RAD JUGOSLAVENSKE AKADEMIJE ZNANOSTI I UMJETNOSTI
KNJIGA 319

ODJEL ZA MATEMATIČKE, FIZIČKE I TEHNIČKE NAUKE

KNJIGA VIII.

UREDNIK

Akademik JOSIP LONČAR

JUGOSLAVENSKA AKADEMIJA ZNANOSTI I UMJETNOSTI

R A D

JUGOSLAVENSKE AKADEMIJE

ZNANOSTI I UMJETNOSTI

Á

Z A G R E B

1 9 6 1

Tehnička redakcija, tisak, uvez i oprema:

IZDAVAČKI ZAVOD JUGOSLAVENSKE AKADEMIJE

ZAGREB

RADOVAN VERNIĆ

PERIODIČNA I SIMETRIČNA RJEŠENJA PROBLEMA VIŠE TIJELA

1.

Napomena 1. U raspravi [4], nakon niza teorema o periodičnim rješenjima u problemu triju tijela naveo sam završni X. teorem (p. 259): »*Jedina periodična rješenja općeg problema triju tijela su* LAGRANGEova *egzaktna rješenja*«. Već prije (cf. [4] lema I, p. 250) bio je odavle nužno i prirodno isključen restringirani problem. Dokaz se tamo sastojao iz dva bitna pripremna dijela: prvo iz dokaza simultanosti ekstrema svih distancija r_{jk} i njihovih homogenih definitnih formi, J, V i t. d. sa $\begin{matrix}\text{suglasnom}\\ \text{nesuglasnom}\end{matrix}$ monotonošću uz stepen homogenosti $\sigma \gtrless 0$; drugo iz dokaza parnosti funkcije V, J, odnosno neparnosti $T(u)$, što je ubrzo dalo završni izraz $JV^2 = C$. Time se »POINCARÉOV« problem periodičnosti rješava na neočekivan način.

U raspravi [11] [12] proširio sam navedena istraživanja na slučaj $n \geqq 4$ tijela, ali sam istodobno upozorio (§ 222), da dokaz u [4] nije besprijekoran, te da su tu potrebna dalja istraživanja. Doista, mogu se staviti bitni prigovori objema glavnim točkama dokaza, koje ga čine iluzornim: 1. činjenica je, doduše, da su J, V (cf. formule (1) ovdje) nesuglasno monotone pozitivno definitne funkcije (na citiranom mjestu [4] p. 261 je uostalom pogrešno upotrebljena riječ »semidefinitna« za slučaj $J \geqq 0$, $V \geqq 0$); ali nigdje nije zajamčeno, da u ograničenom intervalu, u kojem po stazama, glasom diferencijalnih jednadžbi problema, variraju distancije r_{jk}, i to u pravilu > 0 (dakle iznad svog »prirodnog« minimuma $r_{jk} = 0$) – da u tom intervalu $0 \leqq a_{jk} \leqq r_{jk} \leqq A_{jk}$ $(1 \leqq j < k \leqq n)$ nastupaju ekstremi od J, V međusobno istodobno i sa samima r_{jk}. Nije bila dakle ispravno dokazana tvrdnja »istodobnost« (po regularizabli – pseudovremenu u): $dr_{jk}/du = 0$, $dJ/du = 0$, $dV/du = 0$. 2. Činjenica je, doduše, kako je na citiranom mjestu navedeno, da za funkciju $\Psi(u) \equiv T(u) + T(-u)$ zbog uvjeta periodičnosti $\omega + 2hT(\omega) = 0$,

$-\omega + 2hT(-\omega) = 0$ bude $\Psi(\omega) = 0$, $\left(\frac{d\Psi}{du}\right)_\omega = \frac{1}{V(\omega)} - \frac{1}{V(-\omega)} = \frac{1}{V_0} - \frac{1}{V_0} = 0$. No dalja konstatacija (cf. [4] p. 261/2) »funkcija $\Psi(u)$ je kao linearna kombinacija partikularnih integrala $T(u)$, $T(-u)$ homogene jednadžbe $L(J) \equiv \frac{d}{du}\left(V \cdot \frac{dJ}{du}\right) = 0$ opet partikularni integral te jednadžbe i zato nužno $\Psi(u) \equiv 0$, t. j. $T(u) \equiv -T(-u)$« je ispravna, kako ću ovdje pokazati, ali ne može poslužiti kao elemenat dokaza, jer je ekvivalentna tvrdnji, t. j. petitio principii. Tu okolnost zapazio je nezavisno od mene početkom 1956 G. A. MERMAN u jednoj kritici nekih točaka nekih mojih radova, koja se inače ne može prihvatiti; o tome cf. podrobnije [11] p. 50 »Dodatak pri korekturi«. Računajmo naime eksplicite:

$$J_1 \equiv T(u), \quad J_2 \equiv T(-u);$$

$$\frac{dJ_1}{du} = \frac{1}{V(u)}, \quad \frac{dJ_2}{du} = \frac{dT(-u)}{d(-u)} \cdot \frac{d(-u)}{du} = -\frac{1}{V(-u)};$$

$$L(J_1) = \frac{d}{du}\left[V(u)\frac{dJ_1}{du}\right] = \frac{d}{du}\left[\frac{V(u)}{V(u)}\right] \equiv 0;$$

$$L(J_2) = \frac{d}{du}\left[V(u)\frac{-1}{V(-u)}\right] = -\frac{d}{du}\left[\frac{V(u)}{V(-u)}\right].$$

Sad je $L(J_2) = 0$ točno onda (= onda i samo onda), ako je $V(u)/V(-u) = \text{const}$, $V(u) = C \cdot V(-u)$, t. j. V parna funkcija ili $T(u)$ neparna funkcija, a to tek treba dokazati. Drugim riječima, $T(-u)$ je točno onda partikularni integral od $L(J) = 0$, ako je neparna funkcija, te se na toj činjenici ne može osnivati dokaz, da je $T(u)$ neparna funkcija.

Prema tome je najvažniji i centralni teorem o periodičnim rješenjima u mojim raspravama ostao u suštini nedokazan. Glavni je cilj ove sadašnje rasprave, da u potpunosti dade taj dokaz. Osim toga pojavili su se i neki konkretni primjeri [9] s pomoću formula iz [8], odnosno interesantni teoremi [7] u najužoj vezi s našom problematikom, koje – zajedno s onim iz [6] – treba u potpunosti osvijetliti.

2.

Lema I: Neka je dano n materijalnih točaka s masama m_i $(i = 1 \ldots n)$, koje se privlače po NEWTONOVU zakonu gravitacije u smislu klasične mehanike. Onda je *potencijal* (= potencijalna funkcija $= -E_{pot}$) i *polarni moment inercije*

$$V \equiv \sum_{j<k}^{1\ldots n} \frac{m_j m_k}{r_{jk}} > 0, \quad J \equiv \frac{1}{M} \sum_{j<k}^{1\ldots n} m_j m_k r_{jk}^2 \geqq 0. \tag{1}$$

Totalna (globalna) *regularizacija* dobiva se uvođenjem nove varijable »pseudovremena« u formulama

$$dt = dT(u) = du/V(u), \quad u(t) = \int_0^t V(\xi)\, d\xi, \quad t \equiv T(u) = \int_0^u \frac{d\xi}{V(\xi)} \tag{2}$$

sa specijalnim pridruženjem brojanja vremena $u_0 = t_0 = 0$. Onda LAGRANGEova jednadžba dobiva samoadjungirani oblik

$$L(J) \equiv \frac{d}{du}\left(V \cdot \frac{dJ}{du}\right) = 2\left(1 + \frac{2h}{V}\right) \tag{3}$$

s općim integralom

$$J(u) = 2\,[hT^2(u) + uT(u) - \int_0^u T(\xi)\, d\xi] + J_0, \quad J_0' = 0,$$

$$\frac{1}{2} VJ' = u + 2hT(u). \tag{4}$$

Diferencijalne jednadžbe problema time su regularizirane

$$\frac{d}{du}\left(V \frac{dx_i}{du}\right) = \frac{1}{m_i V} \cdot \frac{\partial V}{\partial x_i}$$

ili

$$\frac{d^2 x_i}{du^2} = \left(-\frac{1}{V}\frac{dV}{du}\right)\frac{dx_i}{du} + \frac{1}{m_i V^2} \cdot \frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (1 \leqq i \leqq n) \tag{5}$$

i daju koordinate, distancije r_{jk} $(1 \leqq j < k \leqq n)$ i vrijeme $t = T(u)$ kao regularne analitičke funkcije (holomorfne) »pseudovremena« u za sve $-\infty < u < +\infty$, a time na temelju monotono suglasne transformacije (2) i za sva vremena $-\infty < t < +\infty$.

DOKAZ: [12] odnosno za $n = 3$ već [4].

Lema II: Periodična rješenja problema više tijela sadržana su među periodičnim rješenjima LAGRANGEove jednadžbe (3) te su karakterizirana uvjetima

$$\omega + 2hT(\omega) = 0, \quad T(\omega) = \tau; \quad h < 0, \quad F(u) = \int_0^u T(\xi)\, d\xi$$

$$F(\omega) = \int_0^\omega T(\xi)\, d\xi = -\frac{\omega^2}{4h} = -hT^2(\omega) = -h\tau^2 > 0 \tag{6}$$

uz trivijalne relacije:

$$V(u + k\omega) = V(u), \quad J(u + k\omega) = J(u); \quad V(k\omega) = V_0, \quad J(k\omega) = J_0$$

$$\frac{dV(u + k\omega)}{du} = \frac{dV(u)}{du}, \quad \frac{dJ(u + k\omega)}{du} = \frac{dJ(u)}{du}; \tag{7}$$

$$T(0) = 0, \quad V(0) > 0, \quad J(0) \geqq 0, \quad J'(0) = 0.$$

DOKAZ: [12] odnosno za $n = 3$ već [4]. U daljem uzimamo ω (period) kao najmanji takav broj, koji mora postojati zbog holomorfnosti.

Teorem I: Svaka neprekidna zatvorena staza materijalne točke u nekom mehaničkom problemu ima bar dvije »točke okomitosti«, dakle takve, u kojima je brzina okomita na radiju vektoru.

Dokaz: a) Neka je O ishodište, $\vec{r}$ radij vektor materijalne točke m, $\vec{v}$ njena brzina, $\sphericalangle(\vec{r}, \vec{v}) \equiv \alpha$. Odaberimo neku točku A na stazi. Onda je ona ili već takva, da je u njoj $\alpha_A = \frac{\pi}{2}$, pa imamo već jednu točku, ili to nije, nego je recimo $\alpha_A \neq \frac{\pi}{2}$ spec. $\alpha_A < \frac{\pi}{2}$. U tom drugom slučaju ne može stalno ostati kut $\alpha < \pi/2$, jer bi m spiralno ušlo u O. Zbog neprekidnosti i zatvorenosti postoji točka 1 sa $r_1 = r_{\min}$ i $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$.

b) No dalje ne može opet ostati $\alpha > \pi/2$, jer bi se m trajno udaljavalo, nego isto tako postoji točka 2 sa $r_2 = r_{\max}$, $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$. Dakle $(d\,r\,/\,d\,u)_1 = 0$ i $(d\,r\,/\,d\,u)_2 = 0$. To je jednostavno Weierstrassov teorem kinematički interpretiran. q. e. d.

Korolar I: Točke okomitosti iz teorema I tvore ujedno *stacionarnu* ili *apsidalnu* konfiguraciju problema.

Teorem II: U problemu više tijela s ma kakvim centralnim silama u općenitom slučaju točke okomitosti, odnosno stacionarne točke (spec. ekstremalne) nastupaju *simultano* za sve mase sustava, dakle sustav dolazi u stacionarnu spec. ekstremalnu konfiguraciju; (pozitivno) definitne forme distancija r_{jk} simultano poprimaju ekstremalne vrijednosti.

Dokaz: a) Takve su (pozitivno) definitne forme $J(r)$, $V(r) \ldots F_s(r) = c \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i^* r_i^s$, $m_i^* \equiv m_j m_k$, $r_i \ldots 1 \leqq i \leqq N \equiv \binom{n}{2}$, $(s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ in inf.) za neki čvrsti, inače po volji odabrani poredak parova indeksa (jk) kod distancija r_{jk} u jednostavni niz. Onda su stacionarne točke, specijalno ekstremi karakterizirani uvjetima

$$\frac{d\,J}{d\,u} = \frac{2}{M} \sum_{i=1}^{N} m_i^* r_i \frac{d\,r_i}{d\,u} = 0, \quad \frac{d\,V}{d\,u} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i^*}{r_i^2} \frac{d\,r_i}{d\,u} = 0 \ldots \frac{d\,F_s}{d\,u} = c\,s \sum_{i=1}^{N} m_i^* r_i^{s-1} \frac{d\,r_i}{d\,u} = 0.$$

Pritom se $r_i = r_i(u)$ imaju uzimati kao holomorfni integrali sustava (5) po lemi I. Ovdje nam je svejedno, da li je V potencijal ili ne, jer nam služi samo kao konkretna pozitivno definitna forma u distancijama.

b) Ako tražimo, da sve te forme imaju simultani ekstrem, onda zbog s po volji imamo odmah posljedicu $d\,r_i\,/\,d\,u = 0$ $(1 \leqq i \leqq N)$. Onda su

nesumnjivo i distancije simultano ekstremalne i imamo ekstremalne konfiguracije. No mi tvrdimo, da već jedna relacija $dF_s/du = 0$ povlači sve ostale za sobom, a to je moguće samo (u općenitom slučaju) ako su istodobno svi $dr_i/du = 0$.

Doista zbog $m_i^* > 0$, $r_i > 0$ (isključeni sudari kao specijalni slučaj!) jest uvjet za jednu formu $dF_s/du = 0$ moguć uz *ma kakve mase* točno onda, kad su svi $dr_i/du = 0$, a to dajc i za sve ostale moguće F_s istu situaciju; uzmemo li s dovoljno veliko ($> N$), izlazi tvrdnja, već kao primjena WEIERSTRASSova teorema na te forme. Termin »ma kakve mase« znači slobodno odaberive mase, dakle i slobodno (kontinuirano) promjenljive mase. To je nešto drugo, nego unaprijed za dani problem fiksno dat n-tupel brojeva $m_i > 0$. Na tu se problematiku vraćamo uskoro u točki 4. Samo treba posebno istaći dvoje: za čvrsto date mase moguće je općenito riješiti uvjet $dF_s/du = 0$ uz dano s i bez $dr_i/du = 0$: samo je praktički gotovo nemoguće takav protivprimjer konstruirati, jer r_i moraju istodobno zadovoljavati diferencijalne jednadžbe problema. U praksi je taj problem riješen samo za simetrične uvjete, a onda je po konstrukciji opet ispunjen naš osnovni uvjet i teorem X, onaj završni teorem o periodičnim stazama u pitanju, vrijedi bez ograničenja. Drugo, sadašnji teorem popravlja prvi uvodno navedeni nedostatak dokaza tog završnog teorema o periodičnim stazama, q. e. d.

Teorem III: Stacionarne (apsidalne) ili okomite konfiguracije iz prošlog teorema u problemu više tijela ujedno su *simetrične* ili *zrcalne konfiguracije,* t. j. gibanje sustava je simetrično ili zrcalno prije i poslije odnosnog momenta takve konfiguracije.

DOKAZ: a) Značenje simetričnih, odnosno zrcalnih konfiguracija za periodična rješenja prvi je sistematično izučavao ELIS STRÖMGREN pri izvođenju svog programa »numeričke triangulacije i topografije« restringiranog problema oko g. 1900., iako sporadički dolazi ta ideja i znatno ranije. Baš o toj problematici pisao sam u [3] § 21, p. 90 (10), gdje su navedeni i detalji. No već u [2] teor. II § 211, p. 82/83 služio sam se svojstvom simetričnosti ili zrcalnosti. Kasnije su to općenito izrazili škotski autori ROY-OVENDEN [7]: »In Part II is proved that if, at a certain epoch, a system of n gravitating point-masses has each radius vector from the (assumed stationary) centre of mass of the system perpendicular to every velocity vector (hereinafter called a »mirror configuration«), then the behaviour of each of the point-masses under the internal gravitational forces of the system after the epoch will be a mirror image of its behaviour prior to the epoch. It is further shown that, if a mirror configuration of the system exists at two separate epochs then the orbit of each point-mass is periodic«. To je njihov »mirror theorem« = zrcalni teorem.

b) Kako se iz uvodne napomene I razabira, meni će ovdje biti potreban zapravo »obratni zrcalni teorem«, naime okolnost, da su periodične staze uvijek dvostruko simetrične, jer će nam to dati za r_{jk} parne funk-

cije, a time to isto za $J(u)$, $V(u)$, dok je $T(u)$ neparna, što nam upravo nedostaje. Interesantno je, međutim, da istovremeno dokazujemo i »direktni zrcalni teorem« (nezavisno od [7]), jer dokazujemo u idućem teoremu identičnost dvostrukosimetričnih konfiguracija (dvostrukozrcalnih) s periodičnima.

c) Sama tvrdnja ide sad iz simetričnosti ili zrcalnosti diferencijalnih jednadžbi problema s obzirom na vrijeme: ako u (5) uz iste stacionarne ili okomite radije vektore $\vec{r}_i(0)$, $|\dot{r}_i'(0)|$ izmijenimo smjerove brzina: $\dot{r}_i'(-0) = -\dot{r}_i'(+0)$ ali istodobno i *smjer* mijenjanja *vremena* t u $-t$, dobivamo s istim početnim uvjetima za oba simetrična ili zrcalna problema iste diferencijalne jednadžbe, dakle i ista rješenja i isti tok gibanja; q. e. d. (To je uostalom davno poznato svojstvo problema više tijela: [1] [2] [3] i t. d.)

Teorem IV: Dvostrukosimetrična (dvostrukozrcalna) rješenja problema više tijela identična su s periodičnim rješenjima tog problema.

Dokaz: a) Pretpostavimo, da imamo periodična rješenja (to je »obratni zrcalni teorem« spomenut u prošlom teoremu). Tada je naime staza svake od materijalnih točaka (neprekidna i) zatvorena. Upozoravam naročito na tu okolnost i citiram E. T. Whittakera (Math. Enc. VI 2, B 12, No 5, p. 526): »Das Dreikörperproblem besitzt Partikularlösungen, bei denen die wechselseitigen Entfernungen periodische Funktionen der Zeit sind. Solche Lösungen bezeichnet man als periodische Lösungen oder als periodische Bahnkurven des vorgelegten Problems. Man wendet allgemein diese Bezeichnung für Lösungen eines dynamischen Problems an, bei denen die Bahnkurven geschlossen sind«. Tada po teoremu I imaju bar dvije točke okomitosti, po teoremu II su to dvije simultane stacionarne (apsidalne) konfiguracije, te po teoremu III izlazi onda dvostruka simetrija (zrcalnost). Ne zaboravimo, da to vrijedi za *opći* problem uz *ma kakve mase*.

b) Pretpostavimo obratno, da imamo dvostrukosimetrična (dvostrukozrcalna) rješenja. Onda je tvrdnja »zrcalni teorem« Roya i Ovendena [7], ali još kraće i općenitije prema noti D. Blanuša (Glasnik mat. fiz. astr. (2) 11 (1956) No 3/4, p. 247, Zagreb), iako tamo dolazi u sasvim drugom kontekstu.

4.

Napomena II: Ostaje pitanje, što je s jednostrukosimetričnim (jednostrukozrcalnim) rješenjima. U njima su $J(u)$, $V(u)$ i svi $r_{jk}(u)$ opet parne funkcije pseudovremena u, a i vremena t jer je $t = T(u)$ neparna funkcija. Iz te će okolnosti izaći, kako sam već rekao, uskoro tvrdnja »završnog teorema periodičnosti«, da su periodična rješenja općeg problema više tijela identična s egzaktnim rješenjima, u kojima sve mase sustava tvore centralne konfiguracije. No tamo će neprimjetno ući pretpostavka periodičnosti u specijalnom zahtjevu zatvorenosti. Sama okol-

nost, da bi jednostrukosimetrična staza bila konačna, nije međutim dovoljna za takav zaključak, jer se može asimptotski omatati oko neke granične točke. O tome sam upravo pisao na citiranom mjestu u [3]. Primjer za to su E. STRÖMGRENova »periodično-asimptotska« rješenja, koja su granice familijâ periodičnih dvostrukosimetričnih rješenja, ali su sama jednostrukosimetrična, nezatvorena i *ne*periodična, jer im se oba kraja omataju asimptotski oko LAGRANGEovih trokutnih točaka L_4, L_5. Primjer pak nezatvorenih i neograđenih, ali jednostrukosimetričnih staza daje primjer BOHLIN-ZUMKLEY iz [6], za koji su slike dane u [2], pp. 64–65, fig. 8–10. Ispitamo li unutar tamo utvrđene granice točnosti redova potencija po u vladanje agregata $\Phi = JV^2$, koji se kasnije javlja odlučnim za centralne konfiguracije kao konstanta, nalazimo približno $\Phi = JV^2 = 13{,}529 - 0{,}315\,u^2 + 0{,}115\,u^3 \ldots$ ili za niz vrijednosti $u = 0{,}1$; 0,2; 0,3;... iznose: 13,526; 13,516; 13,502;... dok konstanta energije pokazuje gotovo punu konstantnost —0,441; —0,443; —0,448;... pogotovu dalje. Upravo se na takvim primjerima vidi suština problema: tek zatvorenost daje dvostruku simetriju (zrcalnost), a time i periodičnost i obratno!

Napomena III: U dokazu teorema II spomenuli smo alternativu »ma kakvih« i »čvrstih« masa. A. WINTNER je protivnik prvog stajališta, kojim smo se upravo poslužili u spomenutom dokazu. On kaže [1] Ch. V, § 320, p. 241: »On the other hand, Poincaré has established, for $n \geqq 3$, a result which concerns the non-existence of additional isolating (= »uniform«) integrals... Nevertheless, his result... is not satisfactory... In fact, these negative results do not deal with the case of fixed, but rather with unspecified, values of the masses m_i... Clearly, these assumptions in themselves do not allow any dynamical interpretation, since a dynamical system... is determined by a fixed set of n positive numbers m_i.« Međutim, iako postoje utemeljeni prigovori drugog karaktera spomenutom POINCARÉovu teoremu [2], većina se istraživača nipošto ne pridružuje izrečenom WINTNERovu mišljenju, jer se *opći* teoremi izriču baš za ma kakve, t. j. slobodno odaberive mase. Takav je BERTRANDov teorem (C. R. 77), koji izriče, da je centralna sila, koja izvodi zatvorenu stazu oko čvrste točke, upravo NEWTONova, ev. elastična – ali samo uz slobodno odaberive uvjete problema, kontinuirano varijabilne u nekom intervalu. Takvi su POINCARÉovi teoremi o egzistenciji periodičnih rješenja, cf. SIEGEL [10] II, iako idu u suprotnom pravcu od mojih. Takvi su LAGRANGEovi teoremi o egzaktnim rješenjima: kaže se, da su jedina opća homografska rješenja problema triju tijela trokutna rješenja. Već linearno rješenje ima jednu konstantu integracije manje i nije opće. No za »fiksne« mase, unaprijed date, moguće je za $m_1 = m_2$ slučaj »istokrakog« rješenja (cf. [1] Ch. V, § 344–347 bis ili [2]). Ali baš taj slučaj specijalno podešenih masa nitko ne uvažava. Štaviše oni, koji su tvrdili, da je za ma kakve mase opća kolizija bitni singularitet, dopuštaju, da je to za prikladno odabrane mase algebarsko razgranište; no to smatraju izuzetkom bez važnosti

(zanimljivo je, da se među tima nalazi i sam WINTNER). WINTNER sam nije, a naravno i ne može biti, konsekventan te uvodi kompromisni izraz »*n* arbitrarily given masses m_i« ([1] Ch. V, § 359, p. 277) kad govori o centralnim konfiguracijama (za koje tvrdnje vrijede samo uz »slobodne mase«) te ističe poznatu činjenicu, da uz takve mase samo tetraedar od pravilnih poliedara predstavlja centralnu konfiguraciju (cf. još [11]). Takvih nedosljednosti ima u WINTNERA mnogo: »for arbitrarily values of $m_1 \ldots m_n$, where n is unrestricted ...«: »Actually, an enumeration of all ... central configurations for arbitrary n; $m_1 \ldots m_n$ represents a fascinating unsolved problem ...« ([1] Ch. V, § 360, p. 277) i t. d. Stalno izmjenjuje termine »given m_i« i »arbitrary m_i«, i to upravo na kritičnim mjestima ([1] Ch. V, §§ 365–367, pp. 282–283 + §§ 421–424, pp. 335–338), o kojima je dovoljno bilo diskutirano u [11].

Za nas je stvar jasna: tražimo teorem, koji vrijedi bez obzira na konkretne numeričke vrijednosti odabranog n-tupla brojeva $m_i > 0$; dakle takve odnose, koji ostaju invarijantni i kod kontinuirane (pa i infinitezimalne) promjene parametara problema, među koje u prvom redu spadaju mase m_i. To su *opći* teoremi u problemu više tijela. Međutim, u idućoj točki ćemo i konkretno potražiti, koji su tipični izuzeci od tih teorema o *općem* problemu više tijela (cf. [11] »dodatak pri korekturi«).

Korolar II: Zatvorena jednostrukosimetrična staza nekog dinamičkog problema je periodična.

Korolar III: U problemu više tijela sa centralnim silama, a samim zatvorenim stazama, gibanje sustava je periodično, a postoje bar dvije simetrične ili zrcalne konfiguracije sustava.

5.

Teorem V: U problemu više tijela s bar djelomično »općim« masama nastupaju izuzeci kod stacionarne (ekstremalne, apsidalne, simetrične) konfiguracije samo za one mase, koje su infinitezimalne $m_k = 0$ $(p+1 \leqq k \leqq n)$, a preostalih p masa $m_j \neq 0$ $(1 \leqq j \leqq p)$ tvore stacionarnu konfiguraciju s $n' = p$ masa (»restringirani problem više tijela«).

DOKAZ: a) Sa supozicijom $m_k = 0$ nestaju svi »koeficijenti međuzavisnosti« $m_i^* = m_j m_k$, koji sadržavaju m_k. Uzmimo opet sustav funkcija $F_s = c \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i^* r_i^s \left(1 \leqq i \leqq N,\ N = \binom{n}{2},\ s \text{ cio broj},\ c > 0 \text{ po volji}\right)$. Potražimo uvjet vezanog ekstrema te pozitivno definitne forme distancija tako, da se $r_i = r_i(u)$ uzimaju kao integrali diferencijalnih jednadžbi (5): $d\left(F_s + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i r_i\right) = 0$ (jedna prekobrojna veličina zbog novog parametra u); ili: $cs \sum_{i=1}^{N} m_i^* r_i^{s-1} dr_i + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i dr_i = 0$; dr_i se uzimaju iz

(5), što ćemo odmah razmotriti, ali svakako bez veze sa c, s od kojih se oba mogu uzimati po volji, a s po volji veliko iznad N. Dakle ne će općenito biti $( ) = 0$, nego preostaje $d r_i = 0$ za sve i, koji stvarno dolaze u toj formuli. Konstatiramo prvo, da i $( ) = 0$ ne bi ništa na simultanosti ekstrema izmijenila: onda je

$$\lambda_i = - c s\, m_i^* r_i^{s-1}, \quad F_s + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i r_i = F_s - c s \sum_{i=1}^{N} m_i^* r_i^s = F_s (1 - cs) \neq 0.$$

Dakle se komponirana forma reducira na F_s i ima s njome naravno simultane ekstreme (ili stacionarne točke). No bitan je dodatak »za sve i, koji stvarno dolaze u toj formuli«. Ako je za $n - p$ indeksa $m_k = 0$, onda odnosni članovi u formuli ne dolaze i dotični r_i nisu vezani našim zaključkom, koji će ih kasnije prisiliti na centralne konfiguracije.

b) Takav »restringirani problem«, razmatrao je na pr. ELIS STRÖMGREN 1919. i 1921. (cf. [2] i tamo l. c. [54] [64]): od četiri mase tri tvore na pravcu LAGRANGEovu linearnu konfiguraciju homografskog egzaktnog rješenja, a četvrta je infinitezimalna i njoj se određuje periodično gibanje tako, da ostaje na istom pravcu. Ista je situacija za $n = 3$ u običnom restringiranom problemu, samo je tu »jezgra« od dva tijela ($p = 2$) trivijalna, iako u stalnoj centralnoj konfiguraciji; štaviše i u tzv. »KEPLEROVU problemu« jednog tijela samo je tu jezgra sa $p = 1$ degenerirana u fiksni centar sila. No u tim odnosima vidim lično najdublje intuitivno objašnjenje veze restringiranog i općeg problema triju tijela. Prvo, odstupanje restringiranog problema od općeg problema triju tijela prividno je utoliko, što samo infinitezimalna, t. j. nul-masa »iskače«; ostale dvije mase »slušaju« završni teorem o periodičnosti i tvore trajno centralnu konfiguraciju. Drugo, i ta infinitezimalna masa kreće se sinhrono s obzirom na prve dvije mase (ev. višekratnikom perioda) i tvori s njima simultano stacionarne simetrične (zrcalne) konfiguracije – jedino to nisu ukupno uzeto centralne konfiguracije. Treće, obilje stazâ kod ma kakva restringiranog problema nije »manje« (u smislu teorije skupova) od obilja stazâ općeg problema istog reda, nego naprotiv »veće«, jer su infinitezimalne mase m_k »bez kontrole«. Tako se višestruko potvrđuje moj induktivni zaključak iz [3].

c) Sad ćemo još razmotriti utjecaj uzimanja $d r_i$ iz jednadžbi (5), i to odmah na primjeru konkretne simultanosti ekstrema (stacionarnosti) pozitivno definitnih formi $J(u)$, $V(u)$, koje sam upotrebio u dokazu završnog teorema X u [4]:

$$J = M^{-1} \sum_{j<k}^{1\ldots n} m_j m_k r_{jk}^2 = M^{-1} \sum_{i=1}^{N} m_i^* r_i^2 = \sum_{k=1}^{n} m_k \bar{r}_k^2 \quad \text{(baricentrično)};$$

$$\bar{r}_k^2 = S \bar{x}_k^2, \quad \frac{d \bar{r}_k}{d u} = S \frac{\partial r_k}{\partial \bar{x}_k} \cdot \frac{d \bar{x}_k}{d u} = S \frac{\bar{x}_k}{\bar{r}_k} \cdot \frac{d \bar{x}_k}{d u}, \quad d \bar{r}_k = S \frac{\bar{x}_k}{\bar{r}_k} d \bar{x}_k;$$

$$d \bar{x}_k = \frac{1}{m_k V} \left(\int_0^u \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial \bar{x}_k} d u \right) d u \cdot \text{ili} \quad \frac{d \bar{x}_k}{d u} = \frac{1}{V} \frac{d \bar{x}_k}{d t} = 0.$$

Dakle su izuzeci jedino $V^{-1} = 0$, $r_i = r_{jk} = 0 \ldots$ sudari (∞-šiljci stazâ) odnosno $\frac{\partial V}{\partial x_k} = 0$, $\ddot{x}_k = 0$, $\dot{x}_k = 0 \ldots$ zastoji (0-šiljci stazâ, t. j. brzinâ); jedno i drugo su ekstremi za r_{jk}, ali te izuzetke zabacujemo, jer nisu općeniti. Zbog slobodnog du mora dakle stvarno biti $dr_i = 0$; q. e. d.

Valja na kraju konstatirati, da se prema navedenom pregledu može uvijek konkretno verificirati, da li je stvarno nastupio izuzetak.

6.

Napomena IV: Čim smo uspostavili činjenicu, da su r_{jk}, J, V parne funkcije vremena t i pseudovremena u, a $t = T(u)$ neparna upravo za periodična rješenja (uz dodatak zatvorenosti) problema više tijela, već smo višekratno istakli, da je dovršavanje dokaza za završni teorem periodičnosti razmjerno jednostavno. Doista možemo mu dati više raznih oblika, tako da taj teorem spada među najbolje dokazane u problemu više tijela. Radi bolje preglednosti skupit ćemo potrebne relacije prethodno u nekoliko teorema.

Teorem VI: Ako uvedemo sustav pomoćnih funkcija

$$F_0(u) \equiv T(u), \quad F(u) \equiv F_1(u) \equiv \int_0^u T(\xi)\, d\xi,$$
$$F_2(u) \equiv \int_0^u F_1(\xi)\, d\xi \ldots F_\nu(u) \equiv \int_0^u F_{\nu-1}(\xi)\, d\xi \quad (\nu = 1, 2, \ldots \text{in inf.}) \tag{8}$$

$$\Omega_0(u) \equiv \Psi(u) \equiv T(u) + T(-u), \quad \Omega_1(u) \equiv \int_0^u \Psi(\xi)\, d\xi \equiv F_1(u) -$$
$$- F_1(-u) \ldots \Omega_\nu(u) \equiv \int_0^u \Omega_{\nu-1}(\xi)\, d\xi \equiv F_\nu(u) + (-1)^\nu F_\nu(-u) \ldots \tag{9}$$

$$A(u) \equiv V(u) \cdot \frac{d^1(u)}{du} = 2\,[u + 2\,h\,T(u)] \equiv A_1(u),$$
$$A_2(u) \equiv \int_0^u A(\xi)\, d\xi = u^2 + 4\,h\,F(u) \ldots 4\,h\,\Omega_1(u) = \tag{10}$$
$$= A_2(u) - A_2(-u) \ldots,$$

onda za njih vrijede ove relacije:

$$T(u + k\omega) = kT(\omega) + T(u), \quad T(k\omega) = kT(\omega) = -\frac{k\omega}{2h}$$
$$(k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots);$$

$$F(u+k\omega) = -\frac{k^2\omega^2}{4h} - \frac{k\omega}{2h}\,u + F(u), \tag{11}$$

$$F(k\omega) = kF(\omega) + \binom{k}{2}\omega T(\omega) = F(-k\omega) = -\frac{k^2\omega^2}{4h} > 0, \quad h < 0;$$

$$F_2(u+k\omega) = -\frac{\omega^3}{12h}\,k(k^2-1) + kF_2(\omega) -$$

$$-\frac{k^2\omega^2}{4h}\,u - \frac{k\omega}{4h}\,u^2 + F_2(u), \quad F_2(-\omega) = -F_2(\omega) \ldots$$

$$\begin{gathered} \Psi(u+k\omega) = k\Psi(\omega) + \Psi(u) = \Psi(u), \\ \Psi(k\omega) = k\Psi(\omega) = \Psi(0) = 0; \\ \Omega_\nu(u+k\omega) = k\Omega_\nu(\omega) + \Omega_\nu(u) = \Omega_\nu(u), \\ \Omega_\nu(k\omega) = k\Omega_\nu(\omega) = \Omega_\nu(0) = 0. \end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{gathered} A_\nu(u+k\omega) = kA_\nu(\omega) + A_\nu(u) = A_\nu(u), \\ A_\nu(k\omega) = kA_\nu(\omega) = A_\nu(0) = 0. \end{gathered} \tag{13}$$

Dokaz: a) Prve dvije grupe formula (11) nalaze se in extenso izvedene u [12], no radi potpunosti ovdje ih reproduciramo.

b) $F_2(u+k\omega) = \int_0^{u+k\omega} F(\xi)\,d\xi = \int_0^{k\omega} + \ldots + \int_{(i-1)\omega}^{i\omega} + \ldots + \int_{(k-1)\omega}^{k\omega} + \int_{k\omega}^{k\omega+u};$

$$\int_{(i-1)\omega}^{i\omega} F(\xi)\,d\xi = \int_0^{\omega} F(\xi^* + (i-1)\omega)\,d\xi^* =$$

$$= \int_0^{\omega} \left[-\frac{(i-1)^2\omega^2}{4h} - \frac{(i-1)\omega}{2h}\,\xi^* + F(\xi^*) \right] d\xi^* =$$

$$-\frac{(i-1)^2\omega^3}{4h} - \frac{(i-1)\omega^3}{4h} + F_2(\omega) = -\frac{i(i-1)}{4h}\,\omega^3 + F_2(\omega);$$

$$\sum_{i=1}^{k}(i^2-i) = \frac{k(k+1)(2k+1)}{2\cdot 3} - \frac{k(k+1)}{2} = \frac{k(k^2-1)}{3};$$

$$\int_{k\omega}^{k\omega+u} F(\xi)\,d\xi = \int_0^{u} F(\xi^* + k\omega)\,d\xi^* =$$

$$\int_0^{u} \left[-\frac{k^2\omega^2}{4h} - \frac{k\omega}{2h}\,\xi^* + F(\xi^*) \right] d\xi^* = -\frac{k^2\omega^2}{4h}\,u - \frac{k\omega}{4h}\,u^2 + F_2(u).$$

q. e. d.

c) $$\Psi(u+k\omega)=T(u+k\omega)+T(-u-k\omega)=T(u)+$$

$$+T(-u)-\frac{k\omega}{2h}+\frac{k\omega}{2h}=\Psi(u),\quad \Psi(0)=0.$$

$$\Omega(u+k\omega)=F(u+k\omega)+F(-u-k\omega)=-\frac{k^2\omega^2}{4h}-\frac{k\omega}{2h}u+F(u)-$$

$$-\left|-\frac{k^2\omega^2}{4h}-\frac{k\omega}{2h}u+F(-u)\right|=F(u)-F(-u)=\Omega(u),\quad \Omega(0)=0.$$

$$\Omega_\nu(u+k\omega)=\int_0^{u+k\omega}\Omega_{\nu-1}(\xi)\,d\xi=\sum_{i=1}^{k}\int_{(i-1)\omega}^{i\omega}\Omega_{\nu-1}(\xi)\,d\xi+\int_{k\omega}^{k\omega+u}\Omega_{\nu-1}(\xi)\,d\xi=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\int_0^{\omega}\Omega_{\nu-1}(\xi^*+(i-1)\omega)\,d\xi^*+\int_0^{u}\Omega_{\nu-1}(\xi^*+k\omega)\,d\xi^*=$$

$$=k\Omega_\nu(\omega)+\Omega_\nu(u).$$

Naravno i s pomoću (9_3)

$$\Omega_\nu(u+k\omega)=F_\nu(u+k\omega)+(-1)^\nu F_\nu(-u-k\omega)=$$

$$=k\left[F_\nu(\omega)+(-1)^\nu F_\nu(-\omega)\right]+\left[F_\nu(u)+(-1)^\nu F_\nu(-u)\right]=$$

$$=k\Omega_\nu(\omega)+\Omega_\nu(u).$$

Za $\Omega_\nu(\omega)$ uzmemo u obzir formulu (113) et seq. za $k=1$, $u=-\omega$ ili $u=0$:

$$F_\nu(0)=F_\nu(\omega)+(-1)^\nu F_\nu(-\omega)=\Omega_\nu(\omega)$$

odnosno $$F_\nu(\omega)=F_\nu(\omega)+(-1)^\nu\cdot F_\nu(0),\ F_\nu(0)=0$$

evidentno prema (8_2). $F_\nu(\omega)=-(-1)^\nu F_\nu(-\omega)$, $\Omega_\nu(\omega)=0$; q. e. d.

d) $$A(u+k\omega)=2\left[u+k\omega+2hT(u+k\omega)\right]=$$

$$=2\left[u+k\omega+2h\left\{kT(\omega)+T(u)\right\}\right]=\left[u+2hT(u)\right]+$$

$$+k\cdot 2\left[\omega+2hT(\omega)\right]=kA(\omega)+A(u);\quad A(\omega)=A(0)=0;$$

$$A_\nu(u+k\omega)=\int_0^{u+k\omega}A_{\nu-1}(\xi)\,d\xi=\sum_{i=1}^{k}\int_{(i-1)\omega}^{i\omega}A_{\nu-1}(\xi)\,d\xi+\int_{k\omega}^{k\omega+u}A_{\nu-1}(\xi)\,d\xi=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\int_0^{\omega}A_{\nu-1}(\xi^*+(i-1)\omega)\,d\xi^*+\int_0^{u}A_{\nu-1}(\xi^*+k\omega)\,d\xi^*=$$

$$=\sum_{i=1}^{k}\int_0^{\omega}A_{\nu-1}(\xi^*)\,d\xi^*+\int_0^{u}A_{\nu-1}(\xi^*)\,d\xi^*=kA_\nu(\omega)+A_\nu(u),$$

$$A_\nu(\omega)=A_\nu(0)=0;\quad \text{q. e. d.}$$

Teorem VII: Za funkciju $A(u)$ vrijedi općenito ovaj TAYLOROV red:

$$A(u) \equiv 2[u + 2hT(u)] = 2\left(1 + \frac{2h}{V_0}\right)u - 4h\frac{V_0''}{V_0^2}\cdot\frac{u^3}{3!} -$$

$$- 4h\frac{V_0'''}{V_0^2}\cdot\frac{u^4}{4!} - 4h\frac{V_0V_0^{IV} - 6V_0''^2}{V_0^3}\cdot\frac{u^5}{5!}\cdots = \tag{14}$$

$$= 2\left[u + 2h\left(\frac{1}{V_0}u - \frac{V_0''}{V_0^2}\cdot\frac{u^3}{3!} - \frac{V_0'''}{V_0^2}\cdot\frac{u^4}{4!} - \frac{V_0V_0^{IV} - 6V_0''^2}{V_0^3}\cdot\frac{u^5}{5!}\cdots\right)\right]$$

s analognim redovima za funkcije

$$A(u) = A(u) + A(-u) = 4h\Psi(u). \tag{15}$$

DOKAZ: a)

$$A(u) = 2[u + 2hT] \qquad = VJ' \qquad \text{(Lema 1.)}$$

$$A'(u) = 2\left[1 + \frac{2h}{V}\right] \qquad = VJ'' + V'J'$$

$$A''(u) = -4h\cdot\frac{V'}{V^2} \qquad = VJ''' + 2V'J'' + V''J'$$

$$A'''(u) = -4h\cdot\frac{VV'' - 2V'^2}{V^3} \qquad = VJ^{IV} + 3V'J''' + 3V''J'' + V'''J'$$

$$A^{IV}(u) = -4h\cdot\frac{V^2V''' - 6VV'V'' + 6V'^3}{V^4} \qquad = VJ^V + 4V'J^{IV} + 6V''J''' + 4V'''J'' + V^{IV}J'$$

$$A^V(u) = -4h\cdot\frac{V^3V^{IV} - 8V^2V'V''' - 6V^2V''^2 + 36VV'^2V'' - 24V'^4}{V^5} \qquad = VJ^{VI} + 5V'J^V + 10V''J^{IV} + 10V'''J''' + 5V^{IV}J'' + V^VJ'$$

b) $$A(u) = A(u) + A(-u) = 4h\Psi(u),$$

$$A'(u) = 4h\left[\left(\frac{1}{V}\right)_+ - \left(\frac{1}{V}\right)_-\right],\quad A''(u) = -4h\left[\left(\frac{V'}{V^2}\right)_+ + \left(\frac{V'}{V^2}\right)_-\right]\cdots$$

$$A^{(m)}(u) = A^{(m)}(u) + (-1)^m A^{(m)}(-u) = 4h\Psi^{(m)}(u)\ldots$$

c) $A(0) = 0$, $A'(0) \neq 0$ ($V_0 = -2h$ cf. §7, teor. IX) $A''(0) = 0$ (Teor. II + Lema II: $V' = 0$)

$$A_0'' = V_0J_0''',\quad J_0''' = 0;\quad A_0''' = V_0J_0^{IV} + 3V_0''J_0'' = -4h\frac{V_0''}{V_0^2},$$

$$A_0^{IV} = V_0J_0^V + 4V_0'''J_0'' = -4h\frac{V_0'''}{V_0^2},$$

$$A_0^{V} = V_0 J_0^{VI} + 10 V_0'' J_0^{IV} + 5 V_0^{IV} J_0'' = -4 h \frac{V_0 V_0^{IV} - 6 V_0''^2}{V_0^3};$$

$$A_0 = \Psi_0 = 0, \quad A_0' = 4 h \Psi_0' = 0 \ldots A_0^{(2k+1)} = 4 h \Psi_0^{(2k+1)} = 0 \ldots;$$

$$A_0'' = \Psi_0'' = 0 \ldots A_0^{(2k)} = 4 h \Psi_0^{(2k)} = ? \quad \text{q. e. d.}$$

d) Dodajmo još ovdje općenite formule za agregat $\Phi \equiv J V^2$, koji kasnije igra odlučnu ulogu:

$$\Phi = J V^2; \quad \Phi' = J' V^2 + 2 J V V'; \quad \Phi'' = J'' V^2 + 4 J' V V' + 2 J V'^2 + 2 J V V'';$$

$$\Phi''' = J''' V^2 + 6 J'' V V' + 6 J' (V V'' + V'^2) + 6 J V' V'' + 2 J V V''';$$

$$\Phi^{IV} = J^{IV} V^2 + 8 J''' V V' + 12 J'' (V V'' + V'^2) + 24 J' V' V'' +$$

$$+ 8 J' V V''' + 8 J V' V''' + 6 J V''^2 + 2 J V V^{IV};$$

$$\Phi^{V} = J^{V} V^2 + 10 J^{IV} V V' + 20 J''' (V V'' + V'^2) +$$

$$+ 20 J'' (V V''' + 3 V' V'') + 10 J' (V V^{IV} + 4 V' V''' + 3 V''^2) +$$

$$+ 10 J (V' V^{IV} + 2 V'' V''') + 2 J V V^{V}; \ldots$$

$$\Phi_0 \neq 0, \quad \Phi_0' = 0, \quad \Phi_0'' = J_0'' V_0^2 + 2 J_0 V_0 V_0'', \quad \Phi_0''' = 2 J_0 V_0 V_0''',$$

$$\Phi_0^{IV} = J_0^{IV} V_0^2 + 12 J_0'' V_0 V_0'' + 6 J_0 V_0''^2 + 2 J_0 V_0 V_0^{IV},$$

$$\Phi_0^{V} = J_0^{V} V_0^2 + 20 J_0'' V_0 V_0''' + 10 J_0 V_0'' V_0''' + 2 J_0 V_0 V_0^{V}; \ldots \text{ q. e. d.}$$

Teorem VIII: Funkcija $f(x) \equiv c \cdot \sin x$ je realno (kontinuirano, derivabilno) rješenje ovih funkcionalnih relacija

$$f(2x) \cdot f(a) = 2 f(x) \cdot f(x + a), \quad a = \omega/4 \tag{16}$$

$$f(2x) \cdot f'(0) = 2 f(x) \cdot f'(x) \tag{16'}$$

$$f^2(x) - f^2(y) = f(x + y) \cdot f(x - y) \tag{17}$$

s ograničenjem u posljednjem slučaju na periodično rješenje.

Dokaz: a) Prvu relaciju, uz $\omega = 2\pi$ dao je još E. H. Moore 1895.; drugu dobijemo, ako uzmemo u obzir trivijalno svojstvo derivacije sinusa; u ovom razmatranju služimo se neprekidno derivabilnim funkcijama.

b) Na oblik (17) upozorio me prof. dr. Danilo Blanuša 7. VI. 1956.; od njega potječe i idući dokaz uz pretpostavku dvokratne neprekidne derivabilnosti. D. Blanuša je osim toga na kolokviju Društva matematičara i fizičara Hrvatske 13. VI. 1956. dao dokaz uz pretpostavku same neprekidnosti funkcije $f(x)$.

c) Izvan trivijalnog rješenja $f(x) \equiv 0$ postoji bar jedna vrijednost argumenta $x = c$ tako, da je $f(c) \neq 0$. Sad stavimo $y = x$, $f(0) = 0$; onda $\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$:

$$f''(x+y)\cdot f(x-y) - f(x+y)\cdot f''(x-y) = 0 \qquad (17')$$

Za $x+y=\xi$, $x-y=\eta$; $2x=\xi+\eta$, $2y=\xi-\eta$ bude

$$f''(\xi)\cdot f(\eta) - f(\xi)\cdot f''(\eta) = 0 \qquad (17'')$$

Sa x, y i ξ, η prolaze sve realne brojeve $(-\infty, +\infty)$ i obratno. Neka je $\eta = c$, $f''(c)/f(c) = -b^2 \neq 0$. Zbog realnosti je b realan ili čisto imaginaran. Dobili smo: $f''(\xi) + b^2 \cdot f(\xi) = 0$ $(b \neq 0)$ s rješenjem $f(\xi) = a \cdot \sin b\xi + d \cdot \cos b\xi$. No $f(0) = 0$ daje $d = 0$, $f(\xi) = a \cdot \sin b\xi$ realno, ako su a, b istodobno realni odnosno imaginarni. U tom drugom slučaju, t. j. $-b^2 > 0$ stavimo $a = i\alpha$, $b = i\beta$ (α, β realno) te dobijemo $f(\xi) = \alpha \cdot \operatorname{sh} \beta\xi$. Ako je najzad $b = 0$, karakteristična jednadžba $k^2 + b^2 = 0$ ima dvostruko rješenje $k = 0$, te izlazi $f(\xi) = A\xi + B$, $B = 0$ zbog $f(0) = 0$. Dakle su sva rješenja od (17) $f(x) = a \cdot \sin bx$, $\alpha \cdot \operatorname{sh} \beta x$, Ax. Periodično je samo prvo; q. e. d.

7.

Lema III: U slučaju centralnih konfiguracija, kad se problem više tijela s n masâ reducira na n sinhronih problema dvaju tijela, gdje je centar atrakcije fiktivna masa $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ u baricentru sustava, vrijede ove formule s fiktivnim »reprezentativnim« veličinama za cio sustav u cjelini:

$$V(u) = \frac{\mu}{r}, \quad J(u) = \frac{r^2}{a\mu}, \quad r = a(1 - \varepsilon\cos u); \quad \mu = k^2 \cdot M = n^2 a^3,$$

$$2h = -\frac{\mu}{a} = -n^2 a^2, \quad 0 < \varepsilon < 1; \quad \Phi = JV^2 = -2h; \qquad (18)$$

$$V'(0) = V'''(0) = \ldots = V^{(2k+1)}(0) = \ldots = 0;$$

$$V(0) = \frac{\mu}{a(1-\varepsilon)}, \quad V''(0) = \frac{-\varepsilon\mu}{a(1-\varepsilon)^2}, \quad V^{IV}(0) = \frac{\varepsilon\mu(1+5\varepsilon)}{a(1-\varepsilon)^3}, \ldots;$$

$$T(u) = \frac{1}{n^2 a^2}(u - \varepsilon\sin u) = \frac{t}{na^2}, \quad F(u) = \frac{1}{n^2 a^2}\left[\frac{u^2}{2!} + \varepsilon(\cos u - 1)\right],$$

$$F_2(u) = \frac{1}{n^2 a^2}\left[\frac{u^3}{3!} + \varepsilon(\sin u - u)\right] \qquad (19)$$

$$\omega = 2\pi; \quad \Omega_\nu(u) \equiv 0; \quad \Psi(u) \equiv 0;$$

$$A(u) = 2\varepsilon\sin u, \quad A_2(u) = 2\varepsilon(1 - \cos u),$$

$$A_3(u) = 2\varepsilon(u - \sin u) \ldots$$

Dokaz: a) To su zapravo elementarne formule problema dvaju tijela, no neke su manje obične, pa ćemo ukratko naznačiti izvod (cf. [2] [4] [5] [12]). Formule (18) poznate su, osim za derivacije potencijala, koje dobijemo direktnim računom uz obzir na relacije $r + r' = a$, $r' + r''' = 0 \ldots \quad r(0) = a(1-\varepsilon)$, $r'(0) = 0$, $r''(0) = a\varepsilon$, $r'''(0) = 0$, $r^{IV}(0) = -a\varepsilon, \ldots$;

$$b) \quad T(u) = \int_0^u \frac{d\xi}{V(\xi)} = \frac{a}{n^2 a^3} \int_0^u (1 - \varepsilon \cos \xi)\, d\xi = \frac{1}{n^2 a^2}(u - \varepsilon \sin u);$$

$$F(u) = \int_0^u T(\xi)\, d\xi = \frac{1}{n^2 a^2} \int_0^u (\xi - \varepsilon \sin \xi)\, d\xi = \frac{1}{n^2 a^2} \left[\frac{u^2}{2!} + \varepsilon (\cos u - 1) \right],$$

$$F_2(u) = \int_0^u F(\xi)\, d\xi = \frac{1}{2 n^2 a^2} \int_0^u [\xi^2 + 2\varepsilon (\cos \xi - 1)]\, d\xi =$$

$$= \frac{1}{n^2 a^2} \left[\frac{u^3}{3!} + \varepsilon (\sin u - u) \right] \ldots;$$

$$\Psi(u) = 0 \ldots \Omega_1(u) = 0 \ldots A(u) = 2[u + 2hT(u)] =$$

$$= 2 \left[u - \frac{n^2 a^2}{n^2 a^2}(u - \varepsilon \sin u) \right] = 2\varepsilon \sin u,$$

$$A_2(u) = \int_0^u A(\xi)\, d\xi = \int_0^u 2\varepsilon \sin \xi\, d\xi = -2\varepsilon \cos \xi \Big|_0^u = 2\varepsilon (1 - \cos u),$$

$$A_3(u) = \int_0^u 2\varepsilon (1 - \cos \xi)\, d\xi = 2\varepsilon (u - \sin u) \ldots;$$

c) Konstatirajmo:

$$J' = \frac{2rr'}{a\mu}, \quad \frac{1}{2} VJ' = \frac{r'}{a} = u + 2hT,$$

$$\frac{1}{2}(VJ')' = \frac{r''}{a} = 1 + \frac{2h}{V} = 1 - \frac{n^2 a^2 r}{n^2 a^3} = 1 - \frac{r}{a}, \quad \underline{r + r'' = a};$$

$$A = VJ' = r' \cdot \frac{2}{a}, \quad \ldots A''' = r''' \cdot \frac{2}{a} \ldots \underline{A' + A''' = 0};$$

$$A(0) = 0, \quad A'(0) = 2\varepsilon; \quad A = A_0' \cdot \sin u = 2\varepsilon \cdot \sin u;$$

$$A^{(2k)}(0) = 0; \quad A_0''' = -2\varepsilon, \quad \ldots A_0^{(2k+1)} = (-1)^k \cdot 2\varepsilon;$$

$$A(u) = 2\varepsilon \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k u^{2k+1}}{(2k+1)!} = 2\varepsilon \cdot \sin u, \quad \text{q. e. d.}$$

Teorem IX: Slučaj $V = -2h$ implicira $J = -1/2h$, $\Phi = -2h$, dakle centralnu konfiguraciju, i to »glavni slučaj«, kad svaka masa oko baricentra opisuje krug. Ako u toku gibanja bude taj uvjet (20) jednom ekstremalno ispunjen, t. j. uz $V_0' = 0$, $J_0' = 0$ (za neko u_0 odnosno t_0), onda je on trajno ispunjen. U tom slučaju nemamo pravi ekstrem, nego »plosnatu točku« ∞ visokog reda.

Dokaz: a) $\underline{V = -2h}$, $J = -\frac{1}{2h}$, $\Phi = -2h$ ... (20).

$$T(u) = \int_0^u \frac{d\xi}{V(\xi)} = -\frac{u}{2h}, \quad u + 2hT \equiv 0 \text{ daje } A = 0, \ \varepsilon = 0;$$

$$J = 2\left\{hT^2 + uT - \int_0^u T\,d\xi\right\} + J_0 = 2\left\{\frac{u^2}{4h} - \frac{u^2}{2h} + \frac{u^2}{4h}\right\} +$$

$$+ J_0 = J_0 = \text{const.} \quad J = \frac{r^2}{a\mu} = \frac{r^2}{n^2a^4} = \left(\frac{r}{na^2}\right)^2; \quad r = an\frac{dt}{du} =$$

$$= -\frac{n^2a^3}{2h} \text{ (lema III.)}, \quad r = \frac{n^2a^3}{n^2a^2} = a. \quad J = \frac{1}{n^2a^2} = -\frac{1}{2h}; \quad \text{q. e. d.}$$

b) Integracija beskonačnim redovima:

$$\frac{d}{du}\left(V\frac{dJ}{du}\right) = V'J' + VJ'' = 2\left(1 + \frac{2h}{V}\right), \quad \underline{V_0 J_0'' = 0.}$$

$$V(u) \equiv \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu u^\nu, \quad J(u) \equiv \sum_{\nu=0}^{\infty} B_\nu u^\nu; \quad \left[\sum_1^\infty \nu A_\nu u^{\nu-1}\right]\left[\sum_1^\infty \nu B_\nu u^{\nu-1}\right] +$$

$$+ \left[\sum_0^\infty A_\nu u^\nu\right]\left[\sum_2^\infty \nu(\nu-1) B_\nu u^{\nu-2}\right] = 2\left(1 + 2h / \sum_0^\infty A_\nu u^\nu\right) =$$

$$= 2\left(1 + 2h\left[\sum_0^\infty C_\nu u^\nu\right]\right); \left[\sum_0^\infty (\nu+1) A_{\nu+1} u^\nu\right]\left[\sum_0^\infty (\nu+1) B_{\nu+1} u^\nu\right] +$$

$$+ \left[\sum_0^\infty A_\nu u^\nu\right]\left[\sum_0^\infty (\nu+2)(\nu+1) B_{\nu+2} u^\nu\right] = 2\left(1 + 2h\left[\sum_0^\infty C_\nu u^\nu\right]\right);$$

$$\left(\sum_0^\infty A_\nu u^\nu\right)\left(\sum_0^\infty C_\nu u^\nu\right) \equiv 1.$$

c) $$\sum_{\nu=0}^{\infty} [A_\nu C_0 + \ldots + A_{\nu-j} C_j + \ldots + A_0 C_\nu] u^\nu \equiv 1;$$

$$A_0 C_0 = 1, \quad A_\nu C_0 + \ldots + A_{\nu-j} C_j + \ldots + A_0 C_\nu = 0 \quad (\nu \geqq 1).$$

$$[(\nu+1) A_{\nu+1} \cdot B_1 + \ldots + (\nu+1-j) A_{\nu+1-j} (j+1) B_{j+1} +$$

$$+ \ldots + A_1 (\nu+1) B_{\nu+1}] + [A_\nu (2 \cdot 1) B_2 +$$

$$+\ldots+A_{\nu-j}(\nu+2-j)(\nu+1-j)B_{j+2}+\ldots+A_0(\nu+2)(\nu+1)B_{\nu+2}]=$$
$$=4hC_\nu\quad(\nu\geqq 1),\quad A_1B_1+2A_0B_2=2+4hC_0.$$

d) $$\underline{C_0}=\frac{1}{A_0},\quad A_1C_0+A_0C_1=0,\quad \underline{C_1}=-\frac{C_0A_1}{A_0}=-\frac{A_1}{A_0^2},$$
$$A_2C_0+A_1C_1+A_0C_2=0,\quad \underline{C_2}=\frac{A_1^2-A_0A_2}{A_0^3}\ldots$$
$$A_1B_1+2A_0B_2=2+\frac{4h}{A_0},\quad A_0=V_0=-2h,\quad B_0=J_0=-\frac{1}{2h},$$
$$-4h\cdot B_2=2-\frac{4h}{2h}=0,\quad \underline{B_2}=0;\quad \underline{A_1}=\underline{B_1}=0;$$
$$(2A_2B_1+2A_1B_2)+(2A_1B_2+6A_0B_3)=4h\cdot C_1=-\frac{4hA_1}{A_0^2}=0;$$
$$\underline{B_3}=0;\quad (3A_3B_1+4A_2B_2+3A_1B_3)+$$
$$+(2A_2B_2+6A_1B_3+12A_0B_4)=4hC_2=-4h\cdot\frac{A_2}{A_0^2},$$
$$12A_0B_4=-4h\frac{A_2}{A_0^2},\quad \underline{B_4}=\frac{-hA_2}{3A_0^3}=\frac{A_2}{24h^2}.$$

e) Svakako je $h<0$, dakle $\operatorname{sgn}B_4=+\operatorname{sgn}A_2$. No uz $A_2\neq 0$, $B_4\neq 0$ je $J_0\neq 0$, $J_0'=0$, $J_0''=0$, $J_0'''=0$, $J_0^{IV}\neq 0$; $V_0\neq 0$, $V_0'=0$, $V_0''\neq 0$ uz $\operatorname{sgn}V_0''=\operatorname{sgn}J_0''$. Dakle bi bili V, J simultani ekstremi, ali istovrsni; no oni su po svojoj definiciji nesumnjivo raznovrsni ekstremi. Dakle je tu nužno $A_2=B_4=0$. No onda naše formule daju sve ostale $A_\nu=0$, $B_\nu=0$. Dakle je doista trajno iz $V=-2h$ izašlo $J=-1/2h$, $\Phi=-2h$ (20) u jednu ruku; u drugu ruku imamo plosnatu točku ili infleksiju ∞ visokog reda.

f) Ako je pak $V_0\neq -2h$, $V_0'=0$, $J_0'=0$, onda je $J_0\neq -1/2h$ te zbog $V>0$, $J>0$: $J''=\frac{2}{V}\left(1+\frac{2h}{V}\right)\gtrless 0\ldots V\gtrless -2h>0$ kako i treba. Dakle imamo značajnu tablicu:

V	0	$<$	V_1	$<$	$-2h$	$<$	V_2	$<$	$+\infty$
V'	0		0		0		0		0
$\operatorname{sgn}V''$	$+$		$-$		0		$+$		$-$
$\operatorname{sgn}J''$	$-$		$+$		0		$-$		$+$
J'	0		0		0		0		0
J	$+\infty$	$>$	J_1	$>$	$-1/2h$	$>$	J_2	$>$	0
Napomena	Opći razlaz		Centr. konf.		Kružna c. konf.		Centr. konf.		Opći sudar

g) Ali i obratno: kad je $\Phi = J V^2 = -2h$ moguće uz trajno $J = J_0$, $V = V_0$ (const?)

$$0 \equiv \Phi' \equiv V\,(VJ' + 2\,V'J),\quad J' = \frac{2}{V_0}\,(u + 2\,hT) \equiv 0,\quad V' \equiv 0\,;$$

$$V'J' + V_0 J'' = 2\left(1 + \frac{2h}{V_0}\right),\quad J_0'' = \frac{2}{V_0}\left(1 + \frac{2h}{V_0}\right) \equiv 0,\quad V'' \equiv 0 \ldots\,;$$

$$T = -\frac{u}{2h},\quad V_0 = -2h,\quad J = -1/2\,h.$$

Dakle jedino uz $J = -1/2\,h$. $V = -2h$; q. e. d.

8.

Teorem X: Jedina periodična rješenja općeg problema više tijela jesu gibanja u centralnim konfiguracijama (za $n = 3$ cf. [4] Teorem X).

Dokaz: a) Pojam »opći problem više tijela« razumijevamo u smislu § 4, nap. III, t. j. mase su slobodno odaberive i tvrdnja mora ostati invarijantna i kod kontinuirane varijacije masa $m_i > 0$ $(i = 1 \ldots n)$, a naravno i ostalih parametara. Centralne su pak konfiguracije u problemu više tijela opisane dovoljno u [11] [12] § 123. Naravno, da za specijalne koordinatne sustave na pr. rotacijski, nastupaju izuzetne specijalne okolnosti, a ako je još ispunjen specijalni zahtjev komenzurabilnosti brzina rotacije takva sustava sa srednjim (kutnim) gibanjem sustava (izbor masâ!) u inercijalnom sustavu, onda takav izuzetak vrijedi i u inercijalnom sustavu, jer je i u njemu takva staza zatvorena. O tome više u [3] i [4]. No to su odavno poznati specijalni slučajevi. Mi pak tražimo *opći* teorem za *opći* problem više tijela.

b) Najstariji je dokaz iz završnog teorema X u [4], pošto smo ovdje ispravno osigurali neparnost vremena odnosno parnost distancijâ, potencijala i momenta inercije (cf. nap. I). Zbog dvostruke simetrije (zrcalnosti) funkcije su

$$T(-u) = -T(u) \tag{21}$$

$$F_\nu(-u) = (-1)^{\nu+1} F_\nu(u)\,; \tag{22}$$

$$V_0^{(2k)} \neq 0,\quad V_0^{(2k+1)} = 0\,;\quad J_0^{(2k)} \neq 0,\quad J_0^{(2k+1)} = 0. \tag{23}$$

To sve izlazi po teoremu IV, VI; po teoremu VI, VII imamo ove ekvivalencije:

$$\Psi(u) \equiv 0,\quad \Omega_\nu(u) \equiv 0\,; \tag{24}$$

$$A_\nu(-u) = (-1)^{\nu+1} A_\nu(u) \tag{25}$$

odnosno

$$A(u) = 0\,; \tag{24'}$$

$$A(-u) = -A(u)\,; \tag{25'}$$

$$A^{(m)}(-u) = (-1)^{m+1} A^{(m)}(u). \tag{25''}$$

Dalje je u teoremu VII razvoj za $A(u)$ bez parnih, za $V(u)$ bez neparnih potencija i t. d. Općenito je:

$$\Phi' = J'V^2 + 2JVV' = V(VJ' + 2JV') =$$

$$= V\left(A + 2JV^2\left\{-\frac{A''}{4h}\right\}\right) = V\left(A - A''\cdot\frac{\Phi}{2h}\right);$$

$$\Phi' = 2\frac{V'}{V}\left(JV^2 + \frac{V^2}{2V'}\cdot VJ'\right) = 2\frac{V'}{V}\left(\Phi - 2h\cdot\frac{A}{A''}\right).$$

Dakle iz $\Phi = -2h$ izlazi $\Phi' = 0$, $A + A'' = 0$ i obratno.

c) Sad možemo provesti dakle dokaz kao u [4] teor. X p. 260/261: za periodične je staze $J(u) \equiv \sum_{\lambda=0}^{\infty} e_{2\lambda} u^{2\lambda}$, $1/V(u) \equiv \sum_{\mu=0}^{\infty} \varepsilon_{2\mu} u^{2\mu}$. Onda možemo red za $J(u)$ preurediti tako, da bude $J(u) \equiv \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu (1/V)^\nu$ (26) upravo za taj slučaj. Da to pitanje nije trivijalno, pokazao sam l. c. konstrukcijom protivprimjera, iz kojeg izlazi, da J i $1/V$ ne moraju stajati u jednoznačnoj vezi, dakle specijalno ne u obliku reda potencija, iako su uvijek monotono suglasni (teorem II). No za periodične staze zbog istaknute parnosti funkcije J, $1/V$ poprimaju pri porastu i padu zbog simetrije oko $u = 0$ istodobno iste vrijednosti, što se ponavlja oko svakog $u = k\omega$. Dakle su J, $1/V$ povezane jednoznačnom vezom (26). Sad nam svojstvo homogenosti daje neposredno $r_i = \sigma r_i^*$ $(i = 1 \ldots N)$; $J(r_i) = \sigma^2 J(r_i^*)$; $1/V(r_i) = \sigma/V(r_i^*)$; $\sigma^2 J^* = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \left(\frac{1}{V}\right)^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \left(\frac{\sigma}{V^*}\right)^\nu$ što je moguće samo za $\nu \neq 2 \ldots a_\nu = 0$; $a_2 = C \neq 0$ ili $J = C/V^2$, $\Phi \equiv JV^2 = C$; q. e. d. Odnosno posredno Eulerovim teoremom, koji naravno izražava istu činjenicu, ali ne moramo pretpostaviti egzistenciju $r_1 \ldots r_N$; $r_1^* \ldots r_N^*$ sa $r_i = \sigma r_i^*$ istodobno na trajektorijama, nego izvodimo:

$$\frac{\partial J}{\partial r_i} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu a_\nu \left(\frac{1}{V}\right)^{\nu-1} \frac{\partial}{\partial r_i}\left(\frac{1}{V}\right), \quad 2J = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial J}{\partial r_i} r_i = \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu a_\nu \left(\frac{1}{V}\right)^{\nu-1} \cdot$$

$$\cdot \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial r_i}\left\{\frac{1}{V}\right\} \cdot r_i\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu a_\nu \left(\frac{1}{V}\right)^{\nu-1} \cdot \frac{1}{V};$$

$$2\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \left(\frac{1}{V}\right)^\nu \equiv \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu a_\nu \left(\frac{1}{V}\right)^\nu \ldots 2a_\nu = \nu a_\nu \begin{cases} a_\nu = 0 \ldots \nu \neq 2 \\ a_\nu \neq 0 \ldots \nu = 2 \end{cases}; \quad \text{q. e. d.}$$

d) Međutim, možemo izbjeći zaključivanje s jednoznačnom vezom (26), koja se nekima, možda, ne će činiti dovoljno uvjerljiva, iako je posve ispravna. Onda možemo udariti ovim više ekstenzivnim, zato duljim putem:

$$\Phi \equiv \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{2\nu}\, u^{2\nu}, \quad r_i \equiv \sum_{\sigma=0}^{\infty} \varrho_{i,2\sigma}\, u^{2\sigma}; \quad \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \Phi}{\partial r_i} \cdot r_i \equiv 0 \quad \text{(Euler)},$$

$$\frac{d\Phi}{du} \equiv \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \Phi}{\partial r_i} \cdot \frac{dr_i}{du}; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r_i} \equiv \sum_{\alpha=1}^{\infty} a_{i,2\alpha-1}\, u^{2\alpha-1};$$

$$\frac{d\Phi}{du} = \sum_{\nu=1}^{\infty} 2\nu c_{2\nu}\, u^{2\nu-1} = \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{\alpha=1}^{\infty} a_{i,2\alpha-1}\, u^{2\alpha-1}\right)\left(\sum_{\sigma=1}^{\infty} 2\sigma \varrho_{i,2\sigma}\, u^{2\sigma-1}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \{a_{i,1} \cdot \varrho_{i,2\nu} \cdot 2\nu + \ldots + a_{i,2\nu-1} \cdot \varrho_{i,2} \cdot 2\}\, u^{2\nu-1}\right) \quad \text{(Cauchy)}$$

$$0 \equiv \sum_{i=1}^{N} \left(\sum_{\sigma=0}^{\infty} \varrho_{i,2\sigma}\, u^{2\sigma}\right)\left(\sum_{\alpha=1}^{\infty} a_{i,2\alpha-1}\, u^{2\alpha-1}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left(\varrho_{i,0} + u \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} \varrho_{i,2\nu}\, u^{2\nu-1}\right) \cdot \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{i,2\nu-1}\, u^{2\nu-1}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \left(\varrho_{i,0} \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{i,2\nu-1}\, u^{2\nu-1}\right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} u \left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \{a_{i,1} \cdot \varrho_{i,2\nu} + \ldots + a_{i,2\nu-1} \cdot \varrho_{i,2}\}\, u^{2\nu-1}\right) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{N} \varrho_{i,0} \cdot a_{i,2\nu-1}\right) u^{2\nu-1} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{N} \{a_{i,1} \cdot \varrho_{i,2\nu} + \ldots + a_{i,2\nu-1}\, \varrho_{i,2}\}\right) u^{2\nu}.$$

Dobili smo tri grupe rekurentnih relacija s rastavljenim parnim i neparnim potencijama:

$$\nu c_{2\nu} = \sum_{i=1}^{N} \{\nu a_{i,1} \cdot \varrho_{i,2\nu} + \ldots + (\nu-\alpha)\, a_{i,2\alpha-1} \cdot \varrho_{i,2(\nu-\alpha)} + \ldots + a_{i,2\nu-1} \cdot \varrho_{i,2}\} \quad \text{(I)}$$

$$0 = \sum_{i=1}^{N} \{a_{i,1} \cdot \varrho_{i,2\nu} + \ldots + a_{i,2\alpha-1} \cdot \varrho_{i,2(\nu-\alpha)} + \ldots + a_{i,2\nu-1} \cdot \varrho_{i,2}\} \quad \text{(II)}$$

$$0 = \sum_{i=1}^{N} \varrho_{i,0} \cdot a_{i,2\nu-1} \quad \text{(III)}$$

Suponiramo, da se nalazimo izvan sudara, dakle $\lim r_i \neq 0$, $u \to 0$ t. j. zajamčeno je $\varrho_{i,0} \neq 0$ za sve $i = 1 \ldots N$. Označimo sada sa $\nu^* = m + k_1, \ldots m + k_N$ bilo koji niz N cijelih brojeva ν^* iz niza prirodnih brojeva $\{\nu\} \equiv \{1, 2, 3 \ldots \text{in inf.}\}$, te $a^*_{i,2\nu-1} \equiv a_{\nu,2\nu-1}$. Onda nam (III) daje sustav N homogenih linearnih jednadžbi

$$\begin{aligned}
&\varrho_{1,0} \cdot a^*_{1,1} + \ldots + \varrho_{i,0} \cdot a^*_{i,1} + \ldots + \varrho_{N,0} \cdot a^*_{N,1} = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\varrho_{1,0} \cdot a^*_{1,2k-1} + \ldots + \varrho_{i,0} \cdot a^*_{i,2k-1} + \ldots + \varrho_{N,0} \cdot a^*_{N,2k-1} = 0 \qquad \text{(N)} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\varrho_{1,0} \cdot a^*_{1,2N-1} + \ldots + \varrho_{i,0} \cdot a^*_{i,2N-1} + \ldots + \varrho_{N,0} \cdot a^*_{N,2N-1} = 0
\end{aligned}$$

No zbog $\varrho_{i,0} \neq 0$ $(i = 1 \ldots N)$ nužno imamo $|a^*_{i,2k-1}| = 0$ $(i = 1 \ldots N;$ $k = 1 \ldots N)$ ili $|a^*_{i,2\nu^*-1}| = 0$ $(i = 1 \ldots N;$ $\nu^* = m + k_1 \ldots m + k_N)$ za bilo koje $m, k_1 \ldots k_N$. To je pak moguće samo, ako su svi $a_{i,2\nu-1} = 0$ $(1 \leqq i \leqq N;$ $\nu = 1, 2, \ldots$ in inf.). Odbacimo naime jednu od jednadžbi (N) kao zavisnu od ostalih, recimo posljednju. Onda nam ostane:

$$\begin{aligned} &\varrho_{1,0} \cdot a^*_{1,1} + \ldots \quad + \varrho_{i,0} \cdot a^*_{i,1} + \ldots \quad + \varrho_{N,0} \cdot a^*_{N,1} \quad = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (N') \\ &\varrho_{1,0} \cdot a^*_{1,2N-3} + \ldots + \varrho_{i,0} \cdot a^*_{i,2N-3} + \ldots + \varrho_{N,0} \cdot a^*_{N,2N-3} = 0 \end{aligned}$$

dakle $$\varrho_{1,0} : \varrho_{2,0} : \ldots : \varrho_{N,0} = A^*_1 : A^*_2 : \ldots : A^*_N,$$

gdje je A_i^* minor i-tog stupca matrice $A^* \equiv (a_{i,2k-1})$ $(i = 1 \ldots N;$ $k = 1 \ldots N-1)$. No to mora vrijediti za bilo kojih $N(N-1)$ veličina a^*, što je moguće stvarno samo uz $a_{i,2\nu-1} = 0$ $(1 \leqq i \leqq N,$ $\nu \geqq 1)$; rang matrice A^* je $r(A^*) = 0$.

Sad nam sustavi (I)–(II) daju

$$\nu c_{2\nu} = \sum_{i=1}^{N} \{(\nu-1)\, a_{i,1} \cdot \varrho_{i,2\nu} + \ldots + (\nu-\alpha-1)\, a_{i,2\alpha-1} \cdot \varrho_{i,2(\nu-\alpha)} + \ldots + a_{i,2\nu-3} \cdot \varrho_{i,4}\} \qquad (IV)$$

Odatle: $c_{2\nu} = 0$ $(\nu \geqq 1)$; za $\nu = 1$ je $c_2 = 0$ direktno. No $c_0 \neq 0$, jer $\Phi \equiv 0$ vodi na alternativu $J \equiv 0$ ili $V = 0$, što oboje isključujemo (opća kolizija ili opći razlaz; cf. [2] § 123. 2, p. 63). Dakle je doista $\Phi = J V^2 = C$. Uostalom već relacije $a_{i,2\nu-1} = 0$ $(\nu \geqq 1)$ daju direktno

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r_i} \equiv \sum_{\alpha=1}^{\infty} a_{i,2\alpha-1} \cdot u^{2\alpha-1} = 0\,; \quad \text{q. e. d.}$$

e) No naš teorem možemo dokazati i mnogo izravnije: formule (14) postaju:

$$\begin{aligned} A(u) \equiv 2\,[u + 2hT] = 2 \Big[u \left(1 + \frac{2h}{V_0}\right) - 2h \frac{V_0''}{V_0^2} \cdot \frac{u^3}{3!} - \\ - 2h \cdot \frac{V_0 V_0^{IV} - 6 V_0''^2}{V_0^3} \cdot \frac{u^5}{5!} \ldots \Big] = A_1 u + A_3 \frac{u^3}{3!} + \qquad (14') \\ + A_5 \frac{u^5}{5!} + \ldots \quad (A_i \equiv A_i^0) \end{aligned}$$

Primijenimo periodičnost s periodom ω:

$$\begin{aligned} A(u + k\omega) = A_1 \cdot (u + k\omega) + \frac{A_3}{3!} \cdot (u + k\omega)^3 + \frac{A_5}{5!} \cdot (u + k\omega)^5 + \ldots = \\ = \left\{ A_1 u + \frac{A_3}{3!} u_3 + \frac{A_5}{5!} u^5 + \ldots \right\} + \end{aligned}$$

$$+\left\{A_1 k\omega + \frac{A_3}{3!}(3u^2 k\omega + 3u k^2\omega^2 + k^3\omega^3) + \right.$$

$$\left. + \frac{A_5}{5!}(5u^4 k\omega + 10u^3 k^2\omega^2 + 10u^2 k^3\omega^3 + 5u k^4\omega^4 + k^5\omega^5)\ldots\right\} \equiv$$

$$\equiv A_1 \cdot u + \frac{A_3}{3!}u^3 + \frac{A_5}{5!}u^5 + \ldots$$

Dakle je druga zavinuta zagrada $\equiv 0$, i to za svako u; to je pak moguće samo tako, da su članovi s varijabilnim u svaki zasebno $= 0$, a zasebno je stalni član $= 0$:

$$A_1 k\omega + \frac{A_3}{3!}k^3\omega^3 + \frac{A_5}{5!}k^5\omega^5 + \ldots = 0.$$

To je doista istina prema (13). Opći član druge zagrade bez stalnih sumanda jest, poredan kao koeficijent potencija od u:

$$0 \equiv \left[\frac{A_3}{3!}3u k^2\omega^2 + \frac{A_5}{5!}5u k^4\omega^4 + \ldots\right] +$$

$$+ \left[\frac{A_3}{3!}3u^2 k\omega + \frac{A_5}{5!}10u^2 k^3\omega^3 + \ldots\right] + \ldots =$$

$$= k^2\omega^2\left[\frac{A_3}{3!}3 + \frac{A_5}{5!}5k^2\omega^2 + \ldots\right]\cdot u +$$

$$+ k^2\omega^2\left[\frac{A_3}{3!}\cdot 3 + \frac{A_5}{5!}10k^2\omega^2 + \ldots\right]u^2 + \ldots$$

No to će biti $\equiv 0$ točno tada za svako u, kada su svi koeficijenti zasebno $= 0$. Tako dobivamo sustav od ∞ mnogo jednadžbi sa ∞ mnogo nepoznatih (od kojih je prva već ona sa stalnim članom!) A_1, A_3, $A_5\ldots$ $A_{2k+1}\ldots$:

$$A_1 + \frac{A_3}{3!}k^2\omega^2 + \frac{A_5}{5!}k^4\omega^4 + \ldots + \frac{A_{2k+1}}{(2k+1)!}k^{2k}\omega^{2k} + \ldots = 0$$

$$3\cdot\frac{A_3}{3!}k^2\omega^2 + 5\cdot\frac{A_5}{5!}k^4\omega^4 + \ldots + (2k+1)\cdot\frac{A_{2k+1}}{(2k+1)!}k^{2k}\omega^{2k} + \ldots = 0$$

$$3\cdot\frac{A_3}{3!}k^2\omega^2 + 10\cdot\frac{A_5}{5!}k^4\omega^4 + \ldots = 0 \qquad (S)$$

$$10\cdot\frac{A_5}{5!}k^4\omega^4 + \ldots = 0$$

$$5\cdot\frac{A_5}{5!}k^4\omega^4 + \ldots = 0$$

Do istoga sustava vodi naravno razvijanje u TAYLOROV red relacije $A(u + k\omega) = A(u)$. Osnovna alternativa sustava algebarskih jednadžbi vrijedi, kao i kod integralnih jednadžbi, i za odbrojivo mnogo jednadžbi s odbrojivo mnogo nepoznatih. Kako je kod nas holomorfnost unaprijed osigurana, ne treba da se brinemo za konvergenciju; osim toga, rješenje možemo direktno konstruirati s evidentnom konvergencijom. To jedno, dakle i ono jedino rješenje sustava dobivamo uz postavku:

$$A_1 + A_3 = 0, \quad A_3 + A_5 = 0, \quad A_5 + A_7 = 0, \quad \ldots \quad \omega = 2\pi. \tag{27}$$

Kontrola TAYLOROVim redom:

$$A(u) = A_1 u + \frac{A_3}{3!} u^3 + \frac{A_5}{5!} u^5 + \frac{A_7}{7!} u^7 + \ldots;$$

$$A'(u) = A_1 + 3\,\frac{A_3}{3!} u^2 + 5\,\frac{A_5}{5!} u^4 + 7 \cdot \frac{A_7}{7!} u^6 + \ldots;$$

$$A''(u) = A_3 u + \frac{A_5}{3!} u^3 + \frac{A_7}{5!} u^5 + \ldots;$$

Doista je tada $A_{2k+1} = (-1)^k \cdot A_1$. (28)

Ako sustav (S) podijelimo s A_1 i identički dotjeramo dodavanjem jedinica, dobivamo sustav:

$$\sin 2k\pi = 2k\pi - \frac{(2k\pi)^3}{3!} + \frac{(2k\pi)^5}{5!} - + \ldots = 0$$

$$(\sin 2k\pi)' = 1 - 3 \cdot \frac{(2k\pi)^2}{3!} + 5 \cdot \frac{(2k\pi)^4}{5!} - + \ldots = 1$$

$$(\sin 2k\pi)'' = -2 \cdot 3 \cdot \frac{(2k\pi)}{3!} + 4 \cdot 5 \cdot \frac{(2k\pi)^3}{5!} - + \ldots = 0$$

$$(\sin 2k\pi)''' = -3! \frac{1}{3!} + 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{(2k\pi)^2}{5!} - + \ldots = -1$$

$$(\sin 2k\pi)^{IV} = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{(2k\pi)}{5!} - + \ldots = 0$$

što je poznati sustav za trigonometrijske funkcije s obzirom na period iz (27), konvergentan i jednoznačan.

Odredimo sad još $A_1 = 2\left(1 + \frac{2h}{V_0}\right)$ direktno iz (14'). Dakle smo dobili odmah

$$A(u) = 2[u + 2hT(u)] = 2\left(1 + \frac{2h}{V_0}\right) \cdot \sin u. \tag{29}$$

No iz leme III vidimo, da je $1 + 2h/V_0 = \varepsilon$, dakle je i

$$A(u) = 2\varepsilon \cdot \sin u \qquad \text{q. e. d.} \tag{29'}$$

Naročitu važnost ovog dokaza vidim u tome, što smo bez upotrebe teorema o centralnim konfiguracijama sveli periodične staze (uz konačno V) u općem problemu više tijela na problem dvaju tijela i time spomenuti teorem o centralnim konfiguracijama nezavisno usput dokazali. Naravno, da smo dobili ekvivalent diferencijalne jednadžbe

$$A + A'' = 0 \tag{30}$$

s početnim uvjetima $A(0) = 0$, $A'(0) = 2\varepsilon$, što nam odmah daje dobivenu KEPLEROvu jednadžbu

$$u + 2\,hT(u) = \varepsilon \cdot \sin u \qquad \text{q. e. d.} \tag{30'}$$

(Lako je s pomoću prije izvedenih raznih veza dati još druge oblike, u što ne ćemo ulaziti).

f) Mogućnost izravnog dokaza, da je funkcija $A(u) = 2\varepsilon \cdot \sin u$, a na temelju samo svojstva dvostruke simetrije (parnosti odnosno neparnosti) i periodičnosti ukoliko dolazi eksplicite, navodi nas na pomisao, da iskoristimo u tu svrhu grupu relacija (16) (16') (17) iz teorema VIII. No to ne daje nikakav novi dokaz, kako ćemo vidjeti. Originalna MOOREova relacija nije nam prikladna, zato uzmemo (17) i pišemo:

$$G(x, y) \equiv f(x + y) \cdot f(x - y) - f^2(x) + f^2(y).$$

Za $f \equiv \frac{1}{2} A(u) \equiv u + 2\,hT(u)$ izlazi

$$G(x, y) \equiv 2h\{(x + y)\,T(x - y) + (x - y)\,T(x + y) +$$
$$+ 2\,hT(x + y)\,T(x - y) - J(x) + J(y) - 2F(x) + 2F(y)\} =$$
$$= 2h\{(x + y)\,T(x - y) + (x - y)\,T(x + y) + 2\,hT(x + y)\,T(x - y) -$$
$$- T(x)\,[x + 2\,hT(x)] + T(y)\,[y + 2\,hT(y)]\}.$$

Tu treba paziti na identitete:

$$G(x, x) \equiv 0;\ G(x, y) \equiv -G(y, x);\ G(x, y) \equiv G(-x, -y);$$
$$G(x, y) \equiv G(-x, y) \ldots;$$

zatim valja paziti na okolnost, da su za (16') za $x = 0$ prve 4 derivacije $= 0$, ali ne i 5. i t. d. Dalje zbog SCHWARZova uvjeta $\frac{\partial^2 G}{\partial x\,\partial y} \equiv \frac{\partial^2 G}{\partial y\,\partial x}$ izlazi:

$$\partial G/\partial x \equiv f'(x + y) \cdot f(x - y) + f(x + y) \cdot f'(x - y) - 2f(x) \cdot f'(x);$$
$$\partial G/\partial y \equiv f'(x + y) \cdot f(x - y) - f(x + y) \cdot f'(x - y) + 2f(y) \cdot f'(y);$$
$$f''(x + y) \cdot f(x - y) - f(x + y) \cdot f''(x - y) \equiv 0 \text{ (cf. § 6, teor. VIII).}$$

Uz periodičnost je to ekvivalentno s $G \equiv 0$. U našem specijalnom slučaju izbora funkcije f izlazi:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x\,\partial y} \equiv 2h\left\{[(x + y) + 2\,hT(x + y)]\,\frac{V''(x - y)}{V^2(x - y)} - \right.$$

$$- [(x-y) + 2\,h\,T\,(x-y)] \begin{matrix} V'\,(x+y) \\ V^2\,(x+y) \end{matrix} \Big\} \equiv$$

$$\equiv 2\,h\,\{\dot{J}\,(x+y)\cdot\dot{J}''\,(x-y) - \dot{J}\,(x-y)\cdot\dot{J}''\,(x+y)\}.$$

To su opet izrazi iz dokaza teor. VIII, § 6; s tamošnjom transformacijom $x+y=\xi$, $x-y=\eta$; $2\,x=\xi+\eta$, $2\,y=\xi-\eta$ imamo naravno i ovdje, uz uvjet periodičnosti, ekvivalent: $f''\,(\xi)\cdot f\,(\eta) - f\,(\xi)\cdot f''\,(\eta) \equiv 0$. Da to bude ispunjeno, moraju biti pomoćne funkcije $\Phi\,(x,y) \equiv \dot{J}\,(x+y)\cdot \dot{J}''\,(x-y)$, $\varphi\,(x,y) \equiv \dot{J}\,(\xi)\cdot\dot{J}''\,(\eta)$ parne, odnosno simetrične u svakoj varijabli posebno, odnosno u objema varijablama. Doista je $\Phi\,(x,y) \equiv \Phi\,(y,x)$, $\Phi\,(-x,y) \equiv \Phi\,(y,-x) \equiv \Phi\,(x,-y) \equiv \Phi\,(-y,x)$; $\varphi\,(\xi,\eta) \equiv -\varphi\,(\xi,-\eta) \equiv -\varphi\,(-\xi,\eta) \equiv \varphi\,(-\xi,-\eta)$. No mi se pitamo, da li je $\Phi\,(-x,y) \equiv \Phi\,(x,y)$, odnosno $\varphi\,(\eta,\xi) \equiv \varphi\,(\xi,\eta)$; dokaz za to implicira odnos $\dot{J}$, $\dot{J}''$ i t. d. u istim relacijama kao u točki e) ovdje. Prema tome su to same ekvivalencije. Još izvedimo vezu (17) sa (16') s pomoću istih relacija:

$$\frac{\partial^2 G\,(x,y)}{\partial x\,\partial y} \equiv f''\,(x+y)\cdot f\,(x-y) + 2\,f'\,(x+y)\cdot f'\,(x-y) +$$

$$+ f\,(x+y)\cdot f''\,(x-y) - 2\,f'^2\,(x) - 2\,f\,(x)\cdot f''\,(x) \equiv 0;$$

$$\frac{\partial^2 G\,(x,x)}{\partial x\,\partial y} \equiv f''\,(2\,x)\cdot f\,(0) + 2\,f'\,(2\,x)\cdot f'\,(0) + f\,(2\,x)\cdot f''\,(0) -$$

$$- 2\,f'^2\,(x) - 2\,f\,(x)\cdot f''\,(x) \equiv 0; \quad f\,(0) = 0,\ f''\,(0) = 0 \quad \text{(neparnost!)}$$

$$\frac{\partial^2 G\,(x,x)}{\partial x\,\partial y} \equiv 2\,f'\,(2\,x)\cdot f'\,(0) - 2\,f'^2\,(x) - 2\,f\,(x)\cdot f''\,(x) \equiv 0.$$

S druge je strane

$$F\,(x) \equiv f\,(2\,x)\cdot f'\,(0) - 2\,f\,(x)\cdot f'\,(x) \equiv 0,$$

$$F'\,(x) \equiv 2\,f'\,(2\,x)\cdot f'\,(0) - 2\,f'^2\,(x) - 2\,f\,(x)\cdot f''\,(x) \equiv 0; \quad \text{q. e. d.}$$

g) U suštini se svaki dokaz teorema X svodi na dokazivanje nekog identiteta (ili relacije) razvojem u beskonačne redove i računanjem koeficijenata. Očito je, da činjenica izrečena tim teoremom leži toliko duboko, da se taj put ne da zaobići nikakvim općenitim razmatranjem, kakva su na pr. funkcionalna svojstva iz točke f). Međutim, možemo se nadati, da ćemo postupak skratiti, ako se oslonimo na teorem, koji vrijedi uz iste pretpostavke, a izveden je sa svoje strane baš takvim razvijanjem u beskonačne redove i računanjem koeficijenata. Takav teorem je BERTRANDov teorem (l. c. § 4, napomena III); napose i on vrijedi samo uz kontinuirano varijabilne parametre problema, dakle i mase. No iz okolnosti, da je kod periodičkog gibanja sustava od n masâ m_i $(i = 1 \ldots n)$ u inercijalnom sustavu svaka staza periodička i zatvorena spec. oko baricentra sustava, izlazi: da za nju vrijedi s obzirom na fik-

tivnu masu $M \equiv \sum_{i=1}^{n} m_i$ u baricentru G sustava BERTRANDov teorem, dakle je konfiguracija centralna, a gibanje svake mase oko baricentra vrši se prema zakonima problema dvaju tijela; q. e. d.

9.

Napomena V: Valja nam se sad osvrnuti na protivne tvrdnje i primjere. Ponajprije ćemo se samo ukratko osvrnuti na glavne nedostatke najnovijeg djela iz nebeske mehanike [10] C. L. SIEGELa iz 1956. Za nj bi se moglo očekivati da će sadržavati odraz stvarnog razvoja problema više tijela posljednjih godina. Od toga nema, međutim, ništa. Čak kod prikaza LAGRANGEovih egzaktnih rješenja u II (Periodische Lösungen), § 12 (Die Lösungen von LAGRANGE) na p. 70 suponira rješenja u ravnini, umjesto da to izvede, a pregled centralnih konfiguracija (p. 75) nepotpun je i neispravan. S obzirom na rezultate, koji su, međutim, postignuti u problemu više tijela (cf. literaturu ovdje i u [11]), zgodno je citirati neka mjesta kod SIEGELa: I (Das Dreikörperproblem), § 5 (Das n-Körperproblem), p. 21 »Trotz der Bemühungen hervorragender Mathematiker seit 200 Jahren ist dieses Problem für $n > 2$ bis heute ungelöst geblieben«. Navodi poznatu izjavu DIRICHLETa (1858), da je (bez regularizacije?) metodom sukcesivnih aproksimacija po tipu malih titraja uspio riješiti općenito problem; to je potpuno isključeno, a protivi se svim kasnijim rezultatima (cf. [2] § 123, p. 66). Dalje veli »Schliesslich wurde 20 Jahre später die Preisaufgabe im Falle $n = 3$ durch SUNDMAN gelöst« ... »Für $n > 3$ ist kein entsprechendes Resultat bekannt«. U § 6 (Der Zusammenstoss) pošto se ograničio na dvojne (binarne) sudare riječima p. 29 »Der Fall des Dreierstosses soll hier nicht weiter untersucht werden« (cf. [2] § 132, p. 75), veli od riječi do riječi na p. 32: »Es ist nicht zu erwarten, dass man ohne weiteres durch Anwendung des Existenzsatzes von CAUCHY die singuläre Stelle $t = t_1$ wird einfangen und überdecken können, nachdem man in die Bewegungsgleichungen des Dreikörperproblems an Stelle von t die neue unabhängige Variable $\lambda = \int_{t}^{t_1} dt/r$ eingeführt hat. Dies geht schon deswegen nicht, weil mindestens ein q bei $s = 0$ $(t = t_1)$ notwendig singulär ist«. To je sasvim gruba i elementarna griješka. Nakon transformacije nemamo više $\dot{q}$, nego naravno $q' = \frac{dq}{d\lambda} = \frac{dq}{dt} \cdot \frac{dt}{d\lambda} = r\dot{q}$; u sudaru je već $r^{1/2}\dot{q} = \text{const}$, dakle $r\dot{q} = q' = 0$. Tako izlazi suprotno, a time otpada ono, na čemu SIEGEL insistira, t. j. da treba i koordinate transformirati; tako su njegovi §§ 9–11 sasvim suvišni. Ista pogreška uništava mu i dokaz u § 8 (Anwendung auf das Dreikörperproblem) na p. 46, da nema gomilanja časova sudara u konačnosti, nego je $t_\nu \to \infty$. Iako se ni iz [1]

ni [10] ne vidi, da li je taj »dokaz« preuzeo WINTNER od SIEGELA ili obratno, oba su identična i jednako pogrešna, kako sam potanko izložio u [11] § 222. To ne ću ponavljati, nego je, možda, prikladno još jednom istaći okolnost, da je svaka sudarna situacija ekstremalna, te je svakako $\dot{J}(t_\nu) = 0$. Zaključak sasvim ekstenzivno teče ovako: u intervalu *pred* sudarom uz *uzlazno* vrijeme je $t_0 - \delta \leqq t < t_0$, $r \leqq \varepsilon$, $V \geqq N$; $\frac{1}{2}\ddot{J} = V + 2h \geqq 0$ $(h \lesseqgtr 0)$; $\dot{J} \uparrow \dot{J}_0$; $\operatorname{sgn} \dot{J} = \text{const} < 0$, $\dot{J}_0 \leqq 0$, $J \downarrow J_0$. (Elementarno svojstvo pozitivno definitne forme J.) Ako se približavamo s *druge* strane, onda vrijeme teče *silazno:* $t_0 \leqq t \leqq t_0 + \delta$, $r \leqq \varepsilon$, $t \to t_0 + 0$, i t. d. sve isto. Ali ako promatramo tok gibanja kontinuirano kroz t_0 uz stalno uzlazno vrijeme, onda $\dot{J}$ sveudilj raste i kod prolaza kroz t_0, naročito nakon prolaza kroz t_0, J se opet povećava, dakle $\dot{J}_0 \geqq 0$ $(t = t_0 + 0)$, a poslije t_0 uz uzlazno vrijeme je $\dot{J} > 0$; prema sudaru $|\dot{J}|$ pada, iako $\dot{J}$ raste s negativnih na pozitivne vrijednosti kroz nulu u sudaru. Naprotiv je $\ddot{J}$ oko sudara stalno pozitivno, kao i J; između dva susjedna sudara t_ν, $t_{\nu+1}$ ima $\ddot{J}$ dva ekstrema, a između njih je $\dot{J} = 0$ ponovo izvan sudara (tu je $J = \text{Max}$ i odgovara apsidama). Dakle imamo ovu potpunu sliku:

(a) nešto prije sudara t_ν, *vrijeme raste* . . $\dddot{J} > 0$, $\ddot{J} < 0$, $\dot{J} > 0$; $\ddot{J} \uparrow + \infty$, $\dot{J} \uparrow 0$, $J \downarrow J_0 \geqq 0$;

(b) u času sudara $t = t_\nu$ $\dddot{J} = + \infty$, $\ddot{J} = 0$, $\dot{J} = \dot{J}_0^{\min} \geqq 0$;

(c) iza sudara t_ν odmah $\dddot{J} > 0$ (ali $\ddot{J} < 0$), $\ddot{J} > 0$, $\dot{J} > 0$; $\ddot{J} \downarrow 0$, $\dot{J} \uparrow \dot{J}_{\text{Max}} > 0$, $0 < J \uparrow$;

(d) negdje između t_ν i $t_{\nu+1}$ bude . . . . . $\ddot{J} = 0$, $\dot{J} = \dot{J}_{\text{Max}} > 0$;

(e) još uvijek u tom međuintervalu . . . $\dddot{J} < 0$, $\ddot{J} > 0$, $\dot{J} > 0$; $\ddot{J} \downarrow \ddot{J}_{\min}$, $\dot{J} \downarrow 0$, $J \uparrow J_{\text{Max}} > 0$;

(f) dalje u tom međuintervalu sudara . . $\ddot{J} = 0$, $\dot{J} = \dot{J}_{\min} < 0$;

(g) u idućem sudaru $t - t_{\nu+1}$ . . . . . $\dddot{J} = + \infty$, $\ddot{J} = 0$, $\dot{J} = \dot{J}_1^{\min} \geqq 0$;

(h) poslije drugog sudara opet . . . . . $\ddot{J} \downarrow 0$, $\dot{J} \uparrow$, $J \uparrow$ etc.

Sve se to uostalom neposredno razabira iz limitnih relacija $J \sim t^{4/3}$, $\dot{J} \sim t^{1/3}$, $\ddot{J} \sim t^{-2/3}$, koje se naravno i ovdje pokazuju kao odlučne.

Napomena VI: Najzad se moramo osvrnuti na radove J. SCHUBARTA [8] [9]. Dok u [8] autor smatra također, da je bitno transformirati uz vrijeme još i koordinate, ne dobiva naravno teorijski ništa interesantno. Njegova transformacija

$$u = -2\int \frac{dt}{r_{12}\, r_{23}} = -2\int \frac{dE}{r_{23}}, \quad h = \dot{r}_{23}^2 - 1/r_{23}, \quad y = 1/\dot{r}_{23};$$

$$r_{23} = y^2\,(1 - hy^2)^{-1}$$

vodi na zavisne varijable h, r_{23}; to se može, možda, označiti kao krajnje dostignuta granica neprirodnosti dosada razmatranih transformacija u ovom problemu ($x = r_{23} + r_{12}/2$ je udaljenost trećeg tijela od baricentra). U [9] primjenjuje taj i slične sustave na restringirani problem većinom. Ti numerički primjeri, dobiveni numeričkom integracijom regulariziranih diferencijalnih jednadžbi, nemaju za nas interesa, jer se odnose na specijalni slučaj restringiranog problema, t. j. $m_3 = 0$. Jedino je posljednji interesantan, i to vrlo, jer predočuje sasvim nov slučaj periodičnog sudarnog gibanja u problemu triju tijela.

Međutim, moramo najprije konstatirati, da autorova konačna tabela u [9] p. 21 (tab. 3), kojom je prikazano gibanje, sadržava, i to na najosjetljivijem mjestu, numeričke griješke, što vidimo ispitujući diferencije:

u	t	Δt	$\Delta^2 t$	$\Delta^3 t$	$\Delta^4 t$	$\Delta^5 t$
0,0	0,00000					
		+ 4				
0,1	0,00004		+ 25			
		29		+ 24		
0,2	0,00033		49		— 3	
		78		21		+ 3
0,3	0,00111		70		0	
		148		21		— 6
0,4	0,00259		91		— 6	
		239		15		+ 6
0,5	0,00498		106		0	
		345		15		— 6
0,6	0,00843		121		— 6	
		466		9		+ 3
0,7	0,01309		130		— 3	
		596		6		— 1
0,8	0,01905		136		— 4	
		732		+ 2		+ 2
0,9	0,02637		138		— 2	
		870		0		— 1
1,0	0,03507		138		— 3	
		1008		— 3		0
1,1	0,04515		135		— 3	
		1143		6		0
1,2	0,05658		129		— 3	
		1272		9		+ 2
1,3	0,06930		120		— 1	
		1392		10		— 1
1,4	0,08322		110		— 2	
		1502		12		+ 1
1,5	0,09824		98		— 1	
		1600		13		+ 2
1,6	0,11424		85		+ 1	
		1685		12		— 7
1,7	0,13109		73		— 6	
		1758		18		+ 11
1,8	0,14867		55		+ 5	
		1813		13		— 10
1,9	0,16680		42		— 5	
		1855		18		+ 9
2,0	0,18535		24		+ 4	
		1879		— 14		
2,1	0,20414		+ 10			
		1889				
2,2	0,22303					

Sve su diferencije navedene u jedinicama 5. decimale. Vidimo, da su 5. diferencije svakako neupotrebljive; ali ni hod 4. diferencija nipošto ne zadovoljava, i to najviše na oba kraja tabele; u sredini je mirniji i drži se oko srednjaka diferencija (4.) cca —0,00002. Naročito je tangiran kraj tabele, u kojem leži četvrtina perioda $\tau/4 = 0{,}21470$ po autoru. Zbog toga ne možemo u daljim računima očekivati sklad iza 3. decimale.

Sad moramo radi boljeg razumijevanja prikazati u bitnim crtama SCHUBARTov primjer (cf. [9] p. 22, fig. 5). Dane su 3 jednake mase $m_i = 1$ $(i = 1, 2, 3)$. U času $t = 0$ neka se sudaraju na čvrstom pravcu (os x) mase m_1 i m_2. Udaljenost $r_{13}^0 = r_{23}^0 = 1$ u tom času neka je jedinica dužine. Onda je jedinica vremena određena zahtjevom, da je konstanta gravitacije $k^2 = 1$. Koordinate ćemo brojati prema ukupnom baricentru G. Onda autor upotrebljava pomoćne veličine $\xi = r_{12}/2$ i $\eta = r_{23} + r_{12}/2$ opet od baricentra, dobiva (kako sâm samo riječima navodi) za $\sqrt{\xi}$, η, $i\eta$ sustav diferencijalnih jednadžbi bez singulariteta, ako uvede još regularizaciju kao prije s protivnim predznakom. Konačno opisuje gibanje i sa $r_{13} = r_{12} + r_{23}$ (stalno!) i $x_2 = \frac{1}{3}(r_{12} - r_{23})$, što je udaljenost m_2 od G, pozitivna prema m_3. Sudar se uzima simetričan, tok pojava je paran. Uz prikladan izbor konstante energije (koju autor ne navodi) dobiva se za $t = \tau/4 \ldots x_2 = 0 \ldots \dot{r}_{13} = 0$ (m_2 je u G). Onda je tu x_2 neparna, r_{13} parna funkcija vremena i slika se zrcali na stranu m_3, te opet nakon $\tau/4$ dolazi do simetričnog sudara između m_2 i m_3. Nakon $\tau/2$ još sve se vraća na početak potpuno simetrično. Pritom treba držati na umu, da u polovici perioda prođe m_1 od sudarne točke sa m_2 do kraja svoje staze i tu stane; u prvoj četvrtini perioda masi m_2 pada brzina od $+\infty$ na minimum i onda u drugoj četvrtini perioda opet raste do $+\infty$ kod sudara sa m_3. Dio staze od m_1 u prvoj četvrtini perioda (to je druga četvrtina za m_3 u obratnom smjeru) mnogo je veći, jer brzina pada od $+\infty$, nego u drugoj četvrtini, gdje m_1 prođe samo komadićak puta, dok v_1 bude $= 0$. Simetrično i inverzno ide stvar sa m_3. SCHUBART je numeričku integraciju dobivenog sustava diferencijalnih jednadžbi izveo u pedesetak koraka na 7 decimala uz traženu točnost od 5 decimala. Na što se svode uvodno spomenute netočnosti njegove tabele, ne razabira se iz radnje. Suprotno mišljenju autora smatram, da su njegovi prethodni primjeri iz restringiranog problema bez većeg interesa; naprotiv, ovaj je posljednji primjer po mom sudu od naročitog principijelnog značenja, kako ću nastojati pokazati odmah dalje, te predstavlja vrlo lijep uspjeh autora.

U našim prethodnim izvodima isključivali smo sudare, jer nisu davali »točke okomitosti«. Ipak su oni ekstremalne točke i daju simetričan tok pojava, samo zakrenuto za 90^0 oko tangente u šiljku. Međutim se ra-

zabira, da su ovdje ispunjene sve bitne pretpostavke izvoda (e) iz teorema X, jer uvjet periodičnosti $u + 2ht = 0$ vrijedi i za sudare. Parnost i simetrija su po konstrukciji primjera tu, te možemo očekivati, da ćemo uspjeti uvesti u primjer jedan ritam iz problema dvaju tijela prema (29) odnosno (29'). Vidjet ćemo, kako je ovaj primjer prikladan, da se osvijetli uloga svake pojedine pretpostavke i veze među pojedinim uvjetima. Svakako se vidi, da nije teško barem aproksimirati gibanje masa m_1 ili m_3 po zakonima problema dvaju tijela, što bismo očekivali: no dvostrani su sudari mase m_2 u problemu dvaju tijela nezamišljivi. Zbog toga moramo pokušati, da gibanje mase m_2 prikažemo sastavljenim iz dvaju gibanja po zakonima problema dvaju tijela, jedno do G, drugo simetrično poslije. Budući da brzina mase m_2 nije u sredini (G) nula, to znači da prvo gibanje kod malih brzina moramo odrezati i kontinuirano s kontinuiranom tangentom nastaviti simetričnim dijelom u cjelinu. Suvišno je spominjati, da se radi o samim pravčastim gibanjima iz problema dvaju tijela, gdje je na jednom kraju sudarni šiljak s brzinom $+\infty$, a na drugom zastojni šiljak brzine nula.

Za našu svrhu odredimo udaljenosti x_1, x_2, x_3 masa m_1, m_2, m_3 od ukupnog baricentra G, da time prijedemo na baricentričke koordinate. Uzmemo na čas ishodište koordinatnog sustava O' u krajnje lijevoj masi m_1, kako bi sve dužine pale desno i bile pozitivne. Onda je

$$x_G' = \frac{1}{3}(0 + x_2' + x_3') = \frac{1}{3}(x_2' + x_3'); \quad x_3' = \underline{r_{13} = r_{12} + r_{23}};$$

$$\underline{x_2} = x_2' - x_G' = r_{12} - \frac{1}{3}(r_{12} + r_{23} + r_{12}) = \frac{1}{3}(r_{12} - r_{23})$$

kao u SCHUBARTA.

$$r_{12} = \frac{1}{2}(r_{13} + 3x_2), \quad r_{23} = \frac{1}{2}(r_{13} - 3x_2);$$

$$\underline{x_1} = -x_G' = -\frac{1}{3}(r_{12} + r_{13}) = \underline{-\frac{1}{3}(2r_{12} + r_{23})};$$

$$\underline{x_3} = \underline{\frac{1}{3}(r_{12} + 2r_{23})}.$$

S obzirom na $r_{12} = 2\xi$, $r_{23} = \eta - \xi$, $r_{13} = \eta + \xi$

imamo $-x_1 = \xi + \eta/3$, $x_2 = \xi - \eta/3$, $x_3 = \frac{2\eta}{3}$; $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.

Kušamo li ta gibanja prikazati formulama problema dvaju tijela, moraju vrijediti *sinhrono* formule

$$-x_1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}(1 - \cos w);$$

$$x_3^{(I)} = -x_1^{(III)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}(1 - \cos\bar{w}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}(1 + \cos w^*)$$

$$x_2 \equiv -x_1 - x_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}(1 - \cos w) - \frac{1}{3} - \frac{1}{6}(1 + \cos w^*)$$

(Rimski broj: kvadrant)

Za kontrole imamo

$$J = \frac{2}{3}(3\xi^2 + \eta^2), \quad V = \frac{1}{2}\xi + \frac{2\eta}{\eta^2 - \xi^2}.$$

Sinhronizacija dana je KEPLEROVOM jednadžbom $nt = w - \sin w$, samo valja imati na umu, da je za m_2 dvostruka frekvencija (srednje gibanje) po konstrukciji. S realnih brojeva prijeđemo na kutove (u minutama množeći sa $\varrho' = 3437{,}75$, $\log \varrho' = 3{,}536\,2739$). Kao obrazloženje navedenih formula treba samo uočiti, da je $t = 0 \ldots x_2^0 = -\frac{1}{3}$, $t = \tau/4 \ldots x_2 = 0$, dakle je $2a = 1/3$, $a = 1/6$; nadalje je $\bar{w} = w^* + 180^0$, ali su to različiti kutovi zbog toka vremena, u 3. i 4. kvadrantu je $nt = w^* + \sin w^*$. Autor daje $\tau/4 = 0{,}21470$, $\tau = 0{,}85880$. Ta se vrijednost dobiva iz tablice navedene naprijed interpolacijom (recimo GAUSSOVOM formulom) dodavanjem vrijednosti $m = 0{,}5588$ k $t\ (u = 2{,}1) = 0{,}20414$ zbog $m \cdot 0{,}01889 = m \cdot \Delta t$. Imamo:

u	r_{13}	x_2	Δr_{13}	$\Delta^2 r_{13}$	Δx_2	$\Delta^2 x_2$
2,0	1,22663	— 0,03114				
			+ 249		+ 1998	
2,1	1,22912	— 0,01116		— 235		— 1
			+ 14		+ 1997	
2,2	1,22926	+ 0,00881				

dakle: $x_2 = x_2(2{,}1) + \binom{n}{1}\Delta x_2\left(2{,}1 + \frac{1}{2}\right) + \binom{n}{2}\Delta^2 x_2(2{,}1) +$

$$+ \frac{n(n^2-1^2)}{3!}\Delta^3 x_2\left(2{,}1 + \frac{1}{2}\right) \cdots$$

$$r_{13} = r_{13}(2{,}1) + \binom{n}{1}\Delta r_{13}\left(2{,}1 + \frac{1}{2}\right) + \binom{n}{2}\Delta^2 r_{13}(2{,}1) \ldots$$

ili

$$x_2 = -0{,}01116 + 0{,}5588 \cdot 0{,}01997 - (0{,}5588 \cdot 0{,}4412)/2 \cdot 0{,}00001 \ldots =$$

$$= -0{,}01116 + 0{,}01116 = 0;$$

$$r_{13} = 1{,}22912 + 0{,}5588 \cdot 0{,}00014 + (0{,}5588 \cdot 0{,}4412 : 2) \cdot 0{,}00235 =$$

$$= 1{,}22912 + 0{,}00008 + 0{,}00029 = 1{,}22920 + 0{,}00029 = 1{,}22949,$$

kako i autor navodi.

Srednje gibanje (frekvencija) je $n = 2\pi/\tau = 7{,}31624$; $n' = 25151{,}4'$ daje sad $n't = w' - \varrho' \cdot \sin w'$, $n't = w^{*\prime} + \varrho' \cdot \sin w^{*\prime}$. Odabrat ćemo za usporedbu sa SCHUBARTOM samo 3 podjednako daleke vrijednosti od njih 23, i to na 3 decimale točno:

$$u^1=0{,}5 \quad t^1=0{,}005_0 \quad \xi^1=0{,}02986 \quad \eta^1=0{,}99996$$
$$u^2=1{,}0 \quad t^2=0{,}035_1 \quad \xi^2=0{,}10524 \quad \eta^2=0{,}99814$$
$$u^3=1{,}7 \quad t^3=0{,}131_1 \quad \xi^3=0{,}23306 \quad \eta^3=0{,}97269$$

ili

$$t^1=0{,}005_0 \quad -x_1^1=0{,}36318 \quad x_2^1=-0{,}30346 \quad x_3^1=0{,}66664$$
$$t^2=0{,}035_1 \quad -x_1^2=0{,}43795 \quad x_2^2=-0{,}22747 \quad x_3^2=0{,}66543$$
$$t^3=0{,}131_1 \quad -x_1^3=0{,}55729 \quad x_2^3=-0{,}09117 \quad x_3^3=0{,}64846$$

Za odabrana 3 momenta riješimo KEPLEROve jednadžbe sukcesivnim aproksimacijama:

$$n'\,t^1=\ 125',757=\ 2^0\ 5',76 \quad w^1=2086',5\ =\ 34^0 46',5 \quad w^{*1}=\ 1^0\ 2',83=\ 62',83$$
$$n'\,t^2=\ 882',814=14^0 42',81 \quad w^2=4064',34=\ 67^0 44',34 \quad w^{*2}=\ 7^0 22'\ =\ 442'$$
$$n'\,t^3=3297',346=54^0 57',35 \quad w^3=6546'\ =109^0\ 6' \quad w^{*3}=28^0\ 2'\ =1682'$$

S tim izlaze koordinate po računu, zato u zagradama:

$$-(x_1)^1=0{,}36309 \quad (x_2)^1=-0{,}30355 \quad (x_3)^1=0{,}66664$$
$$-(x_1)^2=0{,}43686 \quad (x_2)^2=-0{,}22843 \quad (x_3)^2=0{,}66529$$
$$-(x_1)^3=0{,}55453 \quad (x_2)^3=-0{,}09228 \quad (x_3)^3=0{,}64681$$

Dakle su diferencije u smislu $O-C\equiv x_i-(x_i)\equiv \Delta x_i$, kao i u procentima:

$$-x_1^1=+0{,}00009=0{,}025\% \quad x_2^1=+0{,}00009=0{,}03\% \quad x_3^1=\ 0{,}00000=0{,}000\%$$
$$-x_1^2=+0{,}00110=0{,}25\% \quad x_2^2=+0{,}00096=0{,}42\% \quad x_3^2=+0{,}00014=0{,}02\%$$
$$-x_1^3=+0{,}00276=0{,}50\% \quad x_2^3=+0{,}00111=1{,}23\% \quad x_3^3=+0{,}00165=0{,}25\%$$

Dakle s ograničenjem na 3 decimale ili u procentima imamo odličan sklad; SCHUBARTOV se primjer da vrlo dobro aproksimirati samim gibanjima po tipu problema dvaju tijela.

Usprkos tome ne bi bio ispravan zaključak, da se taj primjer i svodi, u suštini egzaktno, na problem dvaju tijela! Mali sistematski hod diferencija, koji se naprijed može konstatirati, nije slučajan, nego nam ukazuje na bît problema. Zbog simetričnosti je zajamčena sinhronizacija po tipu problema dvaju tijela; ali zbog sudara $\Phi=JV^2$ nije ograđeno, nego raste do $+\infty$ i ne može biti $=const.$ Konfiguracija na pravcu je samo u izuzetnim momentima LAGRANGEova, i onda nema »dobre« brzine. Da se ipak dobiva toliko visoki sklad, leži u okolnosti, što se kod sudara konfiguracija približava sve više onoj iz problema dvaju tijela: zato i rastu diferencije, kako se od sudara udaljujemo do $x_2=0$. Sve je to, mislim, vrlo instruktivan primjer o ulozi pojedinih pretpostavki i o karakteru sudara.

10.

Napomena VII: Funkcije, koje smo razmatrali u teoremu VI, imaju sve jedno osobito svojstvo: one su ili periodične ili stalno rastu uz povremene procentualno sve manje oscilacije. Nastale su pak integracijom periodičkih funkcija. To nas navodi, da definiramo jednu novu klasu funkcija:

Definicija a). *Gotovo monotona* funkcija jest realna funkcija svojstva $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, ako $f(x)$ uz to ima ograđenu varijaciju $< M$.

Na taj način je očito, da procentualni udio ev. oscilacija funkcije, zbog kojih ona nije striktno monotona, sve više opada, kada x raste do $\pm\infty$.

Primjeri a). $T(u)$ zbog (11_1), $F(u)$ zbog (11_2), $F_\nu(u)$ zbog (11_3). Upravo radi tih primjera proširimo definiciju na slučaj periodičnih funkcija:

Definicija b). *Neprave* gotovo monotone funkcije uopće ne rastu ili ne padaju, ali su im oscilacije (varijacija) ograđene. Ostale su funkcije prave.

Primjeri b). Neka nam je dana izvodna funkcija $f_0(x)$, periodična nad (0,1) (zbog jednostavnosti):

$$f_0(x+1) = f_0(x). \tag{I}$$

Njena srednja vrijednost je stalni član u njenu FOURIEROVU razvoju (ako postoji) $\bar{f} = a_0/2 = \int_0^1 f_0(x)\,dx$. Ako je taj $\bar{f} \neq 0$, onda iterirana funkcija

$$f_1(x) = \int_0^x f_0(\xi)\,d\xi \tag{II}$$

stalno raste/pada prema tome, da li je $\bar{f} = a_0/2 \gtrless 0$, uz periodične oscilacije stalne amplitude, dakle upravo procentualno sve manje kad x raste do $\pm\infty$, kako traži definicija a). Tako je prema (I) izvodna funkcija $f_0(x)$ neprava, gotovo monotona funkcija, a prema (II) njena integralna iterirana funkcija $f_1(x)$ prava gotovo monotona funkcija. Sve dalje iterirane funkcije

$$f_\nu(x) \equiv \int_0^x f_{\nu-1}(\xi)\,d\xi \tag{III}$$

jesu onda pogotovu gotovo monotone funkcije. Ispadaju li, kao kod trigonometrijskih funkcija $\sin x$, $\cos x$ nad $(0, 2\pi)$ srednjaci $a_0/2 = 0$ za sve iterirane funkcije, sve su neprave gotovo monotone funkcije. Dobili smo dakle

Teorem a). Periodične funkcije i sve njihove integralne iterirane funkcije jesu gotovo monotone funkcije, ev. neprave. Imaju li takve funkcije derivacije, one su opet gotovo monotone, općenito neprave od nekog indeksa dolje. (To posljednje izlazi odatle, što je derivacija integrala podintegralna funkcija, a derivacija periodične funkcije opet periodična).

Primjer c). Za periodična rješenja problema više tijela totalna je regularizabla (uniformizabla) $u = \int_0^t V(\tau)\,d\tau$ gotovo monotona funkcija vremena. U stvari, ona je zbog $du/dt \gtrless 0$ uvijek striktno monotona.

Teorem b). Gotovo monotone funkcije tvore prsten.

DOKAZ: $f_i(x) = m_i(x) + O_i(x)$ $(i = 1, 2)$, $m_i(x)$ monotono, $O_i(x)$ oscilacije (% pada);

$$f = c_1 f_1 + c_2 f_2 = (c_1 m_1 \pm c_2 m_2) + (c_1 O_1 \pm c_2 O_2) = m(x) + O(x);$$

$$f = f_1 \cdot f_2 = m_1 \cdot m_2 + (m_1 O_2 + m_2 O_1 + O_1 \cdot O_2) = m(x) + O(x).$$

Nulelement su periodične, t. j. neprave gotovo monotone funkcije.

Graf: Za slučaj teorema a) je $\bar{f} \neq 0$ mjera za pretičak kod $f_1(x)$ pozitivne ili negativne površine ispod $f_0(x)$ nad osi x i nad intervalom perioda. Produžavanje integracije za svaki dalji periodni interval $(n, n+1)$ dodaje (ili oduzima) ponovo taj isti iznos, iako u toku integracije površina, t. j. integralna iterirana funkcija periodički oscilira. Neka je taj »pretičak« površine $p_0 \neq 0$ ($p_0 = 0$ daje neprave gotovo monotone funkcije), onda je

$$f_1(x) = n \cdot p + \int_0^{n+x} f_0(\xi)\, d\xi = n \cdot p + O_1(x);\ f_2(x) = n^2 \cdot p + O_2(x) \text{ etc.}$$

Dobivamo sve jače monotono rastuće (padajuće) funkcije.

Valja na kraju upozoriti, da proširenje definicije a) na monotonost do konačne vrijednosti G, a ne do ∞: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = G$, $V(f) < M$ ne bi dovelo ni do kakva proširenja u stvari prema striktno monotonim funkcijama. Jer glavni rezultat o striktno monotonim funkcijama jest JORDANOV teorem, da se svaka funkcija ograđene varijacije dade prikazati diferencijom dviju (striktno) monotonih funkcija, i obratno. Za spomenuto proširenje definicije ne dobivamo nikakvo proširenje tog teorema, jer eto dostaju već striktno monotone funkcije. Naše su pak funkcije iz definicije a) nešto uže, one su zapravo »funkcije neograničenog porasta ili pada uz relativno sve manje oscilacije«.

LITERATURA

[1] A. WINTNER, The analytical foundations of celesal mechanics. 3. ed. Princeton. New Jersey 1952.

[2] R. VERNIĆ, Diskussion der Sundmanschen Lösung des Dreikörperproblems, *Jug. akad. znan. umj.* 1954 = Diss. 1951 Zagreb.

[3] R. VERNIĆ, Staze restringiranog problema triju tijela u inercijalnom sustavu (Bahnen des restringierten Dreikörperproblems dargestellt im Inertialsystem). *Rasprave Jug. akad. znan. umj.* 1 (1952) No. 4, 81–123.

[4] R. VERNIĆ, Periodische Lösungen im Dreikörperproblem, *Glasnik mat. fiz. astr. (2) 8* (1953) No. 4, 247–266.

[5] R. VERNIĆ, Die Stossbedingungen im Dreikörperproblem, *Glasnik mat. fiz. astr. (2) 9* (1954) No. 1, 3–13.

[6] R. VERNIĆ, Numeričko rješavanje općeg problema triju tijela (Numerische Auflösung des allgemeinen Dreikörperproblems), *Rad Jug. akad. znan. umj. 302* (1955), 45–76.

[7] A. E. ROY-M. W. OVENDEN, On the occurrence of commensurable mean motions in the solar system II. The mirror theorem, *Monthly Notices of the R. A. S. London, 115* (1955) No. 3, 296–309.

[8] J. SCHUBART, Zur Regularisierung des Zweierstosses im Dreikörperproblem, *Astr. Nachr. 282* (1956) 262.

[9] J. SCHUBART, Numerische Aufsuchung periodischer Lösungen im Dreikörperproblem, *Astr. Nachr. 283* (1956) 17–22.

[10] C. L. SIEGEL, Vorlesungen über Himmelsmechanik, *Grundlehr. math. Wiss. 85*. Berlin, Springer 1956.

[11] R. VERNIĆ, Kritička razmatranja o sudarima u problemu više tijela (Kritische Betrachtungen über die Zusammenstösse im Mehrkörperproblem), *Rad Jug. akad. znan. umj. 314* (1957) 1–85.

[12] R. VERNIĆ, Rješenje problema više tijela (Lösung des Mehrkörperproblems), *Rad Jug. akad. znan. umj. 314* (1957).

Primljeno na sjednici Odjela za matematičke, fizičke i tehničke nauke dne 1. IV. 1958.

RADOVAN VERNIĆ

PERIODISCHE UND SYMMETRISCHE LÖSUNGEN DES MEHRKÖRPERPROBLEMS*

1.

Anmerkung I: In der Arbeit [4] schliesst eine Reihe von Sätzen über periodische Bewegungen im Dreikörperproblem mit folgendem Satze (X, S. 259): »Die einzigen periodischen Lösungen des allgemeinen Dreikörperproblems sind die LAGRANGEschen exakten Lösungen«. Am Anfang dieser Arbeit (a. a. O.) war das restringierte Problem zwanglos als Ausnahme ausgeschlossen. Der Beweis enthielt dort zwei wesentliche vorbereitende Teile. Erstens den Beweis, dass die Extreme aller Entfernungen und ihrer homogenen definiten Formen J, V, usw. simultan auftreten; und zweitens den Beweis, dass die Funktionen J, V gerade, bzw. $T(u)$ ungerade sind, woraus in Kürze die Schlussformel $J V^2 = C$ folgte. Das ergab eine unerwartete Lösung des Problems der periodischen Bahnen von POINCARÉ.

In den Abhandlungen [11] [12] erweiterte ich die angeführten Untersuchungen auf den Fall von mehr als drei Körpern; ich machte jedoch zugleich (§ 222) aufmerksam, dass der Beweis in [4] nicht einwandfrei sei und daher weitere Untersuchungen notwendig seien. In der Tat können wesentliche Einwände gegen die beiden angeführten Hauptpunkte des Beweises gemacht werden, wodurch der ganze Beweis illusorisch wird. Zwar sind nach (1) J, V ungleichsinnig monotone positiv definite Formen (in [4] steht S. 261 irrtümlich die Bezeichnung »semidefinit«); da jedoch im allgemeinen r_{jk} oberhalb ihres natürlichen Minimums ($= 0$) bleiben, so war a. a. O. nicht zureichend dargetan, dass mit den r_{jk} – die den Differentialgleichungen gemäss variieren – auch J, V zugleich ihre relative Extremwerte erreichen. Diese Gleichzeitigkeit ist jedoch von grundlegender Bedeutung. Und zweitens ist die Tatsache, dass für periodische Lösungen die Funktion $\Psi(u) \equiv T(u) + T(-u) \equiv 0$

* Originalüberschrift dieser Arbeit: *Periodična i simetrična rješenja problema više tijela.*

als lineare Kombination zweier partikulärer Integrale von $L(J) = 0$, als Beweiselement unbrauchbar ist, denn sie ist der Behauptung äquivalent, dass $T(u)$ ungerade, bzw. $V(u)$ gerade ist; dies wird im Text des näheren dargetan. Somit blieb der wichtigste Satz über die periodischen Lösungen in seinem Hauptteil unbewiesen.* Darum ist der Hauptzweck der vorliegenden Abhandlung, diesen Beweis vollständig nachzuholen. Ausserdem sind gewisse neue Beispiele [8] [9] und interessante Sätze aus unserem Problemkreis [7] eingehend zu untersuchen.

2.

Lemma I: Es seien $m_i n$ Massenpunkte ($i = 1 \ldots n$), die einander nach dem NEWTONschen Gesetz anziehen, im Sinne der klassischen Mechanik. Das Potential V und das polare Trägheitsmoment J sind durch (1), die totale Regularisierende (Pseudozeit) u durch (2) gegeben. Die Gleichung von LAGRANGE hat dann die selbstadjungierte Form (3), mit dem allgemeinen Integrale (4). Die Differentialgleichungen des Problems erhalten die regularisierte Form (5) und ergeben die Koordinaten, die Entfernungen und die Zeit als reguläre analytische (holomorphe) Funktionen der Pseudozeit u für alle u, und damit auf Grund der monoton gleichsinnigen Transformation (2) auch für alle Zeiten.

BEWEIS: a. a. O.

Lemma II: Die periodischen Lösungen des Mehrkörperproblems sind unter den periodischen Lösungen der Gleichung von LAGRANGE (3) enthalten und durch die Bedingungen (6) gekennzeichnet, mit den trivialen Beziehungen (7).

BEWEIS: a. a. O. Als Periode nehmen wir die wegen Holomorphie sicher existierende kleinste solche Zahl.

3.

Theorem I: Jede stetige geschlossene Bahn eines Massenpunktes in einem mechanischen Problem hat wenigstens zwei »senkrechte Punkte«, nämlich solche, in denen die Geschwindigkeit senkrecht auf dem Radiusvektor steht.

BEWEIS: a) A sei ein Punkt der Bahn; ist er schon ein »senkrechter Punkt«, so schliesst man weiter; wenn nicht, so sei der Winkel zwischen $\vec{r}$, $\vec{v}$ etwa kleiner als ein rechter. Im weiteren Verlauf der Bewegung muss ein Minimum dieses Winkels auftreten, sonst läuft der Massenpunkt asymptotisch in einen Grenzpunkt hinein, entgegen der Voraus-

* Letztere Bemerkung machte unabhängig Anfang 1956 auch G. A. MERMAN in einer Kritik gewisser Punkte meiner Arbeiten, die sonst unhaltbar ist. Vgl. [11] p. 83 »Zusatz bei der Korrektur«.

setzung. Weiter wächst der Winkel, jedoch nicht ohne Grenzen, sonst wäre die Bahn nicht geschlossen, d. h. es gibt auch einen Maximalwinkel, der wiederum ein rechter ist. Das ist einfach der Satz von WEIERSTRASS über extremale Punkte einer stetigen Funktion, kinematisch dargestellt; w. z. b. w.

Korollar I: Die »senkrechten Punkte« aus vorigem Theorem stellen eine *stationäre* oder *apsidale* Konfiguration dar.

Theorem II: Im Mehrkörperproblem mit irgendwelchen Zentralkräften treten die »senkrechten« oder stationären Punkte im allgemeinen Falle (spez. die extremalen Punkte) *simultan* für alle Massen des Systems auf, d. h. das System kommt in eine stationäre, spez. extremale Konfiguration; alle (positiv) definite Formen der Entfernungen erlangen gleichzeitig ihre Extremwerte.

BEWEIS: a) Solche Formen sind $J(r)$, $V(r) \ldots F_s(r)$, wo die Entfernungen der Einfachheit halber in eine einfache Folge umnummeriert sind. In den angeführten Bedingungen für die stationären (extremalen) Punkte sind die Entfernungen als holomorphe Integrale des Systems (5) zu nehmen.

b) Sollen alle diese Formen simultan ihren Extremwert annehmen, so müssen die Ableitungen der Entfernung verschwinden. Wir behaupten, dass jedoch schon eine Relation $dF_s/du = 0$ alle anderen nach sich zieht, und das ist im allgemeinen nur für alle $dr_i/du = 0$ (gleichzeitig) möglich. In der Tat ist wegen positiver Massen und Entfernungen (Zusammenstösse sind ausgeschlossen) solch eine Extremalbedingung bei *beliebigen Massen* genau dann möglich, wenn alle $dr_i/du = 0$ sind. Das ergibt sogleich für alle anderen Formen dasselbe Ergebnis. Nimmt man s genug gross ($> N$), so ist die Behauptung nur eine Anwendung des Satzes von WEIERSTRASS auf das System der s Formen. Die Bezeichnung »beliebige Massen« bedeutet, dass die Massen frei wählbar, also auch frei (kontinuierlich) variierbar sind. Das ist etwas anderes, als ein von vorherein gegebenes n-tupel fester Zahlen $m_i > 0$. Darauf kommen wir ausführlicher in § 4 zurück. Hier ist jedoch besonders hervorzuheben, dass für fest gegebene, aber ganz besonders ausgewählte Massen die Bedingung $dF_s/du = 0$ für festes s auch ohne $dr_i/du = 0$ befriedigt werden kann; es ist natürlich kaum möglich praktisch ein solches Gegenbeispiel zu konstruieren, denn die r_i müssen gleichzeitig den Differentialgleichungen genügen. In der Praxis wurden solche Beispiele nur für symmetrische Anfangslagen konstruiert: dann sind unsere wichtigsten Bedingungen durch Annahme erfüllt, und der Beweis geht doch zu Ende. Vgl. darüber mehr in § 9.

Theorem III: Stationäre (apsidale) oder senkrechte Konfigurationen aus dem vorigen Satze im Mehrkörperproblem sind zugleich *symmetrische* oder *Spiegelkonfigurationen*, d. h. die Bewegung des Systems erfolgt symmetrisch oder spiegelbildlich vor und nach dem Moment solch einer Konfiguration.

BEWEIS: a) Die Bedeutung symmetrischer oder Spiegelkonfigurationen für die periodischen Lösungen hat als erster systematisch ELIS STRÖMGREN untersucht, bei der Ausführung seines Programms der »numerischen Triangulierung und Topographie« des restringierten Problems um das Jahr 1900, wenn auch dieselbe Idee sporadisch auch bedeutend früher auftritt. Darüber habe ich in [3] § 21, S. 90 gehandelt, wo auch mehr Einzelheiten zu finden sind. Schon in [2] Satz II, § 211, S. 82/83 bediente ich mich der Symmetrie und Spiegelbildlichkeit. Später sprachen dies zwei schottische Autoren, ROY und OVENDEN aus, [7] (a. a. O.). Die zitierte Situation ist ihr »Spiegel-theorem«.

b) Wir brauchen dagegen seine Umkehrung, dass die periodischen Bahnen immer zweifach symmetrisch sind; denn daraus folgt, dass die Entfernungen, das Trägheitsmoment und Potential gerade, die Zeit dagegen eine ungerade Funktion der regularisierenden Pseudozeit u sind; was wir eben brauchen. Interessant ist, dass wir zugleich auch den Spiegelsatz beweisen (unabhängig von [7]), denn wir beweisen die Identität der doppeltsymmetrischen (doppeltspiegelbildlichen) und periodischen Konfigurationen.

c) Die Behauptung des Satzes selbst ist nun eine Folge der Symmetrieeigenschaften der Differentialgleichungen des Problems. Haben wir eine »senkrechte« Situation, drehen wir den Sinn aller Geschwindigkeiten *und* der Zeit zugleich um, so bekommen wir das gleiche System mit gleichen Lösungen; w. z. b. w.

Theorem IV: Die doppeltsymmetrischen (doppeltspiegelbildlichen) Lösungen des Mehrkörperproblems sind mit den periodischen Lösungen des Problems identisch.

BEWEIS: a) Setzen wir voraus, dass eine periodische Lösung vorliegt (das ist die Umkehrung des Spiegelsatzes). Dann ist die Bahn jedes Massenpunktes geschlossen. Vgl. dazu E. T. WHITTAKER a. a. O. Dann ist nach Theorem I die Existenz wenigstens zweier »senkrechter« Punkte gesichert, nach Theorem II sind das zwei simultane stationäre (apsidale) Konfigurationen, nach Theorem III endlich sind sie doppeltsymmetrisch. Nochmals sei hervorgehoben, dass diese Schlussweise für *beliebige* Massen im *allgemeinen* Problem gilt.

b) Setzen wir umgekehrt voraus, dass eine doppeltsymmetrische Lösung vorliegt. Die Behauptung ist dann der »Spiegelsatz« aus [7]; noch einfacher und allgemeiner ist der Beweis gemäss einer Note von D. BLANUŠA (a. a. O.), obgleich sie dort in einer ganz anderen Verbindung vorkommt.

4.

Anmerkung II: Nun entsteht die Frage, wie es mit den einfachsymmetrischen (einfachspiegelbildlichen) Lösungen bestellt ist? Bei ihnen sind alle Entfernungen, das Trägheitsmoment und Potential wiederum

gerade Funktionen der Pseudozeit, und damit auch der Zeit; denn die Zeit ist wieder eine ungerade Funktion der Pseudozeit. Diese Funktionaleigenschaften sind ausschlaggebend für die Gültigkeit des Schlusssatzes, dass im allgemeinen periodische Lösungen nur die Zweikörperbewegungen in den Zentralkonfigurationen sind. Bei den dortigen Beweisen gilt jedoch immer, fast kaum bemerkbar, die Voraussetzung, dass die Bahnen geschlossen sind. Das ist mehr als die Endlichkeit, die allein nicht genügt: die Bahn könnte sich asymptotisch um einen Grenzpunkt winden. Darüber handelte ich in [3]. Als Beispiel nehme man die »periodisch-asymptotischen« Lösungen von E. STRÖMGREN, die Grenzbahnen von Familien periodischer doppeltsymmetrischer Lösungen sind. Sie selbst sind jedoch nur einfachsymmetrisch, nicht geschlossen und *nicht* periodisch, denn auf beiden Enden winden sie sich asymptotisch um die Dreieckspunkte von LAGRANGE L_4, L_5 um. Ein Beispiel einfachsymmetrischer Bewegung, die im ganzen weder geschlossen noch beschränkt ist, haben wir in dem Beispiel BOHLIN-ZUMKLEY aus [6] (vgl. Fig. in [2] S. 64–65). Während die Energiekonstante in dem dort angegebenen (schmalen) Bereich konstant ist, kann das schon von $J\,V^2$ nicht behauptet werden, wie aus den angeführten Zahlen hervorgeht. Damit ist die entscheidende Rolle der Geschlossenheit bei der Periodizität genügend dargetan.

Anmerkung III: Bei dem Beweis von Satz II stiessen wir auf die Alternative der »beliebigen« und »festen« Massen. A. WINTNER ist ein Gegner der ersten Auffassung, deren wir uns gerade bei dem genannten Beweise bedient haben. Er sagt, wie die angeführten Zitate zeigten, und bestreitet deren Wert. Wenngleich gegen den im Zitat genannten Satz von POINCARÉ begründete Einwände anderen Charakters bestehen (vgl. [2]), so steht die Mehrzahl der Forscher keineswegs auf dem Standpunkt von WINTNER; denn *allgemeine* Sätze werden gerade für beliebige, d. h. frei wählbare Massen ausgesagt. So der Satz von BERTRAND (a. a. O.), so die Sätze von POINCARÉ über die Existenz periodischer Lösungen (a. a. O.), obgleich sie in die meinen Untersuchungen entgegengesetzte Richtung fallen. So die Sätze von LAGRANGE über die exakten Lösungen, z. B. ist die Dreieckslösung die einzige exakte allgemeine Lösung, d. h. mit der Maximalzahl der Integrationskonstanten und für beliebige Massen. Für »feste« Massen dagegen, die im voraus gegeben sind, ist auch der »gleichschenklige« Fall $m_1 = m_2$ möglich (a. a. O.). Dieser Fall besonders ausgewählter Massen wird von niemandem gewürdigt. Jene sogar, die die allgemeine Kollision im Mehrkörperproblem als wesentliche Singularität ansahen, geben zu, dass für besonders ausgewählte Massen diese Singularität zu einem algebraischen Verzweigungspunkt wird; das ist für sie jedoch vollständig belanglos. Bemerkenswert ist, dass zu diesen WINTNER selbst gehört; er ist (natürlich) auch sonst nicht konsequent, wie die angeführten Zitate zeigen, wo er die Termine ständig wechselt und vermischt. Unser Standpunkt ist dagegen klar: wir suchen Sätze, die unabhängig sind von der konkreten

numerischen Wahl der Massen; sie müssen sich invariant zeigen bei jeder kontinuierlichen (auch infinitesimalen) Transformation der Parameter, zu denen vorzugsweise die Massen gehören. Das sind dann *allgemeine* Sätze im Mehrkörperproblem. In folgenden Paragraphen werden wir auch ganz konkret die Ausnahmen bestimmen (vgl. auch [11] »Zusatz bei der Korrektur«).

Korollar II: Geschlossene einfachsymmetrische Bahnen eines dynamischen Problems sind periodisch.

Korollar III: Im Mehrkörperproblem mit Zentralkräften und lauter geschlossenen Bahnen ist die Bewegung des Systems periodisch; es gibt wenigstens zwei symmetrische oder spiegelbildliche Konfigurationen des Systems.

5.

Theorem V: Im Mehrkörperproblem mit »allgemeinen« Massen treten Ausnahmen bei stationären (extremalen, apsidalen, symmetrischen) Konfigurationen nur für jene Massen auf, die infinitesimal sind: $m_k = 0 \quad (p+1 \leqq k \leqq n)$, während die übrigbleibenden p Massen $m_j \neq 0 \quad (1 \leqq j \leqq p)$ eine stationäre Konfiguration mit $n' = p$ Massen bilden (»restringiertes Mehrkörperproblem«).

Beweis: a) Mit der Annahme $m_k = 0$ verschwinden alle »Koeffizienten der Wechselwirkung« $m_i = m_j m_k$, die m_k enthalten. Wir nehmen wieder das System der Formen F_s und suchen die Bedingung für das verbundene Extrem auf, indem die Entfernungen den Differentialgleichungen des Problems genügen müssen. Dabei sind c, s beliebig, und s kann man gross genug wählen, dass es N übertrifft. Im allgemeinen werden somit nicht die $( ) = 0$, sondern (als Variationen) die $dr_i = 0$ für alle i, die in der Formel wirklich vorkommen. Wie eine kleine Rechnung zeigt, würden auch $( ) = 0$ gesetzt nichts neues bringen, denn die zusammengesetzte Form reduziert sich auf die ursprüngliche und hat mit ihr natürlich simultane Extreme. Für die Massen, deren Index jedoch in der obigen Formel nicht vorkommt, gilt unsere Schlussweise nicht, sie sind in dem Sinne frei, dass sie sich nicht in Zentralkonfigurationen zu bewegen brauchen.

b) Solch ein »restringiertes Problem« hat z. B. Elis Strömgren 1919 und 1921 betrachtet (a. a. O.): von vier Massen bilden drei eine Lagrangesche Konfiguration auf einer festen Geraden, während die vierte infinitesimale Masse Oszillationen auf der Geraden ausführt. Dasselbe hat man für $n = 3$ im gewöhnlichen Dreikörperproblem, nur ist hier der »Kern« von zwei Körpern ($p = 2$) trivialerweise dauernd in einer Zentralkonfiguration; sogar im sogenannten »Keplerschen Problem« eines fixen Kraftzentrums gilt dasselbe ($p = 1$). In diesen Beziehungen finde ich die tiefste intuitive Begründung der Beziehung des restringierten und allgemeinen Dreikörperproblems. Erstens, das restrin-

gierte Problem unterscheidet sich vom allgemeinen Problem scheinbar darin, dass die infinitesimale Null-Masse »hervorspringt«; die anderen zwei Massen »folgen« dem Schlussatz über periodische Lösungen und bilden dauernd eine Zentralkonfiguration. Zweitens, auch diese infinitesimale Masse bewegt sich synchron mit den beiden ersten (ev. mit Vielfachen der Periode) – allein zusammen sind das keine Zentralkonfigurationen. Drittens, die Mannigfaltigkeit der Bahnen beim restringierten Dreikörperproblem ist nicht »kleiner« (im Sinne der Mengenlehre) denn im allgemeinen Problem, sondern »grösser«, denn die infinitesimalen Massen m_k entziehen sich der »Kontrolle«. So finde ich meinen induktiven Schluss aus [3] vielfach bestätigt.

c) Nun untersuchen wir noch den Einfluss der Bedingung, dass die dr_i aus (5) zu entnehmen sind; wir nehmen gleich das konkrete Beispiel der Gleichzeitigkeit der Extreme der positiv definiten Formen $J(u)$, $V(u)$, die auch im Beweis des Schlussatzes X vorkommen. Wie die kleine Rechnung zeigt, sind die Ausnahmen nur die Zusammenstösse und Rückkehrpunkte, in denen bzw. die Geschwindigkeiten unendlich gross oder Null sind; die schliessen wir aus. Dann muss wegen der freien Variation du wirklich jedes $dr_i = 0$ sein. In jedem konkreten Beispiel kann man verifizieren, ob die oben genannten möglichen Ausnahmen tatsächlich eingetreten sind.

6.

Anmerkung IV: Sobald wir die Entfernungen, das Trägheitsmoment und das Potential als gerade Funktionen der Pseudozeit u, die Zeit dagegen als ungerade Funktion von u gerade im Falle periodischer Lösungen (die geschlossen sind) im Mehrkörperproblem festgestellt haben, so ist – wie schon mehrfach hervorgehoben – die Beendigung des Beweises für den Schlussatz verhältnismässig leicht. In der Tat können diesem Teile des Beweises mehrere verschiedene Formen gegeben werden, so dass er zu den bestbewiesenen in Mehrkörperproblem gehört. Wegen besserer Übersichtlichkeit gruppieren wir die notwendigen Beziehungen vorerst in einigen Sätzen.

Theorem VI: Wenn wir das System der Hilfsfunktionen (8) (9) (10) einführen, so gelten für sie die Beziehungen (11) (12) (13).

Beweis: Aus der typischen explizite Rechnung folgen leicht alle Formeln.

Theorem VII: Für die Funktion $A(u)$ gilt im allgemeinen die Taylorsche Entwicklung (14), analog für (15).

Beweis: Nach leichter Herleitung der Formeln werden unter (d) noch die Ableitungen für das wichtige Aggregat JV^2 angeführt.

Theorem VIII: Die Funktion $f(x) = c \cdot \sin x$ ist die reelle (kontinuierliche, derivierbare) Lösung der Funktionalrelationen (16) (16') (17), wo im letzteren Falle nur die periodische Lösung in Betracht kommt.

BEWEIS: a) Die erste Relation mit der Periode 2π stammt von E. H. MOORE 1895; die zweite folgt daraus unter Ausnutzung der bekannten Eigenschaften der Ableitung des Sinus; hier arbeiten wir sowieso mit beliebig derivierbaren Funktionen.

b) Auf die Form (17) machte mich 7. VI. 1956. Prof. Dr. DANILO BLANUŠA aufmerksam. Ich reproduziere im folgenden seinen Beweis für zweimal kontinuierlich derivierbare Funktionen. D. BLANUŠA hat 13. VI. 1956. im Kolloquium der Gesellschaft der Mathematiker und Physiker Kroatiens ausserdem einen Beweis angeführt, der nur die Voraussetzung der Stetigkeit gebraucht; zugleich verbesserte er einige Stellen im Beweise von GOURSAT für eine analoge Relation. In (c) folgt nun der Beweis, der am Ende als alle möglichen Lösungen von (17) $f(x) = a \cdot \sin bx$, $a \cdot \operatorname{sh} \beta x$, Ax ergibt. Periodisch ist nur die erste.

7.

Lemma III: Im Falle der Zentralkonfigurationen, wo sich das Mehrkörperproblem mit n Massen auf n synchrone Zweikörperbewegungen um die fiktive Masse M im Baryzentrum des Systems reduziert, gelten die Formeln mit »repräsentativen« Grössen für das System als Ganzes (18) (19).

BEWEIS: Vgl. a. a. O. und die angeführte Rechnung.

Theorem IX: Der Fall $V = -2h$ impliziert $J = -1/2\,h$, $\Phi = -2h$ also eine Zentralkonfiguration und zwar den »Hauptfall« der Kreisbewegung. Ist im Laufe der Bewegung diese Bedingung (20) einmal extremal erfüllt, d. h. $V_0' = 0$, $J_0' = 0$, dann ist sie dauernd erfüllt. Dann haben wir kein echtes Extrem, sondern einen Flachpunkt unendlich hoher Ordnung.

BEWEIS: Der erste Teil ist fast trivial, der zweite arbeitet mit expliziter Rechnung mit unendlichen Reihen, die zuletzt auf einen Widerspruch führt: J, V müssten gleichsinnig sein, entgegen ihrer Konstruktion. Dies ist nur möglich, wenn (20) gilt. Die Tabelle in (f) gewährt eine gute Übersicht.

8.

Theorem X: Die einzigen periodischen Lösungen des allgemeinen Mehrkörperproblems sind die Bewegungen in Zentralkonfigurationen. ($n = 3$ vgl. a. a. O.)

BEWEIS: a) Der Begriff des »allgemeinen« Mehrkörperproblems ist im Sinne von § 4 zu nehmen. Die Zentralkonfigurationen sind genügend in [11] [12] § 123 beschrieben. Für spezielle Koordinatensysteme und spezielle Wahl der Parameter können Ausnahmen eintreten im Sinne von [3] [4] und hier § 3, 4, 5.

b) Der älteste Beweis ist jener aus [4] Satz X, der jetzt vollständig zu Ende geführt werden kann, nachdem die Geradheit, bzw. Ungeradheit der betreffenden Funktionen in Satz III, IV im § 3 gesichert ist, eben für die periodischen Lösungen. Also ist nach Satz IV, VI (21) (22) (23) erfüllt; nach Satz VI, VII gelten folgende Äquivalenzen: (24) (24') (25) (25') (25") usw.

c) Nun schliessen wir wie in [4] (a. a. O.): es seien die Entwicklungen von J, $1/V$ nach Potenzen von u wie angegeben; dann kann die Reihe für $J(u)$ so umgestellt werden, dass eben für die periodischen Bahnen (26) gilt. Das die Frage keineswegs trivial ist, zeigte ich a. a. O. durch Angabe eines Gegenbeispiels, der zeigt, dass trotz der immer erfüllten gleichsinnigen Monotonie (Satz II) J und $1/V$ nicht in eindeutiger Beziehung zu stehen brauchen, besonders in Gestalt einer Potenzreihe. Für periodische Bahnen dagegen wegen der sichergestellten (doppelten) Symmetrie nehmen die Funktionen J, $1/V$ um $u = 0$ wachsend und fallend gleichzeitig die gleichen Werte an; das wiederholt sich um jedes $u = k\omega$. Also gilt hier (26). Nun ergibt die Homogenie der beiden Formen sofort die Behauptung $\Phi = JV^2 = C$ (wie angegeben). Wenn jemand beanstanden sollte, dass damit die Existenz zugehöriger $r_i = \sigma r_i^*$ ohne genügende Begründung vorausgesetzt wird, so kann man mit Hilfe des Satzes von EULER länger, jedoch explizite wie angegeben mit demselben Ergebnis rechnen.

d) Die eindeutige Beziehung (26) und damit zusammenhängende Fragen können jedoch durch eine umständlichere Rechnung umgangen werden. Wir setzen Potenzreihenentwicklungen an und berechnen die Relation von EULER für Φ. Das ergibt (mit getrennten geraden und ungeraden Potenzen!) die Rekursionsformeln (I) (II) (III). Dann schliessen wir die Zusammenstösse aus, wählen irgendeine Partialfolge von ganzen Zahlen aus und erhalten aus (III) das System (N) von N homogenen linearen Gleichungen. Da die Wahl der Partialfolge beliebig war, so folgt hier notwendig die triviale Lösung $a_{i,2\nu-1} = 0$ $(1 \leq i \leq N;$ $\nu = 1, 2, \ldots$ in inf.), wie man des näheren ersieht, wenn eine, sagen wir die letzte Gleichung von (N) als abhängig weggelassen wird: die Unbekannten verhalten sich in (N') wie frei wählbare Minoren. Nun ergeben (I) (II) die Relation (IV). Daraus folgt $c_{2\nu} = 0$, $\nu \geqq 1$ ($\nu = 1$ gibt $c_2 = 0$ direkt). Nun ist bestimmt $c_0 \neq 0$, sonst wäre $J = 0$ oder $V = 0$, was wir beides ausgeschlossen haben (vgl. a. a. O.). Somit wirklich $\Phi = JV^2 = C$, was auch aus den a folgt.

e) Unseren Satz können wir auch viel direkter beweisen: aus (14) wird (14'). Dann wenden wir die Bedingung der Periodizität an, die identisch in allen u erfüllt sein muss. Daraus folgt ein System von unendlich vielen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten (S) (eine davon ist schon angeschrieben). Das gleiche System ergibt die Entwicklung in TAYLORsche Reihen von (13). Für solche Systeme gilt, unter bestimmten Voraussetzungen, dieselbe Grundalternative, wie für gewöhnliche alge-

braische lineare Gleichungen oder für die Integralgleichungen. Da unsere Funktionen holomorph sind, brauchen wir uns um die Konvergenz nicht zu kümmern; ausserdem werden wir die Lösung des Systems direkt konstruieren können. Diese eine, und darum auch die einzige Lösung von (*S*) ergibt der Ansatz (27) oder (28). Durch Division mit A_1 und identische Umformung gewinnen wir das System (*S'*), das für die trigonometrischen Funktionen erfüllt ist; alles konvergent und eindeutig. Aus (14') folgt A_1 wie angegeben, somit haben wir gleich (29) oder nach Lemma III auch (29') w. z. b. w.

Die besondere Bedeutung dieses Beweises sehe ich darin, dass die periodischen Bahnen (mit endlichem *V*) ohne den Satz über die Zentralkonfigurationen im allgemeinen Mehrkörperproblem auf das Zweikörperproblem zurückgeführt worden sind; damit ist der genannte Satz über die Zentralkonfigurationen unabhängig beiläufig bewiesen. Natürlich haben wir das Äquivalent der Differentialgleichung (30) (mit den angegebenen Anfangsbedingungen) erhalten, woraus sofort die schon gewonnene KEPLERsche Gleichung (30') folgt. Die vordem dargelegten verschiedenen Beziehungen gestatten auch andere Formen, worauf wir jedoch nicht mehr eingehen.

f) Die Möglichkeit eines direkten Beweises, dass die Funktion $\Delta(u)$ sich auf eine Sinusfunktion reduziert, führt uns dazu, die Gruppe der Relationen (16)–(17) aus Satz VIII anzuwenden. Es leuchtet jedoch ein, dass damit nichts Neues erzielt wird: da für unsere Zwecke die Relation von MOORE (16) nicht passt, nehmen wir (17) und rechnen wie angegeben. Nur muss auf die angeführten Identitäten achtgegeben werden; auch sind für (16') die ersten 4 Ableitungen $= 0$, erst die 5. nicht usw.

Der Schlussausdruck enthält die gleichen Beziehungen zwischen J, $\dot{J}$ wie der Beweis in (e), also nichts Neues. Schliesslich rechnen wir noch den Zusammenhang von (17) mit (16') durch.

g) Im Grunde genommen reduziert sich jeder Beweis des Satzes X auf die Entwicklung in unendliche Reihen und sukzessive Berechnung der Koeffizienten. Es leuchtet ein, dass die Aussage des Satzes so tief liegt, dass dieser Weg nicht umgangen werden kann, besonders nicht durch allgemeine funktionale Betrachtung von der Art jener aus (f). Dagegen kann man erwarten, dass der Beweis wesentlich kürzer ausfallen könnte, wenn wir uns auf einen Satz stützten, der seinerseits eben durch solch eine Rechnung bewiesen wäre. Solch ein Satz ist der Satz von BERTRAND (C. R. 77, 1873, 849–854); er gilt auch nur für allgemeine Parameter. Aus dem Umstand jedoch, dass bei periodischer Bewegung eines Systems von n Massen im Inertialsystem jede Bahn im besonderen um das Baryzentrum des Systems geschlossen ist, folgt ihre Bewegung um die dort gedachte fiktive Masse M nach dem Satz von BERTRAND. Die Konfiguration ist somit eine Zentralkonfiguration, und jede Bahn eine Zweikörperproblembewegung.

Anmerkung V: Nun müssen wir noch gegenteilige neuere Behauptungen und Beispiele berücksichtigen. Zuerst kurz über die hauptsächlichsten Mängel des neuesten Werkes über Himmelsmechanik [10] von C. L. SIEGEL, erschienen 1956. Hier sollte man einen Überblick über die wirkliche Entwicklung des Mehrkörperproblems in den letzten Jahren erwarten. Davon findet man jedoch nichts. Bei der Darstellung der exakten Lösungen von LAGRANGE sogar (a. a. O.) setzt er die Lösungen in der Ebene voraus, statt dies zu beweisen; die Übersicht der Zentralkonfigurationen ist unvollständig und fehlerhaft (a. a. O.). Wenn man die hier und schon in [11] zitierte Literatur einsieht, so wirkt es befremdend die angeführten Stellen bei SIEGEL zu lesen, der die Erzählung um DIRICHLET wiederholt (vgl. [2] a. a. O.). Die zitierte Stelle S. 32 ist ein grober und elementarer Fehler. Denn nach der Transformation der Zeit gibt es kein $\dot{q}$ mehr, und $q' = 0$ (wie angegeben). Also sind seine §§ 9–11 überflüssig. Derselbe Fehler macht seinen »Beweis«, dass die Zusammenstösse sich im Endlichen nich häufen, illusorisch. Das ist jedoch buchstäblich derselbe »Beweis« wie bei WINTNER [1], obgleich nicht zu ersehen ist, wer der eigentliche Urheber ist. Jedenfalls stimmt er nicht, worüber Genügendes in [11] gesagt ist. Es scheint, dass manche Forscher nicht sehen, dass jeder Zusammenstoss eine extremale Konfiguration bedeutet. Will man dies ganz extensiv einsehen, so schliesst man folgendermassen: vor dem Zusammenstoss bei wachsender Zeit gilt die angegebene Rechnung. Wenn wir uns dem Zusammenstoss von der anderen Seite nähern mit fallender Zeit, gilt dasselbe. Betrachten wir jedoch die Bewegung stetig den Stossmoment durchlaufend mit ständig wachsender Zeit, so folgt, dass $\dot{J}$ beständig durch die Null wächst. Dagegen sind $\ddot{J}$ wie J um den Stoss dauernd positiv. Nehmen wir nun irgend zwei konsekutive Stossmomente, so hat $\ddot{J}$ dazwischen zwei Extreme, zwischen welchen $\dot{J} = 0$ wird nochmals ausserhalb des Zusammenstosses: hier ist $J = J_{\mathrm{Max}}$ und die Konfiguration entspricht der apsidalen. So erhalten wir die angegebene Tabelle: (a) etwas vor dem Zusammenstoss, (b) im Stossmoment, (c) gleich nach dem Zusammenstoss, (d) irgendwo zwischen den Stossmomenten, (e) etwas später im selben Intervalle, (f) noch etwas später, (g) im folgenden Stossmoment, (h) etwas nachher usw. Dies alles folgt auch sehr leicht aus den Grenzrelationen, die ausschlaggebend sind.

Anmerkung VI: Zuletzt müssen wir uns mit den Arbeiten von J. SCHUBART [8] [9] näher befassen. In [8] meint auch dieser Autor, dass neben der Zeit auch die Koordinaten zur Regularisierung transformiert werden müssen; so erhält er auch theoretisch nichts Wesentliches, und seine angeführte Transformation ist wohl die unnatürlichste bisher angewandte Transformation (x ist die Entfernung des dritten Körpers vom

Baryzentrum). Dann wendet er in [9] diese und ähnliche Transformationen hauptsächlich auf das restringierte Problem an. Diese numerischen Beispiele, gewonnen durch numerische Integration der regularisierten Differentialgleichungen, haben für uns kein Interesse wegen $m_3 = 0$. Das letzte Beispiel dagegen ist ein sehr interessanter Fall periodischer Stossbewegung im wirklichen Dreikörperproblem, der vollständig neue Gesichtspunkte bringt.

Vorerst müssen wir jedoch feststellen, dass die Endtabelle in [9] auf S. 21 (Tab. 3) an den wichtigsten Stellen leichte numerische Fehler enthalten muss, wie die Bildung der Differenzen zeigt. Es folgt, dass die 5. Differenzen jedenfalls unbrauchbar sind, aber auch die 4. zeigen noch zu grosse Schwankungen, besonders auf beiden Enden (Stossmoment und Viertelperiode). Daher sind nur die 3. Dezimalstellen als brauchbar zu betrachten.

Wegen besseren Verständnisses müssen wir nun das Beispiel von SCHUBART näher darlegen (vgl. a. a. O.). Drei gleiche Einheitsmassen sind auf der festen Geraden x gegeben; die Längeneinheit isti die Entfernung am Beginn der Bewegung beim Zusammenstosse der beiden ersten Massen; die Zeiteinheit folgt aus der Forderung, dass die Gravitationskonstante $= 1$ sei. Wir werden die Koordinaten nach dem gemeinsamen Baryzentrum berechnen. Dann gebraucht der Autor die angeführten Grössen, für die weiter angeführten Grössen erhält er ein regularisiertes Differentialgleichungsystem mit einer wesentlich gleichen Zeittransformation. Auch r_{13} dient gut zur Beschreibung der Bewegung, wie auch x_2 (die Entfernung von m_2 von G, positiv im Sinne nach m_3). Der Stoss wird symmetrisch angenommen, die Bewegung ist symmetrisch. Mit passender Wahl der Energiekonstante (die der Autor nicht anführt) wird für die Viertelperiode eben $x_2 = 0$, $\dot{r}_{13} = 0$ (m_2 in G); hier ist daher x_2 eine ungerade, r_{13} eine gerade Funktion der Zeit und die Bewegung wird auf die Seite von m_3 gespiegelt. Nach einer weiteren Viertelperiode kommt es zum symmetrischen Stosse der zweiten und dritten Masse; nach einer halben Periode weiter sind wir zu der Ausgangskonfiguration angelangt. Dabei muss beachtet werden, dass z. B. m_1 nach dem Anfangsstosse nach einer Viertelperiode den grösseren Teil seiner Bahn durchläuft, wobei ihr die Geschwindigkeit von Unendlich abfällt; nach einer weiteren Viertelperiode durchläuft die erste Masse den Rest ihrer Bahn und hat dann einen Rückkehrpunkt mit $v = 0$. Symmetrisch und invers geht es mit der dritten Masse zu. Dagegen fällt die Geschwindigkeit der zweiten Masse von Unendlich zum Minimum nach einer Viertelperiode, um dann wieder auf Unendlich anzuwachsen beim Stoss mit m_3. SCHUBART hat die numerische Integration des gewonnenen Differentialgleichungsystems in etwa 50 Schritten ausgeführt und zwar auf 7 Dezimalen, um 5 genau zu erhalten. Worauf die eingangs angeführten Unstimmigkeiten in seiner Tabelle zurückzuführen sind, kann aus der Arbeit nicht erklärt werden. Jedenfalls ist dies Beispiel ein schöner Erfolg des Autors.

Bisher haben wir immer die Zusammenstösse ausgeschlossen, weil sie keine »senkrechten« Punkte ergeben. Sie sind dennoch extremale Punkte und führen auf symmetrische Bewegung in der Umgebung der Stosstangente, die hier eine Spitze 1. Art berührt. Auch die anderen Bedingungen des Beweises (e) von Satz X sind hier erfüllt, denn die Relation $u + 2ht = 0$ gilt auch für die Stossmomente. Die Geradheit und Symmetrie sind nach Konstruktion da, daher sollten wir erwarten, einen Rhytmus nach (29) oder (29') einführen zu können. Wir werden jetzt sehen, wie dieses Beispiel geeignet ist, die Rolle einer jeden Voraussetzung für Satz X zu beleuchten. Dass die Bewegung von m_1 oder m_3 auf Zweikörperproblembewegungen zurückgeführt werden kann, wenigstens annähernd, leuchtet ein; eine Bewegung wie sie jedoch hier m_2 hat, mit einem Stoss an beiden Enden, finden wir nicht im Zweikörperproblem. Wir versuchen daher, diese Bewegung aus zwei (symmetrischen) Teilen einer Zweikörperbewegung zusammenzusetzen. Darum schneiden wir eine Bewegung bei kleinen Geschwindigkeiten ab und setzen sie mit dem gespiegelten Gegenstück kontinuierlich mit kontinuierlicher Tangente zusammen. Es erübrigt hervorzuheben, dass es sich um lauter geradlinige Bewegungen handelt, wo auf einem Ende der Stoss erfolgt mit der Geschwindigkeit ∞, auf dem anderen ein Rückkehrpunkt steht mit Geschwindigkeit Null.

Wir berechnen baryzentrische Entfernungen der drei Massen, indem wir vorübergehend den Ursprung in der ersten Masse wählen. Die Koordinaten sind unterstrichen. Will man Formeln des Zweikörperproblems anwenden und zwar synchronisiert, so müssen die angeführten Formeln angewendet werden. Durch Interpolation bestimmen wir den Moment der Viertelperiode nach SCHUBART. Dann nehmen wir drei annähernd gleich abstehende Stellen von den 23 aus seiner Tabelle, die sehr vorteilhaft auf 3 Stellen abgerundet werden können und berechnen schliesslich die zugehörigen Koordinaten wie angegeben. Die Differenzen O–C zeigen einen kaum merkbarem systematischen Gang, sind in ihren Beträgen sehr klein und zeigen mit Beschränkung auf 3 Dezimalstellen eine vollkommen zufriedenstellende Übereinstimmung.

Trotz alledem wäre der Schluss, dass es uns gelungen sei, die Bewegung auf das 2-Körperproblem zurückzuführen, verfehlt! Der kaum merkbare systematische Gang der Differenzen ist keineswegs zufällig, sondern er zeigt uns das Wesen der Frage. Zwar ist eine Synchronisierung wegen der Symmetrie gesichert; wegen der Zusammenstösse ist jedoch JV^2 nicht beschränkt und kann überhaupt nicht $= const$ sein. Satz X gilt somit sicher nicht und nur Momentweise ist die LAGRANGEsche Gleichen 5^0 für eine exakte Lösung erfüllt. Dass wir doch eine so hohe Übereinstimmung erzielt haben, liegt darin, dass in Stossmomenten die Konfiguration eine Zentralkonfiguration wird; der Einfluss dieser asymptotischen Beziehung fühlt sich noch lange und darum wachsen

die Differenzen, wie wir uns vom Stossmoment entfernen, bis zu einem Maximum nach einer Viertelperiode, wo wir uns am weitesten von Zusammenstössen befinden.

10.

Anmerkung VII: Alle Funktionen, die wir im Satz VI betrachtet haben, haben eine besondere Eigenschaft. Sie sind entweder periodisch oder wachsen ständig unter prozentuell immer kleineren Oszillationen; entstanden sind sie durch Integration periodischer Funktionen. Das führt uns dazu, eine neue Klasse von Funktionen zu definieren:

Definition a). Eine reelle Funktion ist *fast monoton,* wenn die angeführte Grenzbeziehung gilt und die Oszillationen beschränkt bleiben. (Damit ist der ständige Abfall des prozentuellen Beitrags der Oszillationen gesichert.) Beispiele sind die angeführten Funktionen; um auch die periodischen Funktionen zu erfassen, führen wir

Definition b) ein. *Uneigentliche* fast monotone Funktionen haben keinen mittleren Zuwachs oder Abfall, die Oszillationen bleiben jedoch beschränkt. Alle anderen sind eigentliche fast monotone Funktionen.

Beispiele sind die iterierten Funktionen der periodischen Funktionen, die der Einfachheit halber mit der Periode 1 genommen werden, nach den Formeln (I)–(III); sind dagegen die Mittelwerte Null, so bleiben sie alle periodisch also uneigentlich fast monoton, wie z. B. die trigonometrischen Funktionen.

Satz a). Die periodischen Funktionen und ihre integralen iterierten Funktionen sind fast monotone Funktionen, ev. uneigentlich. Haben solche Funktionen Ableitungen, so sind diese wieder fast monoton und vom gewissen Index ab (derivierend) uneigentlich.

Satz b). Die fast monotonen Funktionen bilden einen Ring. (Ihr Graph ist evident). Die iterierten Funktionen aus Satz a) sind, wenn überhaupt, so immer stärker wachsend oder fallend. Das Anwachsen zu einer endlichen Grenzzahl würde nichts Neues bringen gegenüber den strikt monotonen Funktionen, wie eine kleine Betrachtung des fundamentalen Satzes von JORDAN zeigt. Unsere fast monotonen Funktionen sind somit genauer genommen »Funktionen mit unbeschränktem Wachstum unter relativ immer kleineren Oszillationen«.

Angenommen auf der am 1. IV. 1958 abgehaltenen Sitzung der Abteilung für mathematische, physikalische und technische Wissenschaften.

V. S. VRKLJAN

O BRZINI RASPROSTIRANJA ZVUKA U SMJESAMA PLINOVA I KAPLJEVINA

U tri radnje,[1] objavljene u bečkoj Akademiji znanosti pokazano je, da se u smjesi plinova i kapljevina može odrediti brzina rasprostiranja zvuka, ako su nam poznate takve brzine u pojedinim sastavnim dijelovima smjese. Vrijedi to dakako uz pretpostavku, da su ti sastavni dijelovi smjese jedan prema drugome kemijski potpuno indiferentni i da sastavni dijelovi smjese pokazuju koligativna svojstva, t. j. takva svojstva, koja zavise samo o broju molekula dotičnog sastavnog dijela. Ako su dotični sastavni dijelovi plinovi, onda je brzina rasprostiranja zvuka u smjesi dana formulom

$$\frac{v^2}{k}\varrho_0 = \sum_{j=1}^{n} \frac{v_j^2}{k_j}\varrho_{j,0} \,. \tag{1}$$

Ovdje nam v označuje brzinu rasprostiranja zvuka u smjesi, ϱ_0 gustoću smjese, a k poznati omjer specifičnih toplina (c_p/c_v); analogno v_j označuje brzinu rasprostiranja zvuka u pojedinom sastavnom dijelu smjese (t. j., kad bismo taj sastavni dio razmatrali sam za sebe), $\varrho_{j,0}$ gustoću pojedinog sastavnog dijela smjese, k_j omjer specifičnih toplina za svaki pojedini sastavni dio (t. j., kad bismo taj dio razmatrali sam za sebe). Treba spomenuti, da u slučaju kapljevina treba u formuli (1) pisati $\bar{\varrho}_{j,0}$, t. j. gustoću kapljevine razrijeđene smjesom, a ta je različita od gustoće $\varrho_{j,0}$ same kapljevine (kod plinova je $\bar{\varrho}_{j,0} = \varrho_{j,0}$, jer plinovi zapremaju onaj prostor, koji im se upravo dade).

Pretpostavimo sada svaki sastavni dio tekućine (kapljevine ili plina) sam za sebe. U njemu vlada tzv. nutarnji tlak, definiran ukupnom veličinom gibanja, koju molekule tekućine prenose u jedinici vremena okomito kroz jedinicu površine, zamišljene u tekućini; pritom treba

[1] Anzeiger d. Österr. Akademie d. Wissenschaften, 1957, br. 12, str. 251–254, 1958, br. 7, str. 121–124, 1958, br. 12, str. 192–197.

računati sve molekule, koje prolaze kroz plohu u obadva međusobno protivna smjera. Taj je tlak svakako nekakva funkcija gustoće tekućine i, ako nešto malo povisimo tlak (na pr. izotermičkim stlačivanjem), to je (u vezi s promjenom gustoće) promjena tlaka

$$dp_j = \left(\frac{dp_j}{d\varrho_j}\right)_{\text{izot}} d\varrho_j.$$

Smiješamo li sada više ovih tekućina zajedno i povisimo li izotermičkim stlačivanjem tlak smjese, kojoj označimo gustoću s ϱ, onda je

$$dp = \left(\frac{dp}{d\varrho}\right)_{\text{izot}} d\varrho.$$

Ako se radi o plinovima, i ako pretpostavimo, da su svi ti plinovi prije miješanja zapremali volumen jednak volumenu smjese, i ako nadalje pretpostavimo, da smo volumene svih tih plinova jednako (doduše neznatno) smanjili kao i volumen njihove smjese, onda je povišica tlaka dp po DALTONOVU postulatu

$$\left(\frac{dp}{d\varrho}\right)_{\text{izot}} d\varrho = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{dp_j}{d\varrho_j}\right)_{\text{izot}} d\varrho_j. \tag{2}$$

Ali ako se radi o kapljevinama, onda moramo svaki izraz na desnoj strani te jednadžbe množiti s omjerom razrijeđenosti $\frac{\bar{\varrho}_{j,0}}{\varrho_{j,0}}$, gdje nam $\varrho_{j,0}$ označuje gustoću, koju ima svaki sastavni dio sam za sebe, a $\bar{\varrho}_{j,0}$ je ona gustoća, koja otpada na taj sastavni dio u smjesi zbog razrijeđenosti poradi drugih kapljevina. Kod plinova dakako to razlikovanje otpada ($\bar{\varrho}_{j,0} = \varrho_{j,0}$), jer – kako je već u uvodu rečeno – oni zapremaju uvijek onaj prostor, koji im se dade. Prema tome je naša konačna jednadžba za tekućine uopće (t. j. za kapljevine ili plinove) mjesto jednadžbe (2)

$$\left(\frac{dp}{d\varrho}\right)_{\text{izot}} d\varrho = \sum_{j=1}^{n} \frac{\bar{\varrho}_{j,0}}{\varrho_{j,0}} \left(\frac{dp_j}{d\varrho_j}\right)_{\text{izot}} d\varrho_j. \tag{3}$$

Definiramo li sada promjene gustoće s jednadžbama[2]

$$\varrho = \varrho_0 (1 + \sigma), \quad \varrho_j = \varrho_{j,0} (1 + \sigma_j),$$

[2] Razabiramo, da nam $100\,\sigma$ odn. $100\,\sigma_j$ izražavaju relativnu promjenu gustoće u procentima. Ujedno je za plinove

$$\varrho = \Sigma \varrho_j = \Sigma \varrho_{j,0} (1 + \sigma_j) \text{ odn. (zbog } \varrho_0 = \Sigma \varrho_{j,0})$$
$$\varrho_0 \sigma = \Sigma \varrho_{j,0} \sigma_j.$$

a za kapljevine je

$$\varrho = \Sigma \bar{\varrho}_j = \Sigma \bar{\varrho}_{j,0} (1 + \bar{\sigma}_j) \text{ odn. (zbog } \varrho_0 = \Sigma \bar{\varrho}_{j,0})$$
$$\varrho_0 \sigma = \Sigma \varrho_{j,0} \bar{\sigma}_j.$$

i uzmemo li, da su te promjene vrlo male, onda možemo pisati

$$d\varrho = \varrho_0\, \sigma, \quad d\varrho_j = \varrho_{j,0}\, \sigma_j, \tag{4}$$

i tako nam jednadžba (3) prelazi u

$$\varrho_0 \left(\frac{dp}{d\varrho}\right)_{\text{izot}} \sigma = \sum_{j=1}^{n} \bar{\varrho}_{j,0} \left(\frac{dp_j}{d\varrho_j}\right)_{\text{izot}} \sigma_j. \tag{5}$$

Provedemo li pokus tako, da je pritom relativna promjena gustoće zbog povišice tlaka, koja nastaje u samom sastavnom dijelu smjese (dakle prije miješanja) takva, da je upravo jednaka relativnoj promjeni gustoće tog sastavnog dijela u smjesi,[3] onda to izražavamo jednadžbom $\sigma_j = \bar{\sigma}_j$. Ali onda su relativne promjene gustoće svakog sastavnog dijela kao i čitave smjese međusobno jednake, t. j. $\sigma = \bar{\sigma}_j$, pak nam jednadžba (5) daje

$$\boxed{\varrho_0 \left(\frac{dp}{d\varrho}\right)_{\text{izot}} = \sum_{j=1}^{n} \bar{\varrho}_{j,0} \left(\frac{dp_j}{d\varrho_j}\right)_{\text{izot}}.} \tag{6}$$

Sjetimo li se sada, da je prema relacijama, koje su nam poznate iz akustike za brzinu rasprostiranja zvuka u tekućinama (NEWTONova formula s LAPLACEovom korekcijom)[4]

$$\left(\frac{dp}{d\varrho}\right)_{\text{izot}} = \frac{v^2}{k}, \quad \left(\frac{dp_j}{d\varrho_j}\right)_{\text{izot}} = \frac{v_j^2}{k_j}, \tag{7}$$

onda nam primjenom tih relacija jednadžba (6) prelazi konačno u jednadžbu (1), što smo upravo htjeli dokazati.

Ali vrijedi i obrnuto: iz jednadžbe (1) dobivamo primjenom relacija (7) jednadžbu (6). Drugim riječima: eksperimentalna potvrda jednadžbe (1) znači ujedno i potvrdu jednadžbe (6).

Primljeno na sjednici Odjela za matematičke, fizičke i tehničke nauke dne 11. V. 1959.

[3] Za plinove to izlazi kao posljedica naprijed navedene pretpostavke, na osnovi koje je izvedena jednadžba (2).

[4] Isp. na pr.: *R. H. Weber – R. Gans*, Repertorium d. Physik, 1915, I-1, str. 391–392.

V. S. VRKLJAN

ÜBER DIE AUSBREITUNGSGESCHWINDIGKEIT DES SCHALLES IN GAS- UND FLÜSSIGKEITSMISCHUNGEN*

In drei vorhergehenden Mitteilungen[1] wurde gezeigt, wie man in Gas- und Flüssigkeitsmischungen die Schallgeschwindigkeit v mittels der Schallgeschwindigkeiten v_j einzelner Bestandteile der Mischung ausdrücken kann. Für die Gasmischungen gilt die Formel (1), während für die Flüssigkeitsmischungen auf der rechten Seite der Gleichung (1) die Verdünnungsdichte $\bar{\varrho}_{j,0}$ des einzelnen Bestandteiles, in der Mischung statt der Dichte $\varrho_{j,0}$ des einzelnen Bestandteiles für sich selbst zu setzen ist, k bedeutet dabei das bekannte Verhältnis $\frac{c_p}{c_v}$.

Während die Formel (2) auf Grund des Postulates DALTONS für die Gase ableitbar ist, kann die Gleichung (3) als eine Art Verallgemeinerung des Postulates DALTONS für die Flüssigkeitsmischungen aufgefasst werden.

Für sehr kleine relative Dichteänderungen der Mischung als auch einzelner Bestandteile für sich selbst kann man die Gleichungen (4) als giltig annehmen und so kommt man zu der Formel (5), welche für $\sigma_j = \bar{\sigma}_j = \sigma$ in die Gleichung (6) übergeht.

Mittels der Anwendung der NEWTON-LAPLACEschen Gleichung für die Schallgeschwindigkeit ergibt sich daraus [d. h. aus der Gleichung (6)] gleich die Formel (1), was in dieser Mitteilung bewiesen werden sollte.

Angenommen auf der am 11. V. 1959. abgehaltenen Sitzung der Abteilung für mathematische, physikalische und technische Wissenschaften.

* Originalüberschrift dieser Arbeit: *O brzini rasprostiranja zvuka u smjesama plinova i kapljevina.*

[1] Anzeiger d. Österr. Akademie d. Wissenschaften, 1957, Nr. 12, S. 251–254, 1958, Nr. 7, S. 121–124, 1958, Nr. 12, S. 192–197.

ZLATKO JANKOVIĆ

ON CONFLUENT HYPERGEOMETRIC DIFFERENTIAL EQUATION

Among the second order homogeneous linear differential equations a very important place is occupied by the confluent hypergeometric differential equation (sometimes also called the generalized LAGUERRE differential equation)

$$z\,y''(\nu, s:z) + (s+1-z)\,y'(\nu, s:z) + \nu y(\nu, s:z) = 0 \qquad (1)$$

especially in mathematical and theoretical physics. Discussion of this equation and its solutions is usually made by applying results obtained for the hypergeometric differential equation, equation (1) being its particular limiting case, or by finding complex integral forms of solutions [1]. The aim of this paper is to show that an independent approach, in many regards different and more general and elementary than some existing ones, leads to an exhaustive knowledge of the properties of equation (1) and its solutions. The recurrence relations, obtained directly from equation (1), will play an important rôle, and numerous results will be obtained with their help without feeling the necessity of disposing with the explicit solutions [2].

I. GENERAL AND SPECIAL CONFLUENT HYPERGEOMETRIC DIFFERENTIAL EQUATION

It is well known that the second order homogeneous linear differential equation (of the FUCHS type)

$$y''(z) + p(z)\,y'(z) + q(z)\,y(z) = 0 \qquad (1,1)$$

has two linearly independent series solutions at all points of the z plane being ordinary or regular singular points of the differential equation

(1,1), coefficients $p(z)$ and $q(z)$ having at these points at most poles of the first and second order, respectively.

A differential equation (1,1) with three regular singular points (simple poles of $p(z)$, second order poles of $q(z)$) is of a particular interest (e. g. for mathematical physics). Take these points at ξ, η, ζ and the solutions of the indicial equation (exponents of the differential equation) as α, α' (at ξ); β, β' (at η) and γ, γ' (at ζ). The point $z = \infty$ being under these assumptions an ordinary point, the coefficients in the transformed differential equation $\left(z = \frac{1}{t}\right)$

$$t^4 \frac{d^2y}{dt^2} + \left\{2t^3 - t^2 p\left(\frac{1}{t}\right)\right\} \frac{dy}{dt} + q\left(\frac{1}{t}\right) y = 0, \tag{1,2}$$

i. e. the functions

$$P(t) = 2t^{-1} - p(t^{-1})\, t^{-2}, \tag{1,3 a}$$

$$Q(t) = q(t^{-1})\, t^{-4}, \tag{1,3 b}$$

cannot have the pole at $t = 0$. In this way the functions $p(z)$ and $q(z)$, which satisfy all imposed conditions, can take only these forms

$$p(z) = S\, \frac{1 - \alpha - \alpha'}{z - \xi}, \tag{1,4 a}$$

$$q(z) = \frac{1}{(z-\xi)(z-\eta)(z-\zeta)}\, S\, \frac{\alpha\alpha'(\eta-\xi)(\zeta-\xi)}{(z-\xi)}. \tag{1,4 b}$$

After substitution of expressions (1,4) in equation (1,1) one gets a form of differential equation (1,1), which RIEMANN wrote as

$$y = P \left\{ \begin{matrix} \xi & \eta & \zeta & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix} \right\}. \tag{1,5}$$

Next, we wish to determine the form of coefficients $p(z)$ and $q(z)$ to obtain a differential equation (1,1) with a regular singular point at the origin ($z = 0$) and an irregular singular point at infinity ($z = \infty$). It is easy to see that then

$$p(z) = \frac{a}{z} + \sum_{i=0} a_i z^i, \tag{1,6 a}$$

$$q(z) = \frac{c}{z^2} + \frac{b}{z} + \sum_{i=0} b_i z^i, \tag{1,6 b}$$

the number of terms in sums depending on the character of singularity at infinity. Particularly, if there should be a pole of second order at infinity,

$$p(z) = \left(a_0 + \frac{a}{z}\right), \tag{1,7 a}$$

$$q(z) = \left(b_0 + \frac{b}{z} + \frac{c}{z^2}\right), \tag{1,7 b}$$

a_0 and b_0 not disappearing at the same time.

Thus we have with expressions (1,7) a differential equation (1,1) with a pole of the first order at the origin (regular singular point) and a pole of the second order at infinity (irregular singular point), in the following form:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \left(a_0 + \frac{a}{z}\right)\frac{dy}{dz} + \left(b_0 + \frac{b}{z} + \frac{c}{z^2}\right) y = 0. \tag{1,8}$$

As we can imagine that this equation (1,8) is the limiting case of equation (1,5), obtained for $\xi \to 0$ and the confluence of two remaining poles η and ζ at infinity, we call equation (1,8) the general confluent hypergeometric differential equation.

The term »hypergeometric« will be understood when comparing this differential equation (1,8) with that one having as a solution the hypergeometric series

$$\Phi(a, b, c; z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a)_j (b)_j}{(c)_j j!} z^j, \tag{1,9}$$

with this meaning of the symbols:

$$(a)_j = a(a+1)(a+2)\ldots(a+j-1) = \frac{\Gamma(a+j)}{\Gamma(a)}. \tag{1,10}$$

We find by differentiating Φ that it is a solution of the following hypergeometric differential equation

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2} + \{c - (a+b+1)z\}\frac{dy}{dz} - aby = 0. \tag{1,11}$$

From coefficients $p(z)$ and $q(z)$ of equation (1,11) we immediately read that its three regular singular points (poles of the first order) are: $\xi = 0$, $\eta = \infty$ and $\zeta = 1$ and further, by comparing the coefficients with expressions (1,4), we find: $\alpha = 0$, $\alpha' = 1 - c$; $\beta = a$, $\beta' = b$; $\gamma = 0$. $\gamma' = c - a - b$. Thus, equation (1,11) can be written in the form (1,5) as

$$y = P\left\{\begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & a & 0 & z \\ 1-c & b & c-a-b & \end{matrix}\right\}. \tag{1,12}$$

Now, we see by the transformation $x = zb$ that pole $\zeta = 1$ is transformed into pole $\zeta' = b$, the two others $\xi = 0$ and $\eta = \infty$ remaining unchanged. This means that by a limiting process $b \to \infty$ one could

obtain a special confluent hypergeometric differential equation (confluence occurring with poles η' and ζ' at infinity) from the hypergeometric differential equation (1,11)

$$x y''(a, c:x) + (c - x)\, y'(a, c:x) - a\, y(a, c:x) = 0. \qquad (1,13)$$

We prefer to write this equation (1,13) in the form (1), i.e.

$$z y''(\nu, s:z) + (s + 1 - z)\, y'(\nu, s:z) + \nu\, y(\nu, s:z) = 0, \qquad (1,14)$$

the connection between parameters $c \to s + 1$, $-a \to \nu$ and between solutions $y(a, c:x) \to y(-\nu, s:z)$ being a simple one. By effectuating the limiting process $b \to \infty$ in the hypergeometric series Φ (1,9) we see that one solution of equation (1,14) has the form of

$$\Phi(\nu, s:z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-\nu)_j}{(s+1)_j\, j!}\, z^j. \qquad (1,15)$$

Next, we prove that the general confluent hypergeometric differential equation (1,8) can be transformed into the form of the special confluent hypergeometric differential equation (1,14). We write equation (1,8) with x as the independent variable and try to identify (1,8) with (1,14) by means of the assumption

$$y(\nu, s:z) = f(x)\, y(x), \quad z = z(x) \quad x = x(z). \qquad (1,16)$$

Thus, assuming coefficients a_0, a, b_0, b and c as known quantities, we have to determine transformation $x = x(z)$, function $f(x)$ and parameters ν and s in order to produce with (1,16) the required identification. We introduce (1,16) into equation (1,14) and a comparison with equation (1,8) (x written instead of z) yields

$$2 z f' \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + z f \frac{d^2x}{dz^2} + (s + 1 - z) f \frac{dx}{dz} = z f \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 \left(a_0 + \frac{a}{x}\right), \qquad (1,17\,a)$$

$$z f'' \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + z f' \frac{d^2x}{dz^2} + (s + 1 - z) f' \frac{dx}{dz} + \nu f = z f \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 \left(b_0 + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}\right), \qquad (1,17\,b)$$

as necessary conditions for identification. To solve this coupled system (1,17) we start with the most simple assumption

$$x = \gamma z. \qquad (1,18)$$

Thereafter, equation (1,17 a) can be immediately integrated

$$f = K x^{\alpha} e^{\beta x}; \quad \alpha = \frac{a - s - 1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma} + a_0\right). \qquad (1,19)$$

Inserting expressions (1,18) and (1,19) into equation (1,17b) we obtain

$$\frac{1}{x^2}\,[\alpha^2+\alpha s-c]+\frac{1}{x}\left[2\,\alpha\beta+\beta\,(s+1)-\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\nu}{\gamma}-b\right]+$$

$$+\left[\beta^2-\frac{\beta}{\gamma}-b_0\right]=0, \tag{1,20}$$

which must be identically fulfilled. Thus we obtain three equations

$$\alpha^2+\alpha s-c=0, \tag{1,21 a}$$

$$2\,\alpha\beta+\beta\,(s+1)-\frac{\alpha}{\gamma}+\frac{\nu}{\gamma}-b=0, \tag{1,21 b}$$

$$\beta^2-\frac{\beta}{\gamma}-b_0=0, \tag{1,21 c}$$

from which we easily find the connections

$$\gamma^{+}_{-}=\pm\frac{1}{\sqrt{a_0^2-4\,b_0}}, \qquad a_0^2\neq 4\,b_0, \tag{1,22 a}$$

$$s_{1,2}=\pm\sqrt{(a-1)^2-4\,c}, \tag{1,22 b}$$

$$\nu^{+}_{1,2}=\frac{\gamma^{+}_{-}\,(2\,b-a_0\,a)-1\mp s_{1,2}}{2}. \tag{1,22 c}$$

We see that by (1,18), (1,19) and (1,22) we have completely determined (1,16). In this way we have proved that the general confluent hypergeometric equation (1,8) can be transformed (except in the case $a_0^2=4\,b_0$) into the special confluent hypergeometric equation (1,14), the transformation being expressed by (1,16), (1,18), (1,19) and (1,22), the solutions being connected by

$$y\,(x)=C\,x^{\frac{s+1}{2}-\frac{\alpha}{\gamma}}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma}+a_0\right)x}\,y\left(\nu,\,s;\,\frac{x}{\gamma}\right). \tag{1,23}$$

Apparently, the result (1,23) is inconsistent; we attribute to a second order differential equation (1,8) or (1,14) four different solutions, the number of possible sets of values γ, ν and s being four, by (1,22). The conflict will be solved on the basis of relations deduced from (1,22)

$$s_1=-s_2 \tag{1,24 a}$$

$$\nu^{-}_{1}=\nu^{+}_{2}+s_2, \tag{1,24 b}$$

both valid for γ^{+} and γ^{-}, and from the general properties of the solutions of the special confluent hypergeometric differential equation (1,14) as deduced in Chapter III.

We shall not discuss further the exceptional case $a_0^2 = 4b_0$, or the more general problems of transforming other types of differential equations than (1,8) on the form (1,14), the results obtained here being sufficient for further applications. From the preceding we can see the importance of the special confluent hypergeometric differential equation and in the following chapters we shall discuss it in more detail.

II. RECURRENCE RELATIONS FOR CONFLUENT HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS

We get the first recurrence relation for special confluent hypergeometric functions by identifying the differentiated equation (1)

$$z\,y'''(\nu, s:z) + (s+2-z)\,y''(\nu, s:z) + (\nu-1)\,y'(\nu, s:z) = 0 \qquad (2,1)$$

with the original equation (1), both being of the same structure. Thus, a proportionality must exist

$$y'(\nu, s:z) = c(\nu, s)\,y(\nu-1, s+1:z), \qquad (2,2)$$

where coefficients c in general may depend on both parameters ν and s.

We obtain one further recurrence relation in this way: we add term by term equation (1) written for $y(\nu, s-1:z)$ and equation (1) multiplied by a coefficient $\beta(\nu, s)$, in general dependent on both ν and s,

$$\begin{aligned} &z\,[y(\nu, s-1:z) + \beta(\nu, s)\,y(\nu, s:z)]'' + \\ &+ (s+1-z)\,[y(\nu, s-1:z) + \beta(\nu, s)\,y(\nu, s-1:z)]' + \\ &+ \nu\,[y(\nu, s-1:z) + \beta(\nu, s)\,y(\nu, s:z)] - \\ &- c(\nu, s-1)\,y(\nu-1, s:z) = 0. \end{aligned} \qquad (2,3)$$

From this expression we deduce by comparison with equation (1) the second recurrence relation

$$y(\nu, s-1:z) + \beta(\nu, s)\,y(\nu, s:z) = c(\nu, s-1)\,y(\nu-1, s:z). \qquad (2,4)$$

Now, we can deduce a great number of recurrence relations with the help of the established ones, i. e. (2,2) and (2,4). First, the same differential equation (1) can be written as a recurrence relation by introducing relation (2,2) into it

$$\begin{aligned} &z\,c(\nu+1, s-1)\,c(\nu, s)\,y(\nu-1, s+1:z) + \\ &+ (s-z)\,c(\nu+1, s-1)\,y(\nu, s:z) + \\ &+ (\nu+1)\,y(\nu+1, s-1:z) = 0. \end{aligned} \qquad (2,5)$$

The first and the last member in relation (2,5) can be transformed by applying (2,4) to yield

$$\begin{aligned} & z c(\nu+1, s-1) \beta(\nu, s+1) y(\nu, s+1: z)+ \\ & +(\nu+s+1) c(\nu+1, s-1) y(\nu, s: z)- \\ & -(\nu+1) \beta(\nu+1, s) y(\nu+1, s: z)=0 . \end{aligned} \tag{2,6}$$

We obtain a recurrence relation containing only functions with the same s value by combining the last equation (2,6) (for parameters ν and $s-1$) and relation (2,4)

$$\begin{aligned} & (\nu+s) c(\nu+1, s-2) c(\nu, s-1) y(\nu-1, s: z)- \\ & -[(\nu+s-z) c(\nu+1, s-2) \beta(\nu, s)+ \\ & +(\nu+1) c(\nu+1, s-1) \beta(\nu+1, s-1)] y(\nu, s: z)+ \\ & +(\nu+1) \beta(\nu+1, s-1) \beta(\nu+1, s) y(\nu+1, s: z)=0 . \end{aligned} \tag{2,7}$$

In an analogous way we get a recurrence relation connecting functions for the same ν value:

$$\begin{aligned} & z c(\nu+1, s-1) \beta(\nu, s+1) \beta(\nu+1, s-1) y(\nu, s+1: z)+ \\ & +[z c(\nu+1, s-2) \beta(\nu, s)+s c(\nu+1, s-1) \beta(\nu+1, s-1)] y(\nu, s: z)+ \\ & +(\nu+s) c(\nu+1, s-2) y(\nu, s-1: z)=0 . \end{aligned} \tag{2,8}$$

The system of recurrence relations is to be equivalent to the differential equation (1), i. e. equation (1) must follow from it. Now, if we start with the recurrence relation (2,6) and apply other recurrence relations, we can easily deduce the differential equation

$$\begin{aligned} & z y''(\nu, s: z)+\left(s \frac{\beta(\nu, s)}{\beta(\nu-1, s+1)} \frac{c(\nu, s)}{c(\nu, s-1)}+1-z\right) y'(\nu, s: z)+ \\ & +\nu \frac{\beta(\nu, s)}{\beta(\nu-1, s+1)} \frac{c(\nu, s)}{c(\nu, s-1)} y(\nu, s: z)=0 . \end{aligned} \tag{2,9}$$

This clearly shows that the following limitation for coefficients c and β does exist

$$\frac{\beta(\nu, s)}{\beta(\nu-1, s+1)} \cdot \frac{c(\nu, s)}{c(\nu, s-1)}=1, \tag{2,10}$$

in order that the system of recurrence relations be equivalent to the original differential equation (1).

III. RELATIONS BETWEEN SOLUTIONS OF THE CONFLUENT HYPERGEOMETRIC DIFFERENTIAL EQUATION

In this chapter we shall examine whether some relations between solutions of the special confluent hypergeometric differential equation (1) for different values of parameters do exist in the form

$$y(\nu, s:z) = f(z)\, y(\mu, \sigma:z). \tag{3,1}$$

In (3,1) we have to determine function $f(z)$ and the parameters μ and σ with the help of values ν and s, both functions y being assumed special confluent hypergeometric functions. We insert function $y(\nu, s:z)$ and its derivatives in the equation (1) to get this expression

$$\begin{aligned} z\,y''(\mu, \sigma:z) + \left[2z\frac{f'}{f} + s + 1 - z\right] y'(\mu, \sigma:z) + \\ + \left[z\frac{f''}{f} + (s+1-z)\frac{f'}{f} + \nu\right] y(\mu, \sigma:z) = 0. \end{aligned} \tag{3,2}$$

In order that equation (3,2) may become the special confluent hypergeometric equation for the function $y(\mu, \sigma:z)$, it is necessary that

$$2z\frac{f'}{f} + s = \sigma, \tag{3,3 a}$$

$$z\frac{f''}{f} + (s+1-z)\frac{f'}{f} + \nu = \mu. \tag{3,3 b}$$

The solution of the first equation (3,3 a) has the form of

$$f(z) = K z^{\frac{\sigma - s}{2}}. \tag{3,4}$$

The second equation (3,3 b) with this form (3,4) for $f(z)$ gives

$$z\,\{-2(\sigma - s) + 4(\nu - \mu)\} + (\sigma - s)(\sigma + s) = 0. \tag{3,5}$$

As this relation must be identically fulfilled and $\sigma = s$ leads to $\mu = \nu$, only one other possibility can be considered, i. e.

$$\begin{aligned} \sigma &= -s, \\ \mu &= \nu + s. \end{aligned} \tag{3,6}$$

Thus we have determined that the differential equation (1) has these solutions (equation (1) being homogeneous, each solution can be multiplied with an arbitrary constant)

$$y_1(\nu, s:z) = y(\nu, s:z), \tag{3,7 a}$$

$$y_2(\nu, s:z) = z^{-s}\, y(\nu + s, -s:z). \tag{3,7 b}$$

We could also start from the assumption

$$y(\nu, s:z) = f(z)\, y(\mu, \sigma:-z). \tag{3,1 a}$$

Then, comparing the result of the substitution of (3,1 a) and its derivatives in equation (1) with the equation for $y(\mu, \sigma:-z)$

$$z\,y''(\mu, \sigma:-z) + (\sigma + 1 + z)\, y'(\mu, \sigma:-z) - \mu\, y(\mu, \sigma:-z) = 0 \tag{3,8}$$

we obtain, by an analogous procedure to the above, two further solutions

$$y_3(\nu, s:z) = e^z\, y[-(\nu + s + 1), s:-z], \tag{3,9 a}$$

$$y_4(\nu, s:z) = z^{-s}\, e^z\, y[-(\nu + 1), -s:-z]. \tag{3,9 b}$$

Thus, we are in a position to start with one solution (3,7 a) and then, by changing the parameters and the independent variable in the prescribed manners, we find four solutions (3,7) and (3,9) of the differential equation (1). But, the differential equation (1), being a linear homogeneous differential equation of the second order, can only have two linearly independent solutions, and, therefore, there must exist two linear relations between these four solutions (3,7) and (3,9). We can choose these relations, and by this choice select particular families of solutions, the most simple relations probably leading to the most important families of solutions.

Before doing this, we should make a remark about the change of the independent variable z in $-z$. The differential equation (1) having two singular points, regular at origin $z = 0$ and irregular at infinity $z = \infty$, we must have a cut in the complex plane between them. We choose a cut following the negative real axis and this has for the consequence that a change of the independent variable from z_1 to $z_2 = -z_1$ is produced by

$$z_2 = e^{-i\varepsilon\pi} z_1 \qquad \varepsilon = \pm 1 \qquad \operatorname{Im} z_1 \gtrless 0. \tag{3,10}$$

Now we will define three most simple kinds of relations determining three especially interesting families of solutions of equation (1).

a) We call a Ψ solution the one for which there exists

$$y_1 = y_2. \tag{3,11 a}$$

and as a consequence from (3,7) and (3,9)

$$y_3 = e^{i\varepsilon\pi}\, y_4. \tag{3,11 b}$$

Thus a fundamental system of solutions in this case is given by

$$\Psi(\nu, s:z) = z^{-s}\, \Psi(\nu + s, -s:z), \tag{3,12 a}$$

$$\Theta(\nu, s:z) = e^z\, \Psi[-(\nu + s + 1), s:e^{-i\varepsilon\pi} z] = (e^{-i\varepsilon\pi} z)^{-s} \cdot e^z\, \Psi[-(\nu + 1), -s:e^{-i\varepsilon\pi} z]. \tag{3,12 b}$$

b) We call a Φ solution the one for which there exists

$$y_1 = y_3 \tag{3,13 a}$$

and as a consequence from (3,7) and (3,9)

$$y_2 = y_4 . \tag{3,13 b}$$

Thus a fundamental system of solutions in this case is given by

$$\Phi(\nu, s:z) = e^z \, \Phi[-(\nu + s + 1), s : e^{-i\varepsilon\pi} z], \tag{3,14 a}$$

$$\begin{aligned} X(\nu, s:z) &= z^{-s} \, \Phi(\nu + s, -s:z) = \\ &= z^{-s} e^z \, \Phi[-(\nu + 1), -s : e^{-i\varepsilon\pi} z]. \end{aligned} \tag{3,14 b}$$

c) We call a Π solution the one for which there exists

$$y_1 = e^{i\varepsilon s \frac{\pi}{2}} y_4 \tag{3,15 a}$$

and as a consequence from (3,7) and (3,9)

$$y_2 = e^{-i\varepsilon s \frac{\pi}{2}} y_3 . \tag{3,15 b}$$

Thus a fundamental system of solutions in this case is given by

$$\Pi(\nu, s:z) = e^{i\varepsilon s \frac{\pi}{2}} z^{\,s} e^z \, \Pi[-(\nu + 1), -s : e^{-i\varepsilon\pi} z], \tag{3,16 a}$$

$$\begin{aligned} R(\nu, s:z) &= z^{-s} \, \Pi(\nu + s, -s:z) = \\ &= e^{-i\varepsilon s \frac{\pi}{2}} e^z \, \Pi[-(\nu + s + 1), s : e^{-i\varepsilon\pi} z]. \end{aligned} \tag{3,16 b}$$

For these groups of solutions we deduce further limitations imposed on coefficients c and β.

a) We get from (2,2) and (3,12 a),

$$\begin{aligned} c(\nu, s) \, \Psi(\nu + s, -s - 1 : z) = &- s \, \Psi(\nu + s, -s : z) + \\ &+ z c(\nu + s, -s) \, \Psi(\nu + s - 1, -s + 1 : z). \end{aligned} \tag{3,17}$$

On the other side it follows from (2,6), taken for $s - 1$, and (2,5) with a further transformation $s \to -s$, $\nu \to \nu + s$ a relation which coincides with (3,17) on the right hand side, but having

$$-\frac{\nu}{\beta(\nu + s, -s)} \, \Psi(\nu + s, -s - 1 : z)$$

on the left hand side. This means that the following relation holds:

$$c(\nu, s) \, \beta(\nu + s, -s) = -\nu. \tag{3,18}$$

An analogous reasoning applied to $\Theta(\nu, s:z)$ (3,12 b) gives the following relation:

$$c(\nu, s) \, \beta(\nu + s, -s) = -\nu. \tag{3,19}$$

b) We apply the recurrence relation (2,2) and expressions (3,14 a) [or (3,14 b)] and by comparing the result with (2,4) we get the following relation between c and β

$$c[-(\nu + s), s - 1] = -\beta(\nu, s). \tag{3,20}$$

c) We apply relations (2,2) and (3,16 a) [or (3,16 b)] and by comparing the result with (2,5) we get the following relation

$$c\,(\nu, s-1:\varepsilon)\,c\,(-\nu, -s:-\varepsilon)\,e^{i\varepsilon\frac{\pi}{2}} = \nu. \tag{3,21}$$

At the end of this chapter a remark on the uniqueness of such determination of solutions is necessary. If we assume that we have two different, i. e. linearly independent solutions, of one type, then every linear combination of theirs satisfies the same relations and as every solution of equation (1) must be expressible by a linear combination of two different solutions, this means that every solution satisfies the same relations. As we have solutions of other groups not satisfying the same relations, this means that the assumption was a wrong one, i. e. there is only one solution (apart from a multiplicative constant) which satisfies given relations characterizing group a), b) and c).

IV. BASIC SOLUTIONS

We saw in Chapter I. that a solution of equation (1) can be represented by the series expansion (1,15). We integrate again equation (1) by the series expansion

$$y\,(\nu, s:z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j\, z^{j+\sigma}. \tag{4,1}$$

Substitution of this expansion (4,1) into equation (1) gives the following expression

$$\sum_{j=0}^{\infty} \{(j+\sigma+1)\,(j+\sigma+s+1)\,a_{j+1} - (j+\sigma-\nu)\,a_j\}\, z^{j+\sigma} + \\ + \sigma\,(\sigma+s)\,a_0\, z^{\sigma-1} = 0. \tag{4,2}$$

Identical vanishment of expression (4,2) leads to an indicial equation with the solutions

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = -s \tag{4,3}$$

and to the possibility to determine all the coefficients a_j. Taking the arbitrary a_0 equal to unity, we write both solutions as

$$y_1 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-\nu)_j}{j!\,(s+1)_j}\, z^j = \Phi\,(\nu, s:z), \tag{4,4 a}$$

$$y_2 = z^{-s} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{[-(s+\nu)]_j}{j!\,(-s+1)_j}\, z^j = z^{-s}\,\Phi\,(\nu+s, -s:z) = X\,(\nu, s:z). \tag{4,4 b}$$

In this way we get (1,15), i.e. (4,4 a) again, but at the same time we obtain another solution (4,4 b), and from their forms we conclude that they are solutions of group b), i.e. that they satisfy relations (3,14 a) and (3,14 b). From expressions (4,4 a) and (4,4 b) we can see at once that solutions $\Phi(\nu, s : z)$ and $X(\nu, s : z)$ have simple poles at negative and positive integral s values respectively. Consequently, they become useless in forms (4,4 a) and (4,4 b), and we can improve the situation by dividing them with $\Gamma(1+s)$ and $\Gamma(1-s)$ respectively. Thus the new form of solution Φ is defined as

$$\Phi^*(\nu, s : z) = \frac{\Phi(\nu, s : z)}{\Gamma(1+s)}. \tag{4,5}$$

But in the case of $s = -n$ solution $X(\nu, s : z)$ ceases to be independent of Φ^*, since by an easy calculation we find that

$$\lim_{s \to -n} \frac{\Phi^*(\nu, s : z)}{X(\nu, s : z)} = \frac{(-\nu)_n}{n!}. \tag{4,6}$$

In the case of a positive integral s value, $X(\nu, s : z)$ has simple poles and we could redefine it by

$$X^*(\nu, s : z) = \frac{X(\nu, s : z)}{\Gamma(1-s)}. \tag{4,7}$$

Again we can find that Φ and X^* solutions are not linearly independent in the case of $s = n$, because of

$$\lim_{s \to n} \frac{X^*(\nu, s : z)}{\Phi(\nu, s : z)} = \frac{(-n-\nu)_n}{n!}. \tag{4,8}$$

This means that the general solution of the equation (1) can be written as a superposition of Φ and X solutions (multiplied by arbitrary constants), except for the integral s values, when these solutions become dependent. In the last case, by the general theory of the second order linear differential equations the difference of the roots of the indicial equation being integer, a logarithmic term must intervene in the X solution. We can circumvent this difficulty by considering another family of solutions, namely the group a) of Ψ and Θ solutions.

We get another series expansion of solutions of the special confluent hypergeometric equation (1) by transforming it in the form (1,2)

$$t^3 \frac{d^2y}{dt^2} + [t^2(-s+1) + t] \frac{dy}{dt} + \nu y = 0. \tag{4,9}$$

Assuming a series expansion for the solutions like (4,1) (with t written instead of z), we substitute it into equation (4,9) to obtain the expression

$$\sum_{j=0}^{\infty} \{(j+\sigma)(j+\sigma-s) a_j + (j+\sigma+s+1) a_{j+1}\} t^{j+\sigma+1} + \\ + (\sigma+\nu) a_0 t^{\sigma} = 0. \tag{4,10}$$

We see that the indicial equation has only one solution

$$\sigma = -\nu \tag{4,11}$$

and that the identical vanishment of the series (4,10) gives the possibility to determine the coefficients a_j. Writing again z instead of $\frac{1}{t}$ we get in this way the following solution (a_0 taken as unity):

$$y(\nu, s:z) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(-\nu)_j (-\nu-s)_j}{j!} z^{\nu+j} = \Psi(\nu, s:z). \tag{4,12}$$

The last equality, showing that this solution is just the Ψ solution, follows from the fact that a change of parameters $\nu \to \nu + s$, $s \to -s$ yields only a factor z^{-s} in front of the sum, (4,12) remaining unchanged by this change of parameters as was assumed in (3,12 a). The other solution $\Theta(\nu, s:z)$ (3,12 b) can be written as

$$\Theta(\nu, s:z) = e^z \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{(\nu+s+1)_j (\nu+1)_j}{j!} (e^{-i\pi} z)^{-(\nu+s+1+j)}. \tag{4,13}$$

Solutions Ψ and Θ do not have singularities regarding parameters ν and s, and their superposition (with arbitrary multiplicative constants) represents the general solution of equation (1) in every case. Naturally, the general solution can also be formed by a superposition of one of the solutions Φ^* and X^* and one of the solutions Ψ and Θ in every case.

We call these four solutions Φ, X, Ψ and Θ because of their importance as the basic solutions of the special confluent hypergeometric differential equation.

We are going to add a few remarks to the basic solutions. By inspecting more closely the explicit expressions for the basic solutions we can find that they are represented by elementary functions in some cases.

a) Φ solution, (4,4 a)

For ν a positive integer n, or zero, the Φ solution reduces to a polynomial (proportional or equal, according to the definition, to the generalized LAGUERRE or SONIN polynomial)

$$\Phi(n, s:z) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-n)_j}{j!\,(s+1)_j} z^j, \quad \Phi(0, s:z) = 1. \tag{4,14}$$

For $-\nu = s + 1$ the Φ solution reduces to exponential function

$$\Phi[-(s+1), s:z] = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} = e^z. \tag{4,15}$$

b) X solution, (4,4 b)

For $s + \nu$ a positive integer, or zero, the X solution reduces to

$$X(n-s, s:z) = z^{-s}\Phi(n, -s:z), \quad X(-s, s:z) = z^{-s}. \tag{4,16}$$

For $\nu = -1$ the X solution reduces to

$$X(-1, s:z) = \frac{e^z}{z^s}. \tag{4,17}$$

c) Ψ solution, (4,12)

For ν a positive integer, or zero, the Ψ solution reduces to a sum with finite number of terms and becomes an integral function of z

$$\begin{aligned}\Psi(n, s:z) &= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{(-n)_j (-n-s)_j}{j!} z^{n-j} = \\ &= (-1)^n (s+1)_n \Phi(n, s:z),\end{aligned} \tag{4,18}$$

showing that the Ψ solution in this case is essentially Laguerre polynomial and

$$\Psi(0, s:z) = 1. \tag{4,19}$$

For $\nu + s$ a positive integer m, or zero, the Ψ solution reduces to a sum with finite number of terms

$$\begin{aligned}\Psi(m-s, s:z) &= \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \frac{(-m+s)_j (-m)_j}{j!} z^{m-s-j} = \\ &= (-1)^m (-s+1)_m \Phi(m, -s:z) z^{-s},\end{aligned} \tag{4,20}$$

$$\Psi(-s, s:z) = z^{-s}. \tag{4,21}$$

d) Θ solution, (4,13)

For ν a negative integer $-n-1$, the Θ solution reduces to a sum with finite number of terms

$$\begin{aligned}\Theta(-n-1, s:z) &= e^z \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{(-n+s)_j (-n)_j}{j!} (e^{-i\varepsilon\pi} z)^{n-s-j} = \\ &= (-1)^n (-s+1)_n e^{i\varepsilon s\pi} z^{-s} e^z \Phi(n, -s: e^{-i\varepsilon\pi} z),\end{aligned} \tag{4,22}$$

$$\Theta(-1, s:z) = e^{i\varepsilon\pi s} \frac{e^z}{z^s}. \tag{4,23}$$

For $\nu + s$ a negative integer $-m-1$, the Θ solution reduces to a sum with finite number of terms

$$\begin{aligned}\Theta(-m-s-1, s:z) &= e^z \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \frac{(-m)_j (-m-s)_j}{j!} (e^{-i\varepsilon\pi} z)^{m-j} = \\ &= (-1)^m (s+1)_m e^z \Phi(m, s: e^{-i\varepsilon\pi} z).\end{aligned} \tag{4,24}$$

At the end of this chapter we shall determine coefficients c and β for each of our basic solutions Φ, X, Ψ and Θ by introducing their explicit expressions in the recurrence relations (2,2) and (2,4). By means of an easy calculus we get the coefficients as shown in Table I:

Table I

Group	Solution	$c(\nu, s)$	$\beta(\nu, s)$	Fulfilled
a)	$\Psi(\nu, s:z)$, (4,12)	ν	-1	(3,18), (2,10)
	$\Theta(\nu, s:z)$, (4,13) or (3,12 b)	1	$\nu+s$	(3,19), (2,10)
b)	$\Phi(\nu, s:z)$, (4,4 a)	$-\frac{\nu}{s+1}$	$-\frac{\nu+s}{s}$	(3,20), (2,10)
	$X(\nu, s:z)$, (4,4 b) or (3,14 b)	$-s$	$s-1$	(3,20), (2,10)

There is no difficulty to write down, with these values of c and β, the system of recurrence relations for each case separately, by substituting $c(\nu, s)$ and $\beta(\nu, s)$ from Table I in (2,2), (2,4), (2,5), (2,6), (2,7) and (2,8).

V. RELATIONS BETWEEN BASIC SOLUTIONS

In Chapter III. we have defined three groups of solutions a), b) and c) with very important properties. In Chapter IV. we have determined the series developments of the basic solutions belonging to groups a) and b). It will be of great interest to find relations between solutions belonging to different groups. As the differential equation (1) is a second order linear homogeneous differential equation, it has only two independent solutions, and, therefore, every solution of one group must be expressible by two solutions of each of the other groups, solutions of one group being linearly independent one of another.

The way to obtain these connections will be shown in detail on this example:

$$\Psi(\nu, s:z) = a(\nu, s:\varepsilon)\,\Phi(\nu, s:z) + b(\nu, s:\varepsilon)\,X(\nu, s:z), \qquad (5,1)$$

where coefficients $a(\nu, s:\varepsilon)$ and $b(\nu, s:\varepsilon)$ are in general dependent on parameters ν and s and could become different for Im $z > 0$ and Im $z < 0$. For solutions Φ and X we assume their properties as solutions of group b) and their coefficients c and β as given in Table I., their explicit forms not being needed. For $\Psi(\nu, s:z)$ the property (3,12 a) and the recurrence relations (2,2) and (2,4) will only be needed.

From the fundamental relation (3,12 a) by substituting expression (5,1), we get these relations for the coefficients:

$$a(\nu, s:\varepsilon) = b(\nu+s, -s:\varepsilon), \qquad (5,2\,a)$$

$$a(\nu+s, -s:\varepsilon) = b(\nu, s:\varepsilon). \qquad (5,2\,b)$$

When inserting expression (5,1) into the recurrence relation (2,2), one obtains (by properties of the solutions of group b)):

$$c(\nu, s)\, a(\nu-1, s+1:\varepsilon) = -\frac{\nu}{s+1}\, a(\nu, s:\varepsilon), \tag{5,3 a}$$

$$c(\nu, s)\, b(\nu-1, s+1:\varepsilon) = -s\, b(\nu, s:\varepsilon). \tag{5,3 b}$$

The same reasoning applied on (2,4) will yield

$$\beta(\nu, s)\, a(\nu, s:\varepsilon) = -\frac{\nu+s}{s}\, a(\nu, s-1:\varepsilon), \tag{5,4 a}$$

$$\beta(\nu, s)\, b(\nu, s:\varepsilon) = (s-1)\, b(\nu, s-1:\varepsilon), \tag{5,5 a}$$

$$c(\nu, s-1)\, a(\nu-1, s:\varepsilon) = -\frac{\nu}{s}\, a(\nu, s-1:\varepsilon), \tag{5,4 b}$$

$$c(\nu, s-1)\, b(\nu-1, s:\varepsilon) = -(s-1)\, b(\nu, s-1:\varepsilon). \tag{5,5 b}$$

We see that relations (5,4 b) and (5,5 b) are identical with relations (5,3), and thus we have relations (5,2), (5,3) and (5,4 a), (5,5 a), wherefrom coefficients a, b, c and β have to be determined. By an easy algebra we find from (5,4 a), (5,5 a) and (5,2) that this relation for coefficient b holds

$$\frac{b(\nu, s:\varepsilon)}{b(\nu, s-1:\varepsilon)} = \frac{s-1}{\nu+s}\, \frac{b(\nu+s, -s:\varepsilon)}{b(\nu+s+1, -(s-1):\varepsilon)}. \tag{5,6}$$

We make the assumption

$$b(\nu, s:\varepsilon) = f(s)\, F(\nu)\, \varphi(\nu+s), \tag{5,7}$$

which, inserted into relation (5,6), gives

$$\frac{1}{s(s-1)}\, \frac{f(s)}{f(s-1)}\, \frac{f[-(s-1)]}{f(-s)} = \frac{F(\nu+s)}{F(\nu+s-1)} \cdot \frac{\varphi(\nu+s)}{\varphi(\nu+s-1)}\, \frac{1}{(\nu+s)}. \tag{5,8}$$

A choice

$$f(s) = \Gamma(s), \quad F(\nu) = \frac{1}{\Gamma(-\nu)}, \quad \varphi(\nu+s) = 1, \tag{5,9}$$

satisfies relation (5,8). b is determined in this way to be

$$b(\nu, s:\varepsilon) = \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(-\nu)}, \tag{5,10}$$

and coefficient a follows from relation (5,2 a)

$$a(\nu, s:\varepsilon) = \frac{\Gamma(-s)}{\Gamma(-\nu-s)}. \tag{5,11}$$

With these values of a and b we determine c and β from (5,3), (5,4 a) or (5,5 a)

$$c(\nu, s) = \nu, \qquad \beta(\nu, s) = -1. \tag{5,12}$$

Thus we have found the set of coefficients to satisfy all conditions, including also relations (3,18) and (2,10), and we write down (5,1) in the explicit form

$$\Psi(\nu, s:z) = \frac{\Gamma(-s)}{\Gamma(-\nu-s)}\,\Phi(\nu, s:z) + \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(-\nu)}\,X(\nu, s:z). \quad (5,13)$$

The connection between Θ and Φ and X can be found by means of a similar calculation or directly with the help of (5,13), (3,12 b), (3,14 a) and (3,14 b)

$$\Theta(\nu, s:z) = \frac{\Gamma(-s)}{\Gamma(\nu+1)}\,\Phi(\nu, s:z) + \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(\nu+s+1)}\,e^{i\varepsilon s\pi}\,X(\nu, s:z). \quad (5,14)$$

We could find Φ and X expressed by Ψ and Θ by inverting relations (5,13) and (5,14). We prefer to make an analogous calculation, as above, to show clearly the importance of ε. We start by assuming

$$\Phi(\nu, s:z) = a(\nu, s:\varepsilon)\,\Psi(\nu, s:z) + b(\nu, s:\varepsilon)\,\Theta(\nu, s:z). \quad (5,15)$$

For solutions Ψ and Θ we assume the properties as for solutions of group a) and their coefficients c and β as contained in Table I., their explicit forms not being needed. For solution Φ only the property (3,14 a) and the recurrence relations (2,2) and (2,4) will be needed.

From relation (3,14 a) by substituting (5,15) we get the following relations for the coefficients

$$a(\nu, s:\varepsilon) = b[-(\nu+s+1), s:-\varepsilon], \quad (5,16\,a)$$

$$a[-(\nu+s+1), s:-\varepsilon] = b(\nu, s:\varepsilon). \quad (5,16\,b)$$

When inserting (5,15) into the recurrence relation (2,2) one obtains (from the property of the solution of group a))

$$c(\nu, s)\,a(\nu-1, s+1:\varepsilon) = \nu a(\nu, s:\varepsilon), \quad (5,17\,a)$$

$$c(\nu, s)\,b(\nu-1, s+1:\varepsilon) = b(\nu, s:\nu). \quad (5,17\,b)$$

The same reasoning applied on (2,4) yields

$$\beta(\nu, s)\,a(\nu, s:\varepsilon) = -a(\nu, s-1:\varepsilon), \quad (5,18\,a)$$

$$\beta(\nu, s)\,b(\nu, s:\varepsilon) = (\nu+s)\,b(\nu, s-1:\varepsilon), \quad (5,19\,a)$$

$$c(\nu, s-1)\,a(\nu-1, s:\varepsilon) = \nu a(\nu, s-1:\varepsilon), \quad (5,18\,b)$$

$$c(\nu, s-1)\,b(\nu-1, s:\varepsilon) = b(\nu, s-1:\varepsilon). \quad (5,19\,b)$$

Again, relations (5,18 b) and (5,19 b) are identical with (5,17). By the assumption on the form of coefficient b (5,7) and by an independent analogous assumption on the form a, we can determine by a similar procedure as above that

$$b(\nu, s:\varepsilon) = \frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(-\nu)}\,e^{\pm i(\nu+s+1)\pi}, \quad (5,20)$$

$$a(\nu, s:\varepsilon) = \frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(\nu+s+1)}\, e^{\pm i\nu\pi}, \tag{5,21}$$

and with their help from (5,17), (5,18 a) and (5,19 a)

$$c(\nu, s) = -\frac{\nu}{s+1}\,. \tag{5,22 a}$$

$$\beta(\nu, s) = -\frac{\nu+s}{s}\,. \tag{5,22 b}$$

The choice of sign in the exponential functions remaining undetermined, we will try to determine it by inserting expressions (5,13) and (5,14) into formula (5,15), taking account of expressions (5,20) and (5,21) for a and b. As this relation must become an identity by this substitution, we easily find that there must exist

$$\pm 1 + \varepsilon = 0, \tag{5,23}$$

which means that ± 1 must be replaced by $-\varepsilon$ in formulas (5,20) and (5,21). Thus we are finally obtaining

$$\begin{aligned}\Phi(\nu, s:z) = {} & \frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(\nu+s+1)}\, e^{-i\varepsilon\nu\pi}\, \Psi(\nu, s:z) + \\ & + \frac{\Gamma(1+s)}{\Gamma(-\nu)}\, e^{i\varepsilon(\nu+s+1)\pi}\, \Theta(\nu, s:z).\end{aligned} \tag{5,24}$$

The connection between X and Ψ and Θ can be found by a similar calculation or directly with the help of relations (5,24), (3,14 b), (3,12 a) and (3,12 b)

$$\begin{aligned}X(\nu, s:z) = {} & \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(\nu+1)}\, e^{-i\varepsilon(\nu+s)\pi}\, \Psi(\nu, s:z) + \\ & + \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(-\nu-s)}\, e^{i\varepsilon(\nu+s+1)\pi}\, \Theta(\nu, s:z).\end{aligned} \tag{5,25}$$

After these calculations it is unnecessary to repeat them explicitly in the case of group c), the calculations being quite analogous. Therefore we only write down the results:

$$\begin{aligned}\Pi(\nu, s:z) = {} & \frac{1}{\Gamma(s)}\, \frac{\sqrt{\Gamma(\nu+s+1)}}{\sqrt{\Gamma(\nu+1)}}\, e^{i\varepsilon(\nu+1)\frac{\pi}{2}}\, \Phi(\nu, s:z) - \\ & - \frac{1}{\Gamma(-s)}\, \frac{\sqrt{\Gamma(-\nu-s)}}{\sqrt{\Gamma(-\nu)}}\, e^{i\varepsilon(\nu+s)\frac{\pi}{2}}\, X(\nu, s:z),\end{aligned} \tag{5,26}$$

$$c(\nu, s:\varepsilon) = -\frac{s}{s+1}\sqrt{\nu}\, e^{i\varepsilon\frac{\pi}{2}}, \quad \beta(\nu, s:\varepsilon) = -\frac{s-1}{s}\sqrt{\nu+s}\,; \tag{5,27}$$

$$R(\nu, s:z) = -\frac{1}{\Gamma(s)} \frac{\sqrt[+]{\Gamma(-\nu)}}{\sqrt{\Gamma(-\nu-s)}} e^{i\varepsilon\nu\frac{\pi}{2}} \Phi(\nu, s:z) + \\ + \frac{1}{\Gamma(-s)} \frac{\sqrt[+]{\Gamma(\nu+1)}}{\sqrt{\Gamma(\nu+s+1)}} e^{i\varepsilon(\nu+s+1)\frac{\pi}{2}} X(\nu, s:z), \tag{5,28}$$

$$c(\nu, s:\varepsilon) = \frac{s}{s+1} \sqrt[+]{\nu}, \quad \beta(\nu, s:\varepsilon) = \frac{s-1}{s} \sqrt{\nu+s}\, e^{i\varepsilon\frac{\pi}{2}}. \tag{5,29}$$

Inverse relations have the form of

$$\Phi(\nu, s:z) = \frac{\Gamma(s)}{2} \frac{\sqrt[+]{\Gamma(\nu+1)}}{\sqrt{\Gamma(\nu+s+1)}} e^{-i\varepsilon(\nu+1)\frac{\pi}{2}} \Pi(\nu, s:z) - \\ - \frac{\Gamma(s)}{2} \frac{\sqrt{\Gamma(-\nu-s)}}{\sqrt{\Gamma(-\nu)}} e^{-i\varepsilon\nu\frac{\pi}{2}} R(\nu, s:z), \tag{5,30}$$

$$X(\nu, s:z) = -\frac{\Gamma(-s)}{2} \frac{\sqrt{\Gamma(-\nu)}}{\sqrt{\Gamma(-\nu-s)}} e^{-i\varepsilon(\nu+s)\frac{\pi}{2}} \Pi(\nu, s:z) + \\ + \frac{\Gamma(-s)}{2} \frac{\sqrt{\Gamma(\nu+s+1)}}{\sqrt[+]{\Gamma(\nu+1)}} e^{-i\varepsilon(\nu+s+1)\frac{\pi}{2}} R(\nu, s:z). \tag{5,31}$$

The other group of relations is found to be

$$\Psi(\nu, s:z) = \frac{\Gamma(-s)\,\Gamma(s)}{2} \left[\frac{1}{\Gamma(-\nu-s)} \frac{\sqrt[+]{\Gamma(\nu+1)}}{\sqrt{\Gamma(\nu+s+1)}} e^{-i\varepsilon(\nu+1)\frac{\pi}{2}} - \right. \\ \left. - \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \frac{\sqrt{\Gamma(-\nu)}}{\sqrt{\Gamma(-\nu-s)}} e^{-i\varepsilon(\nu+s)\frac{\pi}{2}} \right] \Pi(\nu, s:z) + \\ + \frac{\Gamma(-s)\,\Gamma(s)}{2} \left[-\frac{1}{\Gamma(-\nu-s)} \frac{\sqrt{\Gamma(-\nu-s)}}{\sqrt{\Gamma(-\nu)}} e^{-i\varepsilon\nu\frac{\pi}{2}} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \frac{\sqrt{\Gamma(\nu+s+1)}}{\sqrt[+]{\Gamma(\nu+1)}} e^{-i\varepsilon(\nu+s+1)\frac{\pi}{2}} \right] R(\nu, s:z), \tag{5,32}$$

$$\Theta(\nu, s:z) = \frac{\Gamma(-s)\,\Gamma(s)}{2}\left[\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\,\frac{\overset{+}{\sqrt{\Gamma(\nu+1)}}}{\overline{\sqrt{\Gamma(\nu+s+1)}}}\,e^{-is(\nu+1)\frac{\pi}{2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\Gamma(\nu+s+1)}\,\frac{\overline{\sqrt{\Gamma(-\nu)}}}{\overline{\sqrt{\Gamma(-\nu-s)}}}\,e^{is\pi}\,e^{-is(\nu+s)\frac{\pi}{2}}\right] H(\nu, s:z) + \tag{5,33}$$

$$+ \frac{\Gamma(-s)\,\Gamma(s)}{2}\left[-\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\,\frac{\overline{\sqrt{\Gamma(-\nu-s)}}}{\overline{\sqrt{\Gamma(-\nu)}}}\,e^{-is\nu\frac{\pi}{2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\Gamma(\nu+s+1)}\,\frac{\overline{\sqrt{\Gamma(\nu+s+1)}}}{\overset{+}{\sqrt{\Gamma(\nu+1)}}}\,e^{is\pi}\,e^{-is(\nu+s+1)\frac{\pi}{2}}\right] R(\nu, s:z),$$

$$H(\nu, s:z) = \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(-s)}\left[-\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\,\frac{\overline{\sqrt{\Gamma(-\nu-s)}}}{\overline{\sqrt{\Gamma(-\nu)}}}\,e^{-is(\nu+s)\frac{\pi}{2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\Gamma(\nu+s+1)}\,\frac{\overline{\sqrt{\Gamma(\nu+s+1)}}}{\overset{+}{\sqrt{\Gamma(\nu+1)}}}\,e^{-is(\nu+1)\frac{\pi}{2}}\right] \Psi(\nu, s:z) + \tag{5,34}$$

$$+ \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(-s)}\left[\frac{1}{\Gamma(-\nu-s)}\,\frac{\overline{\sqrt{\Gamma(-\nu-s)}}}{\overline{\sqrt{\Gamma(-\nu)}}}\,e^{-is(\nu+s)\frac{\pi}{2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\Gamma(-\nu)}\,\frac{\overline{\sqrt{\Gamma(\nu+s+1)}}}{\overset{+}{\sqrt{\Gamma(\nu+1)}}}\,e^{-is\pi}\,e^{-is(\nu+1)\frac{\pi}{2}}\right] \Theta(\nu, s:z),$$

$$R(\nu, s:z) = \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(-s)}\left[-\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\,\frac{\overset{+}{\sqrt{\Gamma(\nu+1)}}}{\overline{\sqrt{\Gamma(\nu+s+1)}}}\,e^{-is(\nu+s+1)\frac{\pi}{2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\Gamma(\nu+s+1)}\,\frac{\overline{\sqrt{\Gamma(-\nu)}}}{\overline{\sqrt{\Gamma(-\nu-s)}}}\,e^{-is\nu\frac{\pi}{2}}\right] \Psi(\nu, s:z) + \tag{5,35}$$

$$+ \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(-s)}\left[\frac{1}{\Gamma(-\nu-s)}\,\frac{\overset{+}{\sqrt{\Gamma(\nu+1)}}}{\overline{\sqrt{\Gamma(\nu+s+1)}}}\,e^{-is(\nu+s+1)\frac{\pi}{2}} - \right.$$

$$- \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \frac{\overset{+}{\sqrt{\Gamma(-\nu)}}}{\overset{-}{\sqrt{\Gamma(-\nu-s)}}} e^{-i\varepsilon s\pi} e^{-i\varepsilon\nu\frac{\pi}{2}} \Bigg] \Theta(\nu, s:z).$$

Here we have used the notations:

$$\overset{+}{\sqrt{-\nu}} = \overset{+}{\sqrt{\nu}}\, e^{i\varepsilon\frac{\pi}{2}}, \quad \overset{-}{\sqrt{-\nu}} = \overset{+}{\sqrt{\nu}}\, e^{-i\varepsilon\frac{\pi}{2}}; \quad \overset{+}{\sqrt{\pm\nu}} \cdot \overset{-}{\sqrt{\pm\nu}} = \mp\nu. \tag{5,36}$$

Thus, we have determined in an elementary way all the 12 connections between the basic solutions of one fundamental group with the basic solutions of other groups, the groups being a), b) and c) of Chapter III.

VI. RELATIONS BETWEEN SOME INTEGRALS AND CONFLUENT HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS

In this chapter we shall try to show that some functions defined by integrals can be expressed by means of confluent hypergeometric functions. Let us assume the connection in the form of

$$y(\nu, s:z) = f(z) \int_a^x F(x)\, dx. \tag{6,1}$$

On the left hand side we have a confluent hypergeometric function satisfying equation (1), on the right hand side two functions to be determined, $f(z)$ and $F(x)$. Two independent variables z and x are connected by a transformation

$$x = x(z), \quad z = z(x) \tag{6,2}$$

to be determined, and for the lower integral limit a we must have from (6,1)

$$\frac{y(\nu, s:z(a))}{f(z(a))} = 0. \tag{6,3}$$

By substituting connection (6,1) into equation (1) we see that it will be satisfied if these two equations hold

$$zf''(z) + (s+1-z) f'(z) + \nu f(z) = 0, \tag{6,4 a}$$

$$\begin{aligned} zf(z) \frac{dF(x)}{dx} \left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + F(x) \Bigg[2zf'(z) \frac{dx}{dz} + \\ + zf(z) \frac{d^2x}{dz^2} + (s+1-z) f(z) \frac{dx}{dz} \Bigg] = 0. \end{aligned} \tag{6,4 b}$$

From equation (6,4 a) it is clear that $f(z)$ has to be a confluent hypergeometric function and that $F(x)$ follows from equation (6,4 b) after determination of $f(z)$ and $x = x(z)$. Therefore we shall start by assuming the most simple confluent hypergeometric functions $f(z)$ and the most simple independent variable transformations (6,2).

The confluent hypergeometric differential equation (1) has especially elementary solutions in two cases (s. Chapter IV.)

A) $\quad s+1=-\nu \qquad f(z)=K e^{z}, \qquad (6,5\,a)$

B) $\quad \nu=-s \qquad f(z)=K z^{-\nu}. \qquad (6,5\,b)$

In these two cases equation (6,4 b) takes the following forms:

$$\text{A)}\quad z\frac{dF}{dx}\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+F\left[2z\frac{dx}{dz}+z\frac{d^2x}{dz^2}+(s+1-z)\frac{dx}{dz}\right]=0, \qquad (6,6\,a)$$

$$\text{B)}\quad z\frac{dF}{dx}\left(\frac{dx}{dz}\right)^2+F\left[-2s\frac{dx}{dz}+z\frac{d^2x}{dz^2}+(s+1-z)\frac{dx}{dz}\right]=0. \qquad (6,6\,b)$$

Now we could assume the most simple transformations (6,2) for independent variables to get the corresponding functions $F(x)$ from equations (6,6 a) and (6,6 b). The results are shown in Table II.

Table II

z	$F(x)$ case A	$F(x)$ case B	
x	$x^{-(s+1)}\,e^{-x}$	$x^{s-1}\,e^{x}$	(6,7 a)
$-x$	$x^{-(s+1)}\,e^{x}$	$x^{s-1}\,e^{-x}$	(6,7 b)
ix	$x^{-(s+1)}\,e^{-ix}$	$x^{s-1}\,e^{ix}$	(6,8 a)
$-ix$	$x^{-(s+1)}\,e^{ix}$	$x^{s-1}\,e^{-ix}$	(6,8 b)
x^2	$x^{-(2s+1)}\,e^{-x^2}$	$x^{2s-1}\,e^{x^2}$	(6,9 a)
$-x^2$	$x^{-(2s+1)}\,e^{x^2}$	$x^{2s-1}\,e^{-x^2}$	(6,9 b)
$-\ln x$	$(\ln x)^{-(s+1)}$		(6,10)

Further, we have to determine the lower limit a of the integrals and the confluent hypergeometric functions $y(\nu, s : z)$ in the way that condition (6,3) will be fulfilled, and finally a constant, equal to the ratio of integration constants of $f(z)$ and $F(x)$. The parameters s and ν, which have to satisfy (6,5 a) or (6,5 b), must in addition be such that integrals (6,1) are convergent. From the knowledge of the confluent hypergeometric functions Φ (4,4 a) and Ψ (4,12) and functions $f(z)$ A) and B), the following can be easily determined: the limit a and the type of the confluent function $y(\nu, s : z)$, as well as the constant, by comparison of the first terms of the series development of both sides. We summarize the results in the following Table III., where the connection with Table II. is clearly expressed on the right hand side.

Table III

$$\int_x^\infty t^{-(s+1)}\, e^{-t}\, dt = e^{-x}\, \Psi\,[-(s+1), s : x] \qquad x > 0 \qquad (6{,}7\text{ a, A})$$

$$\int_0^x t^{s-1}\, e^{t}\, dt = \frac{x^s}{s}\, \Phi\,(-s, s : x) \qquad Re\, s > 0 \qquad (6{,}7\text{ a, B})$$

$$\int_{-\infty}^x t^{-(s+1)}\, e^{t}\, dt = e^{x}\, \Psi\,[-(s+1), s : -x] \qquad x < 0 \qquad (6{,}7\text{ b, A})$$

$$\int_0^x t^{s-1}\, e^{-t}\, dt = \frac{x^s}{s}\, \Phi\,(-s, s : -x) \qquad Re\, s > 0 \qquad (6{,}7\text{ b, B})$$

$$\int_x^\infty t^{-(s+1)}\, e^{-it}\, dt = i^s\, e^{-ix}\, \Psi\,[-(s+1), s : ix] \qquad Re\, s > 0 \qquad (6{,}8\text{ a, A})$$

$$\int_0^x t^{s-1}\, e^{it}\, dt = \frac{x^s}{s}\, \Phi\,(-s, s : ix) \qquad Re\, s > 0 \qquad (6{,}8\text{ a, B})$$

$$\int_x^\infty t^{-(s+1)}\, e^{it}\, dt = i^s\, e^{ix}\, \Psi\,[-(s+1), s : -ix] \qquad Re\, s > 0 \qquad (6{,}8\text{ b, A})$$

$$\int_0^x t^{s-1}\, e^{-it}\, dt = \frac{x^s}{s}\, \Phi\,(-s, s : -ix) \qquad Re\, s > 0 \qquad (6{,}8\text{ b, B})$$

$$\int_x^\infty t^{-(2s+1)}\, e^{-t^2}\, dt = \frac{1}{2}\, e^{-x^2}\, \Psi\,[-(s+1), s : x^2] \qquad x > 0 \qquad (6{,}9\text{ a, A})$$

$$\int_0^x t^{2s-1}\, e^{t^2}\, dt = \frac{x^{2s}}{2s}\, \Phi\,(-s, s : x^2) \qquad Re\, s > 0 \qquad (6{,}9\text{ a, B})$$

$$\int_x^{i\infty} t^{-(2s+1)}\, e^{t^2}\, dt = \frac{(-1)^s}{2}\, e^{x^2}\, \Psi\,[-(s+1), s : -x^2] \qquad x \text{ imag} \qquad (6{,}9\text{ b, A})$$

$$\int_0^x t^{2s-1}\, e^{-t^2}\, dt = \frac{x^{2s}}{2s}\, \Phi\,(-s, s : -x^2) \qquad Re\, s > 0 \qquad (6{,}9\text{ b, B})$$

$$\int_0^x \frac{dt}{(\ln t)^{s+1}} = (-1)^{s+1}\, x\, \Psi\,[-(s+1), s : -\ln x] \qquad Re\, s > 0 \qquad (6{,}10\text{ a, A})$$

We may deduce from (6,8 a, A) and (6,8 b, A) the following results

$$\int_x^\infty t^{-(s+1)} \cos t\, dt = \frac{i^s}{2}\, [e^{ix}\, \Psi\,[-(s+1), s : -ix] + e^{-ix}\, \Psi\,[-(s+1), s : ix]], \qquad Re\, s > 0, \qquad (6{,}11\text{ a})$$

$$\int_x^\infty t^{-(s+1)} \sin t\, dt = \frac{i^{s-1}}{2}\, [e^{ix}\, \Psi\,[-(s+1), s : -ix] - e^{-ix}\, \Psi\,[-(s+1), s : ix]], \qquad Re\, s > 0, \qquad (6{,}11\text{ b})$$

and similarly from (6,8 a, B) and (6,8 b, B)

$$\int_0^x t^{s-1}\cos t\,dt = \frac{x^s}{2s}\left[\Phi(-s, s: ix) + \Phi(-s, s: -ix)\right], \qquad Re\, s > 0, \tag{6,12 a}$$

$$\int_0^x t^{s-1}\sin t\,dt = \frac{x^s}{2is}\left[\Phi(-s, s: ix) - \Phi(-s, s: -ix)\right], \qquad Re\, s > 0. \tag{6,12 b}$$

We are going to add a few remarks about the results obtained. Firstly, we see that some of integrals are connected by a simple change of independent variable, indicated by z in Table II. Secondly, some integrals in Table III. are known under other names, and so these functions are expressed by confluent hypergeometric functions:

(6,7 a, A)
$$\Gamma(-s, x) = \int_x^\infty t^{-s-1} e^{-t}\,dt \tag{6,13}$$
complementary gamma function

(6,7 b, B)
$$\gamma(s, x) = \int_0^x t^{s-1} e^{-t}\,dt, \qquad Re\, s > 0, \tag{6,14 a}$$
incomplete gamma function

with the modification

$$\gamma^*(s, x) = \frac{x^{-s}}{\Gamma(s)} \int_0^x t^{s-1} e^{-t}\,dt, \qquad Re\, s > 0 \tag{6,14 b}$$
modified incomplete gamma function

and
$$\gamma_1(s, x) = \int_0^x t^{s-1} e^{t}\,dt \qquad Re\, s > 0. \tag{6,15}$$

Further we see that the error function is a particular case of (6,9 b, B) for $s = 1/2$

$$Erf(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{z^2} e^{-\tau}\,\tau^{-1/2}\,d\tau = \frac{1}{2}\,\gamma\left(\frac{1}{2}, z^2\right). \tag{6,16}$$

The other function expressible as a particular case of (6,9 a, B) for $s = 1/2$ is

$$Erfi(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{z^2} e^{\tau}\,\tau^{-1/2}\,d\tau = \frac{1}{2}\,\gamma_1\left(\frac{1}{2}, z^2\right). \tag{6,17}$$

The complementary error function is a particular case of (6,9 a, A) for $s = -1/2$

$$Erfc(x) = \int_x^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_{z^2}^\infty e^{-\tau}\,\tau^{-1/2}\,d\tau = \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}, z^2\right), \tag{6,18}$$

where (6,16) and (6,18) are bound by the relation

$$Erf\,(x) + Erfc\,(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}. \tag{6,19}$$

Fresnel's integrals are particular cases for $s = 1/2$ of (6,12 a, b), namely

$$C\,(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,dt, \quad S\,(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}} \int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt, \tag{6,20}$$

or

$$\begin{aligned} C^*\,(x) &= C\,(x^2) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \cos\,(\tau^2)\,d\tau, \\ S^*\,(x) &= S\,(x^2) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \sin\,(\tau^2)\,d\tau, \end{aligned} \tag{6,21}$$

and we can form

$$\begin{aligned} C^*\,(x) \pm iS^*\,(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x e^{\pm i\tau^2}\,d\tau = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{\pm i\pi/4}\, Erf\,(e^{\mp i\pi/4}\, x). \end{aligned} \tag{6,22}$$

Integral functions are particular limiting cases of some of the results contained in Table III.:

(6,12 b) $s = 0$ Integral sinus $$Si\,(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt \tag{6,23}$$

(6,11 a) $s = 0$ Integral cosinus $$Ci\,(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos t}{t}\,dt \tag{6,24}$$

(6,10) $s = 0$ Integral logarithm $$li\,(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t} = Ei \ln x \tag{6,25}$$

(6,7 a, A) $s = 0$ Integral exponential $$Ei\,(-x) = -\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,dt. \tag{6,26}$$

In this way we have deduced in a very elementary way some interesting connections between some special functions and confluent hypergeometric functions of the two special types Ψ and Φ for parameter values $-(s+1)$, s and $-s$, s. It would be interesting to try to apply other confluent functions as $f(z)$ (e. g. polynomial solutions) and to perform an analogous discussion. The inverse problem, i. e. starting with $F(x)$, and then trying to determine the conditions when $f(z)$ and $x = x(z)$ can be found from equations (6,4 a) and (6,4 b), we do not wish to be discussed here.

VII. SOLUTIONS FOR ν AN INTEGER: ASSOCIATED AND ORDINARY LAGUERRE FUNCTIONS

We have discussed this case to some extent before (s. Chapter IV.), but now we wish to make our discussion more elementary and independent of the explicit form of basic solutions [3]. For this reason we shall start with the solutions for $\nu = 0, -1$ and then apply the recurrence relations to obtain the explicit form of solutions by induction.

For $\nu = 0, -1$ we easily get the solutions directly from the differential equation (1) in the form of

$$y(0, s : x) = 1, \quad \bar{y}(0, s : x) = \int_a^x \frac{e^x}{x^{s+1}}\, dx, \tag{7,1 a, b}$$

$$y(-1, s : x) = \frac{e^x}{x^s} \int_b^x \frac{e^{-x}}{x^{-s+1}}\, dx, \; \bar{y}(-1, s : x) = \frac{e^x}{x^s}. \tag{7,2 a, b}$$

The integration limits a and b must be chosen in such a way as to make integrals convergent, so for instance $a = 0$, $Re\, s < 0$; $b = 0$, $Re\, s > 0$; $b = \infty$ for all $s\,(x > 0)$.

First we determine coefficients β for the families of solutions starting with (7,1) and (7,2). By combining the recurrence relations (2,2) and (2,4) we can easily find that for y-solutions

$$\beta(-1, s) = \beta(0, s) = -1, \tag{7,3 a}$$

and for $\bar{y}$-solutions

$$\beta(-1. s) = -(s-1), \quad \beta(0, s) = -s. \tag{7,3 b}$$

Therefore we shall choose for y-solutions β independent of n and s

$$\beta(n, s) = -1. \tag{7,4 a}$$

and in the case of $\bar{y}$-solutions β linearly dependent on the sum $n+s$

$$\bar{\beta}(n, s) = -(n+s). \tag{7,4 b}$$

With these determinations of β from the condition (2,10) it follows that

$$c(n, s) = c(n, s-1), \tag{7,5}$$

i. e. in both cases c can be dependent only on parameter n

$$c(n, s) = c(n). \tag{7,6}$$

Now we can write down the system of recurrence relations holding for y and $\bar{y}$-families of solutions. By substituting (7,4 a), (7,4 b) and (7,6) in the recurrence relations (2,2), (2,4), (2,6), (2,7) and (2,8) we get

$$y'(n, s:x) = c(n)\, y(n-1, s+1:x), \tag{7,7 a}$$

$$y(n, s-1:x) - y(n, s:x) = c(n)\, y(n-1, s:x) = y'(n, s-1:x), \tag{7,8 a}$$

$$c(n+1)\, x\, y(n, s+1:x) - (n+s+1)\, c(n+1)\, y(n, s:x) = (n+1)\, y(n+1, s:x), \tag{7,9 a}$$

$$(n+s)\, c(n+1)\, c(n)\, y(n-1, s:x) + (2n+s+1-x)\, c(n+1)\, y(n, s:x) + (n+1)\, y(n+1, s:x) = 0, \tag{7,10 a}$$

$$x\, y(n, s+1:x) - (s+x)\, y(n, s:x) + (n+s)\, y(n, s-1:x) = 0. \tag{7,11 a}$$

and

$$\bar{y}'(n, s:x) = \bar{c}(n)\, \bar{y}(n-1, s+1:x), \tag{7,7 b}$$

$$\bar{y}(n, s-1:x) - (n+s)\, \bar{y}(n, s:x) = \bar{c}(n)\, \bar{y}(n-1, s:x) = \bar{y}'(n, s-1:x), \tag{7,8 b}$$

$$\bar{c}(n+1)\, x\, \bar{y}(n, s+1:x) - \bar{c}(n+1)\, \bar{y}(n, s:x) = (n+1)\, \bar{y}(n+1, s:x), \tag{7,9 b}$$

$$(n+1)(n+s+1)\, \bar{y}(n+1, s:x) + (2n+s+1-x)\, \bar{c}(n+1)\, \bar{y}(n, s:x) + \bar{c}(n+1)\, \bar{c}(n)\, \bar{y}(n-1, s:x) = 0, \tag{7,10 b}$$

$$(n+s+1)\, x\, \bar{y}(n, s+1:x) - (s+x)\, \bar{y}(n, s:x) + \bar{y}(n, s-1:x) = 0. \tag{7,11 b}$$

In spite of the different forms the structure of these systems of recurrence relations (a) and (b) is the same. Indeed, a substitution of this type

$$\overline{Y}\ (n, s : x) = \Gamma\ (n + s + 1)\ \overline{y}\ (n, s : x) \tag{7,12}$$

would transform system (b) into system (a). We prefer dealing with systems (a) and (b), which will enable us to find the families of solutions y and $\overline{y}$ respectively.

Case $n > 0$

a) Solution $y\ (n, s : x)$. From the recurrence relation (7,9 a) we get for $n = 0,1,2$ starting with (7,1 a)

$$\begin{aligned} y\ (1, s : x) &= K_1\ [x - (s + 1)], \\ y\ (2, s : x) &= K_2\ [x^2 - 2\ (s + 2)\ x + (s + 2)\ (s + 1)], \\ y\ (3, s : x) &= K_3\ [x^3 - 3\ (s + 3)\ x^2 + 3\ (s + 3)\ (s + 2)\ x - \\ &\qquad - (s + 3)\ (s + 2)\ (s + 1)]. \end{aligned} \tag{7,13}$$

Here we have used the abbreviation

$$K_n = \prod_{j=1}^{n} c_j\ j^{-1}. \tag{7,14}$$

Taking into account the structure of these polynomials (7,13), it is easy to prove by induction, with the help of the recurrence relation (7,9 a), this form

$$\begin{aligned} y\ (n, s : x) &= K_n \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{s + n}{j}\ j!\ \binom{n}{j}\ x^{n-j} = \\ &= (-1)^n\ K_n\ (s + 1)_n\ \Phi\ (n, s : x) \sim L\ (n, s : x), \end{aligned} \tag{7,15}$$

when we remember the result (4,14). $y\ (n, s : x)$ are identical (or proportional to, according to the definition) with generalized Laguerre or Sonin polynomials. We shall give them another expression by multiplying both sides of (7,15) with $x^s\ e^{-x}$ and then applying the formulas

$$(x^{n+s})^{(j)} = x^s \binom{s + n}{j}\ j!\ x^{n-j},$$

$$(e^{-x})^{(n-j)} = (-1)^{n-j}\ e^{-x}.$$

With these transformations we obtain from (7,15)

$$x^s\ e^{-x}\ y\ (n, s : x) = (-1)^n\ K_n \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}\ (x^{n+s})^{(j)}\ (e^{-x})^{(n-j)}$$

and by application of the Leibniz rule we write the polynomial solution in the form of

$$y(n, s:x) = (-1)^n K_n x^{-s} e^x (x^{n+s} e^{-x})^{(n)}. \tag{7,16}$$

We can easily deduce directly from the differential equation – without knowing them explicitly – that these polynomials for $Re\, s > -1$ are orthogonal and can be normalized with the weight function $x^s e^{-x}$. Indeed, if we take equation (1) for $\nu = n$ and $\nu = m$, and if we multiply them with $y(m, s:x)$ and $y(n, s:x)$ respectively we obtain

$$\int_0^\infty x^s e^{-x}\, y(n, s:x)\, y(m, s:x)\, dx = 0 \qquad m \neq n \qquad Re\, s > -1, \tag{7,17}$$

when polynomial solutions have been used. To get the norm we multiply equation (1), written for $y(n, s:x)$, with $e^{-x} x^s y(n, s:x)$, and integrate it between zero and infinity. Because of the recurrence relation (7,7 a) we find

$$\begin{aligned} \int_0^\infty n\, x^s e^{-x} [y(n, s:x)]^2\, dx &= \int_0^\infty x^{s+1} e^{-x} [y'(n, s:x)]^2\, dx = \\ &= c^2(n) \int_0^\infty x^{s+1} e^{-x} [y(n-1, s+1:x)]^2\, dx. \end{aligned} \tag{7,18}$$

By successive application of this relation and because of (7,1 a) we get the norm

$$\begin{gathered} N(n, s) = \int_0^\infty x^s e^{-x} [y(n, s:x)]^2\, dx = n!\, \Gamma(n+s+1)\, K_n^2, \\ Re\, s > -1. \end{gathered} \tag{7,19}$$

From the results thus obtained we can see that this choice of $c(n)$ is the most convenient one:

$$c(j) = j \qquad K_n = 1. \tag{7,20}$$

Polynomials with this determination of coefficient $c(n)$ are called original generalized Laguerre polynomials, and it is easy to deduce a generating function for them. We put

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{y(k, s:x)}{k!\, K_k} t^k = \\ &= \sum_{k=0}^\infty \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \frac{(tx)^{k-j}}{(k-j)!\, j!} \prod_{n=0}^{j-1} (s+k-n)\, t^j. \end{aligned} \tag{7,21}$$

We write $k - j = m$ and rearrange the sums to get

$$\begin{aligned} \psi(x, t) &= \sum_{m=0}^\infty \frac{(-tx)^m}{m!} \sum_{j=0}^\infty \binom{-(s+m+1)}{j} (-t)^j = \\ &= \frac{1}{(1-t)^{s+1}} \sum_{m=0}^\infty \frac{1}{m!} \left(-\frac{tx}{1-t}\right)^m \end{aligned}$$

and finally $$\psi(x,t) = \frac{1}{(1-t)^{s+1}}\, e^{-\frac{tx}{1-t}}. \qquad (7{,}22)$$

β) Solution $\bar{y}(n, s:x)$. Quite analogous to the previous development we use the recurrence relation (7,9 b) and find for $n = 0,1,2$

$$\begin{aligned}
\bar{y}(1, s:x) &= \bar{K}_1 [x\,\bar{y}(0, s+1:x) - \bar{y}(0, s:x)],\\
\bar{y}(2, s:x) &= \bar{K}_2 [x^2\,\bar{y}(0, s+2:x) - 2\,x\,\bar{y}(0, s+1:x) + \\
&\qquad + \bar{y}(0, s:x)],\\
\bar{y}(3, s:x) &= \bar{K}_3 [x^3\,\bar{y}(0, s+3:x) - 3\,x^2\,\bar{y}(0, s+2:x) + \\
&\qquad + 3\,x\,\bar{y}(0, s+1:x) - \bar{y}(0, s:x)].
\end{aligned} \qquad (7{,}23)$$

We assume the expression for the solution for arbitrary n to be

$$\bar{y}(n, s:x) = K_n \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} x^{n-j}\,\bar{y}(0, s+n-j:x) \qquad (7{,}24)$$

and this expression can be proved with the help of (7,9 b) by induction. We try to give to $\bar{y}$ another form by multiplying it with $x^s e^{-x}$ and transforming the right hand side. Analogously, as in case α), we have

$$\bar{y}(n, s:x) = (-1)^n \bar{K}_n \frac{x^{-s} e^x}{(s+1)_n} \left(x^{n+s} e^{-x} \int_a^x \frac{e^x}{x^{s+1}}\, dx\right)^{(n)}. \qquad (7{,}25)$$

Case $n < 0$

α) Solution $y(-n, s:x)$. We have only to apply (7,7 a) and (7,2 a) to obtain

$$y[-(n+1), s+n:x] = K_{-n} \left[\frac{e^x}{x^s} \int_b^x x^{s-1} e^{-x}\, dx\right]^{(n)} \qquad (7{,}26)$$

with the abbreviation

$$K_{-n} = \prod_{j=1}^{n} (c_{-j})^{-1}. \qquad (7{,}27)$$

β) Solution $\bar{y}(-n, s:x)$. We have only to apply (7,7 b) and (7,2 b) to get

$$\bar{y}[-(n+1), s+n:x] = \bar{K}_{-n} \left(\frac{e^x}{x^s}\right)^{(n)}. \qquad (7{,}28)$$

Now we write $\nu = \mu - s$, and the solutions of equation (1) for this case are

$$Y(\mu, s:z) = y(\mu - s, s:z), \quad Y(\mu, 0:z) = y(\mu:z). \tag{7,29}$$

If we assume that

$$c(\mu - s, s) = 1, \tag{7,30}$$

then by condition (2,10) coefficient β is only dependent on the sum of parameters $\mu - s + s = \mu$. We write it as

$$\beta(\mu - s, s) = -\frac{1}{a(\mu)} \tag{7,31}$$

and establish with (7,29), (7,30) and (7,31) and (2,2), (2,4), (2,6), (2,7) and (2,8) this system of recurrence relations for functions $Y(\mu, s:z)$

$$Y'(\mu, s:z) = Y(\mu, s+1:z), \tag{7,7 c}$$

$$Y(\mu, s:z) = a(\mu)\,[Y(\mu - 1, s-1:z) - Y(\mu - 1, s:z)], \tag{7,8 c}$$

$$(\mu - s)\,Y(\mu, s:z) + \mu\, a(\mu)\,Y(\mu - 1, s:z) = z\,Y(\mu, s+1:z), \tag{7,9 c}$$

$$z\,Y(\mu+1, s+1:z) - (s+z)\,a(\mu+1)\,Y(\mu, s:z) + \\ + \mu\, a(\mu+1)\,a(\mu)\,Y(\mu-1, s-1:z) = 0, \tag{7,10 c}$$

$$(\mu + 1 - s)\,Y(\mu+1, s:z) + \\ + (2\mu - s + 1 - z)\,a(\mu+1)\,Y(\mu, s:z) + \\ + \mu\, a(\mu+1)\,a(\mu)\,Y(\mu-1, s:z) = 0, \tag{7,11 c}$$

the differential equation being for $Y(\mu, s:z)$

$$z\,Y''(\mu, s:z) + (s+1-z)\,Y'(\mu, s:z) + (\mu - s)\,Y(\mu, s:z) = 0. \tag{7,32}$$

If we put $s = k$, a positive integer, then we see from relation (7,7 c) that this relation holds

$$Y^{(k)}(\mu, 0:z) = Y(\mu, k:z) \tag{7,33}$$

i. e. the associated Laguerre function $Y(\mu, k:z)$ is derived by k-fold differentiation of the ordinary Laguerre function $Y(\mu, 0:z)$.

For the ordinary Laguerre functions $Y(\mu, 0:z) = y(\mu:z)$ we put $s = 0$ in the differential equation (7,32) or (1), and have their differential equation

$$z\,y''(\mu:z) + (1-z)\,y'(\mu:z) + \mu\, y(\mu:z) = 0. \tag{7,34}$$

The system of recurrence relations for ordinary Laguerre functions can be obtained directly from Chapter II. or from system (c) of this Chapter, as well as the solutions, by specializing the results obtained for confluent hypergeometric functions for $s = 0$. We have to rearrange the recurrence relations to contain functions only with the same s and then

put $s = 0$. Thus we get from Chapter II. with the choice of $c(\mu, s) = c(\mu)$, $\beta(\mu, s) = \beta(\mu + s)$ and $\frac{c(\mu)}{\beta(\mu)} = -a(\mu)$ the following system of recurrence relations for the original Laguerre functions

$$y'(\mu+1:z) = -a(\mu+1)\,[y'(\mu:z) - y(\mu:z)], \tag{7,35 a}$$

$$zy'(\mu+1:z) = (\mu+1)\,[y(\mu+1:z) + a(\mu+1)\,y(\mu:z)], \tag{7,35 b}$$

$$\mu a(\mu+1)\,a(\mu)\,y(\mu-1:z) + (2\mu+1-z)\,a(\mu+1)\,y(\mu:z) + (\mu+1)\,y(\mu+1:z) = 0. \tag{7,35 c}$$

The same system follows from system (c), and inversely, by differentiations and combinations, it is easy to get from system (7,35) system (c) with $s = k$, i. e. for the associated Laguerre functions $Y(\mu, k:z)$. Naturally, the discussion of the original and associated Laguerre functions can be made independently of the confluent hypergeometric functions, starting from the differential equation (7,34) and first establishing the recurrence relations (7,35). We omit this discussion here because it was made elsewhere [2].

VIII. BESSEL, WHITTAKER AND PARABOLIC CYLINDER FUNCTIONS

In Chapter I. we showed how the general confluent hypergeometric differential equation (1,8) can be identified with the special confluent hypergeometric differential equation (1) or (1,14), the connections of parameters and independent variables being given by (1,22). Further, we found that there are four solutions (1,23) apparently inconsistent with the fact that a linear homogeneous second order differential equation has only two linearly independent solutions. We clear now this situation by taking into account relations between parameters (1,24) and the existence of the several groups a), b) and c) of solutions of the special confluent hypergeometric differential equation. Namely, we found that there are always four solutions to equation (1), given by (3,7) and (3,9), between which there exist two linear relations, the most simple relations being realized in groups a), b) and c). We write these four solutions explicitly

$$Y_1 = K_1 x^{\frac{s_1+1-a}{2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma^+}+a_0\right)x}\, y\left(\nu_1^+,\, s_1 : \frac{x}{\gamma^+}\right), \tag{8,1 a}$$

$$Y_2 = K_2 x^{\frac{s_2+1-a}{2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma^+}+a_0\right)x}\, y\left(\nu_2^+,\, s_2 : \frac{x}{\gamma^+}\right), \tag{8,1 b}$$

$$Y_3 = K_3\, x^{\frac{s_1+1-a}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma^-}+a_0\right)x}\, y\left(\nu_1^-,\, s_1 : \frac{x}{\gamma^-}\right), \qquad (8{,}1\text{ c})$$

$$Y_4 = K_4\, x^{\frac{s_2+1-a}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma^-}+a_0\right)x}\, y\left(\nu_2^-,\, s_2 : \frac{x}{\gamma^-}\right). \qquad (8{,}1\text{ d})$$

Between the parameters are valid relations (1,22) and (1,24), namely

$$\begin{gathered} \gamma^+ = -\gamma^-,\ s_1 = -s_2,\ \nu_1^+ = \nu_2^+ + s_2, \\ \nu_{1,2}^+ + \nu_{1,2}^- = -1 - s_{1,2}. \end{gathered} \qquad (8{,}2)$$

a) We see from (8,1), (8,2) and Chapter III a) that there exists (with $K_1(\gamma^+)^{s_1} = K_2$, $K_3(\gamma^-)^{s_1} = K_4$)

$$Y_1 = Y_2 = K_1\, x^{\frac{s_1+1-a}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma^+}+a_0\right)x}\, \Psi\left(\nu_1^+,\, s_1 : \frac{x}{\gamma^+}\right), \qquad (8{,}3\text{ a})$$

$$Y_3 = Y_4 = K_3\, x^{\frac{s_1+1-a}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma^-}+a_0\right)x}\, \Psi\left(\nu_1^-,\, s_1 : \frac{x}{\gamma^-}\right). \qquad (8{,}3\text{ b})$$

b) We see from (8,1), (8,2) and Chapter III b) that there exists (with $K_1 = K_3$, $K_2 = K_4$)

$$Y_1 = Y_3 = K_1\, x^{\frac{s_1+1-a}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma^+}+a_0\right)x}\, \Phi\left(\nu_1^+,\, s_1 : \frac{x}{\gamma^+}\right), \qquad (8{,}4\text{ a})$$

$$Y_2 = Y_4 = K_2\, x^{\frac{s_2+1-a}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma^+}+a_0\right)x}\, \Phi\left(\nu_2^+,\, s_2 : \frac{x}{\gamma^+}\right). \qquad (8{,}4\text{ b})$$

c) We see from (8,1), (8,2) and Chapter III c) that there exists (with $K_4 = K_1\, e^{i\varepsilon s_1 \frac{\pi}{2}}\, (\gamma^+)^{s_1}$ and $K_3 = K_2\, e^{i\varepsilon s_2 \frac{\pi}{2}}\, (\gamma^+)^{s_2}$)

$$Y_1 = Y_4 = K_1\, x^{\frac{s_1+1-a}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma^+}+a_0\right)x}\, \Pi\left(\nu_1^+,\, s_1 : \frac{x}{\gamma^+}\right), \qquad (8{,}5\text{ a})$$

$$Y_2 = Y_3 = K_3\, x^{\frac{s_1+1-a}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\gamma^-}+a_0\right)x}\, \Pi\left(\nu_1^-,\, s_1 : \frac{x}{\gamma^-}\right). \qquad (8{,}5\text{ b})$$

In this way we have determined that only two solutions (8,1) are linearly independent, and that these independent solutions form the fundamental system of solutions, others being linearly dependent on them.

Now we shall apply the obtained results to the following cases: A) Bessel functions, B) Whittaker functions, and C) Parabolic cylinder functions. These functions have been chosen because of their importance, especially in applications, but the same method is applicable in many other cases.

A) Bessel functions

The Bessel differential equation

$$Y''_\mu(x) + \frac{1}{x} Y'_\mu(x) + \left(1 - \frac{\mu^2}{x^2}\right) Y_\mu(x) = 0 \tag{8,6}$$

can be identified with the general confluent hypergeometric equation (1,8) by

$$a_0 = 0,\quad a = 1,\quad b_0 = 1,\quad b = 0,\quad c = -\mu^2, \tag{8,7}$$

and, then, with the special confluent hypergeometric equation (1) by (1,22)

$$\gamma^{\pm} = \pm\frac{1}{2i},\quad s_{1,2} = \pm 2\mu,\quad \nu^{\pm}_{1,2} = \frac{-1 - s_{1,2}}{2}. \tag{8,8}$$

With these values of parameters we can write down the three cases a), b) and c).

a)
$$Y_{\mu,1} = K_1 x^\mu e^{-ix} \Psi\left(-\frac{1}{2} - \mu,\ 2\mu : 2ix\right), \tag{8,9 a}$$

$$Y_{\mu,2} = K_2 x^\mu e^{ix} \Psi\left(-\frac{1}{2} - \mu,\ 2\mu : -2ix\right). \tag{8,9 b}$$

We see that between these functions (with appropriate choice of constants) are valid the same relations as between Hankel functions $H^{(2)}_\mu(x)$ and $H^{(1)}_\mu(x)$, and they indeed represent them.

b)
$$Y_{\mu,1} = K_1 x^\mu e^{-ix} \Phi\left(-\frac{1}{2} - \mu,\ 2\mu : 2ix\right), \tag{8,10 a}$$

$$Y_{\mu,2} = K_2 x^{-\mu} e^{-ix} \Phi\left(-\frac{1}{2} + \mu,\ -2\mu : 2ix\right), \tag{8,10 b}$$

By choosing constants

$$K_1 = \frac{1}{2^\mu \Gamma(\mu+1)},\quad K_2 = \frac{1}{2^{-\mu}\Gamma(-\mu+1)},$$

solutions (8,10) do represent the Bessel functions of the first kind in the standard form of

$$J_\mu(x) = \frac{x^\mu e^{-ix}}{2^\mu \Gamma(\mu+1)} \Phi\left(-\frac{1}{2} - \mu,\ 2\mu : 2ix\right). \tag{8,11}$$

We write immediately the Bessel functions (with imaginary argument) of the first kind $I_\mu(x)$, by changing $ix \to x$ in (8,11):

$$I_\mu(x) = \frac{x^\mu e^{-x}}{2^\mu \Gamma(\mu+1)} \Phi\left(-\frac{1}{2}-\mu,\ 2\mu : 2x\right). \tag{8,12}$$

c)
$$Y_{\mu,1} = K_1 x^\mu e^{-ix} \Pi\left(-\frac{1}{2}-\mu,\ 2\mu : 2ix\right), \tag{8,13 a}$$

$$Y_{\mu,2} = K_2 x^\mu e^{ix} \underset{\nu}{\Pi}\left(-\frac{1}{2}-\mu,\ 2\mu : -2ix\right), \tag{8,13 b}$$

B) Whittaker functions

The Whittaker differential equation

$$Y''_{k,\mu}(x) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{k}{x} + \frac{1/4-\mu^2}{x^2}\right) Y_{k,\mu}(x) = 0 \tag{8,14}$$

can be identified with the general confluent hypergeometric equation (1,8) by

$$a_0 = 0,\ a = 0,\ b_0 = -\frac{1}{4},\ b = k,\ c = \frac{1}{4}-\mu^2, \tag{8,15}$$

and, then, with the special confluent hypergeometric equation (1) by (1,22)

$$\gamma^\pm = \pm 1,\ s_{1,2} = \pm 2\mu,\ \nu^\pm_{1,2} = \gamma^\pm k - \frac{s_{1,2}}{2} - \frac{1}{2}. \tag{8,16}$$

With these values of parameters we can write down the three cases a), b) and c).

a)
$$Y_{k,\mu,1}(x) = K_1 x^{\frac{1}{2}+\mu} e^{-\frac{x}{2}} \Psi\left(k-\mu-\frac{1}{2},\ 2\mu : x\right), \tag{8,17 a}$$

$$Y_{k,\mu,2}(x) = K_2 x^{\frac{1}{2}+\mu} e^{\frac{x}{2}} \Psi\left(-k-\mu-\frac{1}{2},\ 2\mu : -x\right). \tag{8,17 b}$$

These functions (8,17) coincide with the Whittaker functions $W_{k,\mu}(x)$ and $W_{-k,\mu}(-x)$ respectively,

$$W_{k,\mu}(x) = x^{\frac{1}{2}+\mu} e^{-\frac{x}{2}} \Psi\left(k-\mu-\frac{1}{2},\ 2\mu : x\right). \tag{8,18}$$

b)
$$Y_{k,\mu,1}(x) = K_1 x^{\frac{1}{2}+\mu} e^{-\frac{x}{2}} \Phi\left(k-\mu-\frac{1}{2},\ 2\mu : x\right), \tag{8,19 a}$$

$$Y_{k,\mu,2}(x) = K_2 x^{\frac{1}{2}-\mu} e^{-\frac{x}{2}} \Phi\left(k+\mu-\frac{1}{2},\ -2\mu : x\right). \tag{8,19 b}$$

We see that these functions coincide with the Whittaker functions $M_{k,\mu}(x)$ and $M_{k,-\mu}(x)$.

$$M_{k,\mu}(x) = x^{\frac{1}{2}+\mu} e^{-\frac{x}{2}} \Phi\left(k - \mu - \frac{1}{2},\ 2\mu : x\right). \tag{8,20}$$

c) $$Y_{k,\mu,1}(x) = K_1 x^{\frac{1}{2}+\mu} e^{-\frac{x}{2}} \Pi\left(k - \mu - \frac{1}{2},\ 2\mu : x\right), \tag{8,21 a}$$

$$Y_{k,\mu,2}(x) = K_2 x^{\frac{1}{2}+\mu} e^{\frac{x}{2}} \Pi\left(-k - \mu - \frac{1}{2},\ 2\mu : -x\right). \tag{8,21 b}$$

C) Parabolic cylinder functions

The Weber differential equation

$$Y''(z) + \left(n + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} z^2\right) Y(z) = 0 \tag{8,22}$$

must be first put in the form of the general confluent hypergeometric differential equation (1,8) and then identified with the special confluent hypergeometric equation (1). Since this procedure is an example of a general procedure, we will deal with it in more detail.

Each equation of the type (1,1) can be transformed in an equation of an analogous structure by a transformation

$$x = x(z), \quad z = z(x), \tag{8,23}$$

the connection between coefficients $p(x)$, $q(x)$ and $P(z)$, $Q(z)$ of the transformed equation being

$$p(x) \frac{dz}{dx} + \frac{d^2 z}{dx^2} = P(z) \left(\frac{dz}{dx}\right)^2, \tag{8,24 a}$$

$$q(x) = Q(z) \left(\frac{dz}{dx}\right)^2. \tag{8,24 b}$$

If we wish to transform equation (1,8) (with x written instead of z) to the form (8,22), we get for relations (8,24)

$$\left(a_0 + \frac{a}{x}\right) \frac{dz}{dx} + \frac{d^2 z}{dx^2} = 0, \tag{8,25 a}$$

$$\left(b_0 + \frac{b}{x} + \frac{c}{x^2}\right) = \left(n + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} z^2\right) \left(\frac{dz}{dx}\right)^2. \tag{8,25 b}$$

We try to find the connection by assuming

$$z = K x^{\alpha}. \tag{8,26}$$

By introducing transformation (8,26) into expression (8,25 a) we see that for its identical vanishing the following conditions must be fulfilled

$$a_0 = 1, \quad a = 1 - \alpha. \tag{8,27}$$

The same procedure applied to (8,25 b) yields as conditions

$$a = \frac{1}{2}, \quad b_0 = -\frac{K^2}{16}, \quad b = \frac{K^2}{4}\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad c = 0. \tag{8,28}$$

Thus the transformed Weber differential equation (8,22) takes the following form

$$\frac{d^2Y}{dx^2} + \frac{1}{2x}\frac{dY}{dx} + \left(-\frac{K^2}{16} - \frac{K^2}{4x}\left(n + \frac{1}{2}\right)\right) Y = 0, \tag{8,29}$$

$$z = K x^{1/2}.$$

By identifying the transformed equation with the special confluent hypergeometric equation (1) by means of (1,22) we find that

$$\gamma^{\pm} = \pm\frac{2}{K^2}, \quad s_{1,2} = \pm\frac{1}{2}, \quad \nu^{\pm}_{1,2} = \frac{\gamma^{\pm}\frac{K^2}{2}\left(n + \frac{1}{2}\right) - 1 - s_{1,2}}{2}. \tag{8,30}$$

Constant K being at our disposal, we choose it as

$$K = \sqrt{2} \tag{8,31}$$

to obtain finally

$$\gamma^{\pm} = \pm 1, \quad s_{1,2} = \pm\frac{1}{2}, \quad \nu^{\pm}_{1,2} = \frac{\gamma^{\pm}\left(n + \frac{1}{2}\right) - 1 - s_{1,2}}{2}. \tag{8,32}$$

With these values of parameters we can write down the three cases a), b) and c).

a)
$$Y_{n,1}(z) = K_1 \left(\frac{z^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{z^2}{4}} \Psi\left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{z^2}{2}\right), \tag{8,33 a}$$

$$Re\, z > 0$$

$$Y_{n,2}(z) = K_2 \left(\frac{z^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{z^2}{4}} \Psi\left(-\frac{n}{2} - 1, \frac{1}{2}; -\frac{z^2}{2}\right), \tag{8,33 b}$$

$Re\, z > 0$ being assumed, the cut in the z plane not to be passed by argument z^2. When we choose the constant in (8,33) to be equal $2^{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}$, we have the properly defined parabolic cylinder function [S. (3,12 a)]

$$D_n(z) = 2^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{z^2}{4}} \Psi\left(\frac{n}{2}, -\frac{1}{2} : \frac{z^2}{2}\right) = \\ = 2^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{z^2}{4}} z \Psi\left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} : \frac{z^2}{2}\right). \tag{8,34}$$

Expressions (8,33) and (8,34) show that

$$D_n(z) = D_n(-z), \tag{8,35 a}$$

$$D_{-(n+1)}(\pm iz) \sim D_n(z) \tag{8,35 b}$$

only two of these functions being independent.

b)
$$Y_{n,1}(z) = K_1 \left(\frac{z^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{z^2}{4}} \Phi\left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} : \frac{z^2}{2}\right), \tag{8,36 a}$$

$$Y_{n,2}(z) = K_2 e^{-\frac{z^2}{4}} \Phi\left(\frac{n}{2}, -\frac{1}{2} : \frac{z^2}{2}\right). \tag{8,36 b}$$

c)
$$Y_{n,1}(z) = K_1 \left(\frac{z^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{z^2}{4}} \Pi\left(\frac{n}{2} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} : \frac{z^2}{2}\right), \tag{8,37 a}$$

$$Y_{n,2}(z) = K_2 \left(\frac{z^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{z^2}{4}} \Pi\left(-\frac{n}{2} - 1, \frac{1}{2} : -\frac{z^2}{2}\right). \tag{8,37 b}$$

Having established the connection between these functions and the confluent hypergeometric functions, the complete theory of the latter can be applied to the former ones. We shall not proceed along these lines but will work out in detail a very important case of the Coulomb wave functions.

IX. COULOMB FUNCTIONS

Because of the extraordinary importance of the Coulomb functions, especially in modern nuclear physics, and for the reason that there does not exist an elementary and complete exposition, we are going to deal with them in more detail [4].

As is well known, in the case of a spherically symmetric potential $V(r)$ the Schrödinger wave equation

$$\left[\Delta + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(r))\right] \psi = 0 \tag{9,1}$$

can be separated in polar coordinates, the angular part being satisfied by the spherical harmonics $Y_l^m(\vartheta, \varphi)$, and the radial part being the differential equation (for the functions $u_l = r R_l$)

$$u_l'' + \left\{ \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(r)] - \frac{l(l+1)}{r^2} \right\} u_l = 0. \qquad (9,2)$$

Now, particles a and X interacting by means of the Coulomb force, potential $V(r)$ equals $\frac{Z_x Z_a e^2}{r}$, and m means their reduced mass, while the differential equation (9,2) can be written in the form of (C. M. system)

$$\frac{d^2 u_l}{d\varrho^2} + \left(\varepsilon - \frac{2\eta}{\varrho} - \frac{l(l+1)}{\varrho^2} \right) u_l = 0, \quad \varepsilon = \pm 1 \text{ for } E \gtrless 0. \qquad (9,3)$$

The meaning of the symbols are:

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}, \quad \varrho = kr, \quad \eta = \frac{m Z_x Z_a e^2}{\hbar^2 k} = \frac{Z_a Z_x}{a} \frac{c}{v}. \qquad (9,4)$$

We can conclude at once from the differential equation (9,3) that the case $\varepsilon = +1$ can be transformed to the case $\varepsilon = -1$ by the following change

$$\varrho \rightarrow \pm i\varrho, \quad \eta \rightarrow \mp i\eta = \pm i\eta, \qquad (9,5)$$

η being negative in the case $E < 0$. Thus it is only necessary to discuss the case $\varepsilon = +1$, the results being applicable with the change (9,5) to the case $\varepsilon = -1$ too.

Case $\varepsilon = +1$

By comparing equation (9,3) with the general confluent hypergeometric equation (1,8), we find

$$a_0 = 0, \quad a = 0, \quad b_0 = 1, \quad b = -2\eta, \quad c = -l(l+1), \qquad (9,6)$$

and the identification with the special confluent hypergeometric equation (1), by means of (1,22), gives the following relations between the parameters:

$$\gamma^{+} = \mp \frac{i}{2}, \quad s_{1,2} = \pm (2l+1), \quad \nu_{1,2}^{\pm} = \frac{-\gamma^{+} 4\eta - 1 - s_{1,2}}{2}. \qquad (9,7)$$

Relations (8,2) being fulfilled, we apply the conclusions reached in Chapter VIII. and write down the three groups of solutions (8,3), (8,4) and (8,5) in the following form:

a) $$u_{l,1} = K_1 \varrho^{l+1} e^{-i\varrho} \Psi(i\eta - l - 1, 2l+1 : 2i\varrho), \qquad (9,8\,a)$$

$$u_{l,2} = K_2 \varrho^{l+1} e^{i\varrho} \Psi(-i\eta - l - 1, 2l+1 : -2i\varrho). \qquad (9,8\,b)$$

b) $$u_{l,1} = K_1\, \varrho^{l+1}\, e^{-i\varrho}\, \Phi\,(i\eta - l - 1,\, 2\,l + 1 : 2\,i\varrho), \tag{9,9 a}$$

$$u_{l,2} = K_2\, \varrho^{-l}\ e^{-i\varrho}\, \Phi\,(i\eta + l,\, -2\,l - 1 : 2\,i\varrho). \tag{9,9 b}$$

c) $$u_{l,1} = K_1\, \varrho^{l+1}\, e^{-i\varrho}\, \Pi\,(i\eta - l - 1,\, 2\,l + 1 : 2\,i\varrho), \tag{9,10 a}$$

$$u_{l,2} = K_2\, \varrho^{l+1}\, e^{i\varrho}\ \ \Pi\,(-i\eta - l - 1,\, 2\,l + 1 : -2\,i\varrho). \tag{9,10 b}$$

Inspecting the Coulomb differential equation (9,3) we can easily find that the leading terms of their two independent solutions must have this behaviour: at the origin ϱ^{-l}, ϱ^{l+1} and at the infinity $e^{+i\varrho}$, $e^{-i\varrho}$. In wave mechanics only the finite solutions in that portion of space that the system has at disposal are of interest, the density of probability being proportional to the absolute square of wave function. Therefore our discussion is to be made from this standpoint. Further, we limit ourselves to cases a) and b), the solutions of case c) not being explicitly used in wave mechanical applications.

The behaviour of solutions (9,8 a) and (9,8 b) at the infinity can be determined by taking only the highest terms in the series expansion (4,12), i. e. z^{ν}. Thus we obtain

$$u_{l,1} \sim \varrho^{l+1}\, e^{\ i\varrho}\, (2\,i\varrho)^{i\eta\ -\ l\ -1} \sim e^{-i\left[\varrho - \eta \ln 2\varrho - l\frac{\pi}{2} + \sigma_l\right]} = u_l^{-}\, e^{-i\sigma_l}, \tag{9,11 a}$$

$\varrho \to \infty$

$$u_{l,2} \sim \varrho^{l+1}\, e^{+i\varrho}\, (-2\,i\varrho)^{\ -i\eta\ -l\ -1} \sim e^{\ i\left[\varrho\ -\eta \ln 2\varrho - l\frac{\pi}{2} + \sigma_l\right]} = u_l^{+}\, e^{i\sigma_l}. \tag{9,11 b}$$

Naturally, by the choice of constants we could determine equality between the first and third members of these expressions, as well as the meaning of σ_l. The further forms of solutions can be built by the superposition of these simple ones, e. g. by adding and subtracting (9,8 a) and (9,8 b) we can get solutions which asymptotically behave like trigonometric functions of the argument $\left(\varrho - \eta \ln 2\,\varrho - l\,\frac{\pi}{2} + \sigma_l\right)$.

But, we expect from (5,13) ($\Psi\,(\nu, s : z) \underset{z\to 0}{\longrightarrow} z^{\ s}$) that both solutions (9,8 a) and (9,8 b) show an irregular behaviour at the origin. It is a little difficult to guess directly from expressions (9,8) the coefficients in the superposition which would show a regular behaviour at the origin. But, as the other solution (9,8 b) is by (3,12 b) just proportional to $\varrho^{l+1}\, e^{-i\varrho}\, \Theta\,(i\eta - l - 1,2\,l + 1 : 2\,i\varrho)$, we could apply superposition (5,15), i. e. (5,24), to get the regular solution at the origin. As this is just solution (9,9 a) appearing in group b), we are going to examine group b) (9,9) more closely.

First, we can observe that solution (9,9 b), s being a negative integer $-2\,l - 1$, in this form has no sense (being infinite), and if redefined by dividing it with $\Gamma\,(1 + s)$ it is not independent from (9,9 a) by (4,6). Thus we have here only one solution (9,9 a), which can by (5,24) be put in the form of ($Im\,(2\,i\varrho) > 0$, $\varepsilon = +1$)

$$u_{l,1} = K_1 \varrho^{l+1} e^{-i\varrho} \left[e^{-i(i\eta-l-1)\pi} \frac{\Gamma(2l+2)}{\Gamma(i\eta+l+1)} \Psi(i\eta-l-1, 2l+1 : 2i\varrho) + \right.$$

$$\left. + e^{-i(i\eta+l+1)\pi} \frac{\Gamma(2l+2)}{\Gamma(-i\eta+l+1)} \Theta(i\eta-l-1, 2l+1 : 2i\varrho) \right] . \quad (9,12)$$

We see that relation (9,12), by (3,12 b), represents the desired superposition of solutions (9,8 a) and (9,8 b), being regular at the origin and enabling us at the same time to determine uniquely σ_l, appearing in relations (9,11). Since solution $u_{l,1}$ is a superposition of solutions (9,8 a) and (9,8 b), it is clear that the difference of both members occurring in it also represents an independent solution of the Coulomb differential equation (9,3). Thus, by writing the first and the second member of the sum (9,12 b) as W_2 and W_1 respectively,

$$W_1 = K_1 e^{-i\pi(i\eta+l+1)} \frac{\Gamma(2l+2)}{\Gamma(-i\eta+l+1)} \varrho^{l+1} e^{-i\varrho} \Theta(i\eta-l-1, 2l+1 : 2i\varrho), \quad (9,13\text{ a})$$

$$W_2 = K_1 e^{-i\pi(i\eta-l-1)} \frac{\Gamma(2l+2)}{\Gamma(i\eta+l+1)} \varrho^{l+1} e^{-i\varrho} \Psi(i\eta-l-1, 2l+1 : 2i\varrho), \quad (9,13\text{ b})$$

we can form two solutions in the form of

$$F_l = W_1 + W_2 , \quad (9,14\text{ a})$$

$$-iG_l = W_1 - W_2 . \quad (9,14\text{ b})$$

To determine the asymptotic behaviour of W_1 and W_2 (resp. F_l and G_l) at infinity we insert the highest order terms of the series development (4,13) and (4,12) into the expressions (9,13 a) and (9,13 b). Thus we get, after easy transformations,

$$W_1 \xrightarrow[\varrho\to\infty]{} K_1 \frac{\Gamma(2l+2)\, e^{\frac{\pi}{2}\eta}}{\Gamma(i\eta+l+1)\, 2^{l+1}} (-i)\, e^{i\left(\varrho-\eta\ln 2\varrho-l\frac{\pi}{2}+\sigma_l\right)}, \quad (9,15\text{ a})$$

$$W_2 \xrightarrow[\varrho\to\infty]{} K_1 \frac{\Gamma(2l+2)\, e^{\frac{\pi}{2}\eta}}{\Gamma(i\eta+l+1)\, 2^{l+1}} (i)\, e^{i\left(\varrho-\eta\ln 2\varrho-l\frac{\pi}{2}+\sigma_l\right)}, \quad (9,15\text{ b})$$

and these expressions reproduce (9,11 a) and (9,11 b) with definite constants and σ_l.

The Coulomb phase shift σ_l was introduced by

$$\Gamma(\pm i\eta+l+1) = |\Gamma(i\eta+l+1)|\, e^{\pm i\sigma_l} . \quad (9,16)$$

We choose the constant K_1 to be

$$K_1 = \frac{2^l e^{-\frac{\pi}{2}\eta} |\Gamma(i\eta+l+1)|}{\Gamma(2l+2)} , \quad (9,17)$$

and from (9,14) and (9,15) we get these two limiting expressions

$$F_l \underset{\varrho\to\infty}{\longrightarrow} \sin\left(\varrho - \eta \ln 2\varrho - l\,\frac{\pi}{2} + \sigma_l\right), \tag{9,18 a}$$

$$G_l \underset{\varrho\to\infty}{\longrightarrow} \cos\left(\varrho - \eta \ln 2\varrho - l\,\frac{\pi}{2} + \sigma_l\right). \tag{9,18 b}$$

The behaviour of F_l at the origin follows immediately from (9,9 a) with K_1 given by (9,17)

$$F_l \underset{\varrho\to 0}{\longrightarrow} K_1\,\varrho^{l+1}. \tag{9,19}$$

To determine the behaviour of G_l at the origin, we apply the Wronskian

$$G_l\,\frac{dF_l}{d\varrho} - F_l\,\frac{dG_l}{d\varrho} = 1, \tag{9,20}$$

where its constancy follows from the structure of equation (9,3) and the value unity is obtained by substituting expressions (9,18 a) and (9,18 b) in (9,20). At the origin, we insert (9,19) into relation (9,20), and we find that the leading term in G_l is

$$G_l \underset{\varrho\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{K_1}\,\frac{\varrho^{-l}}{2l+1}. \tag{9,21}$$

We will add a few comments regarding the physical situation. While solutions (9,11 b) and (9,11 a) as well as W_1 (9,15 a) and W_2 (9,15 b) at infinity represent outgoing and ingoing spherical waves, their superpositions F_l and G_l represent standing waves. The choice of constant K_1 (9,17) means a unit density flux normalization of the Coulomb wave functions at infinity (in the case of a unit flux normalization a factor $v^{-1/2}$ enters in K_1). The names »regular« and »irregular« functions F_l and G_l respectively have their origin in their behaviour (9,19) and (9,21) at the origin.

An incident plane wave travelling along the z axis

$$\psi_0 = e^{ikz} \tag{9,22}$$

is a solution of the Schrödinger wave equation (9,1) without the Coulomb potential. We wish to determine the distortion of this plane wave (9,22), provoked by the Coulomb potential. As the potential is spherically symmetric, the distortion must be z-axially symmetric, i. e. independent of φ and only dependent on r and ϑ, or r and z. We will try to describe the situation by assuming a solution of equation (9,1) in the form of

$$\psi_c = e^{ikz}\,F(r - z), \tag{9,23}$$

the argument $r - z$ being suggested by the examination of the corresponding classical problem. With ψ_c substituted in the Schrödinger wave equation (9,1), we get this differential equation (independent variable ζ) for function F

$$\zeta F'' + (1 - \zeta)\,F' + i\eta\,F = 0, \quad \zeta = ik\,(r - z). \tag{9,24}$$

Equation (9,24) is a special confluent hypergeometric differential equation (an ordinary Laguerre differential equation) for these values of parameters $s = 0$, $\nu = i\eta$. Therefore function F can be written as

$$F = y\,(i\eta,\ 0 : ik\,(r - z)). \tag{9,25}$$

ψ_c being finite everywhere, we have to choose in (9,25) only the Φ solution (being regular everywhere). Thus, by applying expression (5,24) we write ψ_c (9,23) in the following form

$$\psi_c = \frac{C\,e^{\pi\eta}}{\Gamma(1+i\eta)}\,e^{ikz}\left[\Psi\,(i\eta,\ 0 : ik\,(r-z))\,e^{-i\sigma_0} + \right.$$
$$\left. + i\eta\,\Theta\,(i\eta,\ 0 : ik\,(r-z))\,e^{i\sigma_0}\right], \tag{9,26}$$

where σ_0 was introduced by (9,16). We can find an asymptotic expression for ψ_c by substituting (4,12) and (4,13) in (9,26)

$$\psi_c \underset{\varrho\to\infty}{\longrightarrow} \frac{C\,e^{\frac{\pi}{2}\eta}\,e^{-i\sigma_0}}{\Gamma(1+i\eta)}\left[e^{i[kz+\eta\ln k(r-z)]}\left(1+\frac{\eta^2}{ik\,(r-z)}+\ldots\right)-\right.$$
$$\left. - \eta\,e^{2i\sigma_0}\,e^{i[kr-\eta\ln k(r-z)]}\left(\frac{1}{k\,(r-z)}+\ldots\right)\right]. \tag{9,27}$$

By choosing

$$C = \Gamma\,(1+i\eta)\,e^{-\frac{\pi}{2}\eta}, \tag{9,28}$$

which means the unit density incident flux at infinity, we interpret relation (9,27) as a superposition of a unit amplitude distorted plane incident wave ψ_i (first term), and a spherical scattered wave $\psi_{c,\,sc}$ (second term) at infinity

$$\psi_i = e^{i[kz+\eta\ln(r-z)]}, \tag{9,29}$$

$$\psi_{c,\,sc} = \frac{f\,(\vartheta)}{r}\,e^{i[kr-\eta\ln kr]}, \tag{9,30}$$

the amplitude of this Coulomb scattered wave being

$$f\,(\vartheta) = -\frac{\eta}{2\,k\,\sin^2\frac{\vartheta}{2}}\,e^{i\left[-2\eta\ln\sin\frac{\vartheta}{2}+2\sigma_0\right]}. \tag{9,31}$$

As solution ψ_c is a solution of the same Schrödinger equation (9,1) as the solutions discussed before (in the polar coordinate system), it must be expressible in their terms, namely

$$\psi_c = \sum_{l=0}^{\infty} a_l\,\frac{F_l}{\varrho}\,Y_l^0\,(\vartheta). \tag{9,32}$$

On the right side there appears only the regular solution, because of the regular behaviour of ψ_c, and the angular dependence being only on ϑ, because of the z-axial symmetry of ψ_c. Expression (9,23), i. e. (9,26), could be transformed to the form (9,32), coefficients a_l then being determined. Instead of performing this lengthly transformation, we use a plausible argument to determine a_l: we expand the plane wave in ψ_c, then put $r = z$, i. e. $\vartheta = 0$, and finally let $\varrho \to 0$, both Φ functions in ψ_c (9,26) and in F_l (9,14 a) approaching unity. A comparison of the leading terms for each l on both sides gives the following expression for coefficients a_l

$$a_l = \sqrt{4\pi(2l+1)}\, i^l \frac{C}{K_1 (2l+1)!!}, \tag{9,33}$$

with the values of the constants given in (9,17) and (9,28).

As shown elsewhere [4], we get in this way the possibility to write down the expressions for all waves: $\psi_i, \psi_c, \psi_{sc}, \psi_n, {}_{sc}, \Psi$ needed in nuclear physics, and by an ordinary procedure we can determine cross-sections $\frac{d\sigma_c(\vartheta)}{d\Omega}$, $\frac{d\sigma_{sc}(\vartheta)}{d\Omega}$, σ_c, σ_{sc}, σ_r, σ_t for a particular l value, or sums over all l values.

Case $\varepsilon = -1$

By making transformation (9,5) we immediately see from (9,8) and (9,9) that solution (9,8 b) with the upper sign, (9,8 a) with the lower sign, and (9,9 a) with the lower sign in the transformation, remain bounded at infinity. There is no difference in the behaviour of these three cases at infinity, the Θ function in transformed (9,9 a), i. e. (9,12), disappearing faster. Therefore we have only to discuss the solution of this form:

$$u_l = K \varrho^{l+1} e^{-\varrho} \Psi(|\eta| - l - 1, 2l+1 : 2\varrho). \tag{9,34}$$

For this solution to be regular at the origin it is necessary that the Ψ solution be a polynomial. As the Ψ solution is polynomial in case (4,18) with ν a positive integer, we see that there must exist

$$|\eta| - l - 1 = n_0 \geqq 0 \tag{9,35 a}$$

or

$$|\eta| = n = n_0 + l + 1 \geqq l + 1. \tag{9,35 b}$$

In this case (4,18) the Ψ solution is proportional to the generalized Laguerre polynomial, and we write

$$u_{l,n} = \overline{K} \varrho^{l+1} e^{-\varrho} L(n - l - 1, 2l+1 : 2\varrho). \tag{9,36}$$

At the same time the discontinuous spectrum of energy E, to which the wave function (9,36) belongs, can be found from the expression for η (9,4) and (9,35 b)

$$E_n = -\frac{m(Z_a Z_x e^2)}{2\hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2} \tag{9,37}$$

These results are applicable to determine the bound states, e. g. for hydrogen-like atoms. The generalized Laguerre polynomials being orthogonal by (7,17) and normalized by (7,19), it is easy to deduce the orthogonality of solutions $u_{l,n}$ and to find their norm.

Recurrence relations for Coulomb functions

At the end we wish to establish the recurrence relations for the Coulomb functions by making use of the recurrence relations for the confluent hypergeometric functions [5]. First, we see that all functions of interest (e. g. W_1, W_2; F_l, G_l) can be put by formulas (8,1) and (9,8) and (9,9) into the form

$$u_{l+\varepsilon} = K(l+\varepsilon, \eta)\, \varrho^{l+1+\varepsilon}\, e^{i\varrho}\, y(\nu_1^- - \varepsilon, s_1 + 2\varepsilon : -2i\varrho), \qquad \varepsilon = \pm 1, 0. \tag{9,38}$$

Thus, by establishing the recurrence relations for the confluent hypergeometric functions occurring in (9,38) with the help of Chapter II., we shall get the recurrence relations for the Coulomb functions u_l. We take (2,4) and eliminate the right hand side with (2,2). The obtained relation differentiated, we eliminate the second derivative by means of the differential equation (1) and get

$$(s-1)\, y'(\nu+1, s-2:z) + (\nu+1)\, y(\nu+1, s-2:z) + \\ + \beta(\nu+1, s-1)\, c(\nu+1, s-1)\, z\, y(\nu, s:z) = 0. \tag{9,39}$$

Here we substitute the confluent hypergeometric functions with the help of (9,38), and at the same time we specify $z = -2i\varrho$, $\frac{d}{dz} = \frac{i}{2}\frac{d}{d\varrho}$. After performing differentiations we find finally this recurrence relation for the Coulomb functions

$$-\left(\frac{l^2}{\varrho} + \eta\right) u_{l-1} + l\, u'_{l-1} - B(l, \eta)\, u_l = 0, \tag{9,40}$$

with

$$B(l, \eta) = 2\beta(\nu_1^- + 1, s_1 - 1)\, c(\nu_1^- + 1, s_1 - 1)\, \frac{K(l-1, \eta)}{K(l, \eta)}. \tag{9,41}$$

Another recurrence relation can be obtained by differentiating relation (9,40) and eliminating u''_{l-1} with the help of the Coulomb differential equation (9,3). This leads to the second recurrence formula

$$\left(\frac{\eta^2}{l} + l\right) u_{l-1} + B(l, \eta)\left[\left(\frac{l^2}{\varrho} + \eta\right)\frac{u_l}{l} + u_l'\right] = 0. \tag{9,42}$$

We get a further recurrence relation for the three consecutive Coulomb functions u_l by combining (9,40), for $(l+1)$, and (9,42) multiplied with $-l$ and $l+1$ respectively. The result is

$$\frac{l+1}{B(l,\eta)}(\eta^2+l^2)\,u_{l-1}+(2l+1)\left[\frac{l(l+1)}{\varrho}+\eta\right]u_l+ \\ +B(l+1,\eta)\,l\,u_{l+1}=0. \tag{9,43}$$

We specify the obtained relations for F_l and G_l by calculating $B(l,\eta)$ with the help of Table I., Chapter IV. (W_1 and W_2, F_l and G_l have the same c and β as Φ has), (9,7) and (9,17), i. e.

$$c(\nu,s)=-\frac{\nu}{s+1},\quad \beta(\nu,s)=-\frac{\nu+s}{s},\quad K(l,\eta)=K_1. \tag{9,44}$$

We get

$$B(l,\eta)=-\sqrt{l^2+\eta^2} \tag{9,45}$$

and the set of recurrence relations appears in the following explicit form

$$l\,u'_{l-1}-\left(\frac{l^2}{\varrho}+\eta\right)u_{l-1}+\sqrt{l^2+\eta^2}\,u_l=0, \tag{9,40 a}$$

$$\sqrt{l^2+\eta^2}\,u_{l-1}-\left(\frac{l^2}{\varrho}+\eta\right)u_l-l\,u'_l=0, \tag{9,42 a}$$

$$(l+1)\sqrt{l^2+\eta^2}\,u_{l-1}-(2l+1)\left[\frac{l(l+1)}{\varrho}+\eta\right]u_l+ \\ +l\sqrt{(l+1)^2+\eta^2}\,u_{l+1}=0. \tag{9,43 a}$$

There is a possibility to deduce further recurrence relations, dependent on the established ones, e. g. for $v=u_l+u_{l-1}$, $w=u_l-u_{l-1}$ we find by combining (9,40 a) and (9,42 a)

$$\left(\frac{l}{\varrho}-\frac{\sqrt{\eta^2+l^2}-\eta}{l}\right)v+w'=0, \tag{9,46 a}$$

$$\left(\frac{l}{\varrho}+\frac{\sqrt{\eta^2+l^2}+\eta}{l}\right)w+v'=0. \tag{9,46 b}$$

REFERENCES

[1] The procedure and results outlined in the present paper can be compared with the standard literature and references contained there:
E. T. Whittaker – G. N. Watson: A Course of Modern Analysis, Cambridge 1927;
Bateman Project (*A. Erdelyi* et al.): Higher Transcendental Functions, I, New York 1953;
H. Buchholz: Die konfluente hypergeometrische Funktion mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen, (Erg. d. ang. Math. 2) Berlin 1953;
P. M. Morse – H. Feshbach: Methods of Theoretical Physics, I, II, New York 1953;
F. G. Tricomi: Funzioni Ipergeometriche Confluenti, Roma 1954;
H. Jeffreys – B. S. Jeffreys: Methods of Mathematical Physics, Cambridge 1956;

[2] The author has applied the same method to the Hermite and Laguerre functions (Glasnik mat.-fiz. i astr. *8* (1953), 133), to the Bessel functions (Glasnik mat.-fiz. i astr. *8* (1953), 161 and *11* (1956), 143) and to the Legendre functions (including some remark on spherical harmonics) (Glasnik mat.-fiz. i astr. *10* (1955), 3). Some results regarding the confluent hypergeometric functions were presented at the International Mathematical Congress, Amsterdam 1954.

[3] Regarding polynomial solutions, the following papers can be compared:
N. J. Sonin: Math. Ann. *16* (1880), 1;
G. Palamà: Rendiconti, Istituto Lombardo, (1937) 147, 363;
G. Palamà: Boll. Unione mat. italiana, *17* (1938), 19, 90, 157; S. III, *5* (1950), 72; *8* (1953), 185;
F. Tricomi: Rend. Ac. dei Lincei, (6) *21* (1935), 232, 332, 420;
F. Tricomi: Boll. Unione mat. italiana, S. III *7* (1952), 1;

[4] The chief results contained in this Chapter will be published by the author in a paper entitled, *»On Coulomb Wave Functions«*.
Of the abundant literature on the problem of Coulomb interaction, Coulomb wave functions and their application and tabulation, we will quote only a few references (many others being in the papers cited):
E. Rutherford: Phil. Mag. *21* (1911), 669;
E. Schrödinger: Ann. d. Ph. *79* (1926), 361;
H. Faxén – J. Holtsmark: Z. f. Ph. *45* (1927), 307;
W. Gordon: Z. f. Ph. *48* (1928), 180;
N. F. Mott: Proc. Royal Soc. A *118* (1928), 542;
G. Temple: Proc. Royal Soc. A *121* (1928), 673;
W. Gordon: Ann. d. Ph. *2* (1929), 1031;
Th. Sexl: Z. f. Ph. *56* (1929), 72;
M. Stobbe: Ann. d. Ph. *7* (1930), 661;
A. Sommerfeld: Ann. d. Ph. *11* (1931), 257;
H. Yost, J. Wheeler and *G. Breit:* Phys. Rev. *49* (1936), 174;
G. Breit, E. U. Condon and *R. D. Present:* Phys. Rev. *50* (1936), 825;
G. Breit, H. M. Thaxton and *L. Eisenbud:* Phys. Rev. *55* (1939), 1018;
N. F. Mott – H. S. W. Massey: The Theory of Atomic Collisions, Oxford 1949;
J. Bloch, M. H. Hull Jr., A. A. Broyles, W. G. Bouricius, B. E. Freeman and *G. Breit:* Phys. Rev. *80* (1950), 553;
J. Jackson and *J. Blatt:* Rev. Mod. Phys. *22* (1950), 77;
J. Bloch, M. H. Hull Jr., A. A. Broyles, W. G. Bouricius, B. E. Freeman and *G. Breit,* Rev. Mod. Phys. *23* (1951), 147;
G. Breit and *M. Abramowitz:* Tables of Coulomb Wave Functions, NBS. Washington 1952;
D. R. Yennie, D. G. Ravenhall and *R. N. Wilson:* Phys. Rev. *95* (1954), 500;
C. E. Fröberg and *P. Rabinowitz:* Tables of Coulomb Wave Functions, NBS, Washington 1954;

C. E. Fröberg: Rev. Mod. Phys. 27 (1955), 399;
H. A. Bethe and *E. E. Salpeter:* Quantum Mechanics of One and Two Electron Systems, Hdb. d. Ph. XXXV (1957);
L. Hulthén – M. Sugawara: The Two-Nucleon Problem, Hdb. d. Ph. XXXIX (1957).

[5] Regarding the recurrence formulae for the Coulomb functions derived in other ways:
L. Infeld: Phys. Rev. *59* (1941), 737;
A. Preson: Phys. Rev. *71* (1947), 865;
J. L. Powell: Phys. Rev. *72* (1947), 626;
L. Infeld: Phys. Rev. *72* (1947), 1125.

Accepted on 11th May 1959 in the session of the Section for mathematical, physical and technical sciences.

ZLATKO JANKOVIĆ

O KONFLUENTNOJ HIPERGEOMETRIJSKOJ DIFERENCIJALNOJ JEDNADŽBI

SADRŽAJ

Konfluentna hipergeometrijska diferencijalna jednadžba (1) (katkad nazvana i poopćena Laguerreova diferencijalna jednadžba) zauzima vrlo važno mjesto među linearnim homogenim diferencijalnim jednadžbama drugog reda, naročito u matematičkoj i teorijskoj fizici. Diskusija te jednadžbe i njenih rješenja obično se izvodi tako, da se specijaliziraju rezultati dobiveni za hipergeometrijsku diferencijalnu jednadžbu, ili, pak, da se odrede rješenja u obliku kompleksnih integrala [1]. Svrha je ovog članka pokazati da jednim neovisnim putem, koji je u mnogom različit, općenitiji i jednostavniji od dosadašnjih, možemo postići iscrpno poznavanje osobina jednadžbe (1) i njenih rješenja. Pritom značajnu ulogu igraju rekurentne relacije, koje izlaze neposredno iz jednadžbe (1), a da se ne zahtijeva eksplicitno poznavanje rješenja [2], i mnogi zaključci izvode se pomoću tih rekurentnih relacija.

1. OPĆA I SPECIJALNA KONFLUENTNA HIPERGEOMETRIJSKA DIFERENCIJALNA JEDNADŽBA

Poznato je da diferencijalne jednadžbe oblika (1,1) imaju dva linearno nezavisna rješenja, prikazana redovima, u svim točkama z ravnine, koje su obične ili regularne singularne točke (koeficijenti p i q mogu imati u tim točkama najviše polove prvog odnosno drugog reda). Koeficijenti p i q dani su izrazima (1,4) za slučaj jednadžbe (1,1) sa tri različite regularne singularne točke u konačnosti, a sama jednadžba simbolički je napisana izrazom (1,5). Za slučaj regularne singularne točke u ishodištu, a iregularne singularne točke u beskonačnosti, koeficijenti su dani relacijama (1,6). Specijalno, kad p ima pol drugog reda u beskonačnosti, imamo koeficijente p i q dane izrazima (1,7), a sama diferencijalna jednadžba prikazana je izrazom (1,8).

Tu jednadžbu nazivamo općom konfluentnom hipergeometrijskom diferencijalnom jednadžbom, jer postanak dvostrukog pola u beskonačnosti možemo zamisliti kao granični slučaj stjecanja (konfluencije) dvaju jednostrukih polova iz konačnosti. Naziv »hipergeometrijski« dolazi odatle, što se dalje pokazuje, da hipergeometrijska diferencijalna jednadžba (1,11) odnosno (1,12), koju zadovoljava hipergeometrijski red (1,9), vodi konfluencijom polova 1 i ∞ u beskonačnosti na oblik (1,13), odnosno (1,14). Tu jednadžbu (1,14) nazivamo specijalnom konfluentnom hipergeometrijskom diferencijalnom jednadžbom i na nju se da svesti i opća konfluentna hipergeometrijska diferencijalna jednadžba (1,8). Doista, postavak (1,16) uvršten u (1,14) vodi na diferencijalnu jednadžbu (1,8) (nezavisna varijabla pisana sa x), ako su ispunjene relacije (1,17). Jednostavna pretpostavljena veza (1,18) omogućuje odrediti iz (1,17 a) funkciju f (1,19), a zatim identičko ispunjavanje relacije (1,17 b) vodi na sistem jednadžbi (1,21). Rješenja tog sistema lako odredimo u obliku (1,22) i time je dokazana veza (1,23), uz jedinu ogradu (1,22 a). Budući da relacije (1,22) prikazuju četiri različita skupa rješenja za parametre jednadžbe (1,14), izgleda kao da smo odredili i četiri različita rješenja (1,23) za jednadžbu (1,8) s određenim vrijednostima njenih parametara. Diferencijalna jednadžba (1,8) može imati samo dva linearno nezavisna rješenja i dalje će se pokazati (poglavlja III. i VIII.), na osnovu veza (1,24), koje izlaze iz (1,22), i osobina rješenja specijalne konfluentne hipergeometrijske diferencijalne jednadžbe (1,14), da su doista samo dva od četiri rješenja (1,23) linearno nezavisna. Zbog navedenog potrebno je dalje razmatrati samo jednadžbu (1,14), koju ćemo kraće nazvati konfluentna hipergeometrijska diferencijalna jednadžba.

II. REKURENTNE RELACIJE ZA KONFLUENTNE HIPERGEOMETRIJSKE FUNKCIJE

Prvu rekurentnu relaciju (2,2) lako odredimo, ako diferenciranu jednadžbu (1), tj. (2,1), usporedimo s (1). Zbrojimo li jednadžbu (1), pisanu za $\nu, s-1$, i jednadžbu (1), pomnoženu s $\beta(\nu, s)$, dobivamo relaciju (2,3). Usporedba (2,3) s jednadžbom (1) daje drugu rekurentnu relaciju (2,4). Pomoću relacije (2,2) i sama diferencijalna jednadžba (1) može se napisati u obliku rekurentne relacije (2,5). Dalje rekurentne relacije (2,6), (2,7) i (2,8) dobivaju se jednostavnim primjenama i kombinacijama prije određenih rekurentnih relacija. Da sistem rekurentnih relacija bude ekvivalentan diferencijalnoj jednadžbi (1), treba diferencijalna jednadžba (2,9), izvedena iz sistema rekurentnih relacija, biti identična s jednadžbom (1). To vodi na relaciju (2,10), koja veže koeficijente c i β, uvedene u rekurentne relacije, i koji će svojim eksplicitnim oblikom karakterizirati pojedine nizove rješenja.

III. RELACIJE IZMEĐU RJEŠENJA KONFLUENTNE HIPERGEOMETRIJSKE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE

U ovom poglavlju ispituju se veze, koje postoje među rješenjima jednadžbe (1), a da se ne zahtijeva eksplicitno poznavanje rješenja. Tako pretpostavljena veza (3,1) uvrštena u jednadžbu (1) vodi na relaciju (3,2), za čije identičko ispunjavanje moraju postojati jednadžbe (3,3). Neposredno iz (3,3 a) određujemo funkciju f (3,4), koja zatim uvrštena u (3,3 b) vodi na izraz (3,5). Relacija (3,5) je identički ispunjena sa rješenjima (3,6). Prema tome jednadžba (1) ima uz rješenje (3,7 a) i rješenje (3,7 b). Isti postupak primijenjen na postavak (3,1 a) vodi na još dva rješenja (3,9 a) i (3,9 b) jednadžbe (1). Tako smo dobili mogućnost da pomoću jednog utvrđenog rješenja odmah odredimo ukupno četiri rješenja (3,7) i (3,9) diferencijalne jednadžbe (1). No, budući da je jednadžba (1) homogena linearna diferencijalna jednadžba drugog reda i može imati samo dva linearno nezavisna rješenja, među četiri određena rješenja mogu samo dva biti linearno nezavisna. Prema tome možemo odabrati dvije linearne veze među tim rješenjima. Te veze će određivati karakter pripadnih nizova rješenja i vrlo je vjerojatno da će najjednostavnije veze voditi do najvažnijih nizova rješenja. Zbog iregularnog singulariteta u beskonačno dalekoj točki kompleksna z ravnina treba imati rez između te točke i ishodišta. Rez odabiremo duž negativne realne osi i tada je veza između z_1 i $z_2 = -z_1$ dana relacijom (3,10).

Definiramo ove najjednostavnije veze:

a) Za Ψ rješenje postoji (3,11 a) s posljedicom (3,11 b), prema (3,7) i (3,9). Eksplicitno napisano, za dva linearno nezavisna rješenja u ovom slučaju vrijede relacije (3,12 a) i (3,12 b).

b) Za Φ rješenje postoji (3,13 a) s posljedicom (3,13 b), prema (3,7) i (3,9). Eksplicitno napisano, za dva linearno nezavisna rješenja u ovom slučaju vrijede relacije (3,14 a) i (3,14 b).

c) Za Π rješenje postoji (3,15 a) s posljedicom (3,15 b), prema (3,7) i (3,9). Eksplicitno napisano, za dva linearno nezavisna rješenja u ovom slučaju vrijede relacije (3,16 a) i (3,16 b).

Na osnovu veza, kojima pojedine grupe rješenja zadovoljavaju, i samih rekurentnih relacija može se pokazati, da koeficijenti α i β moraju zadovoljavati dalje uvjete. Tako u slučaju a) nalazimo iz relacija (2,2) i (3,12 a) vezu (3,17). Usporedba ove relacije s onom, koju izvodimo iz (2,6) i (2,5), vodi na vezu (3,18) u slučaju Ψ rješenja, a na vezu (3,19) u slučaju Θ rješenja. U slučaju b) relacije (2,2) i (3,14), usporedivši rezultat s (2,4), daju vezu (3,20). U slučaju c) relacije (2,2) i (3,16), usporedivši rezultat s (2,4), daju vezu (3,21). Da su tako definirana rješenja jedinstvena (bez obzira na multiplikativnu konstantu), ovako pokazujemo: kad bismo imali dva linearno nezavisna rješenja, koja

zadovoljavaju iste relacije, tada bi i njihova superpozicija, dakle i svako rješenje jednadžbe (1) zadovoljavalo iste relacije. Budući da u grupama a), b) i c) imamo rješenja, koja ne zadovoljavaju iste relacije, početna pretpostavka nije ispravna i određena rješenja su jedinstvena.

IV. OSNOVNA RJEŠENJA

Specijalizacijom rješenja (1,9) hipergeometrijske diferencijalne jednadžbe (1,11) već smo u poglavlju I. vidjeli da se jedno rješenje jednadžbe (1) može napisati u obliku reda (1,15). Pretpostavimo sada razvoj (4,1), koji uvršten u (1) daje izraz (4,2) s rješenjima indicijalne jednadžbe (4,3). Na osnovu identičkog iščezavanja (4,2) dobiju se pripadni nizovi koeficijenata a_i. Dva linearno nezavisna rješenja u obliku redova sa $a_0 = 1$ predočena su relacijama (4,4), od kojih se (4,4 a) podudara s (1,15). Na osnovu grade tih rješenja vidimo da imaju osobinu (3,14 a), odnosno (3,14 b), tj. da smo upravo odredili rješenja Φ i X grupe b). U slučaju cjelobrojnih pozitivnih odnosno negativnih vrijednosti parametra s, rješenje (4,4 b), odnosno (4,4 a), imaju jednostruke polove za te vrijednosti s. Dijeljenje s $\Gamma(1-s)$ odnosno s $\Gamma(1+s)$ uklanja polove i rješenja definirana s (4,7) odnosno (4,5) su upotrebljiva. Kao što laki račun pokazuje, u tom slučaju rješenja postaju linearno zavisna, što izražavaju relacije (4,8) odnosno (4,6). Prema tome opće rješenje konfluentne hipergeometrijske diferencijalne jednadžbe (1) može se pisati u obliku superpozicije rješenja Φ i X, osim za slučaj cjelobrojnih vrijednosti parametra s. U ovom specijalnom slučaju rješenja su linearno zavisna, a cjelobrojna razlika korijena indicijalne jednadžbe (4,3) ukazuje na to, da u X rješenju treba, na osnovu opće teorije, doći logaritamski član. Mi ćemo tu teškoću zaobići tako, da promatramo rješenja grupe a), tj. Ψ i Θ rješenje.

Transformacijom $z = 1/t$ dolazimo do oblika (4,9) jednadžbe (1). Pretpostavimo razvoj rješenja u red, analogno (4,1), pa dolazimo iz (4,9) do relacije (4,10), koja treba biti identički ispunjena. Indicijalna jednadžba ima samo jedan korijen (4,11) i dolazimo do jednog rješenja (4,12) ($a_0 = 1$). Rješenje (4,12) zadovoljava relaciju (3,12 a), pa je prema tome ono upravo Ψ rješenje. Zatim, na osnovu (4,12) i definicije (3,12 b), pišemo Θ rješenje (4,13), koje zajedno sa Ψ rješenjem čini grupu a). Redovi (4,12) i (4,13) nemaju s obzirom na parametre s i ν singulariteta i opće rješenje jednadžbe (1) može se uvijek prikazati njihovom superpozicijom.

Zbog njihove važnosti nazivamo rješenja Φ, X, Ψ i Θ osnovnim rješenjima konfluentne hipergeometrijske diferencijalne jednadžbe.

Iz dobivenih oblika rješenja možemo odmah utvrditi:

a) (4,4 a): Φ rješenje za $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ postaje polinom (4,14) (jednak ili proporcionalan, već prema definiciji, poopćenom Laguerreovom ili

Soninovom polinomu); za $-\nu = s + 1$, Φ rješenje je eksponencijalna funkcija (4,15).

b) (4,4 b): X rješenje poprima za $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ oblik (4,16), a za $\nu = -1$ oblik (4,17).

c) (4,12): Ψ rješenje za $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ proporcionalno je polinomijalnom rješenju Φ, što pokazuju relacije (4,18), (4,19), a za $\nu + s = 0, 1, 2, \ldots$ predstavlja sumu konačnog broja članova (4,20), (4,21).

d) (4,13): Θ rješenje za $\nu = -n - 1$ poprima oblik (4,22), (4,23), a za $\nu + s = -(m + 1)$ oblik (4,24).

Na kraju ovog poglavlja određeni su koeficijenti c i β za svako osnovno rješenje tako, da su pripadni njihovi izrazi uvršteni u rekurentne relacije (2,2) i (2,4). Dobiveni rezultati prikazani su u Tabeli I. Pomoću koeficijenata c i β mogu se sada eksplicitno napisati sve rekurentne relacije izvedene u poglavlju II.

V. VEZE MEĐU OSNOVNIM RJEŠENJIMA

Diferencijalna jednadžba (1) je linearna homogena diferencijalna jednadžba drugog reda, koja može imati samo dva linearno nezavisna rješenja. Prema tome svako rješenje iz jedne grupe (a), (b), (c) (poglavlje III.) mora se dati izraziti linearnom kombinacijom dvaju rješenja iz drugih dviju grupa. Na primjeru veze (5,1) pokazujemo, kako se to može jednostavno izvesti. Koeficijenti a i b općenito će zavisiti o parametrima ν i s, kao i o tome, da li je $Im\, z \gtrless 0$, tj. o veličini ε. Za rješenja Φ i X pretpostavljamo samo, da imaju osobine rješenja grupe b) i vrijednosti koeficijenata c i β danih u Tabeli I. Za Ψ rješenje pretpostavljamo samo osobinu (3,12 a) i rekurentne relacije (2,2) i (2,4). Ne pretpostavljamo eksplicitno poznavanje ni jednog od navedenih rješenja. Veza (5,1) uvrštena u relaciju (3,12 a) daje odmah relacije (5,2) među koeficijentima, a iz rekurentnih relacija (2,2) i (2,4) izlaze nadalje veze (5,3), (5,4) i (5,5), od kojih su (5,4 b) i (5,5 b) identične s (5,3). Iz postignutih relacija možemo doći do relacije (5,6), koja na osnovu postavka (5,7) vodi na izraz (5,8). Neposredno vidimo da izbor funkcija (5,9) identički ispunjava relaciju (5,8). Prema tome koeficijent b je određen izrazom (5,10), a pripadni koeficijent a izrazom (5,11). Na osnovu tih vrijednosti određujemo iz relacija među koeficijentima koeficijente c i β za rješenje Ψ, (5,12). Koeficijenti a i b uvršteni u pretpostavljenu vezu (5,1) daju njen eksplicitni oblik (5,13). Vezu rješenja Θ s rješenjima Φ i X, (5,14), možemo izvesti na analogan način, ili, pak, da iskoristimo relacije (5,13), (5,12 b), (3,14 a) i (3,14 b).

Veze rješenja Φ i X sa Ψ i Θ mogli bismo dobiti iz relacija (5,13) i (5,14). Da jasno ukažemo na važnost parametra ε, izvodimo ih eksplicitno. Polazimo od postavka (5,15). Za rješenja Ψ i Θ pretpostavljamo

samo da imaju osobine rješenja grupe b) i vrijednosti koeficijenata c i β danih u Tabeli I. Za Φ rješenje pretpostavljamo samo osobinu (3,14 a) i rekurentne relacije (2,2) i (2,4). Ne pretpostavljamo eksplicitno poznavanje ni jednog od navedenih rješenja. Uvrštavanjem postavka (5,15) u relacije (3,14 a), (2,2) i (2,4) dolazimo do veza (5,16), (5,17), (5,18) i (5,19) među koeficijentima. Pritom su (5,18 b) i (5,19 b) identični s (5,17). Na analogan način kao prije određujemo koeficijente b (5,20), a (5,21), c i β (5,22). Izbor predznaka u izrazima (5,20) i (5,21) određujemo tako, da izraz (5,13) i (5,14) uvrstimo u formulu (5,15), koja s (5,20) i (5,21) mora postati identitet. Na taj način dolazimo do određenja (5,23), a time i do konačnog oblika (5,24) za vezu (5,15). Vezu rješenja X (5,25) odredimo analognim razmatranjem, ili, pak, pomoću relacija (5,24), (3,14 b), (3,12 a) i (3,12 b). Rezultati (5,26) — (5,35) dobivaju se analognim postupkom.

VI. VEZE MEĐU NEKIM INTEGRALIMA I KONFLUENTNIM HIPERGEOMETRIJSKIM FUNKCIJAMA

Pomoću konfluentnih hipergeometrijskih funkcija možemo izraziti neke funkcije definirane integralima. Polazimo od pretpostavke (6,1), gdje y zadovoljava jednadžbu (1), a f i F predstavljaju nepoznate funkcije. Među varijablama postoji veza (6,2), a donja granica integrala u (6,1) mora zadovoljavati (6,3). Uvrštavanjem veze (6,1) u konfluentnu hipergeometrijsku diferencijalnu jednadžbu (1) vidimo da je ona ispunjena, ako postoji (6,4 a) i (6,4 b). Odmah je vidljivo da f mora biti rješenje konfluentne hipergeometrijske diferencijalne jednadžbe (6,4 a), a funkcija F izlazi kao rješenje linearne homogene diferencijalne jednadžbe (6,4 b) uz određeno f i transformaciju (6,2). Pretpostavljamo najjednostavnije konfluentne hipergeometrijske funkcije (6,5 a) i (6,5 b) i tada jednadžba (6,4 b) poprima oblik (6,6 a) i (6,6 b). Preostaje još sloboda izbora transformacije (6,2) i za najjednostavnije slučajeve rezultati su sadržani u Tabeli II. Moramo još odrediti donju granicu integracije, a i tip konfluentne hipergeometrijske funkcije y tako, da zahtjev (6,3) bude ispunjen. Na kraju određujemo konstantu, koja se pojavljuje kao posljedica integracije diferencijalnih jednadžbi (6,4 a) i (6,6) na desnoj strani (6,1). Parametri s i ν, povezani relacijama (6,5 a) odnosno (6,5 b), moraju biti takvi, da su integrali s granicom a konvergentni. Na osnovu poznavanja konfluentnih hipergeometrijskih funkcija Φ (4,4 a) i Ψ (4,12) i funkcije f za slučaj A) i B) možemo odrediti: granicu a, tip konfluentne funkcije y i konstantu proporcionalnosti pomoću prvih članova razvoja u red obiju strana. Rezultati su skupljeni u Tabeli III. Iz relacija (6,8 a A) i (6,8 b A) možemo izvesti još i veze (6,11 a) i (6,11 b), a iz (6,8 a, B) i (6,8 b, B) veze (6,12 a) i (6,12 b).

Neki integrali, sadržani u Tabeli III., poznati su pod drugim oznakama i imenima: tako komplementarna gama funkcija (6,13), nepotpuna gama funkcija (6,14 a), modificirana gama funkcija (6,14 b) kao i (6,15). Specijalni slučajevi nekih integrala također su poznati pod drugim imenima i oznakama: (6,16), (6,17), (6,18), koje veže (6,19): nadalje (6,20), (6,21), koje veže (6,22) i na kraju integral funkcije (6,23), (6,24), (6,25) i (6,26).

Tako smo na vrlo jednostavan način izveli zanimljive veze među nekim specijalnim funkcijama, prikazanim s integralima, i određenim hipergeometrijskim funkcijama tipa Ψ i Φ za vrijednosti parametara (6,5). Razmatranja bi se mogla proširiti na druga jednostavna rješenja (npr. polinomijalna) za f, kao i na inverzni problem – ispitati mogućnost, kada se integral (6,1) s poznatom funkcijom F da povezati s konfluentnom hipergeometrijskom funkcijom y.

VII. RJEŠENJA ZA CJELOBROJNE VRIJEDNOSTI PARAMETRA ν: PRIDRUŽENE I OBIČNE LAGUERREOVE FUNKCIJE

Djelomično smo taj slučaj obradili u poglavlju IV., no sada ćemo ga razmotriti na još jednostavniji način i neovisno o eksplicitnom obliku osnovnih rješenja. Polazimo od rješenja za $\nu = 0, -1$ i primjenom rekurentnih relacija indukcijom dolazimo do eksplicitnog oblika rješenja. Rješenja (7,1) i (7,2) za $\nu = 0, -1$ lako odredimo neposredno iz diferencijalne jednadžbe (1). Granice integrala a i b treba odabrati tako, da su integrali konvergentni. Koeficijent β određujemo primjenom rekurentnih relacija (2,2) i (2,4) za y rješenja (7,1 a) i (7,2 a) i dobivamo izraze (7,3 a). Za $\bar{y}$ rješenja analogno dolazimo do (7,3 b) i prema tome do postavka (7,4 a) i (7,4 b). Na osnovu uvjeta (2,10) u oba slučaja vidimo da c koeficijent zadovoljava (7,5) odnosno (7,6). Uvrštavanjem postignutih rezultata za koeficijente β i c u rekurentne relacije poglavlja II., dolazimo do eksplicitnih oblika rekurentnih relacija za oba slučaja (7,7) — (7,11). Primjenom redefinicije funkcije $\bar{y}$ (7,12) mogu se oba sistema identificirati.

Slučaj $n > 0$

a) Rješenje y. Uzastopnom primjenom rekurentne relacije (7,9 a) nalazimo za $n = 0, 1, 2$ izraze (7,13) sa značenjem K u (7,14). Oblik ovih rješenja navodi na postavak (7,15), koji se lako, pomoću relacije (7,9 a), dokaže indukcijom. (7,15) predstavlja u biti poopćene Laguerreove, odnosno Soninove, polinome. Izraz (7,15) možemo jednostavnim računom

transformirati na oblik (7,16). Ortonormiranost polinomijalnih rješenja y možemo izvesti i bez poznavanja njihova eksplicitnog oblika. Iz diferencijalne jednadžbe (1), pisane za $\nu = n, m$, odmah nalazimo da postoji relacija (7,17) s težinskom funkcijom $e^{-x}x^s$. Time je pokazana ortogonalnost. Pomnoživši jednadžbu (1) sa $e^{-x}x^s y(n, s : x)$ neposredno nalazimo (7,18), koja uzastopnom primjenom vodi na normu (7,19).

Najjednostavniji izbor oblika koeficijenta c dan je relacijom (7,20) i vodi na tzv. originalne poopćene Laguerreove polinome. Za njih možemo izvesti funkciju izvodnicu (7,21) u obliku (7,22), tako da uvrstimo (7,15).

β) Rješenje $\bar{y}$. Na analogni način primjenom rekurentne relacije (7,9 b) za $n = 0, 1, 2$ nalazimo rješenja (7,23), koja vode na opći oblik (7,24), odnosno u eksplicitnom obliku (7,25).

Slučaj $n < 0$

I u slučaju y i $\bar{y}$ rješenja neposredna primjena relacija (7,7) i (7,2) vodi na oblik rješenja (7,26) i (7,28) sa značenjem konstante (7,27).

Pridružene i obične Laguerreove funkcije

U diferencijalnoj jednadžbi (1) pretpostavimo vezu parametara $\nu = \mu - s$ i obilježimo rješenja za taj slučaj kao u (7,29). Odaberemo li koeficijente c kao u (7,30), tada prema (2,10) izlazi ovisnost (7,31) koeficijenta β. S ovim oznakama i vrijednostima sistem rekurentnih relacija poglavlja II. pišemo kao relacije (7,7 c) — (7,11 c), dok je sama diferencijalna jednadžba dana s (7,32). Specijalno, za $s = k$ (pozitivni cijeli broj), (7,7 c) pokazuje da postoji odnos (7,33) i da se u ovom slučaju pridružena Laguerreova funkcija dobiva k-strukom derivacijom obične Laguerreove funkcije. Za obične Laguerreove funkcije ($s = 0$) diferencijalna jednadžba (7,34) izlazi iz (1) za $s = 0$. Do sistema rekurentnih formula za njih možemo doći iz sistema (c) ovog poglavlja, odnosno iz poglavlja II., tako da povežemo funkcije s istim s, koji zatim izjednačimo s nulom. Rezultati su dani sa (7,35 a, b, c). Obrnuto iz sistema (7,35) možemo lako izvesti sistem (c) za $s = k$. Naravno, diskusija pridruženih i običnih Laguerreovih funkcija može se provesti neposredno iz (7,34), kao što je bilo opisano na drugom mjestu [2].

VIII. BESSELOVE, WHITTAKEROVE I FUNKCIJE PARABOLIČKOG VALJKA

U poglavlju I. pokazano je, kako se opća konfluentna hipergeometrijska diferencijalna jednadžba (1,8) može identificirati sa specijalnom konfluentnom hipergeometrijskom diferencijalnom jednadžbom (1), ili (1,14). Veze među parametrima i nezavisnim varijablama bile su dane sa (1,22). Naišli smo na četiri rješenja (1,23), što je prividno u suprotnosti da linearna homogena diferencijalna jednadžba drugog reda ima dva linearno nezavisna rješenja. Sada smo u stanju razjasniti tu okolnost na osnovu veze među parametrima (1,24) i postojanja grupa rješenja (a), (b) i (c) definiranih u poglavlju III. Eksplicitni oblik četiriju rješenja (1,23) dan je izrazima (8,1), a veze među parametrima izrazima (8,2). Na osnovu relacija (8,1) i (8,2) i poglavlja III. vidimo da postoji linearna zavisnost izražena sa: a) (8,3), b) (8,4) i c) (8,5). Utvrdili smo, dakle, da su samo dva rješenja sistema (8,1) linearno nezavisna, dok su ostala dva rješenja linearno zavisna. Rezultate ćemo primijeniti na: A) Besselove funkcije, B) Whittakerove funkcije, C) Funkcije paraboličkog valjka i u zasebnom poglavlju na Coulombove funkcije. Te funkcije odabrane su zbog svoje važnosti, naročito u primjenama. Isti postupak može se primijeniti i na mnoge druge slučajeve.

A) Besselove funkcije

Besselova diferencijalna jednadžba (8,6) identificira se najprije sa općom konfluentnom hipergeometrijskom diferencijalnom jednadžbom (1,8) pomoću (8,7), a zatim sa specijalnom konfluentnom hipergeometrijskom diferencijalnom jednadžbom (1), zbog (1,22), pomoću (8,8). Sada možemo napisati grupe rješenja: a) rješenja (8,3) poprimaju oblik (8,9) i prikladnim izborom konstante ta rješenja su upravo Hankelove funkcije; b) rješenja (8,4) poprimaju oblik (8,10) i prikladnim izborom konstante mogu se napisati u zajedničkom obliku Besselovih funkcija prve vrste $J_\mu(x)$ (8,11), odnosno s imaginarnim argumentom $I_\mu(x)$ (8,12). Oblici (8,13 a, b) predstavljaju rješenja (8,5) grupe c).

B) Whittakerove funkcije

Whittakerova diferencijalna jednadžba (8,14) najprije se identificira s općom konfluentnom hipergeometrijskom diferencijalnom jednadžbom (1,8) pomoću (8,15), a zatim sa specijalnom hipergeometrijskom diferencijalnom jednadžbom (1), zbog (1,22), pomoću (8,16). Sada možemo napisati grupe rješenja: a) rješenja (8,3) poprimaju oblik (8,17) i podudaraju se s Whittakerovom funkcijom W (8,18); b) rješenja (8,4) poprimaju oblik (8,19) i podudaraju se s Whittakerovom funkcijom M (8,20). Oblici (8,21 a, b) prikazuju rješenja (8,5) grupe c).

C) Funkcije paraboličkog valjka

Weberova diferencijalna jednadžba (8,22) mora biti najprije prevedena na oblik opće konfluentne hipergeometrijske diferencijalne jednadžbe (1,8), a zatim identificirana sa specijalnom konfluentnom hipergeometrijskom diferencijalnom jednadžbom (1). Svaka diferencijalna jednadžba tipa (1,1) može biti transformirana u diferencijalnu jednadžbu analogne strukture transformacijama (8,23), koje vode na vezu (8,24) starih i novih koeficijenata p i q. Za prijelaz jednadžbe (1,8) (x pisano namjesto z) u (8,22) mora, dakle, postojati (8,25). Postavak (8,26) uvršten u jednadžbe (8,25) vodi na određenja (8,27) i (8,28). Transformirana Weberova diferencijalna jednadžba stoga poprima oblik (8,29) i dalja identifikacija s (1), pomoću (1,22), daje (8,30). Budući da raspolažemo s konstantom K, izbor (8,31) vodi na jednostavnije veze (8,32). Sada možemo napisati grupe rješenja: a) rješenja (8,3) poprimaju oblik (8,33), koji s prikladnim izborom konstanata, prelazi u uobičajeni oblik funkcija paraboličkog valjka (8,34). Relacije (8,33) i (8,34) vode na (8,35), odakle vidimo da su samo dvije od tih funkcija linearno nezavisne. Rješenja (8,4) i (8,5) prikazana su u (8,36) i (8,37).

IX. COULOMBOVE FUNKCIJE

Coulombove funkcije obrađujemo iscrpno u zasebnom poglavlju zbog njihove naročite važnosti u modernoj fizici, a i zbog toga što ne postoji jednostavan i potpun njihov prikaz [4].

Poznato je da se Schrödingerova valna jednadžba (9,1) sa sferno simetričnim potencijalom $V(r)$ može separirati u polarnim koordinatama. Kugline funkcije su rješenja angularnog dijela, a za radijalnu diferencijalnu jednadžbu nalazimo oblik (9,2). Specijalno za Coulombovo međudjelovanje čestica a i X, uz oznake (9,4), jednadžba (9,2) poprima oblik (9,3) (C. M. sistem). Iz samog oblika jednadžbe (9,3) vidimo da se slučaj $\varepsilon = +1$ ($E > 0$) transformira pomoću (9,5) u slučaj $\varepsilon = -1$ ($E < 0$, $\eta < 0$). Potrebno je stoga pobliže razmotriti slučaj $\varepsilon = +1$ i postignute rezultate samo transformirati na slučaj $\varepsilon = -1$.

Slučaj $\varepsilon = +1$

Usporedbom jednadžbi (9,3) i (1,8) odredimo vezu (9,6), a zatim provedemo identifikaciju s jednadžbom (1), pomoću (1,22), na način (9,7). Budući da su za vrijednosti parametara ispunjene relacije (8,2), možemo primijeniti rezultate ispitivanja poglavlja VIII. i odmah napisati tri grupe rješenja: a) (9,8), b) (9,9) i c) (9,10).

Iz same Coulombove diferencijalne jednadžbe (9,3) lako odredimo ponašanje linearno nezavisnih rješenja u okolici ishodišta ($\sim \varrho^{l+1}$, $\sim \varrho^{-l}$) i u okolici beskonačno daleke točke ($\sim \exp[\pm i\varrho]$). U valnoj mehanici od interesa su samo konačna rješenja u dijelu prostora, koji sistem ima na raspolaganju, budući da je gustoća vjerojatnosti prisustva proporcionalna apsolutnom kvadratu valne funkcije. Naša diskusija bit će provedena s tog gledišta, a zadržat ćemo se na rješenjima grupa a) i b), budući da grupa c) nije eksplicitno primijenjena u valnoj mehanici.

Ponašanje rješenja (9,8 a) i (9,8 b) u beskonačnosti možemo odrediti tako, da u razvoju (4,12) uzmemo samo najviši član. Dobivamo tako granične oblike (9,11). Izborom konstanata mogli bismo postići jednakost među prvim i trećim članom tih relacija, a također odrediti značenje od σ_l. Dalje oblike rješenja mogli bismo izgraditi superpozicijom rješenja (9,8 a) i (9,8 b) npr. ona rješenja, koja se u beskonačnosti ponašaju kao sinus i cosinus argumenta u (9,11). Na osnovu relacija (5,13) očekujemo naprotiv iregularno ponašanje rješenja (9,8 a) i (9,8 b) u ishodištu. Nije baš lako neposredno odrediti koeficijente superpozicije, koja bi imala regularno ponašanje u ishodištu. Međutim, budući da je rješenje (9,8 b), zbog (3,12 b), proporcionalno sa $\varrho^{l+1} e^{-i\varrho} \Theta(i\varrho - l - 1, 2l+1; 2i\varrho)$, mogli bismo primijeniti superpoziciju (5,15), tj. (5,24), da dobijemo rješenje, koje je regularno u ishodištu. Budući da je ta superpozicija upravo rješenje (9,9 a) grupe rješenja b), razmotrit ćemo tu grupu pobliže.

Ponajprije vidimo da rješenje (9,9 b) u tom obliku nije upotrebljivo (beskonačno veliko), budući da je s negativni cijeli broj. Ako, pak, primijenimo (4,5), tada zbog (4,6), redefinirano rješenje (9,9 b) postaje linearno zavisno o rješenju (9,9 a). Uz te okolnosti u grupi b) imamo, dakle, samo jedno rješenje (9,9 a), koje zbog (5,24) možemo napisati u obliku (9,12). Pomoću (3,12 b) vidimo da (9,12) predstavlja superpoziciju rješenja (9,8 a) i (9,8 b), koja je regularna u ishodištu, a u isto vrijeme omogućuje da jednoznačno odredimo σ_l, koji dolazi u (9,11). Budući da je (9,12) superpozicija dobivena zbrojem rješenja (9,8 a) i (9,8 b) (množenih s prikladnim konstantama), jasno je da će i razlika predstavljati drugo, linearno nezavisno, rješenje Coulombove diferencijalne jednadžbe. Označimo li dijelove u (9,12) kao u (9,13 a, b), tada rješenja poprimaju oblik (9,14 a, b). Asimptotsko ponašanje tih rješenja nalazimo uvrštavanjem redova (4,13) i (4,12) u izraze (9,13 a, b). Lakim računom odredimo granične oblike (9,15 a, b) sa značenjem Coulombove faze (9,16). Ponašanje (9,19) u okolišu ishodišta odredimo neposredno za rješenja (9,9 a). Za drugo rješenje odgovor daje Wronskian (9,20), gdje je vrijednost desne strane određena pomoću (9,18 a, b). Tako nalazimo (9,21). Rješenja (9,11 a, b) kao i (9,15 a, b) predstavljaju u beskonačnosti ulazne i izlazne sferne valove, dok rješenja (9,14 a, b) predstavljaju stojne valove. Određenje konstante (9,17) znači normiranje Cou-

lombovih valnih funkcija u beskonačnosti na tok jedinične gustoće (u slučaju normiranja na jedinični tok došao bi još faktor $v^{-1/2}$ u K_1). Imena regularna (Fl) i iregularna (Gl) funkcija potječu od njihova ponašanja u ishodištu.

Upadni ravni val (9,22) je rješenje Schrödingerove valne jednadžbe (9,1) u slučaju bez potencijala. Želimo odrediti distorziju ravnog vala (9,22), koju izaziva Coulombov potencijal. Budući da je taj potencijal sferno simetričan, distorzija će biti z-aksijalno simetrična, tj. nezavisna o φ, a zavisna o r i ϑ, dakle o r i z. Pokušajmo s predpostavkom rješenja u obliku (9,23), gdje je argument funkcije F predpostavljen na osnovu odgovarajućeg klasičnog problema. Uvrštavanjem izraza (9,23) u diferencijalnu jednadžbu (9,1) dolazimo do diferencijalne jednadžbe (9,24) (nezavisna varijabla ζ) za funkciju F. To je upravo specijalna konfluentna hipergeometrijska diferencijalna jednadžba (1) za vrijednosti parametara $s=0$, $\nu=i\eta$ (dakle obična Laguerreova diferencijalna jednadžba). Njeno regularno rješenje dano je sa (9,25). Na osnovu (5,24) možemo (9,23) sada napisati u obliku (9,26). Asimptotski oblik (9,27) dobijemo primjenom (4,12) i (4,13). Odaberemo vrijednost konstante C (9,28) (što znači normiranje na upadni tok jedinične gustoće u beskonačnosti), pa pišemo (9,27) kao superpoziciju upadnog (9,29) i Coulombova raspršenog sfernog vala (9,30) s amplitudom (9,31).

Budući da je Schrödingerova diferencijalna jednadžba za Coulombov slučaj riješena tako na dva načina (u paraboličkim koordinatama (9,23) i prije u prostornim polarnim koordinatama), mora se rješenje (9,23) dati prikazati kao superpozicija (9,32) regularnih rješenja u polarnom prostornom koordinatnom sistemu. Koeficijente a_l određujemo na osnovu ovog plauzibilnog argumenta (da ne provodimo dosta dugačku pretvorbu): razvijemo ravni val u lijevoj strani u polarnom koordinatnom sistemu, zatim stavimo $r = z$, tj. $\vartheta = 0$, i konačno usporedimo vodeće članove za svaki l na desnoj i lijevoj strani. To daje s konstantama (9,17) i (9,28) rezultat (9,33).

Na osnovu ovih razmatranja možemo dobiti razvoje za valne funkcije ψ_i, ψ_c, $\psi_{c,sc}$, $\psi_{n,sc}$ i ψ i iz njihova oblika odrediti na uobičajeni način sve udarne presjeke od interesa. Postupak je prikazan na jednom drugom mjestu [4].

Slučaj $\varepsilon = -1$

Ako načinimo transformaciju (9,5), vidimo neposredno iz (9,8) i (9,9) da u beskonačnosti ostaju ograđena ova rješenja: (9,8 b) s gornjim predznakom, (9,8 a) i (9,9 a) s donjim predznakom. Budući da nema razlike u njihovu ponašanju u beskonačnosti, razmatrajmo rješenje (9,34). Zahtjev, da to rješenje bude regularno u ishodištu, vodi na zaključak da Ψ nužno mora biti polinom. To na osnovu (4,18) vodi na rezultat (9,35 a), odnosno (9,35 b). Prema tome radijalna valna funkcija ima oblik (9,36),

gdje je L poopćeni Laguerreov polinom. Diskontinuiran energetski spektar za to rješenje nalazimo iz (9,4) i (9,35 b) u obliku (9,37). Budući da su Laguerreovi polinomi ortogonalni (7,17) i mogu se normirati (7,19), to se iste osobine mogu izvesti i za rješenje (9,36).

Rekurentne relacije za Coulombove funkcije

Na kraju izvest ćemo rekurentne relacije za Coulombove funkcije na osnovu rekurentnih relacija za konfluentne hipergeometrijske funkcije. Sve funkcije od interesa $u_{l,1,2}$; W_1, W_2; F_l, G_l) daju se napisati u obliku (9,38). Prema tome moramo izvesti rekurentne relacije za takve konfluentne hipergeometrijske funkcije. Iz relacija (2,2) i (2,4) i diferencijalne jednadžbe (1) dobivamo rekurentnu relaciju oblika (9,39), koja uvrštavanjem Coulombovih funkcija pomoću (9,38), prelazi u rekurentnu relaciju (9,40) za Coulombove funkcije, sa značenjem simbola (9,41). Drugu rekurentnu relaciju (9,42) dobivamo tako, da (9,40) diferenciramo i upotrebimo Coulombovu diferencijalnu jednadžbu (9,3). Iz (9,40) i (9,42) kombinacijom lako odredimo dalju rekurentnu relaciju (9,43). Budući da na osnovu definicije (9,12) i (9,13) imaju W_1 i W_2 (F_l i G_l) iste koeficijente c i β, kao i Φ rješenje, to za sva rješenja od interesa možemo koeficijent (9,41), na osnovu vrijednosti (9,17) i (9,44) (iz Tabele I), izraziti u obliku (9,45). Sada i izvedene rekurentne relacije poprimaju određenije oblike (9,40 a), (9,42 a) i (9,43 a). Iz postignutih rekurentnih relacija možemo izvesti i čitav niz daljih: dva primjera su dana rekurentnim relacijama (9,46 a) i (9,46 b).

Primljeno na sjednici Odjela za matematičke, fizičke i tehničke nauke dne 11. V. 1959.

SVETOZAR KUREPA

ON REPRESENTATIONS OF THE COMMUTATION AND ANTICOMMUTATION RULES OF THE QUANTUM THEORY OF FIELDS

INTRODUCTION

§ 1. In elementary Quantum Mechanics the operators q and p, which represent the coordinate and the momentum of a particle, have to satisfy the Heisenberg commutation rule, viz.:

$$qp - pq = i \tag{1}$$

(we are dealing with such units that $h/2\pi = 1$, where h is Planck's constant). According to the principles of Quantum Mechanics [4] q and p are selfadjoint operators,[1] which are defined and have ranges in some Hilbert space. From the physical point of view we except that operators q and p are in a certain sense unique. If U is any unitary operator, then the selfadjoint operators

$$P = U^* p U \quad \text{and} \quad Q = U^* q U$$

satisfy the same commutation rule. On the other hand, in physics we are only interested in quantities of the form:

$$(x, y)^2$$

where $x,\ y \in R$ and (x, y) denote the scalar product of x and y. Since a unitary operator U does not change the scalar product, we can conclude that the system of operators q and p represents the same physical situation as the system of operators Q and P. Mathematically speaking, the system Q, P is unitarily equivalent to the system q, p. On the other hand, if we are given two (irreducible) systems of selfadjoint operators q_1, p_1 and q_2, p_2, so that:

$$q_1 p_1 - p_1 q_1 = i \quad \text{and} \quad q_2 p_2 - p_2 q_2 = i$$

[1] An operator A which is linear and defined in a Hilbert space R is called selfadjoint if $A^* = A$ (see [7] p. 50). The term »Hermitian operator« in usually used in physics instead of the term »selfadjoint operator«.

then it is not clear at all whether there is a unitary operator U, such that

$$q_2 = U^* q_1 U \quad \text{and} \quad p_2 = U^* p_1 U.$$

If such an operator U did not exist, then the physical situation, which is described by one of these systems, is not identical with the physical situation described by the other system.

Furthermore, it is easily seen that operators q and p are unbounded. Indeed, let us suppose that they are bounded, i. e. that $\|q\| < \infty$ and $\|p\| < \infty$ (here $\|A\| = \sup \|Ax\|$, $\|x\| \leqq 1$ *denotes the norm of* A). Then we can easily find:

$$q^n p - p q^n = i n q^{n-1}$$

for every natural number n. This implies:

$$n \|q^{n-1}\| \leqq 2 \|q^n\| \|p\|.$$

But for every selfadjoint operator A we have $\|A^n\| = \|A\|^n$. Thus:

$$n \|q\|^{n-1} \leqq 2 \|q\|^n \cdot \|p\|$$

or

$$n \leqq 2 \|q\| \cdot \|p\|$$

for every natural number n. Since this is impossible, we conclude that at least one of the operators q, p is unbounded. This conclusion implies some mathematical difficulties, namely, on the right side of (1) we have a bounded operator, on the left side an unbounded operator. Thus, (1) is to be carefully defined. After this definition has been made, the discussion above shows that the following mathematical problem is to be solved:

Find all pairs of the selfadjoint operators q and p so that $qp - pq = i$.

This problem was completely solved by F. Relich [6].[2] Restricting the domains of operators q and p, i. e. making it clear what one really means by (1), he proved the essential uniqueness of the selfadjoint operators q and p. He also proved that there is one and essentially only one irreducible representation of the commutation rule (1). An alternative approach to the investigation of the commutation rule (1) was proposed by H. Weyl ([8], [9] p. p. 272–280). He passed from the unbounded operators q and p to the families of one parameter groups of unitary operators. If one introduces the function $f(\lambda)$ of a real variable λ by the formula:

$$f(\lambda) = e^{i\lambda\alpha q} e^{i\lambda\beta p} e^{-i\lambda\alpha q} e^{-i\lambda\beta p} \tag{2}$$

where α and β are real numbers, and if one sets:

$$e^A = 1 + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots$$

[2] The same proof was independently rediscovered by the author in 1954 during his stay with the CERN theoretical group in Copenhagen. The author is obliged to P. Kristensen for drawing his attention to F. Relich's paper.

where A is one of operators $\lambda\alpha q$ or $\lambda\alpha p$, then from (1) and (2) one can easily deduce

$$\frac{d f(\lambda)}{d \lambda} = -2 i \lambda \alpha \beta f(\lambda).$$

This, together with $f(0) = 1$, implies $f(1) = \exp(-i\alpha\beta)$. Thus, we have:

$$e^{i\alpha q} e^{i\beta p} e^{i\alpha\beta} = e^{i\beta p} e^{i\alpha q}.$$

Therefore, if the selfadjoint operators q and p satisfy (1), then the groups

$$U(\alpha) = e^{i\alpha q} \quad \text{and} \quad V(\beta) = e^{i\beta p} \tag{3}$$

of the unitary operators $U(\alpha)$, $V(\beta)$ are the solutions of the following system:

$$\left\{ \begin{array}{l} U(\alpha + \alpha') = U(\alpha)\, U(\alpha') \\ V(\beta + \beta') = V(\beta)\, V(\beta') \\ U(\alpha)\, V(\beta)\, e^{i\alpha\beta} = V(\beta)\, U(\alpha) \end{array} \right. \tag{4}$$

One might consider that the problem of finding all pairs of the selfadjoint operators q and p, which satisfy (1), is equivalent to the problem of finding all solutions of (4) under the assumption that $U(\alpha)$ and $V(\beta)$ depend upon α and β in a continuous manner, i. e. that functions $(U(\alpha)\, x, y)$ and $(V(\beta)\, x, y)$ as functions of the real variables α and β are continuous for any couple of vectors $x, y \in R$. The advantage of (4) compared to (1) is that all operators in (4) are bounded, and we have no need to worry about their domains. Using this method J. von Neumann ([3]) proved that in a separable Hilbert space the system (4) has one and essentially only one irreducible representation. An analogous theorem was proved for the representations of the corresponding commutation rules for a finite number of degrees of freedom.

In the Quantum theory of fields one has to deal with problems of an infinite number of degrees of freedom. The corresponding problem which is raised in this case is the following:

»In Hilbert space R find all systems of selfadjoint operators q_n, p_n $(n = 1, 2, \ldots)$ such that:

$$\left\{ \begin{array}{l} [q_n, q_m] = 0, \quad [p_n, p_m] = 0 \quad \textit{and} \\ \qquad [q_n, p_m] = i\, \delta_{nm} \end{array} \right. \tag{5}$$

where $[A, B]$ denotes the commutor of A and B, i. e. the expression $AB - BA$.«

By the use of the so-called annihilation operators

$$a_n = (p_n + i\, q_n)/\sqrt{2} \tag{6}$$

(5) can be written in the following form:

$$[a_n, a_m] = 0, \quad [a_n, a_m^*] = \delta_{nm}, \tag{7}$$

where the so-called creation operator a_m^* denotes the adjoint operator of a_n ([7] p. 41). Using the device of Weyl Gårding and Wightman ([1]) in treating the system (5) introduced the groups of unitary operators

$$U(\sigma_1, \sigma_2, ..) = \exp\left(i \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j p_j\right), \quad V(\sigma_1, \sigma_2, ..) = \tag{8}$$
$$= \exp\left(-i \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j q_j\right)$$

where only the finite number of σ's differs from zero. They found all the irreducible representations of system (5), and it was proved that there are infinitely many non-equivalent irreducible representations of (7). But there is one and essentially only one representation in which the selfadjoint operator

$$N = \sum_n a_n^* a_n \tag{9}$$

exists. It was also stressed that representations in which operator N does not exist are coming in Physics ([10]). On the other hand, by the same method they found all the representations of the anticommutation rules, i. e. they found all the irreducible non-equivalent sets of operators a_n, such that:

$$\{a_n, a_m\} = 0 \quad \text{and} \quad \{a_n, a_m^*\} = \delta_{nm} \tag{10}$$

$(n, m = 1, 2, 3, ...)$ where $\{A, B\}$ denotes the anticommutator of A and B, i. e. the expression $AB + BA$. It was proved that there are infinitely many irreducible non-equivalent representations of anticommutation rules (10), but that there is one and essentially only one representation in which the operator

$$N = \sum_n a_n^* a_n$$

exists. For these proofs it was necessary to use rather complicated and to physicists usually unknown mathematical tools.

The aim of this paper is to extend F. Relich's method to the case of infinite number of degrees of freedom, and to prove the uniqueness of the representation in which operator N exists. In § 3. we are going to present a few examples of the representations of commutation rules in which operator N does not exist. At that point it will be seen how another representation can be constructed when one is known. It appears that exactly the same proofs, which are rather elementary, are valid in the study of the commutation rules and anticommutation rules.

The proofs of the theorems mentioned below will depend on the following two well-known lemmas.

Lemma 1. Let A $(A \neq 0)$ be a selfadjoint operator which is defined in a Hilbert space R, D_A the domain of A, and let λ be a number such that

a) There is a sequence of vectors $x_n \varepsilon D_A$ *with the property that* $\|x_n\|$ *does not tend to zero and*

b) $\|(A - \lambda) x_n\| \to 0 \quad as \quad n \to \infty$.

Then λ *is in the spectrum of A (i. e. the operator* $(A - \lambda)^{-1}$ *does not exist, or if it does, it is an unbounded operator).*

Proof: Suppose that λ is not in the spectrum of A, i. e. that $(A - \lambda)^{-1}$ is a bounded everywhere defined linear operator. Then a finite strictly positive number β exists, such that

$$\|(A - \lambda)^{-1} y\| \leqq \beta \|y\|$$

for every $y \varepsilon R$. For $x \varepsilon D_A$ and $y = (A - \lambda) x$ we find

$$\|x\| \leqq \beta \|(A - \lambda) x\|$$

or

$$\|(A - \lambda) x\| \geqq \frac{1}{\beta} \|x\|$$

for every $x \varepsilon D_A$. Setting in this inequality x_n instead of x, and using the assumption b) we find that $\|x_n\|$ tends to zero, which contradicts the assumption a) of lemma 1. In such a way λ is in the spectrum of A. Q. E. D.

Lemma 2. Let A be a selfadjoint operator which is defined in a Hilbert space R, and let λ *be in the spectrum of A.*

Then, a sequence $x_n \varepsilon D_A$ *and a real number* $\alpha > |\lambda|$ *can be found with the following properties:*

a) $\|x_n\| = 1$,

b) $\|A^k x_n\| \leqq \alpha^k$ *for all* $n, k = 1, 2, 3, \ldots$ *and*

c) $\|(A - \lambda) x_n\| \to 0 \quad as \quad n \to \infty$.

Proof. Let $E(\Delta)$ denote the spectral measure of the selfadjoint operator A ([5]), and let C be the set of all real numbers. Then

$$A = \int_C \xi \, E(\Delta_\xi).$$

The fact that λ is in the spectrum of A implies $E(\Delta) \neq 0$ for $\Delta = (\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon) \quad (\varepsilon > 0)$. Since $E(\Delta)$ is a selfadjoint operator and $E^2(\Delta) = E(\Delta)$, we have that $E(\Delta)$ is a projection operator which projects R onto $R_\Delta \neq \{0\}$. For $x_\Delta \varepsilon R_\Delta$ we have:

$$A^k x_\Delta = \int_C \xi^k E(\Delta_\xi) x_\Delta = \int_\Delta \xi^k E(\Delta_\xi) x_\Delta$$

which implies:

$$\|A^k x_\Delta\|^2 = \int_\Delta \xi^{2k} \|E(\Delta_\xi) x_\Delta\|^2 \leqq |\lambda + \varepsilon|^{2k} \int_\Delta \|E(\Delta_\xi) x_\Delta\|^2 \leqq$$
$$\leqq |\lambda + \varepsilon|^{2k} \|x_\Delta\|^2.$$

Now take:

$$x_n = x_{\Delta_n} / \| x_{\Delta_n} \|, \quad \Delta_n = \left(\lambda - \frac{1}{n}, \ \lambda + \frac{1}{n} \right].$$

Then

$$\| A^k x_n \| \leqq \left| \left(\lambda + \frac{1}{n} \right) \right|^k.$$

If $\alpha > |\lambda|$, then for all $n > n_0(\alpha)$ we find:

$$\| A^k x_n \| < \alpha^k$$

for all $k = 1, 2, 3, \ldots$

Further:

$$\| (A - \lambda) x_n \|^2 = \int_C |\xi - \lambda|^2 \, \| E(\Delta_\xi) x_n \|^2 = \int_{\Delta_n} |\xi - \lambda|^2 \, \| E(\Delta_\xi) x_n \|^2 \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{n^2} \int_{\Delta_n} \| E(\Delta_\xi) x_n \|^2 = \frac{1}{n^2} \| x_n \|^2 = \frac{1}{n^2}$$

because of $\| x_n \| = 1$. In such a way

$$\| (A - \lambda) x_n \| \leqq \frac{1}{n}$$

from which it follows that:

$$\| (A - \lambda) x_n \| \to 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty.$$

Q. E. D.

VACUUM REPRESENTATIONS

§ 2. By a representation of the commutation rules in a Hilbert space R (separable or not) one understands a finite or countably infinite set of linear operators a_n, a_n^* ($n = 1, 2, 3, \ldots$), which are defined in R, such that:

1) The intersection of all domains of a_n, a_n^* is a set D which is dense in R and which is invariant with respect to all operators a_n, a_n^* (i. e. $x \in D$ implies that $a_n x$ and $a_n^* x \in D$),

2) a_n^* is the adjoint of a_n and

3) $[a_n, a_m] x = 0$, $[a_n, a_m^*] x = \delta_{nm} x$ for every $x \in D$.

By the representation of the anticommutation rules in a Hilbert space R (separable or not) one understands a finite or countably infinite set of bounded linear operators a_n, a_n^* ($n = 1, 2, 3 \ldots$), which are defined on R, such that:

1) a_n^* is the adjoint of a_n and

2) $\{a_n, a_m^*\} = 0$, $\{a_n, a_m^*\} = \delta_{nm}$.

A representation a_n, a_n^* of the commutation (anticommutation) rules is called irreducible if every bounded operator b for which D is invariant, and which commutes with all operators a_n and a_n^* is necessarily a multiple of the identity operator 1.

Two representations a_n, a_n^* and b_n, b_n^* of the commutation (anticommutation) rules are called unitarily equivalent if there exists a unitary operator u (independent of n), such that:

$$b_n = u^* a_n u \quad \text{and} \quad b_n^* = u^* a_n^* u$$

for all n.

Theorem 1. Let a_n, a_n^* be the representation of the commutation rules in a Hilbert space R.

If a selfadjoint operator

$$N = \sum_n a_n^* a_n \tag{11}$$

exists in the sense that

$$Nx = \sum_n (a_n^* a_n x) \tag{12}$$

for every $x \varepsilon D_N \subseteq D$, then the spectrum of N consists of the numbers $0, 1, 2, 3, \ldots$.

Proof: For any $x \varepsilon D_N$ we have:

$$(Nx, x) = \sum_n (a_n^* a_n x, x) = \sum_n \|a_n x\|^2 \geqq 0 \tag{13}$$

which proves that the spectrum of N belongs to $[0, +\infty)$. For $x \varepsilon D_N$, $\|x\| = 1$ and $\lambda > 0$ we have:

$$\|(N - \lambda) x\|^2 = \|Nx\|^2 - 2\lambda (Nx, x) + \lambda^2, \text{ i. e.}$$

$$\|(N - \lambda) x\|^2 = \|Nx\|^2 - 2\lambda \sum_n \|a_n x\|^2 + \lambda^2. \tag{14}$$

On the other hand we have

$$(Nx, x) \leqq \|Nx\|.$$

Thus:

$$\|(N - \lambda) x\|^2 \geqq \|Nx\|^2 - 2\lambda \|Nx\| + \lambda^2 = (\|Nx\| - \lambda)^2$$

or

$$\|(N - \lambda) x\| \geqq \left| \|Nx\|^2 - \lambda \right|. \tag{15}$$

If λ is in the spectrum of N, then lemma 2 implies the existence of a sequence $x_p \varepsilon D_N$, such that:

a) $\|x_p\| = 1$

b) $\|N^k x_p\| \leqq \alpha^k$ for $k, p = 1, 2, 3, \ldots$, where $\alpha > |\lambda|$ and

c) $\|(N - \lambda) x_p\| \to 0$ as $p \to \infty$.

This, together with (14) and (15), implies:

$$\|Nx_p\|^2 - 2\lambda \sum_n \|a_n x_p\|^2 + \lambda^2 \to 0 \quad \text{and} \quad \|Nx_p\| \to \lambda. \tag{16}$$

If $\lambda \neq 0$ then we get:

$$\lambda = \lim_{p \to \infty} \sum_{n} \|a_n x_p\|^2. \tag{17}$$

Since $\lambda \neq 0$, (17) implies the existence of at least one natural number s, such that:

$$\lim_{p \to \infty} \|a_s x_p\| \neq 0. \tag{18}$$

For this s we set:

$$y_n = a_s (N - \lambda) x_n = [N - (\lambda - 1)] a_s x_n \tag{19}$$

and we obtain:

$$\begin{aligned} \|y_n\|^2 &= \left(a_s (N - \lambda) x_n, a_s (N - \lambda) x_n\right) \leqq \\ &\leqq \sum_{p} \left(a_p (N - \lambda) x_n, a_p (N - \lambda) x_n\right) = \\ &= \left(N (N - \lambda) x_n, (N - \lambda) x_n\right) \leqq \\ &\leqq \|(N^2 - \lambda N) x_n\| \cdot \|(N - \lambda) x_n\| \leqq \\ &\leqq (\|N^2 x_n\| + \lambda \|N x_n\|) \cdot \|(N - \lambda) x_n\| \quad \text{or} \end{aligned}$$

$$\|y_n\|^2 \leq \alpha (\alpha + \lambda) \|(N - \lambda) x_n\| \tag{20}$$

From (20) we find $y_n \to 0$, or

$$\|[N - (\lambda - 1)] a_s x_p\| \to 0 \quad \text{as} \quad p \to \infty. \tag{21}$$

Now, (21), (18) and lemma 1 imply that $\lambda - 1$ is in the spectrum of the selfadjoint operator N. Therefore if $\lambda \neq 0$ is in the spectrum of N then $\lambda - 1$ is also in the spectrum of N. Since the spectrum of N lies in $[0, \infty)$ we conclude that λ is a natural number. However, this immediately implies that zero is in the spectrum of N and that N does not possess a continuous spectrum. Thus, there is a vector $x_0 \varepsilon D_N$, such that:

$$N x_0 = 0 \quad \text{and} \quad \|x_0\| = 1 \tag{22}$$

If we multiply (22) by x_0 we find

$$a_n x_0 = 0 \tag{23}$$

for every $n = 1, 2, 3, \ldots$

On the other hand it is easily seen that if x is an eigenvector of N with an eigenvalue λ that

$$\begin{aligned} N [(a_{n_1}^*)^{s_1} (a_{n_2}^*)^{s_2} \ldots (a_{n_k}^*)^{s_k} x] &= (\lambda + s_1 + s_2 + \ldots + s_k) \cdot \\ &\cdot [(a_{n_1}^*)^{s_1} (a_{n_2}^*)^{s_2} \ldots (a_{n_k}^*)^{s_k} x] \end{aligned} \tag{24}$$

and

$$N [a_{n_1}^{s} \ldots a_{n_k}^{s_k} x] = (\lambda - s_1 - \ldots - s_k) [a_{n_1}^{s_1} \ldots a_{n_k}^{s_k} x] \tag{25}$$

for all positive integers $s_1, s_2, \ldots, s_k$. This and (22) imply theorem 1.

Theorem 2. (Completeness). Suppose that all conditions of theorem 1 hold true. Let R_0 be the subspace of R, such that $x_0 \varepsilon R_0$ if and only if $N x_0 = 0$.

For every $x_0 \varepsilon R_0$, by use of the creation operators a_n^*, we build up the system of eigenfunctions of N in the following way:

$$x_0, \quad (a_{n_1}^*)^{s_1} (a_{n_2}^*)^{s_2} \ldots (a_{n_k}^*)^{s_k} x_0. \tag{26}$$

Let R' denote the subspace of R which is spanned by all vectors (26), when x_0 is running through $R_0, n_1 < n_2 < \ldots < n_k$, $s_1, s_2, \ldots s_k$ are running through all possible finite combinations of natural numbers.

We assert that $R' = R$.

Proof. Suppose that theorem 2 is not true and by R'' denotes the orthogonal complement of R', i. e. the set of all vectors in R which are orthogonal on R'. Since any function (26) is an eigenfunction of N we conclude that R' is an invariant subspace with respect to N. On the other hand N is selfadjoint. This implies that R'' is also an invariant subspace of N. In theorem 1 we have proved that the spectrum of N consists only of eigenvalues. Thus the whole space R is spanned by the eigenfunctions of N. From this and $R' \neq R$ we deduce the existence of at least one vector $x \varepsilon R''$, so that

$$N x = \lambda x, \quad |x| = 1 \quad \text{and} \quad (x, y) = 0 \tag{27}$$

for all $y \varepsilon R'$, where λ is a positive integer (theorem 1).

We shall prove that (27) is impossible. First of all $\lambda \neq 0$. Indeed $\lambda = 0$ implies $Nx = 0$ and this gives $x \varepsilon R_0$ by definition of R_0. But $x \varepsilon R_0$ contradicts (27) for $y = x$. Thus $\lambda > 0$. There is, therefore, at least one natural number n_1, so that $a_{n_1} x \neq 0$. For any natural number s we have

$$N (a_{n_1}^s x) = (\lambda - s) (a_{n_1}^s x) \tag{28}$$

Since the spectrum of N consists of non-negative integers from (28) we deduce the existence of a natural number $s_1 > 1$ with the following properties:

$$a_{n_1}^{s_1} x \neq 0 \quad \text{and} \quad a_{n_1}^{s_1+1} x = 0. \tag{29}$$

Suppose $\lambda = s_1$. Then (28) implies

$$a_{n_1}^{s_1} x \varepsilon R_0 \tag{30}$$

which together with (27) leads to:

$$(x_0, a_{n_1}^{s_1} x) = ((a_{n_1}^*)^{s_1} x_0, x) = 0 \tag{31}$$

because

$$x \perp R' \quad \text{and} \quad (a_{n_1}^*)^{s_1} x_0 \varepsilon R'$$

for every $x_0 \varepsilon R'$. Setting $x_0 = a_{n_1}^{s_1} x$ we find $a_{n_1}^{s_1} x = 0$ which contradicts (29). Thus $\lambda > s_1$. There is, therefore, a natural number n_2, so that

$$a_{n_2} a_{n_1}^{s_1} \neq 0. \tag{32}$$

In the same way as before we deduce the existence of a natural number $s_2 > 1$ with the properties:

$$a_{n_2}^{s_2} a_{n_1}^{s_1} x \neq 0, \quad a_{n_2}^{s_2+1} a_{n_1}^{s_1} = 0,$$

and $\lambda > s_1 + s_2$. So, for any k we can construct a vector

$$z = a_{n_k}^{s_k} \ldots a_{n_1}^{s_1} x \neq 0, \quad a_{n_k} z = 0. \tag{33}$$

On the other hand

$$Nz = [\lambda - (s_1 + s_2 + \ldots + s_k)]\, z. \tag{34}$$

This proves that earlier or later we shall have $\lambda = s_1 + s_2 + \ldots + s_k$, i. e. $Nz = 0$ or $z \varepsilon R_0$. In the same way as before we find a contradiction with (27). In such a way there is no vector $x \varepsilon R''$ which satisfies (27). This proves that $R' = R$, i. e. the whole space R is spanned by the vectors (26), or the whole space R can be »build up« from the subspace R_0, by the use of creation operators.

Theorem 3. Suppose that all conditions of theorem 1 hold true and that R_0 is the subspace of R, which is defined in theorem 2.

A representation a_n, a_n^* is irreducible if and only if R_0 is one dimensional subspace of R. In this case the orthonormal basic set in R is given by the eigenfunctions of N of the following form:

$$x_{n_1, n_2, \ldots n_k}^{s_1, s_2, \ldots s_k} = \frac{(a_{n_1}^*)^{s_1}}{\sqrt{s_1!}} \frac{(a_{n_2}^*)^{s_2}}{\sqrt{s_2!}} \cdots \frac{(a_{n_k}^*)^{s_k}}{\sqrt{s_k!}}\, x_0, \; x_0 \tag{35}$$

where $n_1 < n_2 < \ldots n_k$, $s_1, s_2, \ldots s_k$ are running through all possible finite combinations of natural numbers. The vector x_0, $\|x_0\| = 1$ determines subspace R_0.

Proof:

I. *Necessity:* Let e_1, e_2 be two orthonormal vectors in R_0, and let $R_i\,(i = 1, 2)$ be the subspace of R, which is determined by the vectors:

$$e_i, \; (a_{n_1}^*)^{s_1} \ldots (a_{n_k}^*)^{s_k} e_i \quad (i = 1, 2) \tag{36}$$

where $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$, $s_1, s_2, \ldots s_k$ are running through all possible finite combinations of natural numbers. Let R_3 be the set of all vectors in R which are orthogonal on all vectors (36) $(i = 1, 2)$. Now we define a linear operator b by the following formulae:

$$\begin{cases} b e_1 = e_2, \quad b e_2 = e_1 \\ b\, (a_{n_1}^*)^{s_1} \ldots (a_{n_k}^*)^{s_k} e_1 = (a_{n_1}^*)^{s_1} \ldots (a_{n_k}^*)^{s_k} e_2 \\ b\, (a_{n_1}^*)^{s_1} \ldots (a_{n_k}^*)^{s_k} e_2 = (a_{n_1}^*)^{s_1} \ldots (a_{n_k}^*)^{s_k} e_1 \end{cases} \tag{37}$$

and $bx = x$ for any $x \varepsilon R_3$. Obviously b is not a multiple of the identity operator, it is bounded and

$$[b, a_n] = [b, a_n^*] = 0$$

for all $n = 1, 2 \ldots$ This proves that the representation is not irreducible. Thus the necessary condition for the representation a_n, a_n^* to be irreducible is that R_0 is one-dimensional subspace.

II. *Sufficiency:* Suppose that $x_0 \varepsilon R_0$, $\|x_0\| = 1$, is a vector which determines R_0. In this case $Nx = 0$ implies $x = \alpha x_0$ with α as a number. We assert that the representation a_n, a_n^* is irreducible, i. e. if b is a bounded operator which commutes with all a_n and a_n^*, then $b = \alpha \cdot 1$, where α is a number and 1 the identity operator in R. Since

$$a_n b - b a_n = 0 \quad \text{and} \quad a_n x_0 = 0 \tag{38}$$

we find $a_n (b x_0) = 0$ or

$$b x_0 = \alpha x_0 \tag{39}$$

Since

$$a_n^* b - b a_n^* = 0 \tag{40}$$

we have:

$$b (a_{n_1}^*)^{s_1} \ldots (a_{n_k}^*)^{s_k} x_0 = (a_{n_1}^*)^{s_1} \ldots (a_{n_k}^*)^{s_k} b x_0 =$$
$$= \alpha (a_{n_1}^*)^{s_1} \ldots (a_{n_k}^*)^{s_k} x_0. \tag{41}$$

According to theorem 2 the whole space R is spanned by vectors (26). This and (41) imply

$$b x = \alpha x$$

for every $x \varepsilon R$, which proves that the representation is irreducible.

III. Theorem 2 and the fact that R_0 is determined by x_0 imply that set (35) determines R. Now we have to calculate:

$$\left(x^{\begin{smallmatrix} s_1 \ldots s_k \\ n_1 \ldots n_k \end{smallmatrix}}, \; x^{\begin{smallmatrix} s_1' \ldots s_{k'}' \\ n_1' \ldots n_{k'}' \end{smallmatrix}} \right) =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{s_1! \ldots s_k!}\,\sqrt{s_1'! \ldots s_{k'}'!}} \left(a^{\begin{smallmatrix} s_{k'}' \\ n_{k'}' \end{smallmatrix}} \ldots a^{\begin{smallmatrix} s_1' \\ n_1' \end{smallmatrix}} (a_{n_1}^*)^{s_1} \ldots (a_{n_k}^*)^{s_k} x_0, \; x_0 \right). \tag{42}$$

Suppose that n_1' is different from all $n_1, \ldots n_k$. Then $a_{n_1'}$ commutes with all $a_{n_1}^* \ldots a_{n_k}^*$, and we can write the right side of (42) in the following form:

$$\ldots (\ldots a_{n_1'}^{s_1'} x_0, \; x_0). \tag{43}$$

Since $a_n x_0 = 0$ for all n we find that (43) is zero. Thus (42) can be different from zero only if

$$n_1 = n_1', \quad n_2 = n_2', \quad \ldots, \quad n_k = n_{k'}'.^1 \tag{44}$$

[1] Remark that $n_1 < n_2 < \ldots$ and $n_1' < n_2' < \ldots$

Suppose that $s_1' > s_1$. Then (42) can be written in the form:

$$\ldots (\ldots a_{n_1}^{s_1'} (a_{n_1}^*)^{s_1} x_0, x_0). \tag{45}$$

But

$$a_{n_1}^{s_1'} (a_{n_1}^*)^{s_1} x_0 = 0. \tag{46}$$

Indeed (24) implies:

$$N (a_{n_1}^*)^{s_1} x_0 = s_1 (a_{n_1}^*)^{s_1} x_0$$

which together with (25) leads to

$$N [a_{n_1}^{s_1'} (a_{n_1}^*)^{s_1} x_0] = (s_1 - s_1') [a_{n_1}^{s_1'} (a_{n_1}^*)^{s_1} x_0].$$

In such a way (42) can be different from zero only if

$$n_1 = n_1', \ \ldots \ n_k = n_k' \quad \text{and} \quad s_1 = s_1', \ \ldots \ s_k = s_k'. \tag{47}$$

In this case (42) is the square of the norm of vector (35). In order to calculate this suppose that

$$[a, a^*] = 1, \quad a x_0 = 0, \quad (x_0, x_0) = 1,$$

and let us find $a^n (a^*)^n x_0$. We have:

$$a a^* x_0 = (a^* a + 1) x_0 = x_0,$$

$$a^2 (a^*)^2 x_0 = a (a^* a + 1) a^* x_0 = a a^* x_0 + a a^* (a a^* x_0) =$$

$$= 2 a a^* x_0 = 2 x_0$$

and by the induction:

$$a^n (a^*)^n x_0 = n! x_0.$$

This, (47) and (42) imply

$$\left(x^{s_1 \ldots s_k}_{n_1 \ldots n_k}, \ x^{s_1' \ldots s_k'}_{n_1' \ldots n_k'} \right) = \delta_{kk'} \delta_{s_1 s_1'} \ldots \delta_{s_k s_k'} \delta_{n_1 n_1'} \ldots \delta_{n_k n_k'} \tag{48}$$

Q. E. D.

Theorem 4. Let a_n, a_n^* and b_n, b_n^* be two irreducible representations of the commutation rules, so that the selfadjoint operators

$$\sum_n a_n^* a_n \quad \textit{and} \quad \sum_n b_n^* b_n \tag{49}$$

exist.

Then, there exists a unitary operator U, such that:

$$U a_n U^* = b_n \quad \textit{and} \quad U a_n^* U^* = b_n^* \tag{50}$$

for all n, where U does not depend on n.

Proof: Let

$$x_0, \ x^{s_1 \ldots s_k}_{n_1 \ldots n_k} \quad \text{and} \quad y_0, \ y^{s_1 \ldots s_k}_{n_1 \ldots n_k} \tag{51}$$

be basic sets which are determined by representations a_n, a_n^* and b_n, b_n^* respectively (in the way of theorem 3, formula (35)). A linear operator U defined by the formula:

(52) $$y^{s_1 \dots s_k}_{n_1 \dots n_k} = U\, x^{s_1 \dots s_k}_{n_1 \dots n_k} \qquad y_0 = U\, x_0$$

is unitary and:

(53) $$\frac{(b_n^*)}{\sqrt{s!}}\, y^{s_1 \dots s_k}_{n_1 \dots n_k} = U\, \frac{(a_n^*)^s}{\sqrt{s!}}\, x^{s_1 \dots s_k}_{n_1 \dots n_k} = U\, \frac{(a_n^*)^s}{\sqrt{s!}}\, U^*\, y^{s_1 \dots s_k}_{n_1 \dots n_k}.$$

For $s = 1$ (53) implies:

(54) $$b_n^* = U\, a_n^*\, U^*.$$

Using the fact that:

$$b_n\, y^{s_1 \dots s_k}_{n_1 \dots n_k} = U\, a_n\, x^{s_1 \dots s_k}_{n_1 \dots n_k}$$

we find

(55) $$b_n = U\, a_n\, U^*$$

Q. E. D.

An irreducible representation of commutation (anticommutation) rules a_n, a_n^*, so that there exists a vector $x_0 \varepsilon D$, $\|x_0\| = 1$ with the property that:

(56) $$a_n\, x_0 = 0$$

for all $n = 1, 2, 3, \dots$ will be called in the sequel a vacuum representation and vector x_0 will be called a vacuum.

Starting with a vacuum x_0 one can, as in theorem 3, construct an orthonormal set of vectors (35). Using the assumption that a representation is irreducible one immediately concludes that set (35) is a basic set in R. This implies also that the operator

$$N = \sum_n a_n^*\, a_n$$

exists and that it is a selfadjoint operator.

Theorem 5. Let a_n, a_n^* be a representation of commutation rules in which a selfadjoint operator N exists.

Representation a_n, a_n^* is an orthogonal sum of vacuum representations. There is one and essentially only one vacuum representation, and this representation is defined in a separable Hilbert space.

Proof: Let R_0 denote the same subspace as in theorem 2, let $\{e_\alpha\}$ be an orthonormal basic set in R_0. Starting with e_α we construct the space R_α, which is spanned by vectors

(57) $$e_\alpha,\ (a_{n_1}^*)^{s_1} \dots (a_{n_k}^*)^{s_k}\, e_\alpha.$$

Then in R_α representation a_n, a_n^* induces a vacuum representation $a_{n\alpha}$, $a_{n\alpha}^*$. Theorem 2 implies that R is an orthogonal sum of R_α. Thus representation a_n, a_n^* is an orthogonal sum of vacuum representations $a_{n\alpha}$, $a_{n\alpha}^*$. On the other hand theorem 4 implies that any two vacuum representations are unitarily equivalent, and that a vacuum representation is defined in a separable Hilbert space.

Corrolary 1. In the case of a finite number of operators a_n, a_n^*, operator N always exists and, therefore, every representation of commutation rules is an orthogonal sum of vacuum representations. Thus in the case of a finite number of degrees of freedom there is one and essentially only one irreducible representation of commutation rules.

Theorem 6. Let a_n, a_n^* be a representation of anticommutation rules in a Hilbert space R. Suppose that a selfadjoint operator

$$N = \sum_n a_n^* a_n$$

exists.

Then, representation a_n, a_n^* is an orthogonal sum of vacuum representations. There is one and essentially only one vacuum representation of anticommutation rules.

If a_n, a_n^* is a vacuum representation in a Hilbert space R, then an orthonormal basic set in R, consisting of eigenfunctions of N is given by

$$x_0, \quad a_{n_1}^* \cdot a_{n_2}^* \ldots a_{n_k}^* x_0 \tag{58}$$

where x_0, $\|x_0\| = 1$ is a vacuum and $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ is running through all finite and possible sets of natural numbers. In the case of the finite number (m) of operator a_n there is one and essentially only one irreducible representation of anticommutation rules. This representation can be realized in 2^m dimensional Hilbert space.

Proof: The proof of theorem 6 is exactly the same as the proofs of theorems 1–5. In the proof of theorem 1 we have

$$y_n = a_s (N - \lambda) x_n = [N - (\lambda - 1)] a_s x_n .$$

That this formula holds in the case of anticommutators is seen in the following way:

$$a_s N = a_s \sum_n a_n^* a_n = \sum_n (\delta_{sn} - a_n^* a_s) a_n = a_s - \sum_n a_n^* a_s a_n =$$

$$= a_s - \sum_n a_n^* (-a_n a_s) = (1 + N) a_s .$$

The fact that

$$a_n^2 = (a_n^*)^2 = 0 \tag{59}$$

implies that (24) and (25) are to be replaced by:

$$\begin{aligned} N [a_{n_1}^* \ldots a_{n_k}^* x] &= (\lambda + k) [a_{n_1}^* \ldots a_{n_k}^* x] \\ N [a_{n_1} \ldots a_{n_k} x] &= (\lambda - k) [a_{n_1} \ldots a_{n_k} x] . \end{aligned} \tag{60}$$

Because of the same reason (35) is to be replaced by

$$x_0, \quad a_{n_1}^* \ldots a_{n_k}^* x_0 \tag{61}$$

from which it immediately follows that in the case of finite number (m) of degrees of freedom the basic set in R is done by the vectors:

$$x_0, \quad a_n^* x_0, \quad a_{n_1}^* a_{n_2}^* x_0, \quad \ldots, \quad a_1^* a_2^* \ldots a_m^* x_0 \tag{62}$$

where $n;\ n_1 < n_2; \ldots$ are natural numbers from 1 to m. Since in set (62) there are 2^m vectors, we find that the representation is realized in 2^m dimensional vector space.

Theorem 6, for the finite number of degrees of freedom was proved in [2] by a completely different method.

NON-VACUUM REPRESENTATIONS

§ 3. In this paragraph we are proving the existence of infinitely many irreducible non-equivalent representations of commutation rules in which there is no vector $x_0 \varepsilon R$, $x_0 \neq 0$, such that $a_n x_0 \neq 0$ for all n. In such a representation, therefore, operator N does not exist. The same method of construction applies to the representations of anticommutation rules and will not be made explicitely. However, in this paragraph we assume that we have infinitely many operators a_n, a_n^*.

Theorem 7. Let a_n, a_n^* be a vacuum representation of commutation rules, x_0 the corresponding vacuum, α_n complex numbers and

$$b_n = a_n + \alpha_n . \tag{63}$$

Then:

1) b_n is an irreducible representation of commutation rules,

2) b_n is a vacuum representation if and only if

$$a = \sum_n |\alpha_n|^2 < \infty . \tag{64}$$

Proof: Obviously b_n is an irreducible representation of commutation rules. So we have to prove the assertion 2). Suppose $b_n y_0 = 0$ for all n and $y_0 \varepsilon R$. We have:

$$y_0 = \varphi_0 x_0 + y_1 + \ldots + y_n + \ldots \tag{65}$$

where

$$y_n = \frac{1}{n!} \sum \varphi (k_1, k_2, \ldots k_n)\, a_{k_1}^* \ldots a_{k_n}^* x_0 \tag{66}$$

and summation is over all combinations of n natural numbers $k_1, k_2, \ldots k_n$. The function φ is a symmetric function of its arguments. Now $b_n y_0 = 0$ implies $a_n y_0 = -\alpha_n y_0$ or

$$a_{k_1} \ldots a_{k_n} y_0 = (-1)^n \alpha_{k_1} \ldots \alpha_{k_n} y_0 \tag{67}$$

which implies:

$$\varphi (k_1, k_2, \ldots k_n) = (y_0, a_{k_1}^* \ldots a_{k_n}^* x_0) = (a_{k_n} \ldots a_{k_1} y_0, x_0) = \\ = (-1)^n \alpha_{k_1} \ldots \alpha_{k_n} \varphi_0 .$$

Thus:

$$\|y_0\|^2 = |\varphi_0|^2 + .. + \frac{1}{n!} \sum |\varphi(k_1, k_2, .. k_n)|^2 + ... =$$

$$= |\varphi_0|^2 \left\{1 + \sum |\alpha_k|^2 + .. + \frac{1}{n!} \sum |\alpha_{k_1}|^2 .. |\alpha_{k_n}|^2 + ..\right\} =$$

$$= |\varphi_0|^2 \left\{1 + a + .. + \frac{a^n}{n!} + ...\right\}, \quad \text{i. e.}$$

$$\|y_0\|^2 = |\varphi_0|^2 \exp a \text{ with } a = \sum_n |\alpha_n|. \tag{68}$$

If $a < \infty$ we can take φ_0 such that $\|y_0\| = 1$ and $b_n y_0 = 0$ for all n. On the other hand if $a = \infty$ then $\varphi_0 = 0$, which implies $\varphi(k_1, k_2 .. k_n) = 0$, i. e. $y_0 = 0$. Therefore if

$$\sum |\alpha_k|^2$$

is divergent then b_n is an irreducible representation of commutation rules in which a vacuum does not exist.

Theorem 8. Let a_n, a_n^* be a vacuum representation of commutation rules, $b_n = a_n + \alpha_n$, $c_n = a_n + \beta_n$ where α_n and β_n are complex numbers. Then, the representations b_n and c_n are unitarily equivalent if and only if

$$\sum_n |\alpha_n - \beta_n|^2 < \infty. \tag{69}$$

Proof: Suppose that

$$b_n = U^* c_n U, \quad \text{i. e.} \quad a_n + \alpha_n = U^* a_n U + \beta_n$$

where U is a unitary operator. Then

$$U^* a_n U = a_n + \alpha_n - \beta_n. \tag{70}$$

On the left side of (70) we have a vacuum representation. This and theorem 7 imply (69). On the other hand, if (69) holds, then theorem 7 implies that

$$d_n = a_n + \alpha_n - \beta_n$$

is a vacuum representation. Theorem 4 implies the existence of a unitary operator U, so that

$$U^* a_n U = d_n$$

or

$$U^* a_n U = a_n + \alpha_n - \beta_n, \quad \text{i. e.}$$

$$U^* (a_n + \beta_n) U = a_n + \alpha_n.$$

Thus

$$U^* c_n U = b_n.$$

Q. E. D.

Theorem 9. Let a_n, a_n^* be a vacuum representation of commutation rules

$$b_n = \alpha a_n + \beta a_n^* \tag{71}$$

where α and β are complex numbers subject to the restriction

$$|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1. \tag{72}$$

Then, b_n, b_n^* is an irreducible representation of the commutation rules. It is a vacuum representation if and only if $\beta = 0$.

Proof: The condition (72) implies that (71) is a representation of commutation rules. Furthermore we have

$$a_n = \bar{\alpha} b_n - \beta b_n^*$$

from which is seen that b_n, b_n^* is an irreducible representation. If $\beta = 0$ then $|\alpha| = 1$ and $b_n = e^{-i\varphi} a_n$ is a vacuum representation. Let us prove that $\beta \neq 0$ and $b_n y_0 = 0$ for all n implies $y_0 = 0$. First of all (72) implies $\alpha \neq 0$. $b_n y_0 = 0$ for all n implies:

$$0 = (b_n y_0, x_0) = (y_0, b_n^* x_0) = (y_0, \bar{\alpha} a_n^* x_0) - \alpha (y_0, a_n^* x_0).$$

Thus

$$y_0 \perp a_n^* x_0$$

for all n. We also have

$$(b_s b_n y_0, x_0) = 0$$

which implies:

$$(y_0, a_n^* a_s^* x_0) = -\frac{\beta}{\alpha} \delta_{ns} (y_0, x_0). \tag{73}$$

The Bessel inequality and (73) imply:

$$|y_0|^2 \geqq \sum_{n,s} |(y_0, a_n^* a_s^* x_0)|^2 = \left|\frac{\beta}{\alpha}\right|^2 |(y_0, x_0)|^2 \sum_{n,s} \delta_{ns} \tag{74}$$

which is possible only if $(x_0, y_0) = 0$.

This and (73) imply:

$$y_0 \perp x_0, \; y_0 \perp a_n^* x_0 \quad \text{and} \quad y_0 \perp a_n^* a_s^* x_0.$$

In the same way we find that y_0 is orthogonal on every vector (35), i. e. y_0 is orthogonal on a basic set in R, which is possible only if $y_0 = 0$.

Q. E. D.

Theorem 10. Let a_n, a_n^* be a vacuum representation of commutation rules.

$$b_n = \alpha a_n + \beta a_n^*, \quad c_n = \gamma a_n + \delta a_n^* \tag{75}$$

where numbers α, β, γ and δ are such that:

$$|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1 \quad \text{and} \quad |\gamma|^2 - |\delta|^2 = 1, \; \beta\delta \neq 0. \tag{76}$$

Then b_n, b_n^* and c_n, c_n^* are irreducible non-vacuum representations of commutation rules. A necessary and sufficient condition for the unitary equivalence of these two representations is the existence of a real number φ, so that

$$\alpha = \gamma e^{i\varphi} \quad \textit{and} \quad \beta = \delta e^{-i\varphi}. \tag{77}$$

Proof: Sufficiency: Suppose that (77) holds. Since a_n, a_n^* is a vacuum representation we have that

$$e^{i\varphi} a_n, \quad e^{-i\varphi} a_n^*$$

is also a vacuum representation. Let U be a unitary operator such that

$$U^* a_n U = e^{i\varphi} a_n \quad \text{and} \quad U^* a_n^* U = e^{-i\varphi} a_n^*.$$

Then

$$U^* c_n U = \gamma U^* a_n U + \delta U^* a_n^* U = \gamma e^{i\varphi} a_n + \delta e^{-i\varphi} a_n^* =$$
$$= \alpha a_n + \beta a_n^* = b_n,$$

i. e. the representations c_n and b_n are unitarily equivalent.

Necessity: Let

$$c_n = U^* b_m U, \text{ i. e.}$$
$$\gamma a_n + \delta a_n^* = \alpha U^* a_m U + \beta U^* a_m^* U.$$

From this we find:

$$U a_n U^* = (\alpha \bar{\gamma} - \bar{\beta} \delta) a_m + (\beta \bar{\gamma} - \bar{\alpha} \delta) a_m^*. \tag{78}$$

On the left side of (78) we have a vacuum representation. Theorem 9 implies

$$\beta \bar{\gamma} - \bar{\alpha} \delta = 0$$

which, together with (76), implies (77).

Q. E. D.

The method developed so far can also be applied to the anticommutation rules. It can easily be generalized. One can try to find new representations in the form:

$$b_n = \beta_n + \sum_s \alpha_{ns} a_s + \beta_{ns} a_s^* + \sum_{s,p} \alpha_{nsp} a_s a_p + \beta_{nsp} a_s^* a_p +$$
$$+ \gamma_{nsp} a_s^* a_p^* + \sum_{s,p,q} \alpha_{nspq} a_s a_p a_q + \beta_{nspq} a_s^* a_p a_q +$$
$$+ \gamma_{nspq} a_s^* a_p^* a_q + \delta_{nspq} a_s^* a_p^* a_q^* + \ldots$$

where a_n, a_n^* is a vacuum representation. The condition $[b_n, b_m] = 0$ and $[b_n, b_m^*] = \delta_{nm}$ lead to

$$b_n = \beta_n + \sum_s \alpha_{ns} a_s + \beta_{ns} a_s^*$$

and

$$\alpha \alpha^* - \beta \beta^* = 1, \quad \bar{\alpha} \beta^* - \bar{\beta} \alpha^* = 0,$$

where matrices α^*, $\bar{\alpha}$, β^* and $\bar{\beta}$ are connected with α and β in the following way:

$$(\omega^*)_{nm} = (\bar{\omega})_{mn} = (\bar{\omega}_{mn}) \quad (\omega = \alpha, \beta).$$

This assertion is easily proved by the use of the following lemma.

Lemma 3. Let a_n, a_n^* be a vacuum representation of commutation rules and let x_0 be the corresponding vacuum.

Then

$$a = \alpha + \sum_n \alpha_n a_n + \beta_n a_n^* + \sum_{n,p} \alpha_{np} a_n a_p + \beta_{np} a_n^* a_p + \gamma_{np} a_n^* a_p^* + \ldots = 0 \tag{79}$$

if and only if

$$\alpha = \alpha_n = \beta_n = \alpha_{np} = \beta_{np} = \gamma_{np} = \ldots = 0. \tag{80}$$

Proof: Obviously, (80) implies that $a = 0$, and we have to prove that (79) implies (80). Applying (79) to x_0 we find:

$$\alpha x_0 + \sum \beta_n a_n^* x_0 + \sum \gamma_{np} a_n^* a_p^* x_0 + \ldots = 0.$$

Since vectors

$$x_0, \quad a_n^* x_0, \quad a_n^* a_p^* x_0, \quad \ldots$$

are orthogonal, we find

$$\alpha = \beta_n = \gamma_{np} = \ldots = 0.$$

Using the fact that $a^* = 0$ we find

$$\alpha_n = \alpha_{np} = \ldots = 0.$$

The rest of lemma 3 follows in a similar way.

REFERENCES

[1] GÅRDING L. and WIGHTMAN A., Proc. N. A. S. of U. S. A. *40*, 617, (1954).
[2] JORDAN P. and WIGNER E., Z. Physik *47*, 650 (1928).
[3] J. v. NEUMANN, Math. Ann. *104*, 570 (1931).
[4] J. v. NEUMANN, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik (1943).
[5] PLESNER–ROCHLIN, Usp. Mat. Nauk T. I vip *1* (11) (1946), 71–131.
[6] RELICH F., Gött. Nach. (1946), (107–115).
[7] STONE M. H., Linear transformations in Hilbert space (1932).
[8] WEYL H., Z. Physik *46*, 1 (1927).
[9] WEYL H., The Theory of Groups and Quantum Mechanics.
[10] WIGHTMAN A. S. and SCHWEBER S. S., Physical Rev. *98* (1955), 812–837.

Accepted on 29th May 1959 in the session of the Section for mathematical, physical and technical sciences.

SVETOZAR KUREPA

O REPREZENTACIJAMA KOMUTACIONIH I ANTIKOMUTACIONIH PRAVILA KVANTNE TEORIJE POLJA

SADRŽAJ

§ 1. U elementarnoj kvantnoj mehanici hermitski operatori q i p, koji reprezentiraju koordinatu i impuls čestice moraju zadovoljavati Heisenbergovu relaciju neodredenosti (1). (Radimo u sistemu jedinica, u kome je $h/2\pi = 1$, h je Planckova konstanta). U vezi s tim nameće se ovaj matematički problem:

U Hilbertovu prostoru R naći sve parove hermitskih operatora q i p takvih da vrijedi (1).

Kako su operatori q i p, koji zadovoljavaju (1) nužno neograničeni, to je uvjet (1) potrebno preciznije definirati. Da bi se izbjegle potcškoće vezane s neograničenošću operatora q i p, prelazi se pomoću (3) na grupe unitarnih operatora $U(\alpha)$ i $V(\beta)$, gdje su α i β realni brojevi. Prema tome, ako hermitski operatori q i p zadovoljavaju uvjet (1), onda jednoparametarske grupe unitarnih operatora (3) zadovoljavaju (4), gdje su α i β realni brojevi. J. von Neumann je pokazao, da u skupu neprekidnih jednoparametarskih grupa unitarnih operatora, koji zadovoljavaju (4), postoji u biti jedno jedino ireducibilno rješenje. Time je zapravo pokazano, da postoji jedan i u biti samo jedan par hermitskih operatora q i p, koji zadovoljavaju Heisenbergovu relaciju komutacije (1).

U kvantnoj teoriji polja radi se s beskonačno mnogo stepena slobode, pa odgovarajući problem glasi:

U Hilbertovu prostoru R naći sve sisteme operatora a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ takve, da vrijedi (7), gdje je a_n^* operator adjungiran operatoru a_n.

Sličnim postupkom kao i J. von Neumann ovaj su problem riješili Gårding i Wightman, uvevši u razmatranje grupe unitarnih operatora formulom (8), gdje su hermitski operatori q_j i p_j vezani s a_n pomoću (6).

No, s druge strane je poželjno rješavati navedene probleme ne prelazeći na grupe unitarnih operatora, nego precizirajući što se zapravo misli pod (1), odnosno (7). Tim je putem udario F. Relich i pokazao bitnu jednoznačnost Heisenbergovih komutacionih pravila u slučaju konačnog stepena slobode. U ovom se članku ta metoda proširuje na proučavanje relacija komutacije i antikomutacije, kada su u pitanju sistemi s beskonačno mnogo stepena slobode, t. j. kada imamo beskonačno operatora a_n.

VAKUUM REPREZENTACIJE

§ 2. Pod reprezentacijom komutacionih pravila u Hilbertovu prostoru R (separabilnom ili ne) razumijevamo konačno ili beskonačno mnogo linearnih operatora a_n, a_n^* $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, *koji su definirani u R i takvi, da je:*

1) Presjek D, područja definicije svih operatora a_n, a_n^* *je skup svuda gust u R. Nadalje je D invarijantan s obzirom na sve operatore* a_n, a_n^*,

2) a_n^* *je adjungiran operator operatora* a_n,

3) $[a_n, a_m^*]\, x = \delta_{nm} x$, $[a_n, a_m]\, x = 0$ *za sve x iz D, gdje je* $[A, B] = AB - BA$.

Pod reprezentacijom antikomutacionih pravila u Hilbertovu prostoru R (separabilnom ili ne) razumijevamo konačno ili beskonačno mnogo ograničenih linearnih operatora a_n, a_n^* $(n = 1, 2, \ldots)$, *koji su definirani na R i takvih, da je:*

1) a_n^* *adjungiran operator operatora* a_n.

2) $\{a_n, a_n^*\} = \delta_{nm}$, $\{a_n, a_m\} = 0$, *gdje je* $\{A, B\} = AB - BA$.

Reprezentacija a_n, a_n^* *komutacionih (antikomutacionih) pravila naziva se ireducibilna, ukoliko je svaki ograničeni operator b koji ostavlja D invarijantnim i koji komutira sa svima operatorima* a_n, a_n^* *nužno proporcionalan s jediničnim operatorom.*

Ireducibilna reprezentacija komutacionih (antikomutacionih) pravila, za koju postoji jedinični vektor x_0 *iz D takav da vrijedi (56) za svako n, zove se vakuum reprezentacija, a vektor* x_0 *zove se vakuum.*

Teorem 1. Neka je a_n, a_n^* *reprezentacija komutacionih pravila u Hilbertovu prostoru R.*

Ako hermitski operator (11) postoji u smislu, da vrijedi (12) za svaki vektor x iz $D_N \subseteq D$, *onda se spektar operatora N sastoji od brojeva* $0, 1, 2, 3, \ldots$.

Za dokaz tog teorema potrebne su ove dvije leme.

Lema 1. Neka je A $(A \neq 0)$ *hermitski operator u Hilbertovu prostoru R,* D_A *područje definicije operatora A i neka je* λ *broj s ovim svojstvima:*

a) Postoji niz x_n *iz* D_A *takav, da* $\|x_n\|$ *ne teži k nuli i*

b) $\|(A - \lambda) x_n\|$ *teži k nuli, kada n teži u beskonačnost.*

Tada je λ *u spektru operatora A.*

Lema 2. Neka je A hermitski operator u Hilbertovu prostoru R, D_A *područje definicije operatora A, i neka je* λ *u spektru operatora A.*

Tada postoji niz x_n *iz* D_A *i realni broj a veći od* $|\lambda|$ *s ovim svojstvima:*

a) x_n *je jedinični vektor,*

b) $\|A^k x_n\| \leqq a^k$ *su sve* $k, n = 1, 2, 3, \ldots,$

c) $\|(A - \lambda) x_n\|$ *teži k nuli, kada n teži u beskonačnost.*

Dokaz teorema 1. Za x iz D_N vrijedi (13), što pokazuje, da je N pozitivno definitan operator. Ako je x jedinični vektor iz D_N i λ ne-negativan realan broj, onda vrijedi (14). Kako je N pozitivno definitan operator, to vrijedi i (15). Pretpostavimo li, da je λ u spektru operatora N, tada lema 2, (14) i (15) povlače egzistenciju niza jediničnih vektora x_p iz D_N takva, da vrijedi (16). Ako je $\lambda \neq 0$, onda (16) povlači (17), budući da je $\lambda \neq 0$, to postoji bar jedan prirodan broj s, za koji vrijedi (18). Za to s formula (19) definira niz vektora y_n, za koji se lako vidi da zadovoljava (20). Odatle slijedi (21). No (21), (18) i lema 1 povlače, da je $\lambda - 1$ u spektru operatora N. Prema tome zajedno s $\lambda \neq 0$ i $\lambda - 1$ leži u spektru operatora N. Kako spektar pozitivno definitnog operatora leži u $[0, \infty)$, to zaključujemo, da je λ prirodni broj. No tada je i nula u spektru operatora N, a to znači, da postoji jedinični vektor x_0, za koji vrijedi (22). Iz (22) slijedi (23) za $n = 1, 2, 3, \ldots$. Ako je $\{x, \lambda\}$ svojstven par operatora N, onda se lako vidi, da vrijedi (24) i (25) za sve prirodne brojeve $s_1, s_2, \ldots s_k$. Na taj je način dokazan teorem 1.

Teorem 2. (Potpunost). Neka su svi uvjeti teorema 1 ispunjeni i neka je R_0 *svojstven potprostor operatora N, koji odgovara svojstvenoj vrijednosti nula.*

Za svaki vektor x_0 *iz* R_0 *pomoću operatora* a_n^* *konstruiramo svojstvene vektore (26) operatora N. Neka R' označuje potprostor prostora R, koji razapinju svi mogući vektori (26), kada* x_0 *ide kroz* R_0, *a* $n_1 < n_2 \ldots < n_k$ i $s_1, \ldots s_k$ *idu po svim mogućim konačnim kombinacijama prirodnih brojeva.*

Tvrdimo, da je $R' = R$.

Dokaz: Pretpostavimo, da teorem 2 nije istinit i s R'' označimo potprostor prostora R, koji sadržava sve na R' okomite vektore. Kako je R' invarijantan s obzirom na N i kako je N hermitski operator, to je i R'' invarijantan potprostor operatora N. No prema teoremu 1 operator N ima samo svojstvene vrijednosti. To dovodi do zaključka, da postoji bar jedan vektor x iz R'', koji je svojstven vektor operatora N. No to na dosta jednostavan način vodi kontradikciji. Na taj način slijedi $R' = R$.

Teorem 3. Neka su ispunjeni svi uvjeti teorema 1 i neka je R_0 *potprostor prostora R definiran u teoremu 2.*

Reprezentacija a_n, a_n^* je ireducibilna onda i samo onda, kada je R_0 jednodimenzionalan potprostor. Označimo li s x_0 jedinični vektor, koji razapinje R_0, onda je sistem vektora (35) ortonormiran i predstavlja bazu u R.

Dokaz:

I. Pretpostavimo, da R_0 sadržava dva ortonormirana vektora e_1, e_2 i s R_i (i = 1, 2) označimo potprostore, koje razapinju vektori (36). Neka je R_3 skup svih vektora iz R, koji su okomiti na R_1 i na R_2. Linearni operator b definiran na R_1, R_2 pomoću (37) i na R_3 jednadžbom $bx = x$ je ograničen, komutira sa svima operatorima a_n, a_n^* i nije proporcionalan jediničnom operatoru. Dakle reprezentacija nije ireducibilna.

II. Ako je R_0 određen jednim jedinim jediničnim vektorom x_0, onda $Nx = 0$ povlači, da je x kolinearan s vektorom x_0. Ako b komutira s a_n, tada (38) povlači (39), a ako još vrijedi (40), tada vrijedi i (41). Odavde odmah slijedi $bx = \alpha x$ za svako x iz R. Kratak račun pokazuje, da je (35) ortonormiran skup u R, a da je on baza, slijedi iz teorema 2.

Teorem 4. Neka su a_n, a_n^* i b_n, b_n^* bilo koje dvije vakuum reprezentacije komutacionih pravila.

Tada, postoji unitarni operator U nezavisan od n takav, da vrijedi (50) za sve n.

Dokaz: Neka su (51) baze prostora R određene reprezentacijama a_n, a_n^* i b_n, b_n^* (na način teorema 3, formula (35)). Linearni operator U definiran formulom (52) unitaran je i za njega vrijedi (53). Za $s = 1$ (53) povlači (54). Analogno se dobije (55).

Teorem 5. Neka je a_n, a_n^* reprezentacija komutacionih pravila, za koje postoji hermitski operator N.

Tada je reprezentacija a_n, a_n^* ortogonalna suma vakuum reprezentacija. Postoji jedna i u biti samo jedna vakuum reprezentacija. Vakuum reprezentacija je definirana u separabilnom Hilbertovu prostoru.

Dokaz teorema 5 slijedi na sličan način kao dokaz teorema 1–4. U slučaju konačno mnogo stepena slobode operator N uvijek postoji. Izlazi dakle, da *u slučaju konačno mnogo stepena slobode postoji jedna i u biti samo jedna ireducibilna reprezentacija komutacionih pravila.* Ta je reprezentacija vakuum reprezentacija. Svaka je reprezentacija u tom slučaju ortogonalna suma vakuum reprezentacija.

Teorem 6. Neka je a_n, a_n^* reprezentacija antikomutacionih pravila u Hilbertovu prostoru R i neka postoji hermitski operator (11).

Tada je reprezentacija a_n, a_n^* ortogonalna suma vakuum reprezentacija. Postoji jedna i u biti samo jedna vakuum reprezentacija antikomutacionih pravila.

Ako je a_n, a_n^* vakuum reprezentacija antikomutacionih pravila u R, x_0, $\|x_0\| = 1$, odgovarajući vakuum, tada svojstveni vektori (58) operatora N obrazuju bazu u R.

U slučaju konačno (m) stepena slobode operator N uvijek postoji, a odgovarajuća vakuum reprezentacija je realizirana u 2^m-dimenzionalnom Hilbertovu prostoru.

Dokaz teorema 6 je sasvim isti kao dokaz teorema 1–5, samo što ovdje treba uzeti u obzir formulu (59).

NE-VAKUUM REPREZENTACIJE

§ 3. U ovom se paragrafu navode primjeri ireducibilnih reprezentacija komutacionih pravila, u kojima operator N ne postoji (broj stepena slobode je beskonačan). Analogna konstrukcija vrijedi i za antikomutaciona pravila. Tako na pr. operatori (63) uz pretpostavku, da brojevi α_n ne zadovoljavaju (64) i da je a_n, a_n^* vakuum reprezentacija, daju primjer ireducibilne reprezentacije, u kojoj N ne postoji. Analogno formula (71) uz uvjet (72) daje ireducibilnu reprezentaciju komutacionih pravila, za koju operator N ne postoji. Neka je a_n, a_n^* vakuum reprezentacija i neka su b_n, c_n operatori definirani formulom (75), gdje brojevi α, β, γ i δ zadovoljavaju (76). Tada su b_n, b_n^* i c_n, c_n^* ireducibilne reprezentacije komutacionih pravila. Da bi te dvije reprezentacije bile unitarno ekvivalentne, treba, a i dosta je da postoji realni broj φ, za koji vrijedi (77).

Primljeno na sjednici Odjela za matematičke, fizičke i tehničke nauke dne 29. V. 1959.

SIBE MARDEŠIĆ

LOKALNO POVEZANI, UREĐENI I LANČASTI KONTINUUMI

Središnji rezultat ove radnje je Teorem 2, prema kojemu se svaki lokalno povezani kontinuum može prikazati kao limes monotonog inverznog sistema metričkih lokalno povezanih kontinuuma.[1] Dokaz se osniva na Teoremu 1 o invarijantnosti težine lokalno povezanog kompaktnog prostora pri laganim preslikavanjima.[1] U § 3 dana je jedna primjena Teorema 2 na uređene kontinuume, za koje je pokazano, da su limesi monotonih inverznih sistema lukova (Teorem 4).[2] Druga primjena dana je u § 4, gdje su uređeni kontinuumi identificirani u klasi lančastih kontinuuma (Teorem 5).[3]

§ 1. LAGANA PRESLIKAVANJA LOKALNO POVEZANIH KOMPAKTNIH PROSTORA

Svi prostori u ovom radu su *topološki Hausdorffovi* prostori; to svojstvo se često ne će posebno isticati.

Za prostor X se kaže, da je *potpuno nepovezan*, ako se svaka njegova komponenta sastoji iz jedne jedine točke. Kaže se da je preslikavanje $f : X \to Y$ *lagano*, ako je $f(X) = Y$ i ako je, za svaki $y \in Y$, $f^{-1}(y)$

[1] Definicije spomenutih pojmova navedene su u § 1 i § 2.

[2] Poticaj za istraživanje ovog pitanja dao je dr. P. Papić, s kojim je autor vodio više korisnih diskusija, te ovdje izražava svoju zahvalnost.

[3] Kada je ovaj rad bio u završnoj fazi, autor je saznao iz korespondencije s dr. R. F. Williamsom, da je više rezultata ovog rada dobio Williams u jesen 1958. i prikazao ih u jednom seminaru na Purdue University, Lafayette, Ind., U. S. A. Williamsov rad je još neobjavljen, ali je autor imao privilegij da pročita rukopis.

potpuno nepovezan skup (vidi [10], VII, (4.4), str. 130). Neprazni prostor X je induktivne dimenzije $\operatorname{ind} X = 0$, ako za svaki $x \in X$ i otvoreni skup U, $x \in U \subset X$, postoji skup V, $x \in V \subset U$, koji je istodobno otvoren i zatvoren s obzirom na X.

Lema 1. Neka je X *neprazni kompaktni prostor. Da* X *bude potpuno nepovezan, nužno je i dovoljno, da je* $\operatorname{ind} X = 0$.

Da $\operatorname{ind} X = 0$ povlači potpunu nepovezanost prostora X, dokazano je u [5] (II, § 2 D, str. 15);[4] ovaj zaključak vrijedi bez pretpostavke kompaktnosti. Obrnuti zaključak je izveden također u [5] (II, § 4 A, str. 20).[4]

Težina $w(X)$ prostora X je najmanji kardinalni broj k sa svojstvom, da topologija od X dopušta otvorenu bazu $\{U_\alpha\}$ potencije k. Ako je X kompaktan Hausdorffov prostor, a $w(X)$ je konačno, tada je X konačan skup točaka i $w(X) = k(X)$; $k(X)$ označuje kardinalni broj skupa X.

Glavni rezultat ove točke je

Teorem 1. Neka su X *i* Y *kompaktni prostori, neka je* $f : X \to Y$ *neprekidno lagano preslikavanje na čitavi* Y *i neka je* X *lokalno povezan. Tada je težina* $w(X) = w(Y)$, *kad god je* $w(Y)$ *beskonačno (ako je* $w(Y)$ *konačno, tada je i* $w(X)$ *konačno i vrijedi* $w(X) \geqq w(Y)$).

Dokaz teorema se oslanja na više lema.

Lema 2. Neka su X *i* Y *kompaktni prostori, a* $f : X \to Y$ *neprekidno preslikavanje. Neka je dana točka* $y \in f(X) \subset Y$ *i otvoren skup* $U \subset X$, *tako da je* $f^{-1}(y) \subset U$. *Tada postoji otvoren skup* $V \subset Y$, $y \in V$, *tako da je i* $f^{-1}(V) \subset U$.

Dokaz. U protivnom slučaju imali bismo za svaki otvoreni V, $y \in V$, $f^{-1}(V) \cap (X - U) \neq 0$, te bi bilo $V \cap f(X - U) \neq 0$, t. j. y bi pripadao zatvorenju $(f(X - U))^-$ skupa $f(X - U)$. Kako je $X - U$ zatvoren, a f je zatvoreno preslikavanje, to je $(f(X - U))^- = f(X - U)$, te bi imali $y \in f(X - U)$, što se protivi pretpostavci $f^{-1}(y) \subset U$.

Lema 3. Neka su X *i* Y *kompaktni prostori, a* $f : X \to Y$ *neprekidno preslikavanje na čitavi* Y. *Tada je* $w(Y) \leqq w(X)$.

Dokaz. Tvrdnja je očita, ako je $w(X)$ konačno, jer je tada X konačan skup točaka, te je $w(X) = k(X)$, a $w(Y) = k(Y) \leqq k(X)$. Pretpostavimo sada, da je $w(X)$ beskonačno. Neka je $\mathfrak{B} = \{U_\alpha\}$ baza topologije prostora X i neka je kardinalni broj $k(\mathfrak{B}) = w(X)$. Možemo pret-

[4] U [5] je pretpostavljeno za sve prostore, da su metrički s prebrojivom bazom. Međutim, spomenuti dokazi vrijede bez promjene i uz navedene općenitije uvjete.

postaviti, da je baza $\mathfrak{B}$ zatvorena s obzirom na tvorbu konačne unije članova iz $\mathfrak{B}$ (u protivnom slučaju dodali bismo bazi $\mathfrak{B}$ sve takve unije). Za svaki $U \in \mathfrak{B}$ promatrajmo skup $V(U) = \{y \mid y \in Y,\ f^{-1}(y) \subset U\}$. $V(U)$ je otvoren skup. Zaista, ako je $y \in V(U)$, tada je $f^{-1}(y) \subset U$, te primjena Leme 2 daje otvoren skup V, $y \in V \subset Y$, takav da je $f^{-1}(V) \subset U$. Stoga je $V \subset V(U)$, što dokazuje, da je $V(U)$ otvoren.

Familija $\mathfrak{B}' = \{V(U)\}$, $U \in \mathfrak{B}$, očito je potencije $\mathrm{k}(\mathfrak{B}') \leqq \mathrm{k}(\mathfrak{B}) = \mathrm{w}(X)$. Dovoljno je, dakle, pokazati da je $\mathfrak{B}'$ jedna baza topologije od Y. Neka je dan $y \in Y$ i proizvoljan otvoren skup V, $y \in V \subset Y$. Promatrajmo $f^{-1}(y) \subset f^{-1}(V)$. Za svaki $x \in f^{-1}(y)$ možemo naći $U_x \in \mathfrak{B}$, tako da je $x \in U_x \subset f^{-1}(V)$. Kako je $f^{-1}(y)$ kompaktan, to postoji konačan sistem točaka $x(1), \ldots, x(n)$, tako da je $f^{-1}(y) \subset U = U_{x(1)} \cup \ldots \cup U_{x(n)} \subset f^{-1}(V)$: prema pretpostavkama je $U \in \mathfrak{B}$. Jasno je, da za $V(U) \in \mathfrak{B}'$ vrijedi $y \subset V(U) \subset V$. (Usporedi ovaj dokaz s [6], str. 148–149.)

Teorem 1 će biti dokazan, dodamo li Lemi 3 još ovu lemu.

Lema 4. Neka su X *i* Y *kompaktni prostori, neka je* X *lokalno povezan, a* $\mathrm{f} : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *lagano neprekidno preslikavanje na čitavi* Y. *Tada je* $\mathrm{w}(\mathrm{X}) \leqq \mathrm{w}(\mathrm{Y})$, *kad god je* $\mathrm{w}(\mathrm{Y})$ *beskonačno (ako je* $\mathrm{w}(\mathrm{Y})$ *konačno, tada je i* $\mathrm{w}(\mathrm{X})$ *konačno).*

Primjedba. Uvjet, da je X lokalno povezan, bitan je za valjanost Leme 4, kao što pokazuje ovaj primjer. Neka je Ω skup svih rednih brojeva $\alpha \leqq \omega_1$, gdje je ω_1 prvi neprebrojivi redni broj; uz uređajnu topologiju Ω je kompaktan prostor. Ako I označuje segment realnih brojeva t, $0 \leqq t \leqq 1$, tada je i $\Omega \times I$ kompaktan prostor; nadalje je $\mathrm{w}(I) = \aleph_0$, dok je $\mathrm{w}(\Omega \times I) = \aleph_1 > \aleph_0$. Neka je $f : \Omega \times I \to I$ projekcija produkta $\Omega \times I$ na faktor I. f je neprekidno lagano preslikavanje.

Dokaz Leme 4 zasniva se na trima daljim lemama.

Lema 5. Neka su X *i* Y *kompaktni prostori, neka je* X *lokalno povezan i neka je* $\mathrm{f} : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ *neprekidno preslikavanje na čitavi* Y. *Tada za svaki otvoreni skup* $\mathrm{V} \subset \mathrm{Y}$ *i proizvoljnu točku* $\mathrm{y} \in V$, *skup* $\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{y})$ *siječe najviše konačno mnogo komponenata skupa* $\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{V})$.

Dokaz. Neka je $\{U_\alpha\}$, $\alpha \in A$, familija svih komponenata skupa $f^{-1}(V)$; raznim α pripadaju disjunktni skupovi U_α. Pretpostavimo da je $y \in V$ takva točka, da je $f^{-1}(y) \cap U_\alpha \neq 0$, za sve α iz nekog beskonačnog skupa $A' \subset A$. Odaberimo za svaki $\alpha \in A'$ točku $x_\alpha \in f^{-1}(y) \cap U_\alpha$. Neka je $x \in X$ jedna točka gomilanja za beskonačni skup $\{x_\alpha\}$, $\alpha \in A'$.

Tada je $f(x) = y \in V$ zbog $f(x_\alpha) = y$. Stoga x pripada skupu $f^{-1}(V)$, dakle, i nekoj komponenti $U_{\alpha(0)}$, $\alpha(0) \in A$. Kako je x gomilište točaka x_α, $\alpha \in A'$, a $U_{\alpha(0)}$ je otvoren skup (X je lokalno povezan), to $U_{\alpha(0)}$ sadrži beskonačno mnogo točaka x_α, $\alpha \in A'$, te možemo odabrati $\alpha' \neq \alpha''$, $\alpha' \in A$, $\alpha'' \in A$, tako da je $U_{\alpha'} \cap U_{\alpha(0)} \neq 0$ i $U_{\alpha''} \cap U_{\alpha(0)} \neq 0$. Kako se radi o komponentama skupa $f^{-1}(V)$, ove relacije imaju za posljedicu $U_{\alpha'} = U_{\alpha(0)}$, $U_{\alpha''} = U_{\alpha(0)}$, dakle i $U_{\alpha'} = U_{\alpha''}$, što je nemoguće zbog $\alpha' \neq \alpha''$.

Lemu 5 možemo ovako pooštriti:

Lema 6. Neka su ispunjene pretpostavke Leme 5, neka je $V \subset Y$ *proizvoljan otvoreni skup, a* $F \subset Y$ *proizvoljan zatvoreni skup, i neka je* $F \subset V$. *Tada* $f^{-1}(F)$ *siječe najviše konačno mnogo komponenata skupa* $f^{-1}(V)$.

Dokaz. Neka su U_α, $\alpha \in A$, komponente skupa $f^{-1}(V)$. Ako je $y \in F \subset V$, tada (Lema 5) $f^{-1}(y)$ siječe samo konačno mnogo skupova U_α, t. j. postoje indeksi $\alpha(1), \ldots, \alpha(n)$, tako da je $f^{-1}(y) \subset U_{\alpha(1)} \cup \ldots \cup U_{\alpha(n)}$. Prema Lemi 2, postoji otvoren skup $V(y)$, $y \in V(y) \subset Y$, takav da je $f^{-1}(V(y)) \subset U_{\alpha(1)} \cup \ldots \cup U_{\alpha(n)}$. Kako je F kompaktno, postoji konačan skup točaka $\{y_1, \ldots, y_m\} \subset F$ sa svojstvom, da je $F \subset \bigcup_i V(y_i)$, $i = 1, \ldots, m$. Jasno je, da je skup $f^{-1}(F) \subset \bigcup_i f^{-1}(V(y_i))$, $i = 1, \ldots, m$, sadržan u uniji od konačno mnogo skupova U_α, $\alpha \in A$.

Lema 7. Neka su ispunjene pretpostavke Leme 5 i neka je V *proizvoljan otvoreni skup iz* Y. *Tada* $f^{-1}(V)$ *sadrži najviše* $w(Y)$ *komponenata, ukoliko je* $w(Y)$ *beskonačno (ako je* $w(Y)$ *konačno, tada je i broj komponenata od* $f^{-1}(V)$ *konačan).*

Dokaz. Neka je $\mathfrak{B}$ jedna baza za topologiju od Y i to takva, da je $k(\mathfrak{B}) = w(Y)$. Tada je svaki otvoreni skup V unija od najviše $w(Y)$ zatvorenih skupova $F \subset Y$. Zaista, promatrajmo sve $W \in \mathfrak{B}$ za koje je $F = \overline{W} \subset V$. Očito je, da je skup svih ovakvih F najviše potencije $k(\mathfrak{B}) = w(Y)$ i da je V unija skupova F (Y je regularan). Zbog Leme 6 je jasno, da je $f^{-1}(V)$ sadržano u uniji od najviše $w(Y)$ skupova U_α, ukoliko je $w(Y)$ beskonačno. (Ako je $w(Y)$ konačno, tada je $f^{-1}(V)$ sadržano u uniji od konačno skupova U_α.) Kako je $f^{-1}(V) = \bigcup_\alpha U_\alpha$, $\alpha \in A$, to se spomenuta familija skupova U_α podudara s familijom svih komponenata U_α od $f^{-1}(V)$.

Dokaz Leme 4. Neka je $\mathfrak{B} = \{V_\beta\}$, $\beta \in B$, jedna baza za topologiju prostora Y i neka je $k(\mathfrak{B}) = w(Y)$. Neka su $U_{\alpha\beta}$, $\alpha \in A_\beta$, kompo-

nente skupa $f^{-1}(V_\beta)$. Ako je w (Y) beskonačno, tada familija svih $U_{\alpha\beta}$, $\alpha \in A_\beta$, $\beta \in B$, ima najviše w (Y) članova; ako je pak w (Y) konačno, tada je i familija svih $U_{\alpha\beta}$ konačna (Lema 7). Zbog lokalne povezanosti prostora X svi $U_{\alpha\beta}$ su otvoreni. Stoga je dovoljno još pokazati, da je $\mathfrak{U} = \{U_{\alpha\beta} \mid \alpha \in A_\beta,\ \beta \in B\}$ jedna baza za topologiju prostora X.

Neka je U proizvoljan otvoreni skup iz X, a $x \in U$ neka točka. Promatrajmo $f(x) \in Y$ i skup $F = f^{-1}(f(x)) \subset X$. F je zatvoren i potpuno nepovezan, jer je f lagano preslikavanje. Iz toga izlazi (Lema 1), da je $\operatorname{ind} F = 0$. Stoga postoji otvoreni skup $U_1 \subset X$ takav, da je $x \in U_1 \wedge F \subset U \wedge F$ i da je $U_1 \wedge F$ istodobno otvoreno i zatvoreno u F. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti, da je $U_1 \subset U$ (u protivnom slučaju uzeli bismo $U_1 \wedge U$ umjesto U_1). Kako je F zatvoreno u X, a $U_1 \wedge F$ zatvoreno u F, to je $U_1 \wedge F$ zatvoreno i s obzirom na X. Odaberimo sada disjunktne otvorene skupove U_2 i U_3 iz X, tako da bude $U_1 \wedge F \subset U_2 \subset U_1$ i $F \subset U_2 \vee U_3$ (X je normalan). Prema Lemi 2 postoji otvoreni skup $V \subset Y$, $f(x) \in V$, tako da je $F \subset f^{-1}(V) \subset U_2 \vee U_3$. Pri tome možemo odabrati V tako da pripada bazi $\mathfrak{B}$, t. j. da je $V = V_\beta$ za neki $\beta \in B$.

Neka je $U_{\alpha\beta}$ komponenta skupa $f^{-1}(V)$, koja sadrži točku x. Tada je $U_{\alpha\beta} \subset U_2 \vee U_3$ i $U_{\alpha\beta}$ siječe U_2. Zbog povezanosti $U_{\alpha\beta}$ ne može sjeći i U_3, već je $U_{\alpha\beta} \subset U_2 \subset U$. Time je dokaz Leme 4 i Teorema 1 zaključen.

§ 2. MONOTONI INVERZNI SISTEMI

Kaže se, da je preslikavanje $f : X \to Y$ *monotono*, ako je f preslikavanje na čitavi Y i ako je, za svaki $y \in Y$, skup $f^{-1}(y)$ povezan (vidi [10], VII, (4.2), str. 127). Poznat je ovaj teorem o faktorizaciji neprekidnih preslikavanja u monotono i lagano preslikavanje:[5]

Neka su X i Y Hausdorffovi kompaktni prostori, a $f : X \to Y$ neprekidno preslikavanje na čitavi Y. Tada postoji monotono neprekidno preslikavanje $g : X \to Z$ na Hausdorffov kompaktni prostor Z i neprekidno lagano preslikavanje $h : Z \to Y$ sa svojstvom, da je $f = h\,g$. Ova faktorizacija je jednoznačno određena.

[5] Za metričke kompakte dokaz je dan u [10], VIII, (4. 1), str. 141; pri tome dokaz jednoznačnosti vrijedi bez promjene i u općem slučaju. Jedan dokaz teorema o faktorizaciji za opći slučaj (nemetrički) može se naći u novijoj radnji [9].

Lema 8. Neka su X, Y *i* Y′ *kompaktni prostori, a* $\varrho : X \to Y$, $\varrho' : X \to Y'$ *i* $\varrho'' : Y' \to Y$ *neprekidna preslikavanja na čitavi* Y, Y′ *odnosno* Y, *i neka je* $\varrho'' \varrho' = \varrho$. *Neka je nadalje* $\pi : X \to Z$ ($\pi' : X \to Z'$) *neprekidno monotono preslikavanje, a* $\sigma : Z \to Y$ ($\sigma' : Z' \to Y'$) *neprekidno lagano preslikavanje, tako da vrijedi* $\varrho = \sigma \pi$ ($\varrho' = \sigma' \pi'$). *Tada je jednoznačno određeno neprekidno monotono preslikavanje* $\pi'' : Z' \to Z$, *za koje vrijedi* $\pi'' \pi' = \pi$. (Prema teoremu o faktorizaciji su π, σ, π', σ' jednoznačno određeni.)

Dokaz. Neka je $z' \in Z'$, a $y' = \sigma'(z')$, $y = \varrho''(y')$. Tada je $(\pi')^{-1}(z')$ jedna komponenta skupa $(\varrho')^{-1}(y')$ (vidi [10], str. 143). Zbog toga je čitavi $(\pi')^{-1}(z')$ sadržan u jednoj komponenti skupa $\varrho^{-1}(y)$, što znači, da je $\pi(\pi')^{-1}(z')$ jedna jedina točka $z \in Z$. Stavimo li $\pi''(z') = z$, bit će $\pi'' \pi' = \pi$. Kako je π neprekidno, a π' zatvoreno, izlazi, da je i π'' neprekidno preslikavanje. Nadalje, jer je π monotono, a π' neprekidno, izlazi, da je i π'' monotono.

Sada ćemo promatrati *inverzne sisteme*[6] $\{X_\alpha ; \pi_{\alpha\alpha'}\}$ kompaktnih prostora X_α, gdje su svi $\pi_{\alpha\alpha'} : X_{\alpha'} \to X_\alpha$ monotona neprekidna preslikavanja; ovakve sisteme zvat ćemo *monotonim* inverznim sistemima. Pripadni inverzni limes bit će označen sa $X = \text{Inv lim } X_\alpha$. Preslikavanja $\pi_{\alpha\alpha'}$ induciraju preslikavanje $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ na čitavi X_α, za koje nije teško pokazati, da je monotono ([2], Lemma 4.2, str. 241). Također se lako dokaže, da je inverzni limes monotonog sistema lokalno povezanih kompaktnih prostora i sam lokalno povezan i kompaktan ([2], Theorem 4.3, str. 241).

Idući teorem daje jednu karakterizaciju lokalno povezanih kompaktnih prostora.

Teorem 2. Svaki lokalno povezani kompaktni prostor X *inverzni je limes nekog monotonog inverznog sistema* $\{X_\alpha ; \pi_{\alpha\alpha'}\}$ *metričkih lokalno povezanih kompakata* X_α. *Obrnuto, limesi ovakvih sistema su uvijek lokalno povezani kompaktni* (Hausdorffovi) *prostori.*

Dokaz. Prikažimo X kao limes nekog inverznog sistema $\{Y_\alpha ; \varrho_{\alpha\alpha'}\}$ metričkih kompakata Y_α, pri čemu neka su $\varrho_{\alpha\alpha'}$ neprekidna preslikavanja na čitavi Y_α. Ovakav razvoj postoji, jer se na primjer X dade uroniti u Cartesijev produkt $\Pi_\lambda I_\lambda$ od $w(X)$ segmenata $I_\lambda = I$ realnih brojeva, a taj je produkt inverzni limes svih konačnih produkata $I_{\lambda(1)} \times \ldots \times I_{\lambda(n)}$. Ovaj razvoj za $\Pi_\lambda I_\lambda$ inducira jedan razvoj za $X \subset \Pi_\lambda I_\lambda$ (vidi na primjer [2], 2.8, str. 235).

[6] Osnovne definicije i svojstva inverznih sistema izloženi su na primjer u [3] i [7]; vidi također i [2].

Rastavimo preslikavanje $\varrho_\alpha : X \to Y_\alpha$ u monotono preslikavanje $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ i lagano preslikavanje $\sigma_\alpha : X_\alpha \to Y_\alpha$; $\varrho_\alpha = \sigma_\alpha \pi_\alpha$. Prema Lemi 8, postoje jednoznačno određena neprekidna monotona preslikavanja $\pi_{\alpha\alpha'} : X_{\alpha'} \to X_\alpha$, za koja vrijedi $\pi_{\alpha\alpha'} \pi_{\alpha'} = \pi_\alpha$. Jasno je, da je $\{X_\alpha ; \pi_{\alpha\alpha'}\}$ monoton inverzni sistem kompaktnih prostora X_α, te da preslikavanja $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ induciraju jedno neprekidno preslikavanje π prostora X na čitavi prostor Inv lim X_α. Također je jasno, da je π obostrano jednoznačno, tako da je X homeomorfno sa Inv lim X_α.

Kao neprekidne slike lokalno povezanog kompaktnog prostora X, prostori X_α su također lokalno povezani i kompaktni ([11], Theorem 1.6, str. 70). Napokon, jer je σ_α lagano neprekidno preslikavanje prostora X_α na Y_α, a $w(Y_\alpha) \leqq \aleph_0$, to je i $w(X_\alpha) \leqq \aleph_0$ (Theorem 1), što znači, da je X_α metrički kompakt. Time je Teorem 2 dokazan.

§ 3. UREĐENI KONTINUUMI

Za povezan kompaktni prostor X kažemo, da je *uređeni kontinuum*, ako je u X dan neki potpuni uređaj $<$ sa svojstvom, da se uređajna topologija,[7] koju $<$ inducira, podudara s topologijom prostora X; X ćemo ponekad označiti oznakom $(X, <)$. Ako je $<$ neki potpuni uređaj u X, tada je i protivni uređaj $<^*$ jedan potpuni uređaj, koji inducira istu topologiju u X; pri tome, po definiciji, $t_1 <^* t_2$ znači isto, što i $t_2 < t_1$. Za neko preslikavanje $f : (X, <) \to (X', <')$ ćemo reći, da *čuva uređaj* $<$ *s obzirom na* $<'$, ako iz $t_1 < t_2$ izlazi $f(t_1) \leqq' f(t_2)$. Ako $f : (X, <) \to (X', <')$ čuva uređaj, tada očito i $f : (X, <^*) \to (X', <'^*)$ čuva uređaj.

Lema 9. Neka su $(X, <) = (X, <^*)$ *i* $(X', <')$ *uređeni kontinuumi. Da neprekidno preslikavanje* $f : X \to X'$ *na čitavi* X' *bude monotono, nužno je i dovoljno, da* f *čuva bar jedan od dva uređaja* $<, <^*$ *s obzirom na* $<'$.

Dokaz je lak, te ga izostavljamo. Posljedica ove leme je činjenica, da su $<$ i $<^*$ jedina dva uređaja, koji induciraju zadanu topologiju prostora X.

Promatrajmo sada monoton inverzni sistem $\{X_\alpha ; \pi_{\alpha\alpha'}\}$ uređenih kontinuuma $X_\alpha = (X_\alpha, <_\alpha)$. Neka je $A = (A, <)$ usmjeren skup, ko-

[7] Bazu uređajne topologije tvore intervali uređenog skupa $(X, <)$ (vidi [6], Chapter I, I, str. 57).

jim prolazi indeks α (t. j. $<$ je parcijalan uređaj skupa A sa svojstvom, da za svaka, dva elementa α, α' iz A postoji bar jedan $\alpha'' \in A$, takav da je $\alpha < \alpha''$ i $\alpha' < \alpha''$). Reći ćemo, da su uređaji $<_\alpha$ u promatranom sistemu *koherentni*, ako za svaki $\alpha < \alpha'$, $\pi_{\alpha\alpha'} : (X_{\alpha'}, <_{\alpha'}) \to (X_\alpha, <_\alpha)$ čuva uređaj $<_{\alpha'}$ s obzirom na $<_\alpha$.

Lema 10. Neka je $\{X_\alpha; \pi_{\alpha\alpha'}\}$, $\alpha, \alpha' \in A$, *monoton inverzni sistem uređenih kontinuuma* X_α. *Tada je moguće za svaki* $\alpha \in A$ *izabrati uređaj* $<_\alpha$ *za* X_α, *tako da uređaji* $<_\alpha$ *budu koherentni.*

Dokaz. Za svaki $\alpha \in A$ dolaze u obzir samo dva uređaja za X_α; označit ćemo ih sa 0_α i 1_α. Ovi uređaji se dobiju jedan iz drugoga obrtanjem. Promatrajmo za svaki α skup $\{0_\alpha, 1_\alpha\}$ kao (kompaktni) prostor sačinjen od same dvije točke. Definirajmo $\pi_{\alpha\alpha'} : \{0_{\alpha'}, 1_{\alpha'}\} \to \{0_\alpha, 1_\alpha\}$ stavljajući $\pi_{\alpha\alpha'}(0_{\alpha'}) = 0_\alpha$, $\pi_{\alpha\alpha'}(1_{\alpha'}) = 1_\alpha$, ako $\pi_{\alpha\alpha'} : (X_{\alpha'}, 0_{\alpha'}) \to (X_\alpha, 0_\alpha)$ čuva uređaj $0_{\alpha'}$ s obzirom na 0_α. U protivnom slučaju stavimo $\pi_{\alpha\alpha'}(0_{\alpha'}) = 1_\alpha$, $\pi_{\alpha\alpha'}(1_{\alpha'}) = 0_\alpha$. Jasno je, da ovako definirani $\pi_{\alpha\alpha'}$ čuva uređaj $0_{\alpha'}$ (uređaj $1_{\alpha'}$) s obzirom na $\pi_{\alpha\alpha'}(0_{\alpha'})$ (s obzirom na $\pi_{\alpha\alpha'}(1_{\alpha'})$). Također se lako vidi, da je $\pi_{\alpha\alpha'}\pi_{\alpha'\alpha''} = \pi_{\alpha\alpha''}$, za $\alpha < \alpha' < \alpha''$. Tako je dobiven inverzni sistem $\{\{0_\alpha, 1_\alpha\}; \pi_{\alpha\alpha'}\}$ dvočlanih kompakata $\{0_\alpha, 1_\alpha\}$. Prema jednom poznatom teoremu,[8] inverzni limes ovog sistema nije prazan, a to znači upravo, da je moguće odabrati, za svaki $\alpha \in A$, uređaj $<_\alpha \in \{0_\alpha, 1_\alpha\}$ tako da $\pi_{\alpha\alpha'}$ čuva uređaj $<_{\alpha'}$ s obzirom na $<_\alpha$, t. j. tako da su uređaji $<_\alpha$ koherentni.

Teorem 3. Neka je $\{X_\alpha; \pi_{\alpha\alpha'}\}$ *monoton inverzni sistem, gdje su svi* X_α *uređeni kontinuumi. Tada je i* $X = \operatorname{Inv}\lim X_\alpha$ *uređen kontinuum.*

Jasno je, da je X kompaktan i povezan. Prema Lemi 10 možemo odabrati uređaje $<_\alpha$ tako, da budu koherentni. Sada u X definiramo uređaj $<$ ovako. Neka je $x = \{x_\alpha\} \in X$, $y = \{y_\alpha\} \in Y$. Ako je za neki α, $x_\alpha <_\alpha y_\alpha$, tada stavljamo $x < y$.[9] Odmah se vidi, da je ovako definirana relacija $<$ potpun uređaj.

Treba još pokazati, da se topologija τ prostora $X = \operatorname{Inv}\lim X_\alpha$ podudara s uređajnom topologijom τ', koju inducira $<$ na X. Označimo sa $i : (X, \tau) \to (X, \tau')$ identično preslikavanje i pokažimo, da je i neprekidno. Kako je (X, τ) kompaktan prostor, a (X, τ') Hausdorffov prostor, bit će time dokazano, da je i homeomorfizam, t. j. da je $\tau = \tau'$.

[8] Vidi na primjer [3], Theorem 3.6, str. 217.

[9] Zbog koherentnosti uređaja $<_\alpha$ i usmjerenosti skupa A ne može istodobno postojati $\alpha' \in A$, za koji bi bilo $y_{\alpha'} <_{\alpha'} x_{\alpha'}$.

Dovoljno je promatrati intervale $(a, \cdot)_< = \{x \mid x \in X,\ a < x\}$, odnosno $(\cdot, a)_<$, $a \in X$, i pokazati, da su ti skupovi otvoreni u topologiji τ. Ako je $x \in (a, \cdot)_<$, tada je za neki α, $a_\alpha <_\alpha x_\alpha$. Skup $U_\alpha = (a_\alpha, \cdot)_{<_\alpha} = \{x_\alpha \mid x_\alpha \in X_\alpha,\ a_\alpha <_\alpha x_\alpha\}$ je otvoren u X_α, pa je $U = (\pi_\alpha)^{-1}(U_\alpha) \subset X$ otvoren u X s obzirom na topologiju τ. Kako je $x \in U$, gornja tvrdnja će slijediti, dokažemo li, da je $U \subset (a, \cdot)_<$. Ako je $y \in U$, tada je $y_\alpha \in U_\alpha$, t. j. $a_\alpha <_\alpha y_\alpha$, što znači, da je $a < y$ ili $y \in (a, \cdot)_<$. Analogno se dokaže, da je i $(\cdot, a)_<$ otvoreno u τ.

Standardni primjer uređenog kontinuuma je *luk*, t. j. homeomorfna slika (nedegeneriranog) segmenta I realnih brojeva; u stvari luk je jedini (nedegenerirani) metrički uređeni kontinuum (vidi [4], Theorem 2.8, str. 168). Teoremi 2 i 3 nam omogućuju, da uređene kontinuume karakteriziramo s pomoću inverznih sistema lukova ovako:

Teorem 4. Svaki uređeni kontinuum X *je inverzni limes monotonog inverznog sistema* $\{I_\alpha; \pi_{\alpha\alpha'}\}$, *gdje su svi* I_α *lukovi.*[10] *Obrnuto, inverzni limes monotonog sistema lukova je uvijek uređen kontinuum.*

Dokaz. Ako je X uređeni kontinuum, tada je X lokalno povezan, te možemo primijeniti Teorem 2. Dobijamo, da je X inverzni limes monotonog inverznog sistema $\{X_\alpha; \pi_{\alpha\alpha'}\}$, gdje su svi X_α metrički kompakti. $\pi_\alpha : X \to X_\alpha$ je monotono preslikavanje na X_α, odakle se lako zaključi, da su svi X_α također uređeni kontinuumi, dakle lukovi. Obrat izlazi iz Teorema 3.

§ 4. LANČASTI KONTINUUMI

Konačni niz $(U_1, \ldots, U_n)$ otvorenih skupova $U_i \subset X$ nazivamo *lancem*, ako je $U_i \cap U_j \neq 0$ onda i samo onda, kada je $|i - j| \leqq 1$. Skupove U_i nazivamo karikama lanca; karike U_i ne moraju biti povezani skupovi. Za prostor X kažemo, da je *lančast*, ako svaki otvoreni pokrivač od X može biti profinjen lancem, koji pokriva X. Jasno je, da su lančasti kontinuumi kompaktni i povezani.

Promatrat ćemo i prostore X, koji imaju svojstvo, da se svaki otvoreni pokrivač od X može profiniti lancem, koji pokriva X, a sve su karike U_i povezani skupovi. Ovakve prostore zvat ćemo *strogo lančastim* kontinuumima. Jasno je, da je svaki uređeni kontinuum strogo lančast i da je svaki strogo lančasti kontinuum lančast i lokalno povezan. U ovoj točki ćemo dokazati

[10] Ovaj rezultat je bio najavljen u [8].

Teorem 5. Ove tri klase prostora su identične:

(a) *uređeni kontinuumi,*
(b) *strogo lančasti kontinuumi* i
(c) *lokalno povezani lančasti kontinuumi.*

Bit će dovoljno dokazati, da je svaki lokalno povezani lančasti kontinuum uređen: dokaz zahtijeva nekoliko lema.

Lema 11. Neka je X *lančasti kontinuum, a* $f : X \to Y$ *neprekidno monotono preslikavanje na* Y. *Tada je i* Y *lančast.*

U metričkom slučaju ovaj teorem je dokazao R. H. Bing ([1], Theorem 3, str. 47); dokaz se prenosi i na opći slučaj uz neke modifikacije.[11]

Dokaz. Neka je $v = \{V_\alpha\}$ proizvoljan otvoreni pokrivač za Y. Neka je $v' = \{V'_\beta\}$ zvjezdasto profinjenje[12] od v, a $v'' = \{V''_\gamma\}$ zvjezdasto profinjenje od v'. Neka je $U_\gamma = f^{-1}(V''_\gamma)$, a $(G(1), \ldots, G(n))$ neka je lančasto profinjenje pokrivača $u = \{U_\gamma\}$. Definirajmo skup $G(i, j)$, za $i \leqq j$, kao uniju svih $f^{-1}(y)$, $y \in Y$, koji su sadržani potpuno u $G(i) \cup G(i+1) \cup \ldots \cup G(j)$. Neka je $D(i, j) = f(G(i, j))$. Lako se vidi, da su skupovi $G(i, j)$ otvoreni (primjena Leme 2), a kako su i zasićeni,[13] to izlazi, da su skupovi $D(i, j)$ otvoreni u Y.

Neka je $1 = n_1 < n_2 < \ldots < n_j = n$ tako odabran niz, da postoji bar jedan $y \in Y$ sa svojstvom, da $f^{-1}(y)$ siječe $G(n_i)$ i $G(n_{i+1})$, dok ne postoji ni jedan $y \in Y$ takav, da $f^{-1}(y)$ siječe $G(n_i)$ i $G(n_{i+1}+1)$. Zbog povezanosti skupova $f^{-1}(y)$ i činjenice, da je $(G(1), \ldots, G(n))$ lanac, zaključujemo, da $f^{-1}(y)$ siječe sve $G(i)$, $k_1 \leqq i \leqq k_2$, čim siječe $G(k_1)$ i $G(k_2)$.

Sada promatramo otvorene skupove $D(n_1, n_5)$, $D(n_3+1, n_8)$, $D(n_6+1, n_{11})$, ..., $D(n_{3(i-1)}+1, n_{3i+2})$, ..., $D(n_{3k}+1, n_j)$, gdje je k najveći cio broj k za koji je $3k+2 < j$. Pokažimo, da ovi skupovi tvore lanac. Odaberimo $y \in Y$ tako, da $f^{-1}(y)$ siječe $G(n_4)$ i $G(n_5)$. Tada $f^{-1}(y)$ ne siječe $G(n_5+1)$, a ne može sjeći ni $G(n_3)$ (jer tada ne bi mogao sjeći $G(n_5)$). Stoga je $f^{-1}(y) \subset G(n_3+1) \cup G(n_3+2)$

[11] Autor ne vidi, kako se u dokazu danom u [1] može zaključiti, da je $D(n_1, n_5) \cap D(n_4, n_8) \neq 0$ (oznake su iz [1]); zbog toga je u ovom članku Bingova konstrukcija nešto modificirana.

[12] Zvijezda $Z_{v'}(V')$, $V' \in v'$, je unija svih $V'_\beta \in v'$, za koje je $V' \cap V'_\beta \neq 0$. v' je zvjezdasto profinjenje od v, ako je svaka zvijezda iz v' sadržana u nekom članu od v. Kako je prostor Y kompaktan, to je i parakompaktan, te svaki otvoreni pokrivač dopušta zvjezdasto profinjenje (vidi [6], Chapter 5, U, str. 170).

[13] Kažemo, da je $A \subset X$ zasićen, ako je $A = f^{-1}f(A)$.

$\cup \ldots \cup G(n_5)$, odakle izlazi $y \in D(n_3 + 1, n_8) \cap D(n_1, n_5) \neq 0$. Slično je za ostale susjedne članove. S druge strane je jasno, da je na primjer $D(n_1, n_5) \cap D(n_6 + 1, n_{11}) = 0$.

Pokažimo sada, da promatrani lanac pokriva čitavi Y. Neka je $y \in Y$, a p najmanji broj, za koji $f^{-1}(y)$ siječe G_p. Neka je $i \leq p$ najveći broj, za koji je $n_{3(i-1)} + 1 \leq p$. Tada je $p < n_{3i} + 1 \leq n_{3i+1}$. Zaključujemo, da $f^{-1}(y)$ ne može sjeći $G(n_{3i+2} + 1)$, jer bi tada sjekao i $G(n_{3i+1})$, te bismo dobili kontradikciju. Prema tome je

$$y \in D(n_{3(i-1)} + 1, n_{3i+2}).$$

Napokon, pokažimo, da dobiveni pokrivač profinjuje v. Za svaki $G(p)$ odaberimo $V''(p) \in v''$ tako, da $f(G(p)) \subset V''(p)$. Promatrajmo na primjer $D(n_3, n_8)$ i pokažimo, da je sadržan u nekom članu od v. Odaberimo točke y_r, $r = 4, 5, 6, 7, 8$, tako da $f^{-1}(y_r)$ siječe $G(n_{r-1}) \cap G(n_r)$; nadalje, odaberimo $x_r \in G(n_r) \cap f^{-1}(y_r)$ i $x'_r \in G(n_r) \cap f^{-1}(y_{r+1})$. Sigurno je $y_r \in V''(n_r)$ i $y_{r+1} \in V''(n_r)$. Odatle izlazi

$$V''(n_4) \cap V''(n_5) \neq 0, \quad V''(n_5) \cap V''(n_6) \neq 0,$$
$$V''(n_6) \cap V''(n_7) \neq 0, \quad V''(n_7) \cap V''(n_8) \neq 0,$$

tako da je $V''(n_5) \cup V''(n_6) \cup V''(n_7) \subset Z_{v''}(V''(n_6))$,[12] te je moguće naći $V'_\beta \in v'$ sa svojstvom

$$V''(n_5) \cup V''(n_6) \cup V''(n_7) \subset V'_\beta.$$

Nadalje je $V''(n_4) \cap V'_\beta \neq 0$ i $V''(n_8) \cap V'_\beta \neq 0$. Kako je v' zvjezdasto profinjenje od v, to postoji $U_\alpha \in v$, za koji je zvijezda $Z_{v'}(V'_\beta) \subset V_\alpha$. Stoga će naša tvrdnja biti dokazana, pokažemo li, da je $D(n_3, n_8) \subset Z_{v'}(V'_\beta)$.

Ako je $y \in D(n_3, n_8)$, tada postoji p, $n_3 \leq p \leq n_8$, takav da $f^{-1}(y)$ siječe $G(p)$. Sigurno je, za neki $r \in \{4, 5, 6, 7, 8\}$, $G(p) \cap f^{-1}(y_r) \neq 0$, tako da je y, $y_r \in V''(p) \in v''$, te je $y_r \in V''(p) \cap V''(n_r) \neq 0$. Stoga je $y \in V''(p) \subset Z_{v''}(V''(n_r)) \subset V'_{\beta'}$, za pogodno odabrani $V'_{\beta'} \in v'$. Kako je $V''(n_r) \cap V'_\beta \neq 0$, a $V''(n_r) \subset V'_{\beta'}$, to je $V'_\beta \cap V'_{\beta'} \neq 0$, te je zaista $y \in V'_{\beta'} \subset Z_{v'}(V'_\beta)$. Time je dokaz Leme 11 okončan.

Lema 12. Povezan zatvoreni dio C *lančastog kontinuuma* X *i sam je lančast.*

Dokaz. Neka je $\{U_1, \ldots, U_n\}$ proizvoljan otvoreni pokrivač za C. Odaberimo skupove U'_p, koji su otvoreni u X i takvi, da je $U'_p \cap C = U_p$. Tada je $u' = \{X - C, U'_1, \ldots, U'_n\}$ otvoren pokrivač od X, te dopušta lančasto profinjenje $v' = (V'_1, \ldots, V'_m)$. Kako je C po-

vezan, postojat će indeksi $j \leqq k$ takvi, da je $C \cap V_i \neq 0$ onda i samo onda, kada je $j \leqq i \leqq k$. Neka je $V_i = C \cap V_i'$. Lako se provjeri, da je $(V_j, V_{j+1}, \ldots, V_k$ jedno lančasto profinjenje polaznog pokrivača u. ($V_i \cap V_{i+1} = C \cap V_i' \cap V_{i+1}'$ ne može biti prazan skup, jer bi slijedila nepovezanost skupa C.)

Jasno je, da kružnica nije lančast kontinuum. Stoga dobivamo ovu lemu.

Lema 13. Lančast kontinuum ne može sadržavati kružnicu.

Iduća lema daje *metrički* slučaj Teorema 5.

Lema 14. Luk je jedini nedegenerirani metrički lokalno povezani lančasti kontinuum.

Dokaz se bitno oslanja na poznatoj činjenici, da je svaki povezani otvoreni dio Peanovog kontinuuma[14] povezan lukovima (vidi [11], III, Theorem 3.10, str. 81). S obzirom na poznatu topološku karakterizaciju luka (vidi [4], Theorem 2.8, str. 168), bit će dovoljno, ako pokažemo, da lančasti Peanov kontinuum X može imati najviše dvije točke x, koje *ne režu*[15] X.

Pretpostavimo naprotiv, da imamo tri različite točke a, b, c, koje ne režu X. $X - \{c\}$ je tada povezan otvoren skup, te se točke a i b dadu spojiti lukom $L(a, b)$, koji ne prolazi kroz c. Na isti način postoji luk $L(b, c)$, koji ne sadrži a i luk $L(c, a)$, koji ne sadrži b. Točka b je jedina točka, u kojoj se sijeku $L(a, b)$ i $L(b, c)$. U protivnom slučaju, postojalo bi i sjecište b', koje bi bilo nutarnja točka za oba luka $L(a, b)$ i $L(b, c)$. Odatle bi lako zaključili, da $L(a, b) \cup L(b, c)$, dakle i X, sadrži jednu kružnicu, što bi se protivilo Lemi 13. Na isti način vidimo, da je $L(b, c) \cap L(c, a) = \{c\}$ i $L(c, a) \cap L(a, b) = \{a\}$. Kako je sada $L(a, b) \cup L(b, c) \cup L(c, a)$ kružnica, dobiva se i opet kontradikcija s Lemom 13.

Dokaz Teorema 5. Neka je X lokalno povezan lančasti kontinuum. Prema Teoremu 2, X je inverzni limes monotonog inverznog sistema $\{X_\alpha; \pi_{\alpha\alpha'}\}$, gdje su X_α metrički lokalno povezani kontinuumi. Kako je $X_\alpha = \pi_\alpha(X)$, a π_α je monotono preslikavanje, to je X_α lančast (Lema 11). Prema Lemi 14 zaključujemo, da je X_α luk (ili se sastoji iz jedne jedine točke). Iz Teorema 3 sada izlazi, da je X uređeni kontinuum.

[14] Peanovim kontinuumima nazivaju se metrički kompaktni povezani lokalno povezani prostori.

[15] Kaže se, da točka x ne reže X, ako je $X - \{x\}$ povezan.

LITERATURA

[1] *R. H. Bing*, Concerning hereditarily indecomposable continua, Pacific J. Math. 1 (1951), 43–51.

[2] *C. E. Capel*, Inverse limit spaces, Duke Math. J. 21 (1954), 233–245.

[3] *S. Eilenberg* and *N. Steenrod*, Foundations of Algebraic Topology, Princeton Univ. Press, Princeton 1952.

[4] *D. W. Hall* and *G. L. Spencer II*, Elementary Topology, J. Wiley, New York 1955.

[5] *W. Hurewicz* and *H. Wallman*, Dimension Theory, Princeton Univ. Press, Princeton 1948.

[6] *J. L. Kelley*, General Topology, Van Nostrand, New York 1955.

[7] *S. Lefschetz*, Algebraic Topology, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., no. 27, New York 1942.

[8] *S. Mardešić*, Chainable continua and inverse limits, Glasnik mat.-fiz. 14 (1959), 219–232.

[9] *В. Н. Пономарев*, О непрерывных разбиениях бикомпактов, Успехи Мат. Наук 12 (1957), 335–340.

[10] *G. T. Whyburn*, Analytic Topology, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., No. 28, New York 1942.

[11] *R. L. Wilder*, Topology of Manifolds, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., No. 32, New York 1949.

Primljeno na sjednici Odjela za matematičke, fizičke i tehničke nauke dne 7. I. 1960

SIBE MARDEŠIĆ

LOCALLY CONNECTED, ORDERED AND CHAINABLE CONTINUA*

The central result of this paper is Theorem 2. It asserts that each locally connected continuum is the limit of a monotone inverse system of metric locally connected continua. The proof depends on Theorem 1, which establishes invariance of the weight of locally connected compact spaces under light mappings. § 3 brings an application of Theorem 2 to ordered continua. It is shown that ordered continua are limits of monotone inverse systems of arcs (Theorem 4).[1] Another application is given in § 4, where the ordered continua are identified within the class of chainable continua (Theorem 5).[2]

1. LIGHT MAPPINGS OF LOCALLY CONNECTED COMPACT SPACES

All spaces in this paper are assumed to be topological Hausdorff spaces.

The weight $w(X)$ of a space X is the least cardinal number, which is the power of a basis for the topology of X. The main result of this Section is

[1] The question of the validity of this proposition was raised by Dr. P. Papić, with whom the author had several helpful discussions gratefully acknowledged here.

[2] When this work entered its final stage, the author learned through correspondence with Dr. R. F. Williams that several of the results were obtained by Williams during the autumn of 1958 in a seminar at Purdue University, Lafayette, Ind. U. S. A. Williams' work is as yet unpublished, but the author had the privilege to read the manuscript.

* Original title of this paper: *Lokalno povezani, uređeni i lančasti kontinuumi.*

Theorem 1. Let X *and* Y *be two compact spaces, and* $f : X \to Y$ *a continuous light mapping onto* Y. *If* X *is locally connected, then* $w(X) = w(Y)$ *whenever* $w(Y)$ *is infinite; if* $w(Y)$ *is finite, then* $w(X)$ *is finite too, and* $w(X) \geqq w(Y)$.

The proof is based on several lemmas.

Lemma 1. A non-empty compact space X is totally disconnected if and only if its inductive dimension $\operatorname{ind} X = 0$.

The proofs given in [5] (Chapter II, § 2 D, p. 15 and Chapter II, § 4 A, p. 20) for metric spaces are valid without assumption of metrizability.

Lemma 2. Let X and Y be compact spaces and $f : X \to Y$ a continuous map. Given any $y \in f(X) \subset Y$ and an open set $U \subset X$, $f^{-1}(y) \subset U$, there exists an open set $V \subset Y$, $y \in V$, such that $f^{-1}(V) \subset U$.

It is easy to produce proof by contradiction.

Lemma 3. Let X and Y be compact spaces and $f : X \to Y$ a continuous map onto Y. Then $w(Y) \leqq w(X)$.

Proof can be deduced from [6], pp. 148–149.

In order to obtain Theorem 1, one has to add to Lemma 3 this

Lemma 4. Let X and Y be compact spaces, let X be locally connected, and let $f : X \to Y$ be a continuous light mapping onto Y. Then $w(X) \leqq w(Y)$ whenever $w(Y)$ is infinite; if $w(Y)$ is finite, then so is $w(X)$.

Proof depends on several other lemmas.

Lemma 5. Let X and Y be compact spaces, let $f : X \to Y$ be a continuous mapping onto Y and assume that X is locally connected. Then for each open set $V \subset Y$ and any point $y \in V$ the set $f^{-1}(y)$ intersects at most finitely many components of $f^{-1}(V)$.

Proof is by contradiction. It uses the fact that each infinite set of points in X has a point of accumulation and the fact that the components of $f^{-1}(V)$ are disjoint open sets.

By means of Lemma 2 Lemma 5 is easily strengthened into

Lemma 6. Under the assumptions of Lemma 5 let $V \subset Y$ be any open set and $F \subset V$ a closed subset of Y. Then $f^{-1}(F)$ intersects at most finitely many components of $f^{-1}(V)$.

Lemma 7. Under the assumptions of Lemma 5 let $V \subset Y$ be any open set. Then $f^{-1}(V)$ has at most $w(Y)$ components, provided that $w(Y)$ is infinite; if $w(Y)$ is finite, then $f^{-1}(V)$ has finitely many components.

It is easily seen that V is the union of at most $w(Y)$ sets $F \subset V$, which are closed in Y. Combining this with Lemma 6 one obtains proof of Lemma 7.

Proof of Lemma 4. Choose a basis $\mathfrak{B} = \{V_\beta\}$, $\beta \in B$, for the topology of Y and assume that $\mathfrak{B}$ is of cardinality $w(Y)$. Denote by $U_{\alpha\beta}$, $\alpha \in A_\beta$, all the components of $f^{-1}(V_\beta)$. It suffices to prove that $\mathfrak{U} = \{U_{\alpha\beta} \mid \alpha \in A_\beta,\ \beta \in B\}$ is a basis for the topology of X. Given any $x \in X$ and an open set U, $x \in U \subset X$, observe that $F = f^{-1}(f(x)) \subset X$ is closed and totally disconnected, hence ind $F = 0$ (Lemma 1). Choose an open set $U_1 \subset U$, such that $x \in U_1 \cap F$ and that $U_1 \cap F$ is open and closed in F. Then $U_1 \cap F$ is closed in X too so that one can choose two disjoint sets U_2 and U_3, which are open in X, and such that $U_1 \cap F \subset U_2 \subset U_1$, $F \subset U_2 \cup U_3$. By Lemma 2 there exists an open set $V \subset Y$, $f(x) \in V$, such that $F \subset f^{-1}(V) \subset U_2 \cup U_3$. Furthermore, one can assume that V belongs to the basis $\mathfrak{B}$, so that $V = V_\beta$, for some $\beta \in B$. If $U_{\alpha\beta}$ denotes the component of $f^{-1}(V)$, which contains x, then $U_{\alpha\beta} \subset U_2 \cup U_3$ and $U_{\alpha\beta}$ intersects U_2. $U_{\alpha\beta}$ cannot intersect U_3 since $U_{\alpha\beta}$ is connected and $U_2 \cap U_3 = 0$. Hence, $U_{\alpha\beta} \subset U_2 \subset U$. This completes the proof of Lemma 4 and Theorem 1.

2. MONOTONE INVERSE SYSTEMS

The well-known monotone-light factorization theorem (see [10] and [9]) easily yields this

Lemma 8. Let X, Y and Y' be compact spaces, and let $\varrho : X \to Y$, $\varrho' : X \to Y'$, $\varrho'' : Y' \to Y$ be continuous mappings onto, satisfying $\varrho'' \varrho' = \varrho$. Let $\pi : X \to Z$ ($\pi' : X \to Z'$) be a continuous monotone map, let $\sigma : Z \to Y$ ($\sigma' : Z' \to Y'$) be a light map, and let $\varrho = \sigma \pi$ ($\varrho' = \sigma' \pi'$). Then there is a unique continuous monotone map $\pi'' : Z' \to Z$, such that $\pi'' \pi' = \pi$.

Inverse systems $\{X_\alpha;\ \pi_{\alpha\alpha'}\}$ with monotone maps $\pi_{\alpha\alpha'} : X_{\alpha'} \to X_\alpha$ will be referred to as monotone inverse systems (see [2]). By means of these systems we characterize locally connected compact spaces as follows:

Theorem 2. Every locally connected compact space X *is the inverse limit of a monotone inverse system* $\{X_\alpha;\ \pi_{\alpha\alpha'}\}$, *where* X_α *are metric locally connected compact spaces. Conversely, the inverse limit of such a system is always a locally connected compact space.*

Proof. It is easy to represent a given compact space X as a limit of polyhedra and thus also as the limit of a system $\{Y_\alpha; \varrho_{\alpha\alpha'}\}$ of metric compact spaces Y_α with all the bonding maps $\varrho_{\alpha\alpha'}$ being onto. Apply to the induced projections $\varrho_\alpha: X \to Y_\alpha$ the monotone-light factorization theorem. One gets compact spaces X_α, monotone maps $\pi_\alpha: X \to X_\alpha$ and light maps $\sigma_\alpha: X_\alpha \to Y_\alpha$ with $\sigma_\alpha \pi_\alpha = \varrho_\alpha$. By Lemma 8, there exist monotone maps $\pi_{\alpha\alpha'}: X_{\alpha'} \to X_\alpha$ with $\pi_{\alpha\alpha'} \pi_{\alpha'} = \pi_\alpha$. Thus $\{X_\alpha; \pi_{\alpha\alpha'}\}$ is a monotone inverse system, whose limit is homeomorphic with X. The spaces X_α are continuous images of X and thus compact and locally connected. Since $\sigma_\alpha: X_\alpha \to Y_\alpha$ is a light continuous mapping onto Y_α, and Y_α has a countable basis, it follows (Theorem 1) that $w(X_\alpha) \leqq \aleph_0$. This concludes the proof.

3. ORDERED CONTINUA

A compact connected space X is an *ordered continuum* if it is provided with a total ordering $<$ such that the topology of X is the order topology induced by $<$; often we shall denote X by $(X, <)$. If $<^*$ denotes the reversed ordering of X, then, clearly, the spaces $(X, <)$ and $(X, <^*)$ coincide. A mapping $f: (X, <) \to (X', <')$ is said to preserve the order $<$ with respect to $<'$ whenever $t_1 < t_2$ implies $f(t_1) \leqq' f(t_2)$. In that case f also preserves $<^*$ with respect to $<'^*$.

Lemma 9. Let $(X, <) = (X, <^*)$ and $(X', <')$ be two ordered continua. A continuous map $f: X \to X'$ onto X' is monotone if and only if it preserves one of the two orderings $<$, $<^*$ with respect to $<'$.

An immediate consequence of this lemma asserts that $<$ and $<^*$ are the only orderings of X which induce the topology of X.

Let $\{X_\alpha; \pi_{\alpha\alpha'}\}$ be a monotone inverse system of ordered continua $\measuredangle_\alpha$, provided with orderings $<_\alpha$. We say that the orderings $<_\alpha$ are *coherent* if each $\pi_{\alpha\alpha'}$ preserves $<_\alpha$ with respect to $<_{\alpha'}$.

Lemma 10. Let $\{X_\alpha; \pi_{\alpha\alpha'}\}$, $\alpha, \alpha' \in A$, be a monotone inverse system of ordered continua X_α. Then it is possible to choose, for each $\alpha \in A$, an ordering $<_\alpha$ for X_α, so that the orderings $<_\alpha$ are coherent.

Theorem 3. Let $\{X_\alpha; \pi_{\alpha\alpha'}\}$ be a monotone inverse system of ordered continua X_α. Then the inverse limit X is itself an ordered continuum.

In order to prove this theorem, first apply Lemma 10 to obtain a coherent choice of orderings $<_\alpha$. These induce an ordering $<$ in X

as follows: if $x = \{x_\alpha\} \in X$, $y = \{y_\alpha\} \in X$, and if $x_\alpha <_\alpha y_\alpha$, for some α, then set $x < y$. It is readily seen that $<$ is a well-defined ordering for X, which induces the right topology for X.

The image of an ordered continuum under a continuous monotone mapping is again an ordered continuum. The arc is the only metric ordered continuum (see [4], Theorem 2.8, p. 168). These two facts combined with Theorems 2 and 3 yield readily

Theorem 4. Each ordered continuum X *is the inverse limit of a monotone inverse system* $\{I_\alpha; \pi_{\alpha\alpha'}\}$, *where all* I_α *are arcs. Conversely, the inverse limit of such a system is always an ordered continuum.*

4. CHAINABLE CONTINUA

A finite sequence $(U_1, \ldots, U_n)$ of open sets $U_i \subset X$ is a chain provided that $U_i \cap U_j \neq 0$ if and only if $|i - j| \leqq 1$. X is said to be a chainable continuum if every open covering of X admits a chain-refinement $(U_1, \ldots, U_n)$. If every open covering admits a chain-refinement with *connected* links U_i, then we say that X is a *strongly chainable* continuum. Clearly, every ordered continuum is strongly chainable, and every strongly chainable continuum is chainable. In this Section we prove

Theorem 5. These three classes of spaces coincide:

(a) *ordered continua,*

(b) *strongly chainable continua,*

(c) *locally connected chainable continua.*

We have only to prove that (c) implies (a).

Lemma 11. If X is a chainable continuum and $f : X \to Y$ a continuous monotone mapping onto Y, then Y too is chainable.

Proof of this lemma is essentially the proof given by R. H. BING for metric spaces ([1], Theorem 3, p. 47). We start with an arbitrary open covering $v = \{V_\alpha\}$ of Y (this corresponds to taking an $\varepsilon > 0$ in [1]). Next, we choose a star-refinement $v' = \{V'_\beta\}$ of v and then a star-refinement $v'' = \{V''_\gamma\}$ of v' (this corresponds to passing to $\varepsilon/5$ in [1]). Finally, we consider the covering $u = \{f^{-1}(V''_\gamma)\}$ (this corresponds to choosing the δ in [1]). The rest of the proof is similar to that given in [1].[3]

[3] The author failed to see why $D(n_1, n_5)$ intersects $D(n_4, n_8)$ in the proof given in [1]. For this reason he considered the sets $D(n_1, n_8)$, $D(n_3+1, n_8)$, $D(n_6+1, n_{11})$, etc. instead.

Lemma 12. Every closed connected subset C of a chainable continuum X is itself chainable.

Clearly, a 1-sphere is not chainable. Therefore Lemma 12 implies

Lemma 13. A chainable continuum cannot contain a 1-sphere.

The following lemma asserts that Theorem 5 is valid in the metric case.

Lemma 14. The arc is the only non-degenerate metric locally connected chainable continuum.

Proof depends on the fact that a connected open subset of a Peano continuum is arcwise connected (see [11], III, Theorem 3.10, p. 81). In view of the well-known topological characterization of the arc ([4], Theorem 2.8, p. 168), it will suffice to show that a chainable Peano continuum X can have at most two non-cut points. Assume on the contrary that a, b, c are three distinct non-cut points of X. Then $X - \{c\}$ is a connected open subset of X, containing both points a and b. Hence, there is an arc $L(a, b) \subset X$ joining a and b, which does not meet c. In a similar way we obtain arcs $L(b, c)$ and $L(c, a)$. b is the only point of intersection of $L(a, b)$ and $L(b, c)$, for otherwise it would be easy to find a 1-sphere in $L(a, b) \cup L(b, c)$, which would contradict Lemma 13. The same argument applies to c and a, being the only points of $L(b, c) \cap L(c, a)$ and $L(c, a) \cap L(a, b)$ respectively. However, this would mean that $L(a, b) \cup L(b, c) \cup L(c, a)$ is a 1-sphere, which again contradicts Lemma 13.

Proof of Theorem 5. Let X be a locally connected chainable continuum. By Theorem 2 X is the inverse limit of a monotone inverse system $\{X_\alpha; \pi_{\alpha\alpha'}\}$, where all X_α are metric locally connected chainable continua (Lemma 11). Hence, each X_α is either an arc or is degenerate (Lemma 14). It follows (Theorem 3) that X is an ordered continuum.

Accepted in the session of Section for mathematical, physical and technical sciences 7. I. 1960.

D. Grdenić i D. Pavković-Sevdić

GALIJ U JUGOSLAVENSKIM BOKSITIMA

UVOD

Nenadana perspektiva primjene galija u oblasti semikonduktora potaknula je ovo istraživanje. Ukoliko se očekivanja ispune, a ona se odnose u prvom redu na galijev arsenid i antimonid [1], [2], bit će aktuelno pitanje ekonomične ekstrakcije galija iz različitih sirovina.

Sirovine, koje dolaze u obzir [3], [4] jesu sfalerit, neki ugljeni i boksit. Samo u izuzetnim slučajevima dolazi u obzir mineral germanit, koji je od sviju najbogatiji galijem (prosječno do 1% Ga). U S. A. D. dobiva se galij pri preradi sfalerita u cinkov sulfat. U Vel. Britaniji se iskorišćuje čađa nekih ugljena za dobivanje germanija i galija, jer ih sadržava oko 0,5% odnosno 0,25%. Sadržaj galija u sfaleritima je različit. Prosjek je 0,005%, a samo kod nekih iznosi i do 0,1%. To su u pravilu niskotemperaturni depoziti sfalerita [5].

Boksit bi mogao postati najvažnija sirovina za dobivanje galija, jer redovito sadržava galij. U tom slučaju ekstrakcija galija ne bi smjela poskupiti proizvodnju aluminija. Mogućnosti za takvu ekstrakciju postoje, jer se galij u toku prerade boksita Bayerovim postupkom nakuplja u aluminatnoj lužini, dok se ona ne zasiti galijem. Takva lužina sadržava približno 0,02% galija, a galij, koji pridolazi novim šaržama boksita, raspodjeljuje se na crveni mulj i aluminijev hidroksid, a iz ovog posljednjeg prelazi u glinicu i konačno u aluminij. Opisane su metode, pomoću kojih se može dobiti galij iz aluminatnih lužina elektrolitičkim putem. Međutim, te metode prema podacima, kojima raspolažemo, nisu još našle svoju primjenu u većem opsegu zbog male potražnje za galijem [4], [6]. Nije isključeno, da se pronađu i druge metode ekstrakcije u toku samog procesa proizvodnje aluminija. Osim

toga, nove mogućnosti pruža i eventualno iskorišćivanje crvenog mulja, kao i dobivanje aluminijevog klorida iz boksita direktnim kloriranjem. U tom slučaju vezala bi se proizvodnja galija s proizvodnjom titana, vanadija i cirkonija, što bi znatno pridonijelo njenoj ekonomičnosti.

Imajući pred očima sve te činjenice i mogućnosti, a računajući na rezerve boksita i na našu industriju aluminija, postavili smo pitanje sadržaja galija u našim boksitima. Premda su izvršene mnogobrojne analize naših boksita, nije se do sada obraćala sistematska pažnja sadržaju galija u njima. U svojoj studiji o genezi boksita daje Iveković vrijednost od 0,003% Ga_2O_3 kao približni podatak za drniški boksit [7]. Osim toga, u drugim laboratorijima izvršene su brojne analize boksita i crvenog mulja, pri čemu se naročita pažnja pridavala titanu, vanadiju i cirkoniju, dok su ostali elementi, među njima i galij, samo približno određeni spektrografski [8]. Tako smo odlučili da utvrdimo sadržaj galija u našim boksitima različitog lokaliteta, prije nego što poduzmemo bilo kakovo ispitivanje o njegovoj ekstrakciji.

Treba istaknuti, da podatak o sadržaju galija u nekoj stijeni ili mineralu nije uvijek važan s gledišta dobivanja galija, već je on često važan kao dopunski podatak o rasprostranjenosti galija u litosferi. Tako je ovo istraživanje, koje je u početku bilo potaknuto našim interesom u oblasti anorganske kemije semikonduktora, dobilo svoje geokemijsko značenje, pa ga također i pod tim aspektom i iznosimo.

Naši su boksiti ušli u naučnu literaturu upravo u vezi s pitanjem njihove geneze, zahvaljujući opsežnim istraživanjima, što su ih izvršili Kišpatić i Tućan [9], [10]. Kemijske analize vapnenca i dolomita, zemlje crljenice i boksita bile su im glavni oslonac. Istraživanja boksita, što ih je izvršio Karšulin sa saradnicima [11] primjenom modernih fizičko-kemijskih metoda, u mnogome su pridonijela poznavanju boksita kao višekomponentnog sistema, te se tako nastavljaju na radove naših klasika mineralogije i petrologije. Isto tako, polazeći od problema prerade boksita, dali su Herrmann i Maričić prilog pitanju nastajanja mineralnih komponenata u boksitu [12]. Napominjemo mogućnost da se za tumačenje geneze boksita uzme u obzir sadržaj galija, odnosno, da se ono tim podatkom nadopuni. Tog je mišljenja i Miholić, jer smatra, da bi ispitivanje galija trebalo proširiti i na gline [13], a u vezi s njegovim ranijim dokumentiranim prigovorima Kišpatićevom i Tućanovom tumačenju geneze boksita [14].

Galij je po klasifikaciji Vernadskog tipičan dispergirani element, tako da se nalazi svuda u malim količinama. Rankama i Sahama tretiraju

opsežno rasprostranjenost i geokemijski ciklus galija. Oni usvajaju 15 g/tona za prosječnu vrijednost sadržaja galija u litosferi i smatraju prijašnje procjene preniskima [15]. Po tom značenju nalazi se galij na 37. mjestu i u znatno većoj količini od mnogih poznatijih elemenata [16]. Novijeg je datuma kratak, ali temeljit prikaz, što ga je dao Fleischer o galiju u litosferi [17]. On ostaje kod navedene srednje vrijednosti, ali citira nove podatke, koji pokazuju, da je stvarna vrijednost veća.

Pitanju rasprostranjenosti galija mnogo su pridonijela istraživanja, što su ih izveli Nockolds i Allen spektrografskom metodom na uzorcima eruptivnih stijena različitog sastava i lokaliteta [18]. Oni su dobili vrijednosti od 15 do 45 g/tona. Osobito važan rezultat njihova istraživanja je gotovo stalan odnos Ga/Al u svim uzorcima, a iznosi oko $0{,}25 \times 10^{-3}$. Taj je rezultat donekle oprečan ranijem Goldschmidtovom zaključku o nestalnosti odnosa Ga/Al u stijenama, usprkos velikoj srodnosti tih elemenata [3], [15]. Nisu, dakle, još poznati svi mehanizmi odvajanja tih elemenata u procesu geneze stijena, pa su potrebne nove analize i laboratorijska ispitivanja separacije i taloženja u raznim uvjetima. Međutim, sigurno je utvrđeno, da se galij odvoji od aluminija, kad iz koordinacije s kisikom prede u koordinaciju s fluorom ili sumporom. Zbog toga su svi kriloliti vrlo siromašni galijem, a sulfidi, naročito sfalerit, redovito sadržavaju galija više od prosjeka. Osim ovog halkofilnog karaktera, kojim se galij razlikuje od aluminija, ima on i siderofilni karakter, kako pokazuju i najnovije analize meteora [19]. Ti geokemijski podaci mogu eventualno poslužiti kao polazna točka za ispitivanje separacije galija od aluminija u laboratorijskim uvjetima, pa se tako vraćamo na onaj prvi aspekt, pod kojim je ovo istraživanje i započelo.

REZULTATI I DISKUSIJA

Prije svega, potrebno je obrazložiti izbor analitičke metode. Prema današnjem stanju analitičke kemije malih količina galija, dolazi u obzir ili Ahrensova spektrografska metoda [10], ili aktivaciona metoda neutronima [5] ili kolorimetrijske metode na osnovu obojenih kompleksa sa organskim reagensima. Od posljednjih metoda najviše je priznanja dobila metoda pomoću rodamina-B, koju su izradili Onishi i Sandell [21]. Oni su svoju metodu bazirali na pravilu, po kome sve one klorokiseline metala, koje se lako tope u eteru, daju intenzivno obojeni kompleks rodamina-B. Takvo svojstvo kloro-galij(III) kiseline već je bilo

ranije poznato, pa se na njemu i osnivala ekstrakcija sono-kiselih otopina sa eterom u analitičkoj kemiji galija [22]. Onishi i Sandell su ustanovili, kako se utjecaj ostalih elemenata, koji također daju u eterskoj fazi topive klorokiseline, može lako ukloniti prethodnom redukcijom pomoću titan(III)klorida. Na taj način, kad se radi o analizi boksita, ne mora se željezo posebno odjeljivati. U već citiranom prikazu Fleischera ističe se izvanredna vrijednost analiza, što ih je izvršio Sandell, za poznavanje sadržaja galija u stijenama [23], jer su raniji podaci dobiveni isključivo spektrografskim metodama. Originalnu metodu usavršile su Saltykova i Fabrikova i pokazale, kako se galij može jednostavno kolorimetrijski odrediti u natrolitu, nefelinu, sfaleritu i boksitu [24]. Nastojanja oko usavršavanja metode javljaju se i dalje kod ruskih analitičara. Tako je nedavno predložena upotreba sulfonaftolazorezorcina za fluorometrijsko određivanje galija [25] i novog reagensa »Galiona« za kolorimetrijsko određivanje [26].

Odabrali smo postupak Sandella i Onishi u izvedbi Saltykove i Fabrikove radi njegove jednostavnosti i pouzdanosti. Po navodima autora postupak se može upotrebiti pri sadržaju galija od 0,0001 do 0,1% bez odjeljivanja ostalih elemenata, a u prisutnosti do 200.000 puta veće količine aluminija. Rezultate analiza dajemo u tabeli 1. zajedno s podatkom o sadržaju aluminija* i odnosa Ga/Al.

Tabela 1.

Sadržaj galija u jugoslavenskim boksitima

Porijeklo uzorka	%Ga	%Al_2O_3	1000×Ga/Al
1. Umci, Drniš (Dalmacija)	0,0056	50,70	0,21
2. Maslenica, Drniš (Dalmacija)	0,0056	46,62	0,23
3. Mostar (Hercegovina)	0,0054	55,80	0,18
4. Rovinj (Istra)	0,0060	54,55	0,21
5. Nikšić (Crna Gora)	0,0053	62,21	0,16
6. Kutsko Brdo (Crna Gora)	0,0058	62,80	0,17
7. Ležište nepoznato (Crna Gora) . . .	0,0056	59,15	0,19

Prema tome, naši boksiti, koji se prerađuju u aluminij, a koji potječu sa različitih ležišta od Istre do Crne Gore, imaju praktički jednaki sa-

* Sve uzorke boksita ljubezno nam je dao na ispitivanje Institut za lake metale u Zagrebu. Tamo su izvršene i redovite analize tih uzoraka, pa otuda i ovi podaci za sadržaj na aluminiju.

držaj galija. Radi poređenja navodimo nekoliko najnovijih podataka o sadržaju galija u boksitima.

Saltykova i Fabrikova našle su u boksitima SSSR-a od 0,002 do 0,010% Ga, pri čemu je većina uzoraka imala oko 0,006% Ga. Nešto nižu vrijednost, i to 0,004% Ga, dala je citirana fluorometrijska metoda sa sulfonaftolazorezorcinom. De la Breteque je našao 0,007% Ga u francuskom boksitu [6]. Ovi podaci pokazuju, da je većina ranijih vrijednosti od 0,002 do 0,003% Ga, koje su ušle u literaturu [3] bile vjerojatno preniske, pa se i ovdje u slučaju boksita vidi tendencija porasta vrijednosti za sadržaj galija. Nadalje, ovi podaci za naše boksite pokazuju, da oni nisu ni bogatiji ni siromašniji na galiju od drugih boksita ti, ukoliko ona vrijednost od 0,010% Ga u jednom ruskom boksitu nije specijalan slučaj, svi boksiti imaju podjednaki sadržaj galija.

Osobito je interesantan rezultat za odnos Ga/Al. On se kreće od 0,16 do $0{,}23 \times 10^{-3}$ sa srednjom vrijednošću $0{,}19 \times 10^{-3}$. Ta je vrijednost samo nešto manja od one, što su je ustanovili Nockolds i Allen za bazične eruptivne stijene [18]. Nije moguće iz ovog podatka, a samo na osnovu ovog istraživanja, dati neki zaključak. Na svaki način od interesa je ustanoviti sadržaj galija u našim vapnencima i tako ispitati odnos Ga/Al kroz proces trošenja od vapnenca do zemlje crljenice i boksita. Budući da sadržaj galija u sedimentima nije dovoljno poznat, a u našim vapnencima također nije određen, moglo bi takvo istraživanje biti nastavak ovoga.

EKSPERIMENTALNI DIO

Primijenili smo u cijelosti postupak Saltykove i Fabrikove, osim što preporučujemo, da benzolsko-eterski ekstrakt dulje stoji i da se više pažnje posveti njegovom bistrenju. Iznosimo cijeli postupak, jer ćemo tako pridonijeti njegovoj široj primjeni i eventualnom usavršavanju.

Reagencije su bile priređene od kemikalija za analitičke svrhe i to: rodamin-B, 0,5% otopina u 6N HCl; titan(III) klorid, 15% vodena otopina; smjesa etera i benzola u volumnom odnosu 1 : 3; galij metal, 99,99% (Fluka A. G., Buchs S. G., Schweiz).

Standardna otopina galija priređena je otapanjem metalnog galija (0,0500 g) u zlatotopci (5 ml) u Erlenmeyerovoj tikvici (100 ml) uz slabo zagrijavanje. Nakon toga uklonjen je ostatak dušične kiseline

grijanjem sa sonom kiselinom, koja je dodana dva puta po 2–3 ml. Otopina je isparena skoro do suha, a ostatak ispran sa 6N HCl u odmjernu tikvicu od 50 ml. Od te otopine priređene su razređivanjem sa 6N HCl otopine, koje su sadržavale od 0,1 do 0,5 γ/ml galija sa razlikom od 0,1 γ/ml, te od 1,0 do 3,0 γ/ml galija sa razlikom do 0,5 γ/ml galija.

Uzorak boksita (0,2500 g) raščini se sa kalciniranom sodom (1 g) u platinskom lončiću na 1000° C u trajanju od 10 min. Talina se ispere sa malo vode u porcelansku zdjelicu, a otopina zakiseli polaganim dodavanjem sone kiseline i zatim ispari do suha na vodenoj kupelji. Ostatak se nakvasi sa 5 kapi konc. sone kiseline i ispere vodom (25 ml) u odmjernu tikvicu od 50 ml i otopina nadopuni do oznake s konc. sonom kiselinom.

Za analizu odmjeri se 5 ml gornje otopine u Erlenmeyerovu tikvicu (25 ml) s brušenim čepom, doda otopina titan(III) klorida (1,25 ml), konc. sona kiselina (1,25 ml) i, nakon stajanja od 5 min., otopina rodamina-B (1 ml) i smjesa pažljivo protrese. Zatim se doda smjesa etera i benzola (5 ml), dobro začepi, mućka 2,5 minute i pusti stajati jedan sat. Benzolsko-eterski sloj se nakon toga odlije u suhu Erlenmeyerovu tikvicu (25 ml) s brušenim čepom, dobro začepi i pusti stajati pola sata, što je dovoljno, da se još preostala emulgirana voda odloži na stijenkama posude i ekstrakt razbistri. Dok nismo uveli ovaj način bistrenja ekstrakta, dobivali smo promjenjive vrijednosti ekstinkcije i odstupanja rezultata analize za isti uzorak.

Na isti način postupa se sa standardnom otopinom galija. Ekstinkciju benzolsko-eterskog crveno obojenog ekstrakta rodamin-B-klorogalata određivali smo pomoću fotoelektričkog kolorimetra (Klett-Summersonov aparat sa jednim fotoelementom) uz primjenu filtera No. 56 ($\lambda = 560 \pm 20$ mμ). Filter smo odabrali tako, da smo prethodno pomoću spektrofotometra (Hilger–Uvispek) odredili, da se maksimalna apsorpcija za benzolnoeterski ekstrakt rodamin B-klorogalata javlja kod valne dužine od 560 mμ.

U slučaju veće količine željeza predložile su Saltykova i Fabrikova da se upotrebi manji volumen otopine uzorka, poveća dodatak titan(III) klorida uz istu količinu rodamin-B reagensa, ali da željezo nije potrebno posebno odjeljivati. Mi smo se o tome također uvjerili, jer smo izvršili nekoliko analiza i na taj način, da smo talog željeznog hidroksida filtrirali nakon otapanja taljevine sa sodom.

LITERATURA

[1] *H. Welker*, Halbleitende Verbindungen mit vorwiegend homöopolaren Charakter, Ergebn. exakt. Naturwiss., *29*, 275 (1956).

[2] *N. B. Hannay*, Editor, Semiconductors, ACS Monograph No. 140, Reinhold Publishing Corporation, New York 1959.

[3] *Gmelins Handbuch der anorganischen Chemie*, 8. Auflage, System-Nummer 36, Gallium, Verlag Chemie, Weinheim/Bergstr. 1936.

[4] *A. P. Thompson*, Gallium, Rare Metals Handbook, edited by C. A. Hampel, Reinhold Publishing Corporation, New York 1954.

[5] *D. F. C. Morris* and *F. M. Brewer*, Geochim et Cosmochim. Acta, *5*, 134 (1954).

[6] *P. de la Bretêque*, Études sur le gallium en vue de son extraction au cours de la fabrication de l'alumine, Thèse de doctorat, Université d'Aix-Marseille, Lausanne 1956.

[7] *H. Iveković*, Rad Jugosl. akad., *296*, 169 (1953).

[8] *U. Logomerac*, privatno saopćenje.

[9] *L. Marić*, Mišo Kišpatić u svjetlosti današnje petrografije i petrologije, Spomenica Miše Kišpatića, Jugoslavenska akademija znanosti i umjetnosti, Zagreb 1956, str 29.

[10] *V. I. Vernadskij*, Očerki geohimii, 4. izd., Gorgconcfteizdat 1934, str. 134.

[11] *M. Karšulin*, *A. Tomić* i *A. Lahodny*, Rad Jugosl. akad., *276*, 5 (1949).

[12] *E. Herrmann* i *S. Maričić*, Arhiv za kemiju, *26*, 153 (1954).

[13] *S. Miholić*, privatno saopćenje.

[14] *S. Miholić*, Berg- und Hüttenmännische Monatshefte, *101*, 38 (1956).

[15] *K. Rankama* and *Th. G. Sahama*, Geochemistry, The University of Chicago Press 1950.

[16] *B. Mason*, Principles of Geochemistry, John Wiley & Sons, Inc., New York 1952.

[17] *M. Fleischer*, Estimates of the abundances of some chemical elements and their reliability, Crust of the Earth (A Symposium), The Geological Society of America, Special paper 62 Citirano po ruskom prijevodu: Zemnaja kora, Izdateljstvo inostrannoj literatury, Moskva 1957, str. 158.

[18] *S. R. Nockolds* and *R. Allen*, Geochim. et Cosmochim. Acta, *4*, 105 (1953); *5*, 245 (1954); *9*, 34 (1956).

[19] *H. Onishi* and *E. B. Sandell*, ibid., *9*, 78 (1956).

[20] *L. H. Ahrens*, Spectrochemical Analysis, Addison-Wesley, Cambridge, Mass. 1950.

[21] *H. Onishi* and *E. B. Sandell*, Anal. Chim. Acta, *13*, 159 (1955).

[22] *G. Rienecker*, Gallium, Handbuch der analytischen Chemie, herausgegeben von R. Fresenius und G. Jander, 3. Teil, Bd. 3, Springer Verlag, Berlin 1942, p. 561.

[23] *E. B. Sandell*, Am. J. Sci., *244*, 643 (1946).

[24] *V. S. Saltykova* i *E. A. Fabrikova*, Žurnal anal. himii, *13*, 63 (1958).

[25] *V. A. Nazarenko* i *S. Ja. Vinoveckaja*, Žurnal anal. himii, *13*, 327 (1958).

[26] *G. G. Karanović*, *L. A. Ionova* i *B. L. Podoljskaja*, Žurnal anal. himii, *13*, 439 (1958).

Primljeno na sjednici Odjela za matematičke, fizičke i tehničke nauke dne 29. VI. 1959.

D. GRDENIĆ and D. PAVKOVIĆ-SEVDIĆ

GALLIUM IN YUGOSLAV BAUXITES*

The present investigation was stimulated by new promises of the application of gallium in the field of semiconductors. Gallium has lately been used for doping germanium and silicon singl crystals. Some compounds of gallium, such as arsenide and antimonide [1], [2], have the properties of semiconductors. If these compounds find a broader application in the technology of semiconductors, the question of an economic extraction of gallium from various raw materials will be of importance.

Gallium is a typical dispersed element and it is found in Nature in small concentrations with an average value of 15 g. per ton in the lithosphere [15],[16],[17],[18]. Gallium most frequently occurs associated with aluminium, and the ratio Ga/Al in rocks, which amounts to $0{,}25 \times 10^{-3}$, is nearly constant [18]. This could be explained by the similarity of their chemical and crystallochemical properties. In some cases there occurs separation of gallium from aluminium. The mechanism of this separation is not known, except that it was established with certainty that gallium separates from aluminium when in their coordination sphere oxygen is replaced by fluorine or sulphur. For that reason all cryolites are very poor in gallium, while sulphides, particularly blende, contain it above the average. Besides this chalkophyllous character by which gallium differs from aluminium, it proves also a certain siderphyllous character, as shown by the latest analyses of meteors [19].

* Original title of this paper: *Galij u jugoslavenskim boksitima.*

As bauxite regularly contains gallium, it might become the most important raw material in its production. However, in this case the production of aluminium should not become more expensive. The possibilities for such extraction do exist, for during the manufacture of bauxite by the Bayer process gallium accumulates in aluminate solution until it becomes saturated with gallium. Such a solution contains approximately 0,02 per cent of gallium. Gallium supplied in new charges of bauxite distributes into red filter cake and aluminium hydroxide, and from the latter into alumina and finally into aluminium.

In view of all these facts and possibilities, and taking into account the reserves of bauxite as well as the aluminium industry in our country, we were interested in the problem concerning the gallium content in Yugoslav bauxites. Although numerous analyses of Yugoslav bauxites were carried out, no systematic attention has so far been paid to their gallium content. We therefore decided to establish the gallium content in our bauxites originating from various localities before undertaking any examination of its extraction.

Of the methods for the determination of small amounts of gallium at our disposal we chose the photometric method by means of rhodamine-B by Onishi and Sandell [21]. They established that the influence of other elements which in ethereal phase give soluble chloroacids can easily be removed by a previous reduction with titanium (III) chloride. In this way, when the analysis of bauxite is in question, the separation of iron is not necessary. The original method was improved by Saltikova and Fabrikova [24]. They contributed a simple procedure of determining gallium in natrolite, nepheline, blende and bauxite without special separation of the accompanying elements. In the case of larger amounts of iron it is necessary to use a smaller volume of the sample solution and increase the addition of titanium (III) chloride. The procedure can be applied for the gallium content of 0,0001 do 0,1 per cent, even in the presence of a 200.000-time amount of aluminium.

In our work we strictly applied the procedure described by Saltykova and Fabrikova. The extinction of rosy red coloured extract of rhodamine-B chlorogallate in benzol-ether mixture was determined with the photoelectric colorimeter (Klett-Summerson photometer with one photoelement) by the use of a filter No. 56 ($\lambda = 560 \pm 20$ mμ). The filter was chosen on the basis of the determination of the maximal absorption for the rhodamine-B chlorogallate in benzol-ether solution by means of

a spectrophotometer (Hilger-Uvispek). The results of the analysis are shown in Table 1. The first column presents the origin of the samples of bauxites from Istria, Dalmatia, Hercegovina and Montenegro.

The results obtained show that our bauxites, which are processed into aluminium and come from various beds in the regions of Istria to Montenegro, have approximately the same gallium content which does not differ much from the gallium content in French and some Russian bauxites [6], [24].

Accepted in the session of Section for mathematical, physical and technical sciences 29. VI. 1959.

V. S. VRKLJAN

O BRZINI RASPROSTIRANJA ZVUKA U SMJESAMA JEDNOATOMNIH PLINOVA

Već prije je pokazano,[1] kako se može izvesti formula za brzinu zvuka u smjesama idealnih plinova. Ona glasi

$$\frac{v^2\,\varrho_0}{k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{v_j^2\,\varrho_{j,0}}{k_j}\,, \tag{1}$$

gdje nam v znači brzinu rasprostiranja zvuka u smjesi plinova, ϱ_0 gustoću smjese kod 0^0 C odnosno 273^0 aps., dok je k omjer specifičnih toplina za smjesu (t. j. s_p/s_v); analogno označujemo i odnosne fizikalne veličine u pojedinim sastavnim dijelovima smjese: v_j nam označuje brzinu rasprostiranja zvuka u pojedinom sastavnom dijelu smjese (t. j., kad bismo taj sastavni dio smjese razmatrali sam za sebe i u njemu mjerili brzinu zvuka), $\varrho_{j,0}$ je oznaka za gustoću svakog pojedinog plina (kasnije sastavnog dijela smjese), dok nam k_j označuje omjer specifičnih toplina za svaki plin napose.

Ovdje se želi pokazati, da jednadžba (1) vrijedi čak i u slučaju, ako se radi o smjesi plinova, koji bi prije miješanja bili raznih temperatura, a dosadanji su izvodi šutke pretpostavljali, da se radi o smjesi plinova s jednakim temperaturama.

Da bismo dokazali, da se jednadžba (1) može izvesti i uz pretpostavku, da su smiješani plinovi raznih temperatura, poći ćemo od jednadžbe za izračunavanje temperature smjese plinova uz konstantan

[1] Anzeiger d. Österr. Akad. d. Wiss., god. 1957, br. 12, str. 251–254; Rad Jugosl. akademije, 1959, knj. 319, str. 55–58.

volumen: označimo li sa $s_{j,v}$ specifične topline uz konstantan volumen pojedinih sastavnih dijelova smjese[2] i pomislimo li mase tih plinova u jednakom volumenu s volumenom smjese (V), onda je srednja apsolutna temperatura smjese dana s formulom

$$s_v \cdot V\varrho_0 \cdot T = \sum_{j=1}^{n} s_{j,v} \cdot V\varrho_{j,0} \cdot T_j, \qquad (2\,a)$$

odnosno sa

$$s_v\, \varrho_0\, T = \sum_{j=1}^{n} s_{j,v} \cdot \varrho_{j,0} \cdot T_j. \qquad (2\,b)$$

Ovdje nam $s_{j,v}\, \varrho_{j,0}\, T_j$ označuje onu nutarnju energiju jednoatomnoga plina, koja je sadržana u masi jedinice volumena (t. j. u masi $\varrho_{j,0}$), dok nam $s_{j,v}\, T_j$ označuje onu nutarnju energiju, koja je sadržana u jedinici mase odnosnoga plina. Kako je poznato, ova se nutarnja energija idealnoga jednoatomnoga plina definira kao ukupna kinetička energija zbog progresivnoga gibanja njegovih molekula, dakle za jedinicu mase jednostavnoga plina

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{N_{j,c}}{\varrho_{j,0}}\, m_j\, c_j^2\, dc_j = \frac{1}{2}\, \frac{N_j}{\varrho_{j,0}}\, m_j\, \overline{c_j^2} \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \qquad (3)$$

gdje nam $\frac{N_j}{\varrho_{j,0}}$ označuje broj molekula u jedinici mase plina, $\frac{N_{j,c}}{\varrho_{j,0}}\, dc_j$ broj molekula u toj masi, koje (bez obzira na smjer) imaju brzinu između c_j i $c_j + dc_j$, dok nam $\overline{c_j^2}$ označuje srednju vrijednost kvadrata brzine plinske molekule j-toga plina $(j = 1, 2, \ldots, n)$. U masi $\varrho_{j,0}$, dakle u jedinici volumena, imamo $\varrho_{j,0}$-puta toliko molekula kao u jedinici mase, odatle izlazi

$$\frac{1}{2} \int_0^\infty N_{j,c}\, m_j\, c_j^2\, dc_j = \frac{1}{2}\, N_j\, m_j\, \overline{c_j^2} = \frac{1}{2}\, \varrho_{j,0}\, \overline{c_j^2} \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \quad (4\,a)$$

i za jedinicu volumena smjese plinova

$$\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \int_0^\infty N_{j,c}\, m_j\, c_j^2\, dc_j = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} N_j\, m_j\, \overline{c_j^2} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \varrho_{j,0}\, \overline{c_j^2}. \qquad (4\,b)$$

[2] Specifična toplina uz konstantan volumen svakog potpuno idealnog plina može se kod toga uzeti kao apsolutna konstanta (*C. Schaefer*, Theor. Phys. 1921, knj. II-1, str. 95–96). T nam označuje u gornjim oznakama apsolutnu temperaturu.

Kako se jednadžba (2 b) odnosi na jedinicu volumena, što najbolje razabiramo odatle, da do jednadžbe (2 b) dolazimo iz jednadžbe (2 a) kraćenjem ove s V, to ispoređenjem jednadžbi (2 a) i (4 b) dobivamo

$$\frac{1}{2}\, \varrho_{j,0}\, \overline{c_j^2} = s_{j,v}\, \varrho_{j,0}\, T_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{5 a}$$

odnosno

$$\frac{1}{2}\, \overline{c_j^2} = s_{j,v}\, T_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{5 b}$$

Tako nam konačno jednadžba (2 b) primjenom jednadžbe (5 a) prelazi u

$$\varrho_0\, \overline{c^2} = \sum_{j=1}^{n} \varrho_{j,0}\, \overline{c_j^2}. \tag{6}$$

Primijenimo li ovdje poznatu formulu[3]

$$v^2 = k\, \frac{\overline{c^2}}{3}, \tag{7}$$

koja, mimogred rečeno, izlazi iz Newton-Laplaceove formule za brzinu rasprostiranja zvuka u idealnim plinovima, ako u toj formuli zamijenimo p s poznatim izrazom za tlak plina prema kinetičkoj teoriji plinova, prelazi nam jednadžba (6) u jednadžbu (1). Dakle se jednadžba (1) može izvesti i pomoću računa, kojim se određuje temperatura smjese jednoatomnih plinova raznih temperatura. Ali to nam upravo daje naslućivati, da bi jednadžba (1) za brzinu zvuka u smjesi plinova imala vrijediti – kako se čini – i u slučaju, ako pojedini plinovi – sastavni dijelovi mjese – prije miješanja imaju različite temperature i s tim različitim temperaturama budu međusobno pomiješani. Drugim riječima: kemijski međusobno različite i potpuno indiferentne idealne jednoatomne plinove mogli bismo uzeti s različitim temperaturama, kod miješanja ovakovih plinova raznih temperatura brzina rasprostiranja zvuka u njihovoj smjesi imala bi biti opet dana – kako se čini – s formulom (1).

Jednadžba (5 b) lako se verificira za jednoatomne idealne plinove. Za takve je plinove, kako znamo iz kinetičke teorije plinova[4]

$$\frac{\overline{c_j^2}}{2} = \frac{3}{2}\, R_j'\, T_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{8}$$

[3] *J. H. Jeans – R. Fürth,* Dynamische Theorie d. Gase, 1926, str. 156.

[4] *G. Jäger,* Fortschr. d. Kinet. Gastheorie, 1919, str. 65, 66. – *H. Geiger* u. *K. Scheel,* Handb. d. Physik, 1926, knj. IX, str. 371.

gdje se plinska konstanta R_j' odnosi na jedinicu mase plina. Ova jednadžba u vezi s (5 b) vodi odmah na

$$s_{j,v} = \frac{3}{2} R_j' \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{9}$$

Ovaj za jednoatomne idealne plinove teorijski izvedeni izraz za $s_{j,v}$ isporedit ćemo s eksperimentalnim podacima, poznatima za (nekoje) jednoatomne realne plinove (helij, argon, neon).

Za helij je na pr. $\frac{3}{2} R_j' = 0{,}744$, dok su eksperimentalni podaci[5] za $s_{j,v}$ 0,754 (kod $t = +18^0$ C) odnosno 0,740 (kod $t = -180^0$ C).

Za neon je na pr. $\frac{3}{2} R_j' = 0{,}1444$, dok eksperimentalni podaci[6] (preračunani iz s_p pomoću k) za $s_{j,v}$ vode na vrijednosti 0,1453 (kod 0^0 C i uz 0,880 atmosfera tlaka), odnosno 0,1471 (kod $-103{,}1^0$ C uz tlak od 0,982 atmosfera).

Za argon je $\frac{3}{2} R_j' = 0{,}0744$, dok su eksperimentalni podaci[7] $s_{j,v} = 0{,}074$ (kod $t = +15^0$ C) i $s_{j,v} = 0{,}075$ (kod $t = -180^0$ C).

Dakle nalazimo dobar sklad između teorijske vrijednosti za idealne jednoatomne plinove i eksperimentalnih podataka za (nekoje) jednoatomne realne plinove.

Kod višeatomnih molekula ne može se provesti ovakav račun, jer se nutarnja energija (zbog rotacione energije molekula i titrajne energije atoma u molekuli) ne može prikazati izrazom, koji bi bio proporcionalan apsolutnoj temperaturi.

Primljeno na sjednici Odjela za matematičke, fizičke i tehničke nauke dne 26. III. 1960.

[5] *L. Holborn, K. Scheel* u. *F. Henning*, Wärmetabellen, 1919, str. 56.
[6] *Landolt-Börnstein*, Phys.-Chem. Tabellen, 1936, Ergzbd. III, str. 2315 i 2323.
[7] *L. Holborn, K. Scheel* u. *F. Henning*, Wärmetabellen, 1919, str. 56.

V. S. VRKLJAN

ÜBER DIE AUSBREITUNGSGESCHWINDIGKEIT DES SCHALLES IN DEN MISCHUNGEN DER EINATOMIGEN GASE*

Schon früher wurde gezeigt,[1] dass die Formel für die Schallgeschwindigkeit in den Mischungen idealer Gase mittels der Gleichung (1) gegeben wird. Hier bedeutet v die Schallgeschwindigkeit in der Gasmischung, ϱ_0 die Dichte der Mischung bei 0^0 C, bzw. 273^0 abs., während k das Verhältnis der spezifischen Wärmen für die Mischung bezeichnet. Analog werden auch die entsprechenden physikalischen Grössen in einzelnen Bestandteilen der Mischung bezeichnet.

Hier wird gezeigt, dass die Gleichung (1) auch in solchem Falle noch immer gültig ist, wenn es sich um eine Gasmischung handelt, in der die Bestandteile vor der Mischung verschiedener Temperatur waren. In den bisherigen Mitteilungen wurde nämlich stillschweigend angenommen, dass es sich um die Mischung der Gase gleicher Temperatur handelt.

Um also zu zeigen, dass die Gleichung (1) auch unter der Voraussetzung, dass die Gase verschiedener Temperatur untereinander gemischt werden, ableitbar ist, gehen wir von der Gleichung für die Berechnung der Temperatur der Gasmischung unter konstantem Volumen aus und schreiben die Gleichung (2 a), mittels welcher uns die mittlere Temperatur gegeben wird. Wenn die spezifischen Wärmen beim konstanten Volumen einzelner Bestandteile der Gasmischung mit $s_{j,v}$ bezeichnet und die Massen dieser Gase in demselben Volumen V

* Originalüberschrift dieser Arbeit: *O brzini rasprostiranja zvuka u smjesama jednoatomnih plinova.*

wie dem der Gasmischung gedacht werden, dann wird die mittlere absolute Temperatur der Gasmischung durch die Formel (2 a), bzw. (2 b) gegeben sein. $s_{j,v}\,\varrho_{j,0}\,T_j$ bedeutet diejenige innere Energie, welche in der Masse des Einheitsvolumens (d. h. in der Masse $\varrho_{j,0}$) enthalten ist, während $s_{j,v}\,T_j$ die innere Energie bedeutet, die in der Masseneinheit des entsprechenden Gases enthalten ist. Man definiert, wie bekannt, diese innere Energie der Masseneinheit eines einatomigen idealen Gases als die gesamte kinetische Energie infolge der progressiven Bewegung der Gasmolekeln (vgl. (3)), wo $N_j/\varrho_{j,0}$ die Zahl der Molekeln der Masseneinheit des Gases und $(N_{j,c}/\varrho_{j,0})\,dc_j$ die Zahl der Molekeln mit der Geschwindigkeit zwischen c_j und c_j+dc_j (ohne Rücksicht auf die Richtung) bezeichnet. In der Masse $\varrho_{j,0}$, also in der Volumeneinheit, hat man $\varrho_{j,0}$-mal so viele Molekeln wie in der Masseneinheit woraus folgt (4 a) bzw. für das Einheitsvolumen der Gasmischung (4 b). Es resultiert also (5 a), bzw. (5 b), und die Gleichung (2 b) geht durch die Anwendung von (5 a) über in die Gleichung (6).

Da man von der Gleichung (6) mittels der Relation (7) zu der Formel (1) gelangen kann, bedeutet dies wegen der eben angeführten Ableitung der Gleichung (6), dass die Formel (1) auch dann ihre Gültigkeit behält, wenn die einzelnen Gase – die Bestandteile der Mischung – vor der Mischung verschiedene Temperaturen aufweisen und mit diesen (verschiedenen Temperaturen) untereinander gemischt werden. Mit anderen Worten: man kann die chemisch voneinander verschiedenen und vollkommen indifferenten idealen Gase mit verschiedener Temperatur nehmen, bei der Mischung solcher Gase wird die Schallgeschwindigkeit – wie es scheint – mittels der Formel (1) gegeben.

Für vollkommen ideale Gase wird weiter die Gleichung (9) fü $s_{j,v}$ abgeleitet. Dieser theoretisch abgeleitete Ausdruck für $s_{j,v}$ wird dann mit den experimentellen Werten für einatomige Gase verglichen; dabei stellt sich eine gute Übereinstimmung heraus.

Angenommen auf der am 26. III. 1960 abgehaltenen Sitzung der Abteilung für mathematische, physikalische und technische Wissenschaften.

Olga Šarc-Lahodny i Miroslav Karšulin

PROMJENE STRUKTURE KAOLINITA IZMEĐU 100° I 600° C

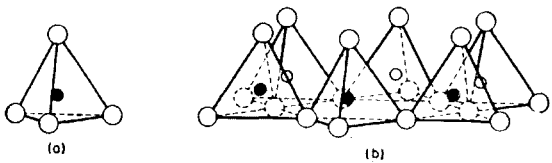
Kaolinske gline su mineralne rudne sirovine, na kojima se osnivaju važne grane industrije. One na pr. služe u keramici, a upotrebljavaju se i kao aktivna punila u industriji kaučuka i kao adsorbensi i katalizatori u rafinaciji ulja i preradi nafte. Djelatna komponenta u tim glinama je mineral kaolinit, a poznavanje njegove strukture i svojstava bitno je za procjenjivanje tehnološke vrijednosti i određivanje tehnološke funkcije neke kaolinske gline.

Keramičara prvenstveno interesiraju fizikalne i kemijske promjene kaolinita pri relativno visokim temperaturama, t. j. od 500° C do 1400° C. Ocjenjivanje pak aktiviteta neke gline u pogledu adsorpcionih ili katalitičkih svojstava zahtijeva poznavanje strukturnih promjena kaolinita i pri nižim temperaturama, dakle u intervalu od takozvanih običnih temperatura pa do 600° C.

Ovaj rad tiče se suptilnih promjena strukture kaolinita upravo u temperaturnom području između 100° i 600° C, a rezultati ovih istraživanja daju objašnjenje u pogledu dosada još nedovoljno istraženih promjena najfinije strukture kaolinita.

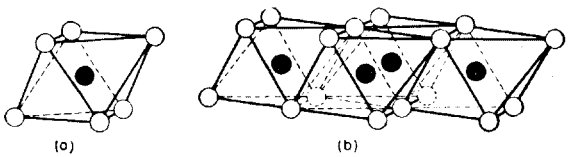
Radovi L. Paulinga [1], J. W. Gruner [2], G. W. Brindleya i K. Robinsona [3] daju nam dobar uvid u kristalnu strukturu kaolinita. U kemijskom pogledu kaolinit je jednostavnog sastava, te ga možemo uvrstiti u hidratizirane aluminosilikate, koji idu u grupu t. zv. lisnatih ili filosilikata. Kemijski sastav idealiziranog kaolinita, kakvog u prirodi gotovo i nema, jest $Al_2O_3 \cdot 2SiO_2 \cdot 2H_2O$. Međutim ta formula ne ukazuje na kristalnu strukturu tog, za tehnologiju toliko važnog minerala, a ipak su tehnološka svojstva jedino i isključivo funkcija strukture.

Kaolinit je, prema gore spomenutim autorima, izgrađen iz jednog sloja Si-O-tetraedara, koje sačinjavaju ioni kisika, a u središtu takva tetraedra smješten je silicijev ion. Ovaj strukturni elemenat kaolinita prikazan je na slici 1. Takav tetraedrijski Si-O-OH-sloj povezan je u



Sl. 1. Prvi strukturni element kaolinita: Si-O-OH-tetraedri

kaolinitu sa slojem $Al(OH)_3$, koji je također lisnate strukture, a sličan je mineralu hidrargilitu, koji dolazi u prirodi, a dobivamo ga i sintetskim putem. $Al(OH)_3$-sloj sastoji se od oktaedara OH-iona, u čijem se središtu nalazi ion aluminija, kao što to pokazuje slika 2. Do spajanja



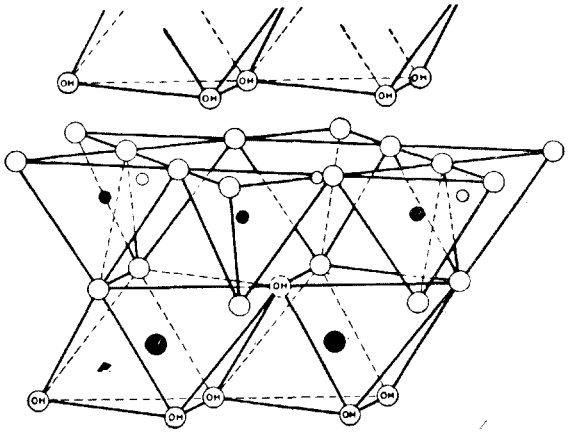
Sl. 2. Drugi strukturni element kaolinita: Al-OH-oktaedri

tetraedrijskog Si-O-OH-sloja i $Al(OH)_3$-sloja dolazi uslijed reakcije između OH-iona na vrhovima Si-O-OH-tetraedara sa OH-ionima oktaedrijskog sloja Al-OH, uslijed čega nastaje kombinirani sloj Si-O-tetraedara i Al-O-OH-oktaedara, što u stvari predstavlja elementarni listić kaolinita, kako ga pokazuje slika 3.

Na slici 4 (a, b, c) prikazana je projekcija elementarnog listića kaolinita u smjeru osi *c*, dakle okomito na listić, t. j. na ravninu a-b. Na slici (4 a) je vidljiv poredak Si-O-tetraedara kao i smještaj Al-O-OH-oktaedara (4 b) i, konačno, projekcija oba sloja (4 c).

Promatramo li strukturu kaolinita u projekciji u smjeru osi *a*, kako to prikazuje slika 5, vidimo, da je jedan sloj OH-iona oktaedrijskog sloja smješten na bazi listića, dok se ostali OH-ioni nalaze u prostorima između vrhova tetraedara.

Iz heksagonskog poretka Si-O-tetraedara kao i iz elektronsko-mikroskopske snimke kaolinitnih kristalita, koju prikazuje slika 6 mogla bi se pretpostaviti heksagonalna struktura kristalita kaolinita. Strukturnom analizom rentgenskim zrakama pomoću Debye-Scherrerove metode ustanovio je međutim GRUNER, da kaolinit kristalizira pseudoheksagonalno, monoklinski, a u novije vrijeme uspjelo je G. W. BRINDLEYU i K. ROBINSONU, i to god. 1946, na osnovu indiciranja preciznih rentgenograma, dobivenih sa vrlo dobro kristaliziranim kaolinitom, da odredi triklinsku simetriju kristala kaolinita.



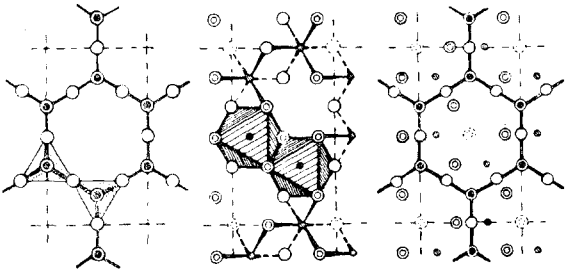
Sl. 3. Elementarni listić kaolinita

Na slici 7 prikazan je rentgenogram, koji smo snimili sa kaolinitom iz Skočaja sa Ličke Plješivice i s kojim su izvršena i naša ispitivanja, koja se tiču strukturne promjene kaolinita u području temperature između 100° i 600° C. Na ovom su rentgenogramu jasno vidljivi bazalni refleksi, koje daju slojevi OH-iona na plohama (001) i (002).

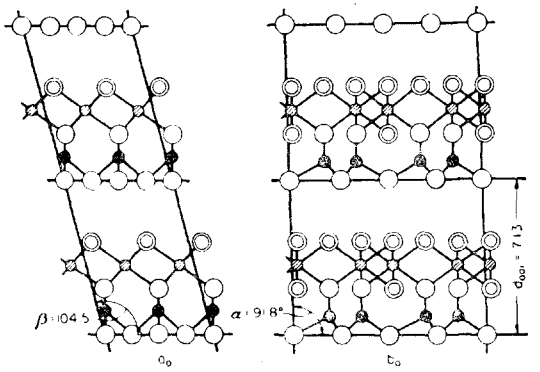
Na tabeli 1 prikazani su refleksi vrlo dobro kristaliziranog kaolinita, po G. W. BRINDLEYU, a naš uzorak kaolinita sa Skočaja daje identične reflekse.

Elektronsko-mikroskopsku snimku kaolinita sa Skočaja prikazuje slika 8, na kojoj se vidi, da je ovaj kaolinit vrlo sitno kristaliničan, tako da se pseudoheksagonalna struktura jedva nazire. Do ovog jakog ste-

pena usitnjavanja vjerojatno je došlo uslijed velikih pritisaka, kojima je skočajski kaolinit bio izložen za vrijeme geneze, odnosno kasnije. Sam kaolinit veoma je kompaktan, čvrst, gotovo je izgleda jedrog kamena. Da se ovaj kaolinit nalazio pod visokim tlakovima, vidljivo je iz lijepo izraženog gorskog zrcala.

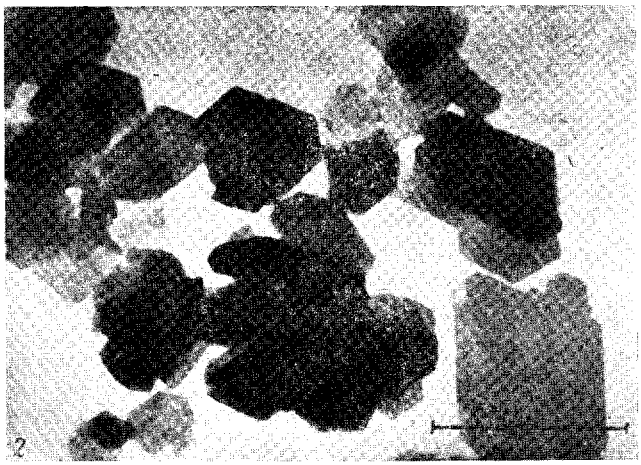


Sl. 4 Projekcija elementarnog listića kaolinita u smjeru osi *c*



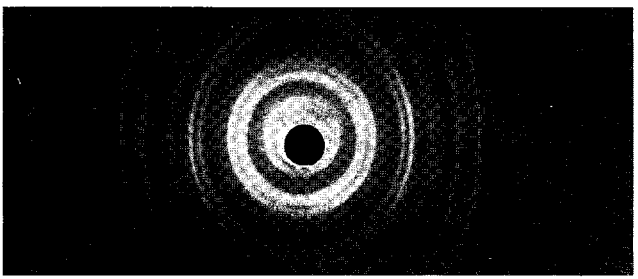
Sl. 5. Projekcija kaolinitne rešetke u *smjeru osi a*

Iz gore prikazane strukture kaolinita izlazi, da voda, koja se oslobađa zagrijavanjem, nastaje u stvari izlaskom OH-iona iz strukturne rešetke kaolinita. Ne radi se dakle o dehidrataciji, već o dehidroksilaciji kaolinita. Nadalje izlazi iz strukturne sheme kaolinita, da OH-ioni međusobno nisu ekvivalentni s obzirom na njihovo mjesto u rešetci. Kad se



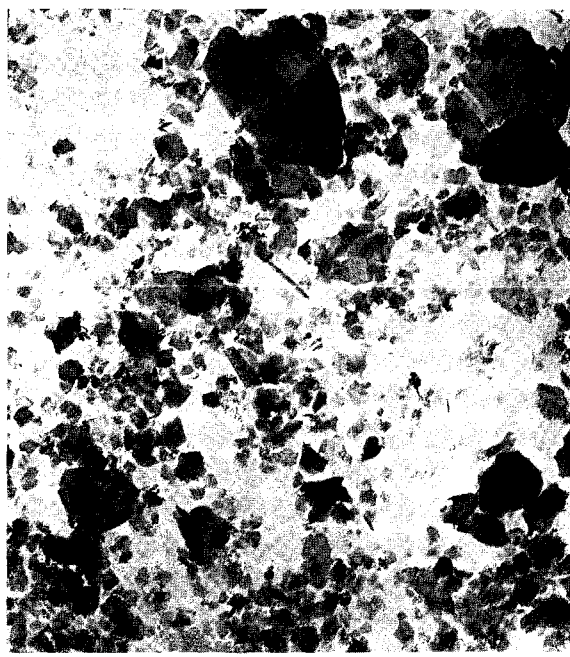
Sl. 6. Elektronsko-mikroskopska slika jednog dobro kristaliziranog kaolinita

zagrijava kaolinit treba, prema tome, očekivati, da će pri niskim temperaturama prvo izlaziti bazalni OH-ioni, koji su u rešetci vezani slabijim silama, samo na Al-ione, a tek će se pri višim temperaturama osloboditi OH-ioni, ugrađeni među tetraedrima, jer su znatno jače vezani uz njima susjedne pozitivno nabijene Al-ione i Si-ione.



Sl. 7. Debyeogram kaolinita iz Skočaja sa Ličke Plješivice

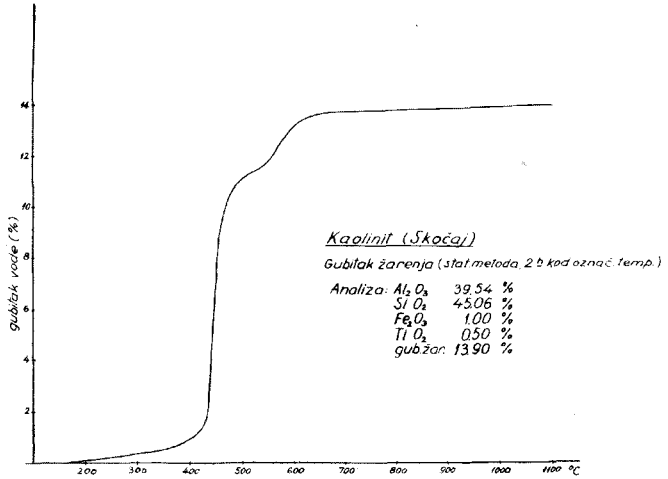
Na vjerojatnost takve razlike u ponašanju OH-iona u strukturnoj rešetci kaolinita upozorio je U. HOFMANN privatnim saopćenjem R. SCHWARZU [4], i to još godine 1936. Ipak se do godine 1955. [13] nije eksperimentalnim putem provjerilo to mišljenje, jer metode dehidroksilacije kaolinita nisu još tada bile tako precizne, da bi omogućile



Sl. 8. Elektronsko-mikroskopska snimka kaolinita iz Skočaja; 1 cm na slici = 1 μ u naravi

registriranje takvih suptilnih razlika. Većinom se dehidroksilacija izvodila statičkom metodom, t. j. grijanjem uzorka na određenoj temperaturi izvjesno vrijeme, a pritom je mjeren gubitak težine u postocima ili u molovima. Krivulje dehidroksilacije, dobivene na taj način, pokazale su jednoličan tok, iz kojeg se zaključilo na gubitak težine od cca 13,9%,

što odgovara gubitku vode od 2 mola, nastalih izlaženjem odgovarajuće količine OH-grupa iz rešetke kaolinita. Međutim variranjem vremena zagrijavanja, kao i količine za pojedino određivanje uzetog uzorka, dadu se registrirati i statičkom metodom krivulje, na kojima diskontinuiteti (infleksije) ukazuju na promjene finije strukture rešetke uslijed dehidroksilacije. Takvu krivulju prikazuje slika 9; na njoj je vidljiv



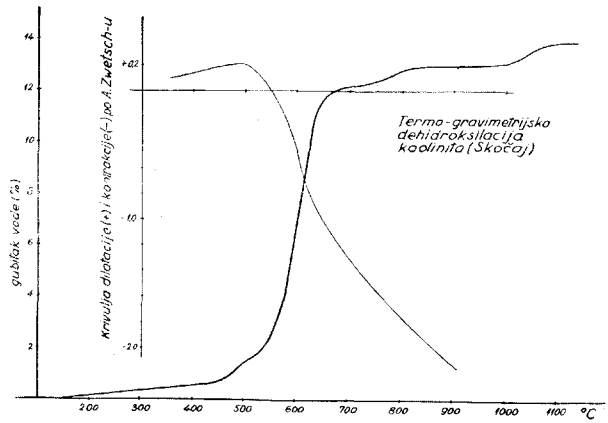
Sl. 9. Krivulja statičke dehidroksilacije kaolinita iz Skočaja (s kemijskom analizom)

tok krivulje statičke dehidroksilacije kaolinita iz Skočaja. Na grafičkom prikazu unesena je također i kemijska analiza upotrebljenog uzorka. Prema tome je vidljivo, da glavna količina OH-grupa izlazi u obliku vode u temperaturnom intervalu od 430° C do 510° C, i to odgovarajući gubitku žarenjem od oca 11,5%, dok ukupni gubitak žarenjem iznosi 13,9%. Preostale OH-grupe, koje odgovaraju količini vode od 2,4%, izlaze iz rešetke kaolinita tek u temperaturnom području između 510° i 1100° C.

Odnosne diskontinuitete krivulje dehidroksilacije kaolinita zapazili smo već 1955. godine, i ta je pojava dala povoda ovim ispitivanjima u smislu provjeravanja citirane pretpostavke U. Hofmanna o neekvivalentnosti OH-grupa u rešetki kaolinita.

Mnogo egzaktnije krivulje termičke dehidroksilacije, nego li ih možemo postići statičkom metodom, daje kontinuirana metoda dehidroksilacije termovagom. No i tu je važno naglasiti, da rezultati istraživanja u bitnoj mjeri ovise o temperaturnom režimu zagrijavanja i o količini uzorka u pokusu. Na slici 10. prikazan je tok termogravimetrijske krivulje kaolinita iz Skočaja, na kojoj se jasno razabiru diskontinuiteti, koji odgovaraju odnosnim fazama procesa dehidroksilacije:

1. početni, gotovo linearni tok do temperature cca 450° C, kojoj odgovara gubitak žarenjem od cca 0,7%;



Sl. 10. Krivulja termogravimetrijske dehidroksilacije (termovagom) kaolinita iz Skočaja i krivulja dilatacije za kaolinit po A. Zwetschu

2. diskontinuitet krivulje između 450° i 530° C, koji se ispoljava najprije ubrzanim gubitkom, a zatim opet usporavanjem gubitka žarenjem;

3. strmi uspon krivulje dehidroksilacije u području između 530° i 630° C, koji odgovara gubitku žarenjem od cca 11%, a označuje otpuštanje glavnog dijela OH-iona iz kristalne rešetke;

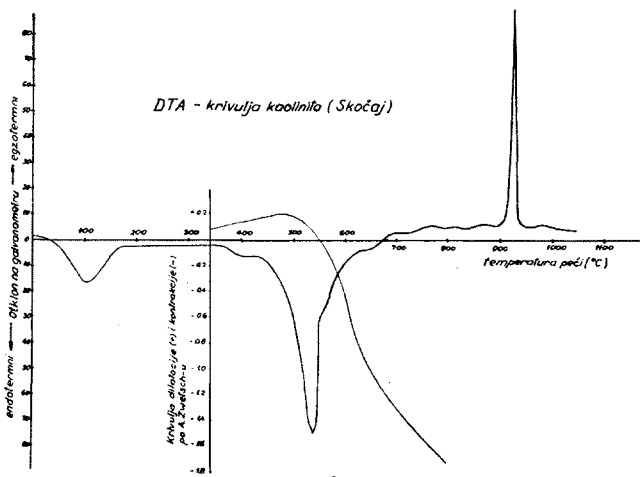
4. krivulja dehidroksilacije ponovo se usporava sve do 720° C, što odgovara gubitku žarenjem od cca 12,2%;

5. zatim slijedi ubrzanje otpuštanja OH-iona sa maksimumom od 13%, koji je postignut kod 830° C;

6. dalje zagrijavanje do 960° C ne uzrokuje gotovo nikakav gubitak žarenjem, a od te temperature sve do 1100° C izlaze konačno još preostale OH-grupe iz rešetke, što iznosi svega oko 1% vode.

Na dijagram termogravimetrijske dehidroksilacije kaolinita (slika 10) unijeli smo također i dilatometrijsku krivulju jednog kaolina, koju je objavio A. Zwetsch [5]. Iz te je krivulje vidljivo, da uslijed grijanja do 500° C dolazi do dilatacije, a zatim do kontrakcije, što je u skladu s maksimalnom strminom termogravimetrijske krivulje. Takav karakter dilatacione krivulje, koje tok vjerno prati termogravimetrijsku krivulju, smatrali smo potvrdom hipoteze U. Hofmanna, t. j. da zaista postoji energetska neekvivalentnost OH-iona, a u ovisnosti od njihova mjesta u rešetki kaolinita.

Tu razliku u termičkom ponašanju OH-grupa potvrđuje i dalja metoda dehidroksilacije, a to je diferencijalno-termička analiza (DTA), koju smo proveli s kaolinitom iz Skočaja, a tok DTA-krivulje prikazan je na slici 11. Prema tome razabiramo na DTA-krivulji kaolinita iz Skočaja:



Sl. 11. DTA-krivulja kaolinita iz Skočaja

1. endotermni minimum kod 100° C, koji indicira gubitak fizikalno adsorbirane vode;

2. kod 350° C počinje jedan slabi, ali ipak jasno izražen endotermni efekt, koji završava kod cca 440° C;

3. u nastavku dolazi do jako izraženog endotermnog minimuma, koji označuje izlaženje glavnog dijela OH-grupa iz kaolinita;

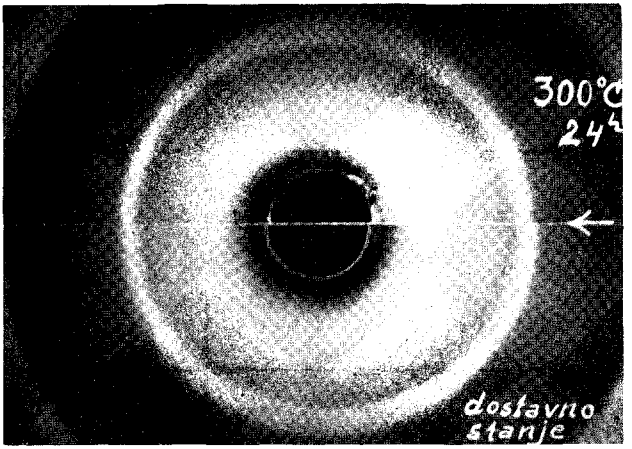
4. između 900° i 1000° C nastaje izraziti egzotermni efekt, na koji se u ovoj radnji ne ćemo osvrnuti.

Potrebno je naročito naglasiti, da je i kod DTA-krivulja režim zagrijavanja od odsutnog značaja za diferenciranje tipičnih područja dehidroksilacije, što je uvjetovano, uz ostale faktore, vremenskim tokom procesa. Kod naših pokusa iznosila je brzina zagrijavanja 5° C u minuti i zapazili smo, da ta brzina zagrijavanja otkriva najveći broj diskontinuiteta.

Iz prije iznesenog vidimo, da razne metode dehidroksilacije kaolinita ukazuju na to, da izlaženje OH-grupa iz rešetke uslijedi dijelom već u području između cca 300° do 500° C, dok glavni dio OH-grupa izlazi u području između 500° i 600° C.

Očito je, dakle, da je jedan dio OH-grupa slabije vezan u rešetci kaolinita, te je za to potrebna manja termička energija, da bi se one oslobodile iz rešetke. Prema U. HOFMANNu trebale bi to biti OH-grupe, koje se nalaze na bazama Al-O-OH-oktaedara, a to su upravo ove OH-grupe, koje daju tipične bazalne reflekse, kao na pr. onaj 001-ravnine, što odgovara bazalnom odstojanju od 7,15 Å. Da bi takvo naziranje i eksperimentalno utvrdili, sistematski smo ispitivali promjene bazalnog refleksa kod 7,15 Å, kao i 002-refleksa kod 3,556 Å, i to u ovisnosti o temperaturi i vremenu zagrijavanja uzoraka kaolinita iz Skočaja.

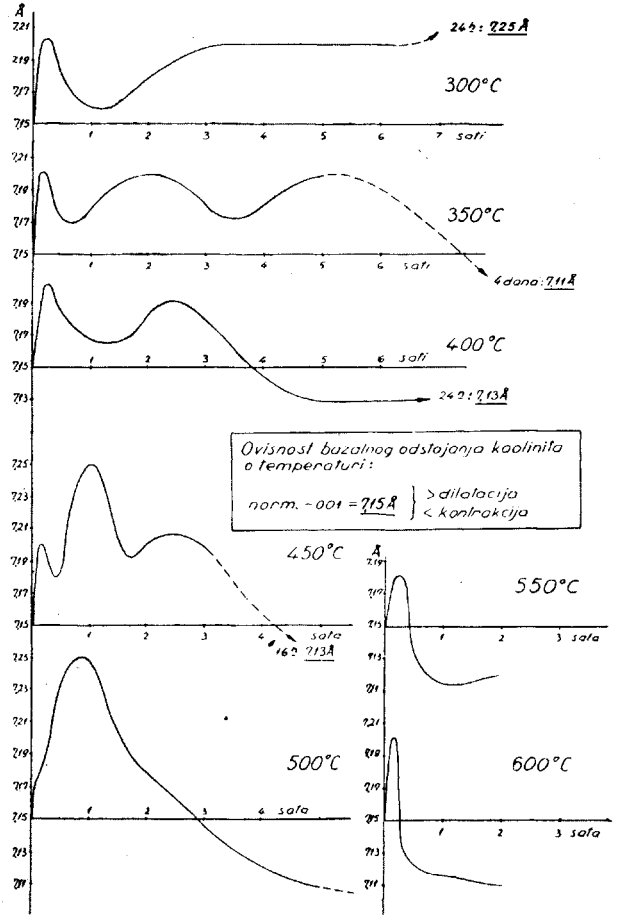
Slika 12 prikazuje promjenu 001-refleksa uzorka kaolinita, koji je bio 24 sata na temperaturi od 300° C, u usporedbi sa 001-refleksom uzorka u dostavnom stanju. Iz reprodukcije debyeograma izlazi, da zagrijavanjem kaolinita kroz 24 sata na 300° C dolazi do izrazitog smanjenja promjera bazalnog refleksa, t. j. kut (Θ) refleksa postaje manji, odnosno identitetno odstojanje (d) postaje veće. To odstojanje nakon 24 sata grijanja na 300° C iznosi umjesto 7,15 Å kod kaolinita u dostavnom stanju, 7,25 Å, a to opet ukazuje na dilataciju rešetke, što je u skladu sa podacima dilatometrijske krivulje kao i sa rezultatima termogravimetrijske i DTA-krivulje.



Sl. 12. Promjena 001 refleksa uzorka kaolinita grijanog na 300° C kroz 24 sata u usporedbi s 001 refleksom kaolinita u dostavnom stanja

Na slici 13 grafički su prikazane promjene bazalnog odstojanja kaolinita pri raznim temperaturama, i to 300°, 350°, 400°, 450°, 500°, 550° i 600° C, a isto tako su prikazane i vremenske promjene 001-refleksa pri tim temperaturama. Iz tih krivulja razabiramo, da u ovisnosti o vremenu nastupa najprije dilatacija, koja zatim trajanjem zagrijavanja opada, da bi ponovo porasla, kao što je to slučaj s preparatima grijanim na 300° C, odnosno da nakon nekoliko oscilacija odstojanja konačno uslijedi kontrakcija rešetke, kao što je to slučaj s preparatima grijanim na 350°, 400°, 450° C. Pri 500° C nastaje nakon jednosatnog zagrijavanja maksimalna dilatacija, koja daljim zagrijavanjem postaje manja, da bi nakon trosatnog zagrijavanja prešla u kontrakciju rešetke. Pri 500° C je ujedno efekt dilatacije najizraženiji. Pri 550° i 600° C promjene su bazalnog odstojanja mnogo manje, a prijelaz u područje kontrakcije uslijedi brže. Pri 600° C nastaje konačno znatna promjena rešetke, indicirana, dapače, i nestankom 001-refleksa, do čega dolazi nakon dvosatnog zagrijavanja na toj temperaturi.

Oscilacije 001-refleksa u ovisnosti u trajanju zagrijavanja kaolinita na pojedinim temperaturama, kako su prikazane na dijagramima na



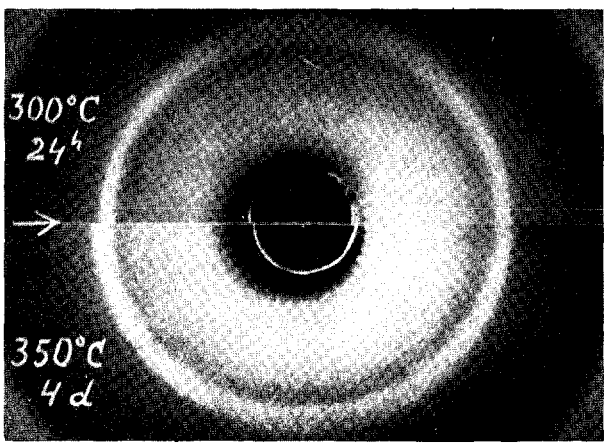
Sl. 13. Grafički prikaz promjene bazalnog refleksa kod 7,15 Å u ovisnosti o temperaturi i trajanju grijanja

slici 13, uvjetovane su vjerojatno razlikama jakosti veza između pojedinih OH-grupa u bazalnoj ravnini. Da je postojanje takvih veza realno, upućuju i rezultati ispitivanja strukture kaolinita, apsorpcijom infracrvenih zraka. H. V. VAN DER MARCH i J. H. L. ZWIERS [6] našli su, naime, da kaolinit daje četiri apsorpcione vrpce u infracrvenom području, i to kod 2,71, 2,74, 2,75, 2,91 μ, koje prema tim autorima odgovaraju OH-grupama ugrađenim:

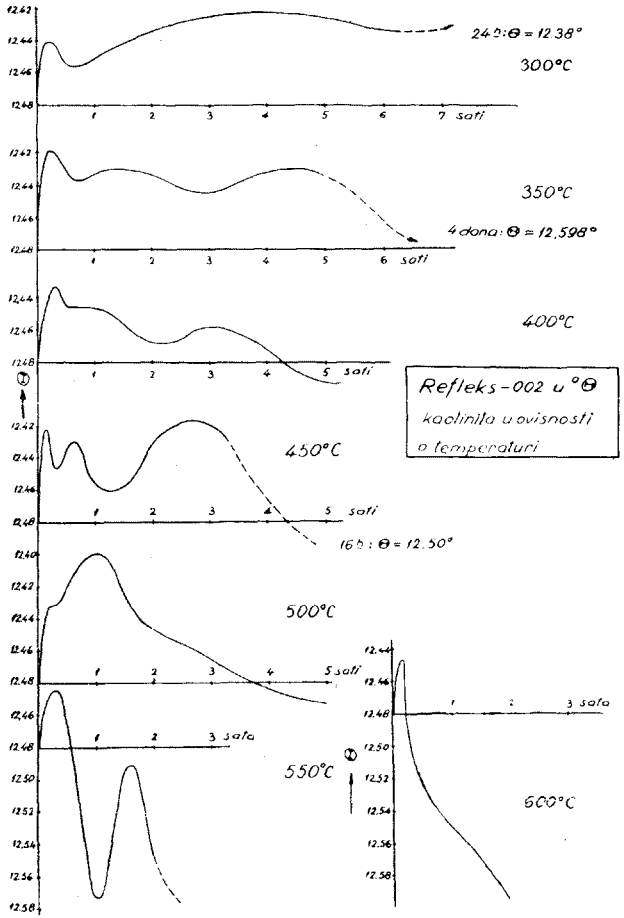
1. na rubu kristalnih listića;
2. na bazalnoj strani oktaedarskog sloja;
3. OH-ionima između vrhova tetraedara i
4. OH-ionima, koji čine vezu, putem vodikovih mostova, do susjednog elementarnog listića.

U programu naših daljih istraživanja ovog vrlo zanimljivog mehanizma dilatacije kaolinita pri niskim temperaturama predviđeno je sistematsko ispitivanje apsorpcije infracrvenih zraka, i to na preparatima, koje prethodno zagrijavamo na temperature između 300° i 600° C.

Na slici 14 prikazana je reprodukcija rentgenske snimke 001-refleksa kaolinita, koji pokazuje maksimalnu dilataciju nakon grijanja



Sl. 14. 001 refleks kaolinita pri maksimalnoj dilataciji rešetke uslijed grijanja kroz 24 sata na 300° C u usporedbi s 001 refleksom, koji indicira maksimalnu kontrakciju nakon četverodnevnog grijanja na 350° C



Sl. 15. Grafički prikaz 002 refleksa u ovisnosti o temperaturi i trajanju grijanja

od 24 sata pri 300° C, a u usporedbi sa uzorkom, koji nakon četverodnevnog zagrijavanja na 350° C pokazuje kontrakciju, t. j. pomak bazalnog odstojanja na 7,11 Å.

Naši rezultati promjena bazalnog refleksa kaolinita kod 7,15 Å zahtijevaju analogne promjene 002-refleksa, koje bi morale uslijediti simbatno s promjenama 001-refleksa. Da je to zaista tako, izlazi jasno iz grafičkog prikaza promjena 002-refleksa kaolinita s temperaturom i vremenom zagrijavanja. Na tom dijagramu unesene su promjene kuta Θ refleksa, dobivene CuK_α-zrakama, jer su razlike refleksa u ångströmima kod odnosnih kutova vrlo malene. Iz grafičkih prikaza na slici 15 dade se lijepo razabrati istovjetnost promjena dilatacije i kontrakcije 001-refleksa s odnosnim promjenama 002-refleksa.

Izveli smo analogna ispitivanja ovisnosti položaja 001-refleksa o temperaturi i vremenu zagrijavanja i sa nekim drugim kaolinima, i to s otoka Milosa, sa češkim kaolinima oznake »osmoze« i »premier« i s kaolinom firme Riedel-de Haen A. G. (Selze, Hannover) i ustanovili smo, da se ponašaju podjednako kao i kaolin iz Skočaja.

DISKUSIJA

Odavno je poznato, da kemijska analiza kaolinitnih glina, a napose minerala kaolinita, ne dopušta zaključke s obzirom na svojstva dotičnih supstanca. Termičke metode istraživanja omogućuju mnogo dublji uvid u strukturu kaolinita i omogućuju tumačenje često kompliciranog ponašanja tog minerala. To se, dakako, tiče u prvom redu onih svojstava kaolinita, koja ga čine osnovnom sirovinom u keramičkoj proizvodnji. Prema tome su vrlo dobro ispitana svojstva kaolinita u temperaturnom intervalu od 700° do 1400° C. No upravo na nižoj granici tog temperaturnog područja, toliko interesantnog i važnog za keramiku, dakle pri 700° C, predleži sistem, čija struktura nije do danas još objašnjena. Tu se radi o t. zv. problemu matakaolina, t. j. da li grijanjem kaolinita na 700° C nastaje novi spoj, sastava $Al_2O_3 \cdot 2SiO_2$ (= metakaolin), ili pak pri toj temperaturi nastaje heterogena smjesa Al_2O_3 i SiO_2. Ovaj je problem ne samo od teoretskog već i od zaista velikog praktičnog značenja, jer bi se njegovim rješenjem objasnilo stvaranje mulitne faze ($3\ Al_2O_3 \cdot 2SiO_2$), koja čini bitnu komponentu porculana.

Kako dakle u pogledu stanja sistema Al_2O_3 — SiO_2, nastalog zagrijavanjem kaolinita na cca 700° C, ne postoji još jasna predodžba, to je

razumljivo, da nisu dovoljno poznati procesi, koji se zbivaju uslijed zagrijavanja kaolinita u intervalu temperatura između 100° i 700° C, iako je broj istraživanja na tom području vrlo velik. Za keramičku proizvodnju ovaj temperaturni interval možda i nije toliko važan, no čitav niz svojstava kaolinskih glina i kaolinita, a u prvom redu kemijska i koloidna svojstva, zavise o promjenama kaolinita, koje nastaju zagrijavanjem do 700° C.

Razne metode termičke dehidroksilacije, t. j. statička, pa dinamička, nadalje izotermna i izobarna metoda, u većini slučajeva ne pružaju uvid u suptilno zbivanje unutar kristalne rešetke kaolinita u toku zagrijavanja od 100° do 700° C. Ipak je dobro poznato, da je topivost kaolinita, a naročito selektivna topivost, u bitnoj mjeri ovisna o stepenu i o trajanju zagrijavanja kao i o atmosferi, u kojoj se to zagrijavanje provodi. To vrlo instruktivno izlazi na pr. iz rada G. F. Hüttiga i E. Herrmanna [7], a isto i iz niza radova drugih autora. Međutim ponašanje kaolinita u tom pogledu nije sasvim jasno, a i nepregledno je, jer je ovisno o velikom broju parametara.

Mislimo, da u pogledu strukturnih promjena, kao izraz termičkog djelovanja na rešetku kaolinita, najdublji uvid pruža dilatometrijska metoda istraživanja. To izlazi iz dilatograma W. Stegera, citirano po A. Zwetschu [5], na kojima se jasno razabiraju diskontinuiteti, koji ukazuju na odnosna zbivanja u kristalnoj rešetki kaolinita, a naročito u temperaturnom intervalu zagrijavanja od 100° do 600° C.

Nije prema tome dovoljno da se proces dehidroksilacije formulira sa

$$Al_2(OH)_4(Si_2O_5) \xrightarrow{\text{cca } 550^0\text{ C}} Al_2O_3 \cdot 2\,SiO_2 + 2H_2O,$$

jer dehidroksilacija sasvim sigurno ne uslijedi odjednom, momentano, već se taj proces vrši postepeno. Na takav mehanizam dehidroksilacije upućuju i rezultati starijih istraživanja, kao oni O. Koernera, K. Pukalla i H. Salmanca [8], koji su izotermnom dehidroksilacijom kroz dugo vrijeme od 7 mjeseci, odnosno 18 mjeseci ustanovili, da se OH-ioni iz rešetke kaolinita oslobađaju postepeno, već prema temperaturi zagrijavanja. Prema tim autorima izlazi do 445° C cca 0,5 mola H_2O pri 445° C cca 1 mol H_2O, a tek pri 490° daljih 0,5 mola H_2O. Međutim to je idealizirano izraženo, jer iznad 490° zaostaju OH-ioni u rešetci, koji izlaze tek zagrijavanjem na znatno više temperature.

U novije vrijeme objavio je M. Nakahira [9] krivulje termičke dehidratacije kaolinita, na kojima su donekle vidljivi diskontinuiteti (ste-

penice) u intervalu temperatura između cca 630° i 930° C. Taj autor smatra, da mu je uspjelo odrediti krivulje termičke ravnoteže. To međutim nije vjerojatno, jer se termička ravnoteža dehidroksilacije kaolinita ne može uspostaviti pri običnom tlaku, što uostalom izlazi iz hidrotermalnih uvjeta pri sintezi kaolinita.

R. Roy, D. M. Roy i E. E. Francis [10] ispitivali su dehidroksilaciju kaolinita 1. elektronskim ogibom, 2. rentgenskom strukturnom analizom i 3. apsorpcijom infracrvenih zraka, no ta se istraživanja tiču uglavnom zbivanja u rešetci kaolinita od 500° C na više temperature, a poduzeta su, da bi se razjasnio problem »metakaolina«, pa prema tome ne predstavljaju doprinos istraživanjima procesa dehidroksilacije do 500° C. Mnogo dublji uvid u to područje daju istraživanja infracrvene apsorpcije H. W. van der Marcha i J. H. L. Zwiersa (loc. cit.), koja smo već spomenuli.

G. W. Brindley i M. Nakahira [11] ispitivali su kinetiku dehidroksilacije kaolinita između 477° i 527° C. Ustanovili su, da proces dehidroksilacije uslijedi po shemi reakcije I. reda. Autori smatraju, da se dehidroksilacija zbiva putem OH-radikala, te da nastaje i aktivni kisik. Spomenuti autori zapazili su, da zagrijavanjem kaolinita nastaje smanjenje intenziteta bazalnog refleksa 001, a difuzni karakter refleksa da ukazuje na smanjivanje kristalita u manje jedinice. Pomak bazalnog refleksa uslijed zagrijavanja kaolinita u temperaturnom intervalu od 300° do 500° C ti autori nisu uočili.

R. R. West [12] objavio je DTA-krivulje i termogravimetrijske i dilatometrijske krivulje kaolinita. Na svim tim krivuljama dolaze jasno do izražaja diskontinuiteti u području između 300° i 600° C, no autor ih nije obrazložio. Rentgenografska istraživanja R. R. Westa tiču se temperature između 1000° i 1600° C, pa se prema tome ne tiču dehidroksilacije, koja uslijedi pri znatno nižim temperaturama.

Zaključno možemo reći, da smo zapazili pomak bazalnih refleksa kaolinita u intervalu temperatura od 300° do 600° C, što je u skladu s opažanjima drugih autora, ukoliko se ta zapažanja tiču DTA, termogravimetrijske i dilatometrijske analize. Rezultati naših pokusa daju, međutim, objašnjenje mehanizma dehidroksilacije, jer povezuju promjene rentgenske strukture s termičkim svojstvima kaolinita, koja su određena makro-metodama. Naša su ispitivanja prema tome potvrdila nabačenu misao U. Hofmanna o energetskoj neekvivalentnosti OH-iona kaolinitne rešetke. Ona ukazuju, da se ta neekvivalentnost ne tiče samo pojedinih slojeva OH-iona, već da i između OH-iona pojedinog sloja,

na pr. bazalnog, postoje energetske razlike, već prema tome, na kojem se mjestu tog sloja nalaze OH-ioni, t. j. da li u sredini ili na rubu listića. Postepenim izlaskom OH-iona iz bazalnih ravnina, i to međusobnim »anhidriranjem« (O H OH), dolazi na tim mjestima do stvaranja sve većeg broja O-iona, a uslijed toga i do odbijanja pojedinih elementarnih listića kaolinita, što je u skladu s opće poznatom dilatacijom kaolinita u području od 300° do 550° C.

Tek kada su pri odgovarajućim višim temperaturama zahvaćeni i OH-ioni, koji se nalaze između Si-O-tetraedara, dolazi do sloma čitave rešetke kaolinita, popraćenog izrazitom makro-kontrakcijom kaolinita.

U nastavku našeg rada ispituje se kvantitativno odnos rentgenografski ustanovljene dilatacije rešetke naprama broju (količini) OH-iona, koji su izašli iz bazalnih ravnina rešetke. Čini se, da bi se mogle i odbojne sile između listića definirati i tako kvantitativno odrediti iznos dilatacije kaolinita. Da bi se to postiglo, potreban je dakako još dublji uvid u strukturne promjene elementarnih listića kaolinita uslijed parcijalne dehidroksilacije, a te ćemo podatke dobiti sistematskom analizom apsorpcije infracrvenih zraka, u ovisnosti o stupnju dehidroksilacije, uz variranje temperature i vremena zagrijavanja.

LITERATURA

1. *L. Pauling*, Proc. nat. Acad. Sci. USA *16*, 123 (1930).
2. *J. W. Gruner*, Z. Kristallogr. *83*, 75 (1932).
3. *G. W. Brindley* i *K. Robinson*, Mineralog. Mag. J. mineralog. Soc. *27*, 242 (1946).
4. *R. Schwarz* i *G. Trageser*, Z. anorg. allg. Chem. *227*, 179 (1936).
5. *A. Zwetsch*, Ber. DKG *32*, 63 (1955).
6. *H. V. van der March* i *J. H. L. Zwiers*, Silicates ind. *24*, 359 (1959).
7. *G. F. Hüttig* i *E. Herrmann*, Koll. Z. *92*, 9 (1940); Z. Elektrochem. *47*, 282 (1941).
8. *O. Koerner*, *K. Pukall* i *H. Salmang*, Z. anorg. allg. Chem. *225*, 69 (1935).
9. *M. Nakahira*, Mineralog. Journ. *1*, No. 3, 129 (1954).
10. *R. Roy*, *D. M. Roy* i *E. E. Francis*, J. Amer. Ceram. Soc. *38*, 198 (1955).
11. *G. W. Brindley* i *M. Nakahira*, J. Amer. Ceram. Soc. *40*, 346 (1957).
12. *R. West*, Amer. Ceram. Bull. *37*, 262 (1958).
13. *M. Karšulin*, Dechema-Monographien Bd, *27*, 91 (1956).

Primljeno na sjednici Odjela za matematičke, fizičke i tehničke nauke dne 7. VII. 1960.

Olga Šarc-Lahodny und Miroslav Karšulin

STRUKTURÄNDERUNGEN DES KAOLINITS IM TEMPERATURBEREICH 100°–600° C*

In einer privaten Mitteilung an R. Schwarz [4] gab U. Hofmann der Vermutung Ausdruck, dass das energetische Verhalten der OH-Ionen im Kristallgitter des Kaolinits von der Art des Einbaues im Gitter abhängig ist.

M. Karšulin [13] erklärte das thermische Verhalten des Kaolinits, uzw. die thermische Dehydroxylierung und das dilatometrische Verhalten auf Grund dieser von U. Hofmann vermuteten Ansicht über den Charakter der OH-Ionen des Kaolinitgitters.

In dieser Arbeit wurde mittels röntgenographischer Strukturuntersuchungen die Anschauung von U. Hofmann bestätigt. Im Temperaturintervall zwischen 300° und 600° C wurde röntgenographisch (Debye-Scherrer-Methode) eine primär erfolgende Gitteraufweitung festgestellt, uzw. als eine Vergrösserung des Identitätsabstandes der Basalreflexe. Die Änderung der 001-Reflexe hängt von der Dauer der Erhitzung ab, wie dies aus den Abbdgen 12 und 13, bzw. 14 und 15 zu ersehen ist. Die primär beim Erhitzen erfolgende Gitteraufweitung des Kaolinitgitters lässt sich durch die Abstossung der infolge der Dehydroxylierung gebildeten O-Ionen der oktaedrischen Basalschichten von den O-Ionen der Si-O-Tetraederschicht erklären. Die zeitliche Fluktuation der Basalabstände weist darauf hin, dass die einzelnen OH-Ionen der oktaedrischen Basalschichten untereinander energetisch nicht äquivalent sind.

* Originalüberschrift dieser Arbeit: *Promjene strukture kaolinita izmedu 100° i 600° C.*

Die Untersuchungen der Strukturänderungen des Kaolinitgitters im Temperaturintervall zwischen 300° und 600° C werden fortgesetzt, uzw. wird die zeitliche Temperaturabhängigkeit der Infrarotabsorbtion des Kaolinits untersucht werden.

Angenommen auf der am 7. VII. 1960. abgehaltenen Sitzung der Abteilung für mathematische, physikalische und technische Wissenschaften.

SADRŽAJ

TABLE DES MATIÈRES

RADOVAN VERNIĆ

Periodična i simetrična rješenja problema više tijela 5
Periodische und symmetrische Lösungen des Mehrkörperproblems 41

VLADIMIR S. VRKLJAN

O brzini rasprostiranja zvuka u smjesama plinova i kapljevina 55
Über die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schalles in Gas- und Flüssigkeitsmischungen 58

ZLATKO JANKOVIĆ

On confluent hypergeometric differential equation 59
O konfluentnoj hipergeometrijskoj diferencijalnoj jednadžbi 107

SVETOZAR KURepa

On representations of the commutation and anticommutation rules of the quantum theory of fields 121
O reprezentacijama komutacionih i antikomutacionih pravila kvantne teorije polja 141

SIBE MARDEŠIĆ

Lokalno povezani, uređeni i lančasti kontinuumi 147
Locally connected, ordered and chainable continua 161

DRAGO GRDENIĆ i DRENKA PAVKOVIĆ-SEVDIĆ

Galij u jugoslavenskim boksitima 167
Gallium in yugoslav bauxites 175

VLADIMIR S. VRKLJAN

O brzini rasprostiranja zvuka u smjesama jednoatomnih plinova 179
Über die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schalles in den Mischungen der einatomigen Gase 183

OLGA ŠARC-LAHODNY i MIROSLAV KARŠULIN

Promjene strukture kaolinita između 100° i 600° C 185
Strukturänderungen des Kaolinits im Temperaturbereich 100°–600° C . . 203