minima*“ gdje kada skoro sasvim izčezava, gdje kada opet tako dug bude kao promjer posudice.

O skoro izvjestnoj srodnosti sa *Cytisporom* br. 18 vidi ondje.

23. *Hypoxyylon fuscum* P. G. et P.

24. *Xylaria digitata* Grev. P.

25. *Hysterium (Hysterographium) Djakovense* n. sp. Perithecia subimmersa, oblongata, recta aut flexuosa, utrinque attenuata, subparallela, 0.5—1 mm. longa, in medio 0.2—0.3 mm. lata, rima longitudinali dehiscencia, nigra. Asci cylindracei, substipitati, 0.113 mm. longi, 0.011—0.014 mm. crassi, octospori. Paraphyses filiformes, nec cohaerentes. Sporae subobovatae, 5septatae, accedentibus

adhuc septis longitudinalibus 1—3, nec guttulate, in medio parum constrictae, 0.018—0.02 mm. longae, 0.008 mm. cr., fuscae. Ad ligna arida Fraxini. Sept. P.

Od H. Fraxini P. ničuće iz jasenovih okorjelih grana razlikuje se po obliku posudice i po tom, što su kesice i truske sasna drugoga oblika i znatno manje.

26. *Peziza citrina* (Hedw.) Batsch. P. G.

27. *P. badia* P. G.

28. *Cyathus striatus* Willd. P.

29. *Scleroderma Bovista* Fr. G.

30. *Scl. vulgare* Fr. P. G.

31. *Globaria Bovista* (Linné) Quel. P.

32. *Lycoperdon pyriforme* Schffr. P. G.

33. *Geaster Djakovensis* n. sp. Involucrum¹ fugacissimum. Peridium exterius septipartitum, tenuissimum, coriaceum, substantia carnosa 2 mm. crassa tectum, laciniis triangularibus, utrinque pallidis, demum reflexis. Peridium interius papyraceum, globosum, 1.4 cm. latum, dilute umbrinum, nec striatum, nec nitidum, ore conico nec plicato, nec dentato. Capillitium fuscum. Sporae umbrino-purpureae, globosae, 0.002—0.0028 mm. latae, minutissime verruculosae, subinde pedicellatae. Solitarius.

In silva Gaj prope Djakovo. Sept.

Mreža vlasatih končica (Capillitium) niče po svoj nutarnjoj stieni peridiuma, nu ipak dolazi najjača iz dna, nalik na gust snop, koji sve do ušća siže. Svagdje se sastoji iz dugih, cjevastih, nepregradjenih sponaka (Hyphae), koje se samo gdje gdje razgranuju, izuzam na vršku, gdje se obilnije razgranuju. Osim ovih vide se u manjem broju, ponajviše sa okrajaka iduće, užetu podobne sveze od više sponaka.

34. *Auricularia mesenterica* P. P.

35.* *Clavaria gracilis* P. P.

¹ Buduće da je vanjski omotak iz nutra gladak, iz vana hrapav sa prilijepljenimi grumenčići zemlje obično veoma slab, i buduće da se kod razvijenih gljiva jedva, kadkad nikako razlučiti neda, pisci ga obično ni nenapominju. Oni govore samo o nekom zubasto razciepkanom vanjskom (za pravo srednjem), i nekom nutarnjem zamotku, koji fruktifikaciju obkoljuje.

Da me u obće razumiju, pridržajem i ja njihovo nazivlje; buduće pako, da se ovaj organ, koji zbilja od početka već postoji, ignorirati nesmie, a i nemože, prozivljem ga ja za sad „Involucrum“.

- 36.* *Clavaria stricta* P. P.
- 37.* *Thelephora cristata* (P.) Fr. G.
38. " *palmata* (Scop.) Fr. G.
39. *Merulius lacrymans* Schum.¹ K.
40. *Hydnum Auriscalpium* Linn. P.
41. " *repandum* Linn. G.
42. *Daedalea quercina* P. G. P.
43. *Trametes gibbosus* (P.) Fr. G.

44. *Trametes erubescens* n. sp. Pileo semiorbiculari, 5—6 cm. lato, horizontali, subradiatim minute - tuberculato, rufo, zona marginali albida; subtus rotundato - effuso, primitus albo - pruinato, fusco - luteolo, dein lilacino, ad tactu fuscescenti; poris linearibus, 0.5 usque fere 2 mm. longis, 0.5—0.75 mm. latis; tubulis ad basim circa 8 mm. longis, versus marginem sensim abbreviatis, non discretis, e fusco - luteolo lilacinis. Caro suberosa, pallide - fusca, ad basim circa 1 cm. crassa. Sporae globosae, 0.002—0.003 mm. latae, humectatae, translucidae.

Ad ramos putridos Coryli in silva Gaj prope Djakovo. Sept.

Sa Tr. rubescens (A. Schw.) Fr. svakako veoma srodan, što osobito crvenkasta boja, kad gljiva vene, i maleni okrugli trusci jasno dokazuju, premda se u mnogom od njega razlikuje. Napose nadjoh ondje osobit *Hymenium verum*, čega ovdje neima, gdje pojedini vršci sponaka bez reda u cievčice proviruju.

Znamenito je, i ima biti predmetom daljnijega iztraživanja, da su na tih vršcih sponaka, kao što i kod *Polyporus appianatus* P., vrlo male bradavice bile, na kojih se valjda — tako ja naslućujem — trus razvija.

45. *Polyporus Medulla panis* P. var. *Proteus* Bolton. P.
46. " *versicolor* P. G. P.
47. " *fraxinicolus* Schlzr. P.
48. " *adustus* Wild. P. G.
49. " *lucidus* P. P. G.
50. " *squamosus* Huds. P.
51. *Boletus subtomentosus* Linn. P.
52. " *luridus* Schffr. G.
53. " *scaber* Bull. G.

¹ Veoma obilna bujića kod gradnje nove crkve na dnu jednog stupa od odrva: s toga se preporučuje, odstraniv stup, mjesto otvoriti i petrolejem politi.

54. *Schizophyllum commune* Fr. P.
55. *Panus stypticus* (Bull.) Fr. P.
56. " *Sainsonii* Lév. P.
57. *Lentinus tigrinus* (Bull.) Fr. P.
58. *Cantharellus cibarius* (P.) Fr. G.
59. *Russula delica* Fr. P.
60. " *foetens* P. G.
61. " *fragilis* P. pileo rubro. G.
62. " *integra* Linn. G.
- 63.* *Gomphidius testaceus* Oudem. P.
64. *Agaricus* (*Psathyrella*) *disseminatus* P. P. G.
65. " (*Hypholoma*) *fascicularis* Huds. P. G.
66. " " *lateritius* Schff. G.
67. " " *appendiculatus* Bull. G.
68. *Agaricus* (*Crepidotus*) *subinteger* n. sp. Membranaceus, e cylindraceo cyphellaeformis, tandem resupinato-explanatus, centro affixus, orbiculare-reniformis, 5—6 mm. latus, extus albidus tenuetomentosus; lamellis e centro ortis, liberis, sat distantibus, ventricosus, usque 1.5 mm. latis, luteo-fuscescentibus, acie flexuosa et fimbriata; sporis purpureo-ferrugineis, globoso-ellipsoideis, 0.003-0.004 mm. longis. Odor nullus.

Ad corticem Fraxinorum languescentium gregatim. Sept. P.

Od svih poznatih sličnih vrstí razlikuje se po svojih slobodnih listićih (lamellae), izuzam *A. haustellaris* Fr., koji na stručku stoji (stipitatus), te je nješto sasma drugo.

- 69.* *Agaricus* (*Crepidotus*) *variabilis* P. P.
70. " (*Galera*) *tener* Schffr. P.
71. " (*Hebeloma*) *crustuliniformis* Bull. G.
72. " (*Inocybe*) *rimosus* Bull. G.
73. " " *argyllaceus* P. P.
74. " " *geophilus* P. G.

75. *Agaricus* (*Pholiota*) *Djakovensis* n. sp. Pileo umboniforme-pulvinato, carnoso, margine diu deflexo, 4—6 cm. lato, aureo, versus verticem obscuriore cinnamomeo-squamoso, squamis adpressis, demum nonnunquam glabro, jove pluvio valde viscoso; lamellis confertis, liberis, postice rotundatis, 6—8 mm. latis, ex argyllaceo purpureo-fuscis, acie integra; stipite subradicato, adscendenti, e faretto demum cavo, subdiscreto, sursum 7—10 mm. crasso, deorsum parum incrassato, fere subbulboso, pileo concolore, etiam deorsum ab loco annuli squamoso, sed squamis minutioribus et squarrosis, tem-

pore pluvioso subviscido. Annulus deest, sed squamae viscusque sunt sine dubio reliquiae veli universalis. Caro luteo-alba; odor bonus, sapor dulciculus nec nauseosus. Sporae obscure cinnamomeae, ellipsoideae, 0.004—0.005 mm. longae.

Ad Fraxinos defectas subcaespitosim. Sept. P.

Kao i *A. subsquarrosus* Fr. bez prstenka, a i u mnogih drugih stvarih ovomu sličan, nu kapica mu je jednostavno dutka, bez čvr-ljuge (umbo), te drugčije bojadisana, a stručak mu se nikada ne-izdubljuje.

Po obliku i po boji i *A. aurivellus* Batsch veoma nalik, nu stručak mu nikada nepostaje šupljim.

76.* *Agaricus (Clitopilus) Orcella* Bull. P.

77. " (*Pluteus*) *cervinus* Schffr. P.

78. " (*Pleurotus*) *sapidus* Schlzr. P.

79. " (*Mycena*) *galericulatus* Scop. G.

80. " " *filipes* Bull. P. G.

81. " " *arboreus* n. sp. Pileo submembranaceo, ex acute-, late-conico, 3—11 mm. lato, 4—9 mm. alto, tandem interdum toto explanato et subumbilicato, e plumbeo griseo, primitus ad marginem striatulo, deinde subtilissime radiatim fibrilloso; lamellis subdistantibus, liberis, parum emarginatis, valde ventricosis, usque 5 mm. latis, e cinereo luteo-albidis; stipite inter muscos quasi radianti, saepe flexuoso, fracto succum achroum stillante, undique 0.5—2 mm. crasso, 2—6 cm. longo, laevi, glabro, in principio nec colorato, deinde diluto rubro-fusco, tandem pallide-coeruleo, pars inter muscos abscondita nigra, in pileum diffuso, apice saepe curvato, ideo pileus cernuus. Odor nullus; sapor parum raphaneus, nec odiosus. Sporae obtuse-ellipsoideae, 0.006—0.009 mm. longae, 0.004—0.005 mm. crassae.

Ad cortices quercuum vetustarum muscosarum, adhuc vivarum, gregatim. Sept. in silva Gaj prope Djakovo.

Melju „Lactipedi“ nenavadja Fries nijedne vrsti sa sokom bez boje.

82. *Agaricus (Mycena) viscido-luteus* n. sp. Pileo hemisphaerico in marcescentia in medio parum depresso, vix 1 cm. lato, membranaceo, obscure-ceraceo, laevi, glabro, valde viscoso; lamellis subdistantibus, denticulo affixis, deinde liberis et postice rotundatis ventricosis, 2 mm. latis, luteolis; stipite subconcolori, 1 mm. crasso, contiguo, deorsum parum incrassato, 2.2 cm. alto, fareto, glabro, laevi, viscoso. Sporae obtuse-ellipsoideae, plasmafarctae, 0.006—0.007 mm. longae, 0.004 mm. crassae. Solitarius, terrestris. Sept. P.

Razlikuje se od *A. tenellus* Batsch tim, što čvrljuzi ni traga neima, što mu kapica nije prugasta, što su mu listići trbušasti, a stručak deblji.

83. *Ag. (Collybia) longipes* Bull. G.

84. *Agaricus (Collybia) accommodans* n. sp. E mycelio byssoideo, tam acus pini, quam folia et ramenta putrescentia conjugante, ad decimetros lateraliter et profunde extenso, oriuntur gregatim multa individua. Pileo, excepte medio carnosio, membranaceo, 2—3.5 cm. lato, mox convexe-orbiculare expanso, parum umbilicato, tandem ad marginem inaequalem fisso, fuscescence-albido, laevi, glabro; lamellis distantibus, concoloribus, postice subemarginato-adfixis, mox liberis, nonnunquam ad latera venosis, 3—5 mm. latis, acie saepe inaequalibus sed non serratis; stipite fistuloso, contiguo, primitus ubique 0.5—1 mm. crasso, tandem sursum usque 2—4 mm. incrassato, longitudine valde variabili, 1.5—3.5 cm., quod non a provecta aetate dependet, in juventute achroo, dein a basi usque saturate-castaneo colorato, nudo. Sporae ellipsoideae, 0.004 mm. longae. Odor nauseosus; sapor dulciculus, haud ingratus. Sept. P.

U Bulliardovoj tabeli 56, koju dr. Fries kod *Ag. nummularius* navadja, nalazi se samo obris, koji se s ovom našom gljivom prilično slaže, pa da Friesova diagnoza u mene nešto dvojbe neostavlja, ja bi se usudio držati obe identičnima. Fries govori o promjenljivoj čvrljuzi, kojoj ja na velikom broju promatranih individua ni traga našao nisam i o kojoj ni Bulliard ništa nespo-minje; stručak nadje on „e fareto cavus“, ja pako u svako doba šupalj, o tamnom bojadisanju, koje doduše kasnije nastupa, negovori ništa. Listići su kod njega, kao i kod mene, prilično riedki, naproti kod Bulliarda nešto gušći. Razlog pako, da po meni odkrivenu gljivu za nešto drugoga držim, daje mi njegov naziv: „pulcher“, kojim se naša gljiva baš osobito ponositi nemože.

85. *Agar. (Collybia) rigidipes* n. sp. Pileo membranaceo, regulari, fornicato, 2.5 cm. lato, ochraceo, vertice subrugoso, ceterum glabro, laevi, nec nitido; lamellis dilutioribus, distantibus, liberis, ventricosus, fere 4 mm. latis; stipite elastice-firmo, fistuloso, discreto, 1.5 mm. crasso, 5.6 cm. longo, glabro, laevi, nitido, apice achroo, deorsum molochino usque nigro-castaneo, basi carnosoperonato sicut interdum *A. odorus* Bull. et *A. aeruginosus* Curt. Sporae oblongo-ellipsoideae, 0.006—0.008 mm. longae, 0.003 mm. crassae. Solitarius ad quisquillas putrescentes in silva Gaj prope Djakovo. Sept.

*Pravi Marasmius.*¹ Buduć da sam ja dosada samo jedan exemplar, svakako dobro razvijen, našao, to još neznam, da-li je ona sara na stručku stalan atribut ili ne.

86. *Ag. (Collybia) Rotula* P. G.

87. „ (*Amanita*) *vaginatus* Bull. *albidus* Fr. G.

88. *Stemonitis fusca* Roth. P.

Domorodno djelo, na kojem sad radim, obogatio sam dakle ovim desetodnevnim iztraživanjem za dvadeset i jednu vrst, od kojih je njih 15 samoj znanosti, koliko ja znam, dosad nepoznato, dakle su *posvema nove*.

¹ Friesov rod „*Marasmius*“ nisam primio u „*System gljiva*“, što sam si ga za osobnu porabu sastavio, jer su mu granice prema *Agaricusu*, po onih vrstih, što ih je Fries onamo uvrstio, netočno označene.

O svezcih i redovih čunjosjekâ.

NAPISAO PROF. J. S. VANĀČEK.

*(Predano u sjednici matematično-prirodoslovnoga razreda jugoslavenske akademije
znanosti i umjetnosti 15. ožujka 1882.)*

O svezcih i redovih čunjosjekâ do sada nisu poznate ove poučke:

1. Skup svih čunjosjekâ, koji prolaze kroz četiri čvrste točke, tvori svezak čunjosjekâ prvoga stupnja ili kratko: svezak čunjosjeka S^1 . — Predpostavljajmo, da su tri od ovih temeljnih točakâ (vrha) stalne; četvrta pako temeljna točka da se giblje u nekom čunjosjeku K svezka S^1 . Tim dobivamo novi sustav čunjosjekâ, koji se zove svezkom čunjosjeka drugoga stupnja S^2 . U ovom svezku nalazi se bezkonačno mnogo svezaka prvoga stupnja.

Kratkosti za volju označiti ćemo sa K temeljni čunjosjek svezka S^2 . — Izvodimo iz čunjosjekâ zakladnog čunjosjeka K novi svezak K^1 , koji je temeljni svezak novoga svezka čunjosjeka trećega stupnja S^3 .

2. Svezak S^1 ima bezkonačno mnogo čunjosjeka, S^2 ima bezkonačno mnogo svezaka S^1 , a konačno nalazi se u S^3 bezkonačno mnogo svezaka S^2 .

Lik čunjosjeka svezka S^1 jest poznat. Medju čunjosjekima svezka S^2 nalaze se dvie skupine parabola, a jedan skup istostraničnih hiperbola, koji čini svezak čunjosjeka prvoga stupnja; ali ovaj svezak — kao takav — nije čest svezka S^2 .

U svezku S^2 nalaze se na dalje tri svezka S^1 , od kojih svaki prolazi kroz one tri stalne temeljne točke; njihovi čunjosjeci uzajamno se stiču u jednoj od ovih triju temeljnih točaka.

3. Mjerstveno mjesto središta svih čunjosjeka svezka S^3 jest svezak čunjosjeka drugoga stupnja M^2 ; središta čunjosjeka svezka S^2 tvore svezak čunjosjeka prvoga stupnja M^1 ; konačno prolaze središta čunjosjeka svezka S^1 čunjosjekom M^0 , koji ide, kako je

poznato, razpolovljujućimi točkami podpunoga četverokuta — koji je opredieljen kroz zadate četiri točke temeljne — a koji na dalje prolazi razkutnim točkami ovoga podpunoga četverokuta.

4. Ove tri diagonalne točke x, y, z su vrhovi trokuta, kojemu su strane X, Y, Z polarami protuležećih vrhova napram svezku S^1 .

U svezku S^2 okreću se strane X, Y, Z trokuta xyz oko triju točaka x_1, y_1, z_1 . Ove su točke vrsi trokuta, kojemu se strane stiču sa temeljnim čunjosjekom K u onih trijuh temeljnih stalnih točkah. — Svezak čunjosjeka S^3 ima temeljni svezak K^1 , kojemu je polarni trokut $x_2y_2z_2$. Vrsi trokuta $x_1y_1z_1$ miču se u stranah X_2, Y_2, Z_2 trokuta $x_2y_2z_2$. Dakle:

Svezku S^1 odgovara jedini polarni trokut xyz ; svezku S^2 odgovara bezkonačno mnogo trokuta xyz , a skup ovih zove se svezak τ^1 prvoga stupnja polarnih trokuta, trokut $y_1x_1z_1$ pako njegovim temeljnim trokutom.

Svezku S^3 prinaleži bezkonačno mnogo svezaka τ^1 ili svezak τ^2 drugoga stupnja, kojemu je temeljni trokut $X_2Y_2Z_2$.

5. Skup svih čunjosjeka, koji se stiču (tangiraju) sa četiri stalna pravca A, B, C, D nazvati ćemo *redom* čunjosjeka prvoga razreda, te ćemo ga označiti slovom Σ^1 .

Tri pravca A, B, C od ovih temeljnih pravaca neka se ne miču dočim četvrti pravac svojim gibanjem omotava neki čunjosjek K reda Σ^1 .

Svaki položaj pravca D opredieljuje sa ostala tri stalna pravca A, B, C jedan red. Ukupninu svih ovih redova zovemo redom Σ^2 drugoga razreda, a čunjosjeku K njegovom temeljnom čunjosjekom. — Sastavimo red K^1 čunjosjekâ K , koji se stiče sa tri stalna temeljna pravca; redovi Σ^2 , koji odgovaraju čunjosjecima K , sačinjavaju red Σ^3 trećega razreda, a red K^1 mu je temeljnim redom.

6. Red Σ^1 obziže bezkonačno mnogo čunjosjekâ, a red Σ^2 bezkonačno mnogo redova Σ^1 . Konačno sastoji Σ^3 od bezkonačne množine redova Σ^2 .

Poznato je, da su u redu Σ^1 dvie sustave elipsa, dvie sustave hiperbola, a jedna samo parabolâ; medju hiperbolami nalaze se dvie istostranične. Ove hiperbole sačinjavaju u redu Σ^2 dva osobita skupa, a parabole tvore red P^1 , ali ovaj — kao takav — nije čest reda Σ^2 . — Izvan toga nalaze se u Σ^2 tri reda Σ^1 , od kojih se svaki stiče sa tri stalna temeljna pravca A, B, C , a kojemu se svi čunjosjeci stiču u jednoj točki nekogega od ovih stalnih pravaca.

7. Središta reda prvoga razreda nalaze se — kao što je poznato — na pravcu M , koji prolazi razpolovljujućimi točkami trijuh diagonala podpunoga četverostrana, koji je temeljnimi pravci A, B, C, D opredieljen. Pravci M , koji odgovaraju redu Σ^2 , prolaze jedinom točkom, koja je središte γ temeljnog čunjosjeka K reda Σ^2 , a sva ova središta γ , koja odgovaraju redu Σ^3 , nalaze se na pravcu, koji ide razpolovljujućimi točkami diagonala podpunoga četverostrana, koji je opet opredieljen temeljnim redom K^1 reda Σ^3 . — Možemo kazati:

Mjerstveno mjesto središta čunjosjeka reda Σ^1 jest pravac, koji prolazi razpolovljujućimi točkami diagonala temeljnoga četverostrana reda Σ^1 ; središta reda Σ^2 nalaze se na svezku pravaca prvoga stupnja, kojemu središte pada u središte temeljnog čunjosjeka K reda Σ^2 ; a konačno leže središta reda Σ^3 na bezkonačnoj množini svezaka pravaca prvoga stupnja, kojim središta leže na pravcu takovu, da prolazi razpolovljujućimi točkami diagonala podpunoga četverostrana, koji je opredieljen sa četiri temeljna pravca temeljnoga reda K^1 , koji pripada redu Σ^3 .

8. Diagonale X, Y, Z podpunoga četverostrana $ABCD$ jesu strane trokuta, kojemu su vrhovi x, y, z pôli protuležecih stranâ naprama redu Σ^1 .

U redu Σ^2 čunjosjeka prolaze vrsi x, y, z trokuta XYZ kroz tri pravca X_1, Y_1, Z_1 . Ovi pravci spajaju stične točke stalnih pravaca A, B, C sa temeljnim čunjosjekom K .

Red Σ^3 čunjosjeka ima temeljni red K^1 , kojemu je polarni trokut $X_2 Y_2 Z_2$. Strane trokuta $X_1 Y_1 Z_1$ okreću se oko vrhova x_2, y_2, z_2 trokuta $X_2 Y_2 Z_2$. Dakle:

Redu Σ^1 čunjosjeka pripada polarni trokut XYZ , a redu Σ^2 odgovara bezkonačno mnogo trokuta XYZ ; skup ovih nazvati ćemo redom τ^1 prvoga razreda polarnih trokuta, a trokut $X_1 Y_1 Z_1$ njegovim temeljnim trokutom. Redu Σ^3 prinaleži bezkonačno mnogo redova τ^1 ili red τ^2 drugoga razreda, kojemu je $x_2 y_2 z_2$ temeljni trokut.

O obćenitih svezcih te redovih čunjosjekâ.

NAPISAO J. S. VANĚČEK.

(Predano u sjednici matematično-prirodoslovnoga razreda jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti 10. svibnja 1882.)

1. Predpostavljajmo čunjosjek K te krivulju L stupnja l toga a krivulju M stupnja m toga.

U razpravi, koja je izašla u spisih parizke akademije, dokazao sam, da opiše li vrh a polarnog trokuta aa_1a_2 obzirom na čunjosjek K krivulju L , te opiše li vrh a_1 krivulju M , to opiše treći vrh a_2 krivulju $2lm$ toga stupnja.

Za $m = 1$, dobivamo transformaciju *Hirstovu*. Ako je L pravcem, je njegovom tvorinom inverzije čunjosjek (L) , koji prolazi objema presjecišti pravca M sa temeljnim čunjosjekom K te njegovim polom m kao što i polom l danog pravca L .

2. Vrst čunjosjeka (L) inverzije naći ćemo ovako. Opredjelit ćemo čunjosjek inverzije (U) ubjeznoga pravca U ravnine, u kojoj se nalazi temeljni čunjosjek K . Budući da (U) prolaziti mora ubjeznimi kružnim točkama, mora da je sličan te slično položeni čunjosjek sa temeljnim čunjosjekom K , idući središtem toga čunjosjeka. Svaka točka čunjosjeka (U) transformira se u točku ubjeznu. Možemo dakle namah iz položaja danoga pravca L opredjeliti vrst čunjosjeka inverzije (L) . *Prema tomu sieće li pravac L čunjosjek (U) u dvijuh realnih točkah ili u sudarajućih se ili imaginiranih točkah, je krivulja inverzije (L) odnosno ili hiperbola ili parabola ili elipsa.*

Osim toga nalazi se unutra čunjosjeka (U) točka z , te vlastitosti, da pravac idući ovom točkom transformira u istostraničnu hiperbolu.

Označimo sa t , u presjecišta pravčaste ravnalice M sa temeljnim čunjosjekom K , te ćemo je prozvati temeljnim točkama. Prolazi li dani pravac L nekom od tih točaka, upoznajemo iz prije navedene konstrukcije, da se čunjosjek inverzije raztavlja u dva pravca, od kojih je jedan tangentom temeljnog čunjosjeka u točki temeljnoj,

te drugi pravac spaja drugu temeljnu točku sa drugim presjecištem pravca L sa temeljnim čunjosjekom K . Očito je, da realnost tih pravaca ovisna je o realnosti temeljnih točka t, u .

Pravac L , koji ide polom m ravnalice M , transformira se također u čunjosjek, koji se reducira na dva pravca, od kojih se jedan sudara sa L , drugi sa M .

Tangenta u nekoj iz temeljnih točaka t, u ima za krivulju inverzije čunjosjek, koji se prema tomu, što je bilo rečeno, raztvaja u dva pravca i to u danu tangentu samu te u pravac M .

3. Kao što smo u članku 1. transformirali red točaka L obzirom na temeljni čunjosjek K te pravčastu ravnalicu M , možemo opredieliti tvorinu inverzije polarne tvorine L stupnja l toga, koja je svezak trakova prvoga stupnja.

Upotrebimo sad izreke:

Omotava li stranica A polarnoga trostrana AA_1A_2 obzirom na obćeniti čunjosjek krivulju L, l toga razreda, te isto tako stranica A_1 krivulju M, m toga razreda, to omotava treća stranica A_2 krivulju (A_2) razreda $2lm$ toga.

U našem slučaju reducira se krivulja L na svezak trakova l prvoga stupnja ili krivulju l ga razreda; isto tako M reducira se na točku m kao na krivulju l ga razreda. Izvedena krivulja (l) je čunjosjek, koji se tiče polare M točke m te polare točke l kao što i obijuh tangenata povučenih iz te točke na temeljni čunjosjek K .

4. Opredielimo vrst ovako dobivenoga čunjosjeka (l) . Pravci L, M su tangente ovog čunjosjeka. Trak A svezka l idući središtem temeljnoga čunjosjeka transformira se u pravac A_2 istosmjerni sa L . Dalje pravcu B istosmjernomu sa M odgovara drugi pravac B_2 , koji je istosmjernan sa M .

Tim smo dobili istosmjernjak opisani čunjosjeku inverzije (l) . Vrst ovoga čunjosjeka ovisna je o tom, dotica li se (l) stranice L ili M unutra ili izvan njezine duljine omedjene objema vrh, koje na njoj leže.

Ako presjecište obijuh pravaca L, M označimo sa o , budi njezina polara O . Ta polara presjeka L, M u diralištih x, y tih pravaca sa čunjosjekom (l) . Imaju li oba pravca L, M obzirom na temeljni čunjosjek sdružene smjere, jesu dvie stranice opisanoga istosmjernjaka takodjer istosmjerne, te točke x, y nalaze se na stranicah njegovih bezkonačno velikih.

Iz poznate izreke novije geometrije sledi:

Čunjosjek (U) je hiperbolom, elipsom ili parabolom, prema tomu, leži li točka x odnosno izvan, unutra ili na bezkonačno velikoj česti stranice M istosmjernjaka $LM A_2 B_2$ opisanoga čunjosjeku (U), ili drugačije, možemo li na čunjosjek iz njegovog središta povući dvie, ni jednu ili jedinu tangentu.

Središta svezaka, koji se transformiraju u parabole, leže na pravcu M' , koji je istosmjernjan sa polarom M točke m .

Svezak, koji ima središte na tangenti mt , povučene iz čvrste točke m k temeljnomu čunjosjeku K , transformira se u čunjosjek degenerirajući u dvie točke; jedna od tih točaka je diralište t te drugi je pol pravca, koji spaja drugu temeljnu točku u sa diralištem tangente povučene iz dane točke k temeljnomu čunjosjeku.

Svezak, kojega središte a se nalazi na pravcu M transformira se isto tako u dvie točke, naime u točku a te točku m .

Iz ovoga je očividno, da svezak, imajući svoje središte u jednoj temeljnoj točki t ili u , se transformira u tu točku te u točku m .

Tim dobivamo četiri osobita pravca mt , mu , tu i M' , koji zadnji pravac obuhvaća središta paraboličnih svezaka te je istosmjernjan sa M . Ta četiri pravca razdieljuju ravninu temeljnoga čunjosjeka u deset polja. U jednom iz tih polja nalazi se središte svezka, koji se ima transformirati. Opredielimo li vrst čunjosjeka za jedan takav svezak, tada svi svezci, imajući središta u istom polju, prielaze u čunjosjeke iste vrsti.

5. Tražimo sad lik inverzije svezka trakova prvoga stupnja. Svim njegovim trakom pripada središte svezka l zajednički. Ovo središte transformira se kao što točka opet u točku l_2 , koja je zajednička svima čunjosjekom potičućim iz svezka l . Nu budući da svi čunjosjeci moraju, kao što je bilo prije rečeno, ići temeljnim točkama t , u te polom m ravnalice M , stvara sustav svijuh čunjosjeka inverzije svezak, kojega četiri vrši su točke t , u , m , l_2 .

Razumi se, da mogu biti i točke t , u imaginarne, potle ima svezak dva vrha imaginarna te dva vrha, naime m , l_2 , uvijek realna.

6. Najprije jest našom zadaćom, promatrati, koje vrsti čunjosjeci u tom svezku se nalaze.

Ovu opredielbu veoma lahko izvedemo pomoću čunjosjeka (U) čl. 2. Središte l svezka trakova, koji imamo transformirati, leži ili izvan ili na čunjosjeku ili unutra čunjosjeka (U).

U prvom slučaju idu iz l dva traka, dirajuća čunjosjek (U). Ovakve prielaze u parabole. Jedan diel svezka trakova sieče (U); taj se transformira u hiperbole, među kojima je jedna istostranična.

Tri traka idu točkama t, u, m ; ova prielaze u tri para pravaca. Drugi diel trakova nepresjeca realno čunjosjek (U) i taj se transformira u skupinu elipsâ. Obje parabole diele skupinu elipsâ od skupine hiperbola.

U drugom slučaju, gdje l leži na (U), dobivamo samo jedinu parabolu od traka, koji tiče u l čunjosjek (U), te potle samo skupinu hiperbolâ, među njima jednu istostraničnu, te tri para pravaca.

U trećem slučaju, leži li naime l unutra (U), dobivamo samo jedinu skupinu iste vrsti čunjosjekâ i to hiperbolâ, među kojima je jedna istostranična te tri para pravaca.

Nu ako bi točka l se sudarala sa točkom z , o kojoj je bio u čl. 2. govor, potle su čunjosjeci inverzije samo istostranične hiperbole te tri para pravaca. Ovo su rezultati poznati, nu drugim putem izvedeni.

7. Transformiramo li sad polarnu tvorinu svezka trakova prvoga stupnja, naime red točaka L , kojoj svaku točku smatramo kao središte svezka trakova, potlem dobivamo *red čunjosjeka*, koji se dotiču četirjuh pravaca mt, mu, M , a L_2 .

I ovdje možemo opredieliti vrst čunjosjekâ, nalazećih se u redu čunjosjeka. Trebamo samo na ona iz deseti polja iztaknutih u čl. 4. se osvrnuti, kojima pravac L prolazi.

Ovdje dobivamo dvie skupine hiperbola te dvie skupine elipsa, koje se izmjenjivaju, te jedinu parabolu. Jedna skupina je odijeljena od druge parom točaka. Ovakih parova točaka, koje su degenerovanimi čunjosjeci, imamo tri, četvrti odijeljući čunjosjek je ona parabola.

Sjedini li se red točaka L sa redom parabolickim M' , potlem sastoji red čunjosjeka iz pukih parabolâ, te iz trijuh parova točaka od kojih su tri točke ubježne.

8. Ovdje promatrani svezci te redovi čunjosjeka su najjednostavniji likovi ove vrsti. Ovdje smo je bili promatrali — rezultati, sami doduše drugim putem su poznati — iz razloga, da nama služe kao temelj ka sliedećim sastavljenim svezkom te redovom.

Predpostavljajmo koju god krivulju L stupnja l toga, koju bi imali sa obzirom na čunjosjek K te pravčastu ravnalicu M transformirati. Iz L dobit ćemo krivulju inverzije (L) stupnja $2l$ toga, ako ju transformiramo kao red točaka. Nu uzimajući L kao zamoataljku svojih tangenata te transformirajući svaku tangentu, dobivamo čunjosjeke inverzije. O svakom čunjosjeku inverzije znademo,

da prolazi čvrstimi točkama t , u , m koje pripadaju svim čunjosjekom zajednički.

U članku u spisih londonske akademije sam dokazao, da diralištu dane krivulje sa tangentom odgovara diralište krivulje inverzije te čunjosjeka u koju tangenta prielazi.

Iz ovoga sliedi, da svaki čunjosjek inverzije tangente dane krivulje L se dotica takodjer krivulje inverzije (L) dane krivulje.

Označimo sa L' svezak trakova, koji omotava krivulju L , te čunjosjeke inverzije pojedinih trakova označimo sa (L'). Pomoću ove oznake, te predidućih dedukcija možemo kazati.

Tečny L' dane krivulje L transformiraju se u čunjosjeke, koji imaju tri točke zajednički te tiču svi skupa krivulju (L), koja je krivuljom inverzije krivulje L .

Krivulja (L) je $2l$ -toga stupnja. Buduć da svi čunjosjek (L') idu trima čvrstim točkama te tiču krivulju $2l$ toga stupnja, možemo njihov skup prozvati *svezkom čunjosjeka $2l$ -toga stupnja*.

Obični svezak čunjosjeka, opredieljen četirima točkama, je samo poseban slučaj ovdje iztaknutoga svezka. Predje li naime krivulja L u točku ili središte svezka trakova 1 ga stupnja, je njezinom tvorinom inverzije opet točka, koju svi čunjosjek, u koje se traci tog svezka trakova transformiraju, tiču t. j. kojom prolaze. Buduć da je točka krivulja nultoga stupnja, možemo polag naše definicije, svezak čunjosjeka, koji imaju četiri točke zajednički prozvati *svezkom čunjosjekâ nultoga stupnja*.

Buduć da se krivulja l -toga stupnja transformira u drugu krivulju $2l$ -toga stupnja, moglo bi se iz početka misliti, da dobivamo uvijek samo svezak čunjosjeka takoga stupnja, nipošto polag običnog aritmetičkog reda. Nu u prije navedenom članku sam dokazao, da se krivulja inverzije reducira prema tomu, kroz koliko temeljnih točaka dana krivulja L prolazi. Možemo dakle uvijek krivulju L ovako izabrati, da krivulja inverzije našoj potrebi zadovoljava.

9. Put, kojim smo kod promatranja svezka čunjosjeka nultoga stupnja bili udarili, vodi nas i ovdje k opredielbi vrsti pojedinih čunjosjeka, nalazećih u svezku $2l$ toga stupnja.

Upotrebimo opet čunjosjeka (U). Pravac, koji ga tiče, sieče ili nesieče, transformira se kao što već navedeno odnosno u parabolu, hiperbolu ili elipsu. Sve tangente zajedničke i krivulji L i čunjosjeku (U) transformiraju se dakle u parabole. Krivulja L kao krivulja stupnja l toga, je u obće $l(l-1)$ toga razreda. Obje krivulje

L i (U) imaju $2l(l-1)$ zajedničkih tangenata ili drugimi riečmi: svezak čunjosjeka $2l$ toga stupnja sadržaje $2l(l-1)$ parabola.

Medju dvima susjednima zajedničkima tangentama ležeci traci presjecaju (U) ili realno ili imaginarno. Ovdje dobivamo skupinu hiperbola ili skupinu elipsa. Obijuh vrsti skupinâ nalazi se dakle u svezku $2l$ toga stupnja $l(l-1)$. Ove se skupine izmjenjuju te su odijeljeni uvijek parabolom.

Medju hiperbolami nalazi se takodjer $l(l-1)$ istostraničnih hiperbola, budući da možemo poznatom točkom z na krivulju L toliko tangenata povući. Osim ove hiperbole istostranične dolaze i pari pravaca.

Svaka tangenta krivulje L , koja ide nekom iz točaka t , u , m , transformira se u čunjosjek, koji se raztavlja u dva pravca. Ovdje uvijek stvaraju pravci tu , mt , mu dio raztavljenega čunjosjeka.

Iz svake točke t , u , m možemo u obće $l(l-1)$ tangenata na krivulju L povući. Dobivamo ovako uvijek za koju god iz navedenih točaka $l(l-1)$ para pravaca. Čvrsti pravci tu , mt , mu jesu ovdje $l(l-1)$ strukimi a svakom iz točaka t , u , m ide osim toga $l(l-1)$ pravaca, koji svi skupa spadaju u svezak čunjosjeka $2l$ toga stupnja.

Presjecaju li sve tangente krivulje L čunjosjek (U) , tada sastoji svezak $2l$ toga stupnja iz pukih hiperbola te pravaca; gdje usuprot, nepostoji li nikakvih zajedničkih tangenata, su svi čunosjeci svezka elipse.

10. Predjemo sad k transformaciji krivulje L razreda l toga. Njezina krivulja inverzije (L) je $2l$ toga razreda.

Mislmo si svako diralište krivulje L sa njezinom tangentom da stvara središte svezka trakova prvoga stupnja. Svaki takav svezak transformira se u čunjosjek, koji tiče krivulju inverzije (L) , budući da svezak uvijek jednu tangentu dane krivulje L sadržava.

Svaki čunjosjek izvedeni iz točke krivulje L mora, polag predidućega, da tiče čvrste pravce tu , mt , mu . Tim smo dobili red čunjosjeka, imajućih tri zajedničke tangente, te kojega svaki čunjosjek tiče krivulju (L) razreda $2l$ toga.

Prozvat ćemo taj red, *redom čunjosjeka $2l$ tog razreda*. Ako je dana krivulja L nultoga razreda, to jest pravcem, dobivamo red čunjosjeka nultoga razreda, koji je običnim redom sa četirima zajedničkima tangentama.

11. Skupine čunjosjeka iste vrsti u redu $2l$ tog razreda opredielimo ovako: Dana krivulja L je u obće stupnja $l(l-1)$ toga,

pa tim ju sieče svaki iz čvrstih pravaca tu , mt , mu u $l(l-1)$ točkah, koje se transformiraju u čunjosjeke rastavljajuće se uvijek u dvie točke. Svaka točka t , u , m je kod toga $l(l-1)$ strukom točkom, te druge tri skupine točaka stvarajućih sa prvimi pare točaka, leže na pravcima tu , mt , mu . Pari tih točaka diele pojedine skupine čunjosjekâ reda, koje se izmjenjuju. Ovakimi razdielujućimi tvorinami su takodjer parabole ovoga reda. Buduće da pravčasti parabolički red M' krivulju L u $l(l-1)$ točkah sieče, dobivamo $l(l-1)$ parabola u redu $2l$ tog razreda.

Dalje nalaze se u redu $2l$ tog razreda $2l(l-1)$ skupina hiperbola te $2l(l-1)$ skupina elipsa.

Tim nadam se je otvoreno polje novim promatranjem o svezcih te redovih čunjosjeka različitih stupnjeva te razreda.

0 obćenitoj inversiji te o transformaciji pomoću reciprokih provodnica.

NAPISAO J. S. VANĀČEK.

(Predano u sjednici matematičko-prirodoslovnoga razreda jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti 16. studenoga 1882.)

1. U predidućem članku ovoga „Rada“ uputio sam na obćenitu transformaciju u ravnini, uslied koje se krivulja L stupnja l -toga transformira obzirom na drugu krivulju M stupnja m -toga u krivulju stupnja $2lm$ -toga.

Zamienimo li jednu iz tih krivulja pravcem, dobivamo transformaciju *Hirst-ovu*, te u slučaju, da je taj pravac bezkonačno udaljen, imamo običnu transformaciju pomoću reciprokih provodnica.

Sama transformacija obćenita je iz geometričkog gledišta veoma jasna isto tako i njezin poseban slučaj, transformacija pomoću reciprokih provodnica. Buduć da ova zadnja transformacija ponajprije bila proučena i to još putem matematičkim, to se je dogodilo, da se je došlo k mnogim poučkam nepodpunim, kao što ćemo u ovoj razpravi upoznati.

2. Predpostavljajmo koji god čunjosjek Z kao osnovku transformacije te pravac M , sa obzirom na koji se ima dana krivulja M transformirati.

Svaka točka d_1 ravnine obzirom na Z i M transformira se ovako: Opredieli se njezina polara D_1 , koja sieče pravac M u točki d_2 ; polara njezina D_2 ide točkom d_1 kao što i polom m pravca M te presjeka D_1 u traženoj točki d_3 . Točke d_1, d_2, d_3 , stvaraju polarni trokut obzirom na Z . Za neke posebne točke ima potle i taj trokut poseban položaj. Našom prvom zadaćom biti će, upoznati ove osobite točke kao što njihove izvedene točke.

3. Prigledimo prije svega k točkama pravca M , koji sieče osnovku Z u točkah a, b . Koja god točka d_1 toga pravca ima polaru D_1 , koja ide polom m pravca M , te sieče taj pravac u točki d_2 .

Polara njezina D_2 ide opet točkom m , koja je dakle objema pravcem D_1 , D_1 zajednički; uslied toga je m točkom izvedenom. Stvar se jednako ima i kod svih ostalih točkah pravca M , izključiv točke a , b . Imamo dakle:

Točka pravca M transformira se u pol tog pravca.

Za točku a sudaraju se oba pravca D_1 , D_2 u tangentu povučenu ovom točkom na osnovku. Presjecište njihovo postane neopredijeno, pa tim možemo tangentu A smatrati izvedenom točke a . Za točku b dobivamo tangentu B . Dakle:

Temeljna točka pravca M transformira se u pravac, koji u toj točki tiče osnovku Z .

4. Polara svake točke pravca A ide diralištem njegovim a , te polara ove točke je opet pravac A sam. Treći vrh polarnog trokuta leži uvijek dakle u točki a . Možemo tim kazati:

Svaka točka, izuzam točke a , m , tangente povučene točkom temeljnom a pravca M na osnovku transformira se u ovu točku, koja se opet u onu tangentu transformira.

5. Druga osobita točka ravnine čunjosjeka Z je točka m . Njezina polara je pravac M , koji sam sebe sieče u cijeloj svojoj dužini. Možemo dakle svaku njegovu točku smatrati kao drugi vrh polarnog trokuta. Polara svake ovake točke ide točkom m te sieče pravac M u točki, koja je trećim vrhom trokuta.

Za sve točke pravca M kao druge vrhe, izuzam točke a , b , dobivamo opet sve točke istog pravca kao treće vrhe polarnih trokuta. Možemo dakle izreći stavak:

Pol m pravca M transformira se obzirom na taj pravac u pravac M sam.

Prozavimo li točke a , b , m glavnima točkama te spojnice njihove glavnimi pravci transformacije; spojimo li nadalje sve poučke simo spadajuće u jednu, dobivamo:

Seaka glavna točka transformira se u svoju polaru; pravac am , koji tiče osnovku, transformira se u sama se te u svoj pol kao što i u pravac ab ; pravac, koji ide glavnima točkama osnovke transformira se u ostala dva glavna pravca kao što i u svoj pol, u kojem se ta dva pravca presjecaju.

6. Kod transformacije pomoću reciprokih provodnica postane pravac M pravcem ubježnim, ali je uvijek realnim; na njom nalaze se imaginarna presjecišta a , b sa osnovkom, koja je prešla u krug Z . Pol pravca M nalazi se tada u središtu m krivulje Z .

Zadnji stavak predidućega članka glasi obično ovako:

Pravcu ab odgovara središte inverzije m , pravcu am točka a te pravcu bm točka b .

Na temelju predidućega svaki lasno uvidja nepodpunost ovoga stavka. Makar i bili pravci am , bm imaginarni, nužno je, uzeti je u račun, kako se to čini sa točkama a , b ma i bile imaginarne.

7. Svaki pravac L transformira se po obćenitoj transformaciji u čunjosjek R , koji ide polem pravca L kao što i njegovimi temeljnimi točkama, potlem glavnimi točkama transformacije.

Ide li L nekom glavnom točkom, raztavlja se izvedeni čunjosjek R u dva pravca. Neka sad ide pravac L točkom a . Ova njegova točka transformira se u pravac am . Drugi dio čunjosjeka R je dakle opet pravac naime spojnicom točke b sa drugim presjecištem pravca L sa osnovkom.

Pravac L neka ide točkom m . Ova točka pravca se transformira u pravac M . Drugi dio čunjosjeka R ima ići objema temeljnima točkama pravca L , dakle je taj pravac sam drugim dilom.

Iz ovoga sledi:

Pravac, koji ide nekom glavnom točkom transformacije, transformira se u dva pravca, iz kojih je jedan polarom one glavne točke, kojom taj pravac ide.

Ovog dila reduciranoga čunjosjeka teorija transformacije pomoću reciprokih provodnica nepozna, budući da kaže o pravcu idućem središtem inverzije m , da se transformira u pravac M , te smatra ovo kao iznimku od obćenitog pravila, čim ovo sbilja nije.

8. Svaki pravac L transformira se obzirom na čunjosjek Z te ubježan pravac M u čunjosjek sličan te slično položen sa čunjosjekom Z , budući da mora ići objema imaginarnima točkama a , b kao što i polom m pravca M , koji je središtem osnove.

Nu ide li L točkom m , potlem se taj čunjosjek R , koji je sličan te slično položen sa krugom temeljnim Z , raztavlja u dva pravca L , M . Obzirom na to je vidljivo, da to nije korektno, kad se kaže, da je pravac krugom, kojega je središte u bezkonačnosti, budući da se ima uzeti na obzir i ubježan pravac, kao drugi dio reduciranoga kruga.

9. Koji god čunjosjek L transformira se obzirom na pravac M te osnovku Z obćenito u krivulju četvrtoga stupnja. Oblik ove izvedene krivulje R ovisan je položaju čunjosjeka L prema pravcu M te ka tangentam u temeljnih točkah tog pravca na osnovku povučenih. Možemo tim po volji koju god krivulju 4. stupnja dobiti.

Sieće li čunjosjek L pravac M u dvijuh realnih točkah, transformiraju se ova presjecišta prema prijašnjemu u točku m , koja je tim dvotočkom izvedene krivulje.

Na isti način transformiraju se presjecišta krivulje L sa pravcem A (čl. 3) u dvotočku a ; isto valja i za B .

Točke a , b mogu biti i imaginarne, gdje usuprot je točka m uvijek realna, nu može biti i izoliranom točkom krivulje R . Tiče li krivulja L jedan između glavnih pravaca A , B , M , prielazi dvotočka izvedene krivulje R u povratište (point rebroussement). Iz ovoga je uvidljivo, da možemo dobiti krivulju 4. stupnja, bez povratišta ili sa jednim, dvima ili trima povratištama.

10. Osobito zanimivu krivulju 4. stupnja dobivamo na sliedeći način. Osnovka je krug Z te pravac M ima takav položaj, da točke a , b , m stvaraju istostraničan trokut. Krug upisan u taj trokut se ima transformirati. Buduć da tiče svaki pravac A , B , M , ima krivulja R tri povratišta u točkah a , b , m , koje odgovaraju diralištima krivulje L sa stranicami trokuta abm .

Izvedena krivulja R ima tri grane, te je hipocikloidom kruga K , kojega polumjer je trećina polumjera kruga L te se valja po drugom krugu koncentričkom sa L o polumjeru osnovke Z .

Tim dana je konstrukcija hipocikloide sa trima granama. Ovu krivulju bi mogli i izvesti na način Steiner-a¹ izaberemo li za stranice trokuta pravce istosmjerne sa stranicami trokuta abm iduće točkami, odgovarajućimi točkam krivulje L , u kojih nju sieću pravci ab , cb , mc , gde znači c središte krivulje L .

11. Krivulja R izvedena iz čunjosjeka L raztavlja se u česti, ide li L nekom iz glavnih točaka.

Ide li L točkom m , transformira se ta točka u pravac M (čl. 5.) sve ostale točke u krivulju R , trećega stupnja, koja ima točku m za dvotočku. Buduć da čunjosjek L sieće pomoćni čunjosjek (U), (poznat iz prediduće razprave čl. 2.) u točki m , mora ju barem još jedanputa sieći u jednoj točki, tako da dobivamo na R jedan ili tri ubježne točke, što je u ostalom poznato iz teorije ovih krivulja.

12. Za nas je opet zanimiva krivulja, koju dobivamo za poseban položaj krivulje Z .

Osnovka Z je krug imajući središte s . Pravac M ima opet takav položaj, da točke a , b , m istostraničan trokut stvaraju. Krivulja

¹ Monatsberichte der Berliner Akademie, Januar 1856.

L je krug, te ima središte na pravcu ms , ide točkom s a tiče pravac M .

Izvedena krivulja R raztavlja se u pravac M te u krivulju 3. stupnja, koja ima u točki m povratište a ide točkami a, b . Ovaj drugi dio krivulje inverzije R je *cisoida*.

Čemo li ovu krivulju konstruirati po načinu *Salmon-a*¹ trebamo samo uzeti, da je udaljenost točke m od pravca M pol polumjera kružne ravnalice, koja ima svoje središte na pravcu ms te prolazi točkom m .

13. Priglednemo još k slučaju, gdje ide krivulje L točkami a, b, m ; potle sieče još osnovku u dvijuh točkah c, d .

Izvedena krivulja R četvrtoga stupnja raztavlja se u tom slučaju u 4 pravca A, B, M , te cd , što namah upoznamo, priglednemo li k točkam, kojimi mora da krivulja R ide.

Neka sad predje osnovka u krug Z , te krivulja L neka predje takodjer u krug idući središtem s osnovke; pravac M uzmimo, da je ubježan.

Obje krivulje L, Z idu imaginarnimi točkami kružnimi a, b te se sieču u točkah c, d . Izvedena krivulja raztavlja se u ubježan pravac M , u oba imaginarna pravca as, bs te u pravac cd .

U teoriji reciprokih provodnica se kaže, da krug idući središtem inverzije se transformira u zajedničku sekantu obijuh krugova, što opet vidimo, da nije korektno.

¹ Höhere ebene Curven pg 225.

K poznavanju lešinskih alkaloidâ.

OD DRA. GUSTAVA JANEČKA.

Čitano u sjednici matematičko-prirodoslovnoga razreda jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti 8. studenoga 1882.

Vrlo zanimiva iztraživanja *Selmi*-eva, kao i *Nencki*-eva, nadalje ona od *Moriggia* i *Battistinia*, te napokon *Gautier*-ova nepripustaju dvojbe o existenciji lešinskih alkaloida kao produkta razтворbe albuminata. Iz najnovijih publikacija *A. Gautiera* i *A. Etarda*¹ sledi dapače, da se alkaloidična tjelesa vrlo često, pak i u velikih množinah u samom živućem organizmu stvaraju, te da su ona stalni i nuždni produkti normalnoga ili patologičkoga života animalnih tkanina. Pomislimo li, da se običnimi metodami iztraživanja lešinskih ostanaka za otrovne alkoloide i takvi alkaloidični produkti razтворbe tkanina izlučiti moradu, te s druge strane, da se razmjerno riedko spominju opažanja sličnih tjelesa: moramo dopustiti, da tu imamo protuslovje, koje bi valjalo riješiti. Žalibože leži razjašnjenje tomu na blizu. Ono potiče odanle, što se sudbeno-kemijska iztraživanja često izvadaju po šablona a po polulaicij, kojim — govorim tu iz vlastita osvjedočenja — i samo znanje o existenciji takovih produkta posvema manjka. Navadja li *Gautier*,² da je na starija opažanja (prije *Selmi*-ovih te *Gautier*-ovih) o lešinskih alkaloidih tako malo obzir uzet, da se je „sve do godine 1872. svaki otrovni alkaloid, što ga poznatimi sudbeno-kemijskim iztražnim metodami izlučujemo, smatrao kao otrov u organizam uveden“, to treba strogu ovu izreku po mom osvjedočenju jošte u toliko razširiti, da se isto može i sada jošte, godine 1882., u mnogih slučajevih punim pravom predbacivati.

Gnjiloćom nastavši alkaloidi, kao što su ih dosele razni iztraživaoci bliže proučili, jesu skoro svi tekuća tjelesa. U sledjećem namjeravam progovoriti o krutom jednom produktu gnjilobe, o kojega alkaloidičnoj naravi nedvojim.

Kod iztraživanja tjelesnih ostataka po *Draggendorff*-ovoj metodi došao sam opetovano (dogodilo mi se je tako dosada u sedam slučajeva, kojih se šest tiče ljudskih ostanaka: želudca, jetara, slezene, crieva, srдца, pluća, krvi, jedan put i moždjana, a jedan svinjskoga želudca) na jedno tielo, koje se je dalo mućkanjem iz amonijakalne tekućine u tragovih prevesti u kloroform, a u većih množinah u amylov alkohol. Ove raztopine ostavile su naime, poslie oprezna izparenja do suha te opetovanoga očišćenja, kruto, skoro bezbojno tielo u malih dakako množinah, koje tielo niti pod sitnozorem nepokazivaše ništa kristalinična. Na lakmusov papir reagovaše ono intenzivno alkalično. Raztopi li se u razriedjenoj solnoj kiselini, te izpari li se onda polako do suha, tad ostavlja ostatak, kako se čini, kristalinična oblika. Prvotna tvar se u hladnoj razriedjenoj solnoj kiselini polako i dosta težko topi, nego brzo kad se ugrije; težje topi se u vodi. Raztopina u solnoj kiselini, iz koje je suvišak kise-

¹ Bull. Par. 37, 305.

² Compt. rend. 94, 1119.

line izparenjem na vodenoj kupelji odstranjen, daje sa raztopinom zlatnoga klorida žut, amorfno-prašast, sa fosformolybdenovom kiselinom žut, pahuljast talog. Živinokalijev jodid stvara s njom talog sumporne boje, koji i poslje 36-satnoga stajanja ostaje bezlik. Sa platinenim kloridom daje ista raztopina tekar poslie nekog stajanja žut talog, dočim njom sublimovani ferriklorid nereaguje. Vodena raztopina prvotna alkaloidična tela sa raztopinom trieslovine bude odmah bijelo i amorfno taložena; taj se talog neraztapa u slaboj solnoj kiselini. Sa koncentrovanom sumpornom kiselinom tvar ta nereaguje; raztopljena u razriedjenoj sumpornoj kiselini redukuje kalijev ferrikyanid vrlo intenzivno.

Od osobite zanimivosti je reakcija sa *Fröhde*-ovom tekućinom: suha tvar uz dodatak te tekućine postane odmah crveno-modrovioltna, promieni onda boju u zeleno, konačno u žuto, te ostaje poslie duljega stajanja smeđjo-žuta. Kako se vidi, ova reakcija naliči vrlo reakciji morfinskoj, koja potonja se osim toga smatra vrlo karakterističnom. Kad su se stavila dva stakalca od ure jedno do drugoga, i to jedno sa upitnim tielom, drugo pako sa uzorkom morfina, te je obima dodano *Fröhde*-ove tekućine, kod obiju se je uzoraka ista promjena boje uvijek takorekuć istodobno pojavila, sa vanrednom sličnošću nuance. Samo ljubičasta boja, što ju pokazuje morfin poslie po prilici 24-satnoga stajanja, kod upitnoga tiela nije opažena.

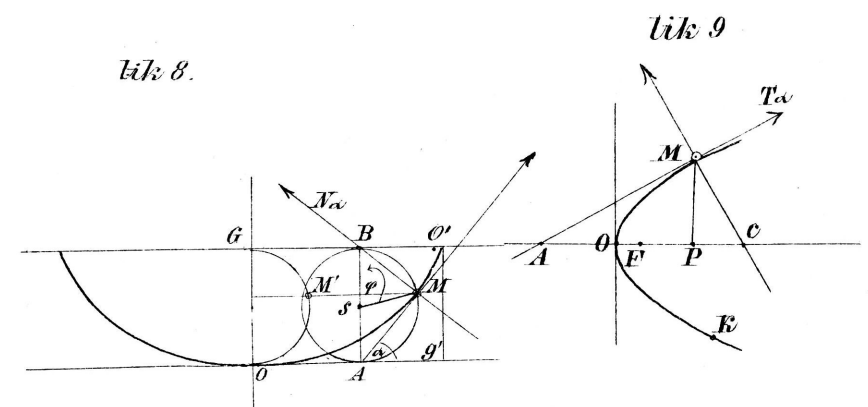
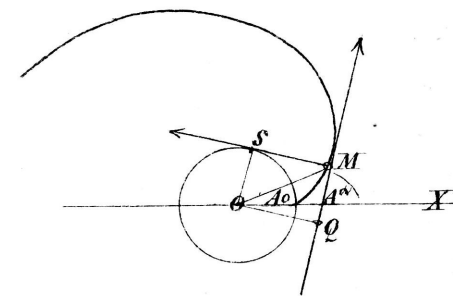
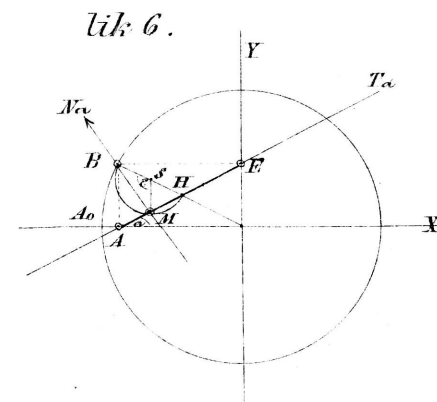
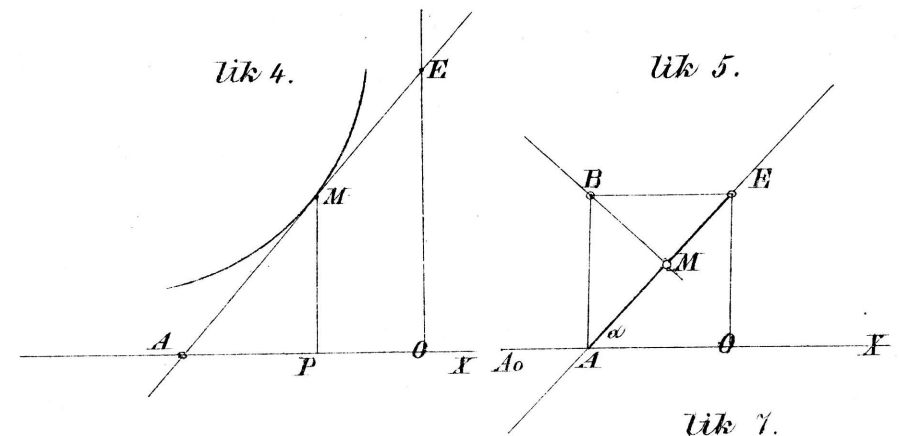
Sbog malih množinah iztražnoga materijala, koje sam do sada uvijek na raspolaganje imao, nije bilo moći izvesti jošte i neke daljnje reakcije, time manje potpunije iztraženje toga tiela. Ali forensična važnost opisanih, te razmjerno često se opetujućih opažanja sklonila me je, da na nje jošte prije započetih daljnjih iztraživanja upozorim, tim više, što mi se mogućnost zamjene opažena alkaloida s morfinom nečini izključenom. Okolnost, što se upitno tielo pojavljuje dakako dosta često, ali ipak ne uvijek, pokazuje na to, da njegova prisutnost u animalnih tvarih visi o nekih nepoznatih jošte uvjetih; poglavito mislim, da sam opazio, da je od velika upliva veći ili manji doticaj sa zrakom za vrijeme gnijjenja, osvjeđoćio sam se takodjer, da upotrebljena ekstraktivna sredstva (kloroform, amylov alkohol) nisu uzrok pojavljivanju toga alkaloida, nasuprot su se ona posve izhlapljiva te čista pokazala. Spominjem to izrično u oči opažanja *Heitinger*-ova¹ o prisutnosti organskih osnova u amylovu alkoholu. U koliko po meni opaženo tielo možda stoji u savezu sa ekstraktivnom tvarju, što ju je dobio *L. Liebermann*² prigodom iztraživanja lešinskih ostanaka po *Stas-Otto* voj metodi, teško se daje prosuditi, jer *Liebermann* baš reakcije sa *Fröhde*-ovom raztopinom u svojoj razpravi nespominje. Ali od ptomaina, što ga je *Selmi*³ našao, te o njem navadja, da morfinu naliči, da se karakterisuje ljubičastom bojom kod ugrijanja sa sumpornom kiselinom, te da sa Fe_2Cl_6 modrast postane, moj je alkaloid nedvojbeno različit.

Zagreb, kr. sveuč. kemijski zavod, mjeseca rujna 1882.

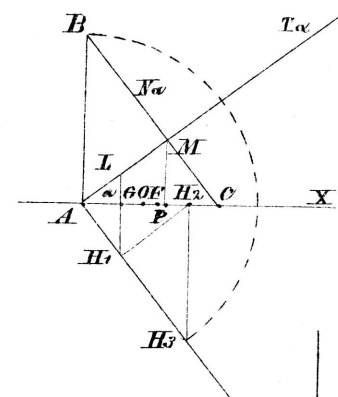
¹ Monatsh. f. Chem. 3, 688

² Ber. d. d. chem. Gesellsch. Berlin.

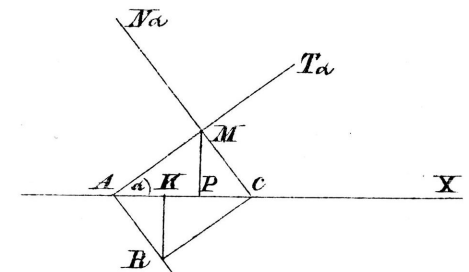
³ Ber. d. d. chem. Gesellsch. Berlin, 6, 141; 9, 151.



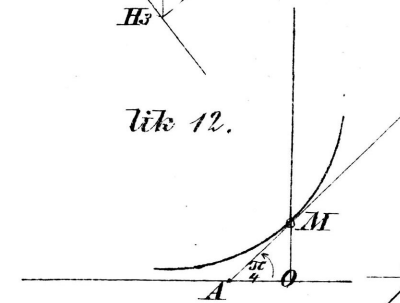
lik 10.



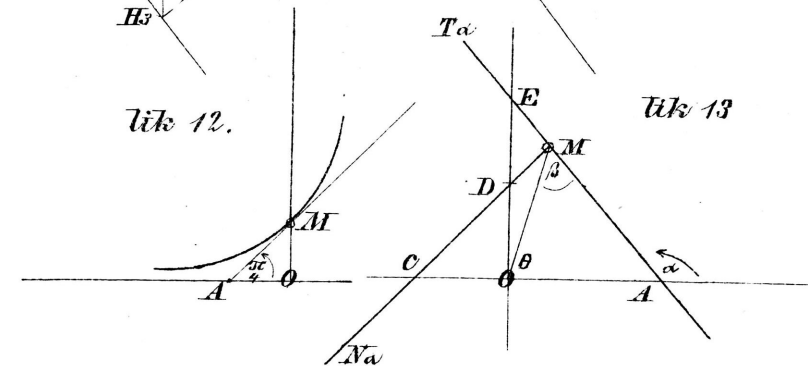
lik 11.



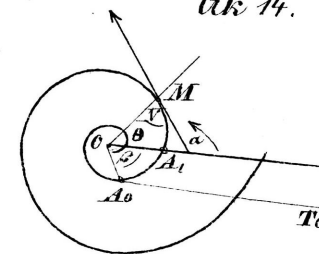
lik 12.



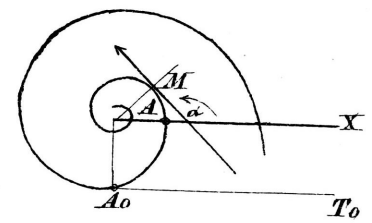
lik 13.

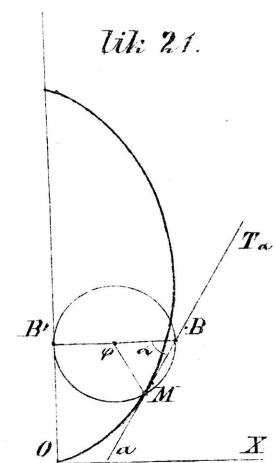
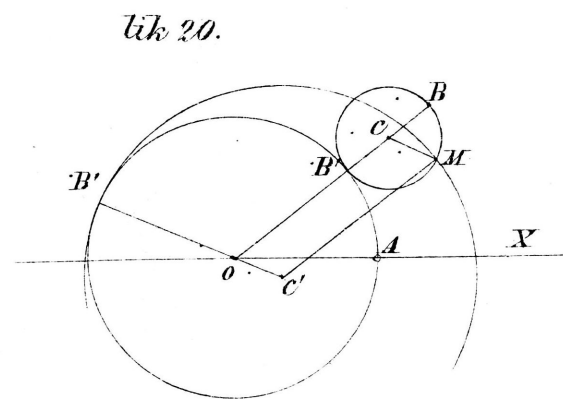
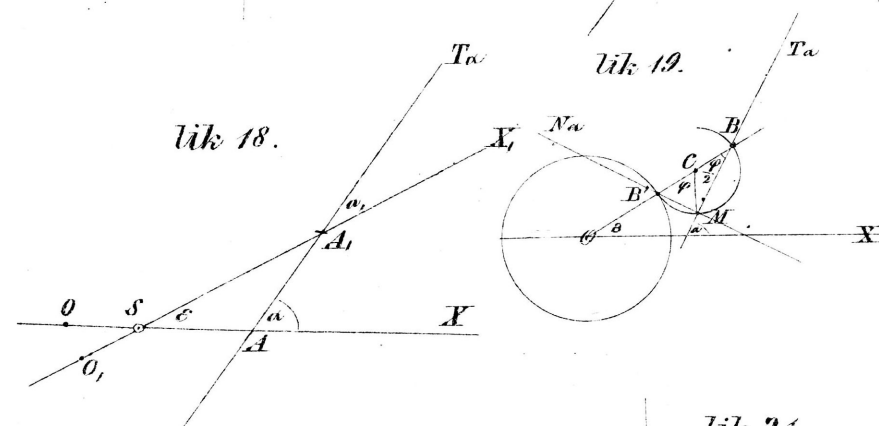
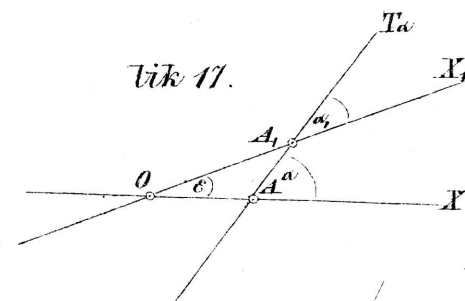
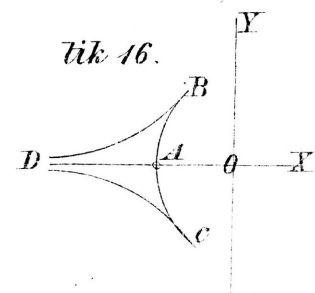


lik 14.



lik 15.





U knjižarnici Lavoslava Hartmána u Zagrebu mogu se dobiti knjige, koje izdaje jugoslavenska akademija znanosti i umjetnosti, koje izlaze njezinom pomoću i koje su prešle u njezinu svojinu:

Rad jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti. Knjiga I do XIX. U Zagrebu 1867—1872. Ciena svakoj knjizi 1 for. 25 novč. a. v.

Rad jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti. Knjiga XX. do LX. LXII. LXIII. U Zagrebu 1872—1882. Ciena svakoj knjizi 1 fr. 50 n. a. v.

Rad jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti. Knjiga LXI., LXIV. Matematičko-prirodoslovni razred. I., II. Ciena 1 for. 50 nvč. IIa., IIb. 75 nč.

Monumenta spectantia historiam Slavorum meridionalium. Vol. I. II. III. IV. V. IX. XII. *Listine o odnosajih izmedju južnoga slavenstva i mletačke republike.* Skupio S. Ljubić. Knjiga I. II. III. IV. V. IX. XII. U Zagrebu 1868. 1870. 1872. 1874. 1875. 1878. 1882. Ciena prvoj, drugoj, trećoj i devetoj knjizi po 3 for., četvrtoj 4 for. a petoj i dvanaestoj 2 for. 50 novč.

Monumenta spectantia historiam Slavorum meridionalium. Vol. VI. VIII. XI. *Commissiones et relationes venetae.* Tom. I. II. III. Zagrabiae 1876. 1877. 1880. Ciena prvjoj i trećoj knjizi 2 fr., drugoj 2 fr. 50 nč.

Monumenta spectantia historiam Slavorum meridionalium. Vol. VII. *Documenta historiae chroaticae periodum antiquum illustrantia.* Collegit digessit, explicuit dr. Fr. Rački. Zagrabiae 1877. C. 6 f

Monumenta spectantia historiam Slavorum meridionalium. Vol. X. *Monumenta Ragusina.* Tom. I. Zagrabiae 1879. Ciena 2 for. 50. nvč.

Monumenta historico-juridica Slavorum meridionalium. P. I vol. I. *Statuta et leges Curzulae.* Zagrabiae 1877. Ciena 3 for.

Monumenta historico-juridica Slavorum meridionalium. P. I. vol. II. *Statuta et leges civitatis Spalati.* Zagrabiae 1878. Ciena 3 fr.

Stari pisci hrvatski. I. *Pjesme Marka Marulića.* Skupio I. Kukuljević Sakcinski. U Zagrebu 1869. Ciena 2 for. a. v.

Stari pisci hrvatski. II. *Pjesme Šiška Menčetića Vlahovića i Gjore Držića.* Skupio V. Jagić. U Zagrebu 1870. Ciena 2 for. a. v.

Stari pisci hrvatski. III. *Pjesme Mavra Vetranića Čavčića.* Dio I. Skupili dr. V. Jagić, dr. I. A. Kaznačić. U Zagrebu 1871. Ciena 2 fr.

Stari pisci hrvatski. IV. *Pjesme Mavra Vetranića Čavčića.* Dio II. Skupili dr. V. Jagić, dr. I. A. Kaznačić i dr. Gj. Daničić. U Zagrebu 1872. Ciena 2 for. 50 novč. a. v.

Stari pisci hrvatski. V. *Pjesme Nikole Dimitrovića i Nikole Nalješkovića.* Skupili dr. V. Jagić i dr. Gj. Daničić. U Zagrebu 1873. C. 2 f.

Stari pisci hrvatski. VI. *Pjesme Petra Hektorovića i Hanibala Lucića.* U Zagrebu 1874. Ciena 2 for. a. vr.

Stari pisci hrvatski. VII. *Djela Marina Držića.* U Zagrebu. Ciena 3 fr.

Stari pisci hrvatski. VIII. *Pjesme Nikole Nalješkovića, Andrije Čubranovića, Miše Pelegrinovića i Saba Mišetića Bobaljevića i Jegjupka neznana pjesnika.* U Zagrebu 1876. Ciena 1 for. 70 nvč.

Stari pisci hrvatski. IX. *Djela Iva Frana Gundulića.* Na sviet izdala jugosl. akad. znanosti i umjetnosti. U Zagrebu 1877. Ciena 5 for. a. v.

Stari pisci hrvatski. X. *Djela Frana Lukarevića Burine.* Na sviet izdala jugosl. akad. znanosti i umjetnosti. U Zagrebu 1878. Ciena 2 for. 50 nvč.

Stari pisci hrvatski. XI. *Pjesme Miha Bunića Babulinova, Maroja i Oracija Mažibradića, Marina Burešića.* Na sviet izdala jugosl. akad. znanosti i umjetnosti. U Zagrebu 1880. Ciena 1 for. 80 novč. a. v.

Stari pisci hrvatski. XII. *Djela Gjona Gjora Palmotića.* Na sviet izdala jugosl. akad. znanosti i umjetnosti. U Zagrebu 1882. Dio I. Ciena 3 fr.

Starine. Izdaje jugoslavenska akademija znanosti i umjetnosti. Knjiga I. do XIV. U Zagrebu 1869—1882. Ciena I. knjizi 1 for. 25 nč. a. v., VII. i X. 2 for. a. v., a ostalim po 1 for. 50 novč. a. v.

- Izprave o uroti bana Petra Zrinskoga i kneza Fr. Frankopana.** Skupio dr. Fr. Rački. U Zagrebu 1873. Ciena 3 for.
- Vetera monumenta Slavorum meridionalium historiam illustrantia.** Edidit A. Theiner. Tomus I. Romae 1863. Ciena 8 for. a. v. Tomus II. Zagrabiae 1875. Ciena 10 for. a. v.
- Pisani zakoni na slovenskom jugu.** Bibliografski nacrt dr. V. Bogišića. U Zagrebu 1872. Ciena 1 for. 25 novč. a. v.
- Zbornik sadašnjih pravnih običaja u južnih Slovena.** Kujiga I. **Gragja u odgovorima iz različenih krajeva slovenskoga juga.** Osnovao, skupio, uredio V. Bogišić. U Zagrebu 1874. Ciena 6 for. a. v.
- Rječnik lečničkoga nazivlja.** Sastao dr. Ivan Dežman. U Zagrebu 1868. Ciena 1 for. 50 novč. a. v.
- Flora croatica.** Auctoribus Dr. Jos. Schlosser et Lud. Farkaš-Vukotinović. Sumptibus et auspiciis Academiae scientiarum et artium Slavorum meridionalium. Zagrabiae 1869. Ciena 6 fl. a. v.
- Fauna kornjašah trojedne kraljevine.** Od dra. Josipa Krasslava Schlossera Klekovskoga. Na sviet izdala jugoslavenska akademija znanosti i umjetnosti. Svezak I. II. III. U Zagrebu 1877. 1878. 1879. Ciena svakoj knjizi 3 for.
- Dvje službe rimskoga obreda za svetkovinu sv. Ćirila i Metuda** izdao Ivan Berčić. U Zagrebu 1870. Ciena 1 for. a. v.
- Historija dubrovačke drame.** Napisao prof. Armin Pavić. U Zagrebu 1871. Ciena 1 for. 25 novč. a. v.
- Historija književnosti naroda hrvatskoga i srbskoga.** Napisao V. Jagić. Pomoću jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti. Knjiga I. Staro doba. U Zagrebu 1867. Ciena 1 for. 20 novč. a. v.
- Opis jugoslavenskih novaca** od prof. Sime Ljubića. Podporom jugoslavenske akademije. Zagreb 1875. Ciena 10 i 15 for.
- Jugoslavenski imenik bilja.** Sastavio dr. Bogoslav Šulek. Ciena 2 fr. a. v.
- Bilinar. Flora excursoria.** Sastavili dr. J. C. Schlosser i Ljud. Vukotinović. Zagreb 1876.
- Narodne pjesme o boju na Kosovu god. 1389.** Sastavio u cjelinu Armin Pavić. U Zagrebu 1877. Ciena 1 for.
- Korijeni s riječima od njih postalijem u hrvatskom ili srpskom jeziku.** Napisao Gj. Daničić. U Zagrebu 1877. Cijena 4 for. a. v.
- Ljetopis jugoslavenske akademije.** I. (1367—77). U Zagrebu 1877. Ciena 60 novč.
- Rječnik hrvatskoga ili srpskoga jezika.** Na sviet izdaje jugoslaven. akademija znan. i umjet. Obradjuje Gj. Daničić. (Ogled.) U Zagrebu 1878.
- Rječnik hrvatskoga ili srpskoga jezika.** Na sviet izdaje jugoslavenska akademija znanosti i umjetnosti. Obradjuje Đ. Daničić. Dio I. Svezak 1. 2. 3. 4. U Zagrebu 1880. 1881. i 1882. Cijena svesku 3 for. a. v. cijelomu prvomu dijelu 12 for. a. v.
- Figure u našem narodnom pjesničtvu s njihovom teorijom.** Napisao L. Zima. U Zagrebu 1880. Ciena 2 for 50 novč. a. vr.
- Izvjješće o zagrebačkom potresu 9. studenoga 1880.** Sastavio J. Torbar. Ciena 2 for.
- Euehologium glagolski spomenik manastira Sinai brda.** Izdao dr. Lavoslav Geitler. Ciena 2 for.
- Povjestni spomenici južnih Slavenah.** Izdaje Ivan Kukuljević Sakcinski. Kujiga I. U Zagrebu 1863. Ciena 3 for. a. v.
- Rječnik iz književnih starina srpskih.** Napisao Gj. Daničić. Knjiga II. i III. Ciena svakoj 3 for. a. v.
- Nikoljsko jevangjelje.** Na svijet izdao Gj. Daničić. Ciena 1 for. 30 novč. a. v.
- Život sv. Save i Simeuna.** Od Domentijana. Na sviet izdao Gj. Daničić. Ciena 1 for. 30 novč. a. v.
- Životi kraljeva i arhiepiskopa srpskih.** Od Danila. Na svijet izdao Gj. Daničić. Ciena 1 for. 30 novč. a. v.
- Poslovice.** Na svijet izdao Gj. Daničić. U Zagrebu 1871. Ciena 1 for.