

HOMOGENE MREŽE ZATVORENIH ORIJENTABILNIH PLOHA

1. Uvod

U jednom drugom članku¹ bio je razmatran problem homogenih mreža ravnine s općeg topološkog stajališta, a i s metričkog stajališta u ravninama triju geometrija. Prirodno se nameće zamisao, da se analogni problem postavi i za ostale topološke tipove ploha. U ovom će se dakle članku taj problem proširiti samo na zatvorene orijentabilne plohe. No i problem homogenih mreža zatvorenih neorijentabilnih ploha mogao bi se na sličan način postaviti i rješavati.

Plohe, kojih ćemo mreže ovdje promatrati, neka su topološki regularne, dakle bez topoloških singulariteta, t. j. neka za svaku točku plohe postoji okoliš homeomorfan krugu. Ako je takva ploha zatvorena orijentabilna ploha roda p , mi ćemo je u daljem razmatranju simbolički označiti sa $P(p)$.

Problem homogenih mreža ploha $P(p)$ u njegovu najjednostavnijem obliku — koji bi odgovarao slučaju pravilnih homogenih mreža ravnine, gdje se pored topološke pravilnosti tražila i određena metrička pravilnost — može se postaviti samo u poznatom slučaju kugline plohe, no kako je kuglina ploha homeomorfna ravnini sferne geometrije, bio je taj slučaj homogenih mreža već promatran u [1].

Ne može se ovdje zahtijevati metrička pravilnost u smislu pravilnih homogenih mreža za plohe $P(p)$ u slučajevima $p \geq 1$, jer te plohe u trodimenzionalnom euklidskom prostoru moraju biti nejednolike zakrivljene. Ovdje ćemo dakle razmatrati problem homogenih mreža ploha $P(p)$ samo s topološkog stajališta. Pritom ćemo se služiti simboličkom oznakom i nekim osnovnim pojmovima onako, kako su oni definirani u [1]. No kako su tamo definicije bile prilagođene baš problemu homogenih mreža ravnine, trebat će da ih sada djelomice izmijenimo i malo

¹ S. Bilinski [1]. (Brojevi u uglatim zagradama odnose se na literaturu, koja se nalazi na kraju članka.)

općenitije postavimo. Da zbog složene suvislosti promatranih ploha ne bi neki zanimljivi slučajevi unaprijed iz razmatranja bili isključeni, i samu ćemo definiciju mreže² sada malo preinačiti. Ne ćemo naime isključiti mogućnost višestruke incidencije jedne stranice i jednog poligona ni mogućnost dvostruke incidencije jedne stranice i jednog čvorišta ili dvostruke incidencije jedne stranice i jednog poligona. Zato ćemo pojam mreže sada ovako definirati:

Skup S , koji nije prazan, a sastavljen je od tri vrste elemenata, koje ćemo zvati »čvorišta, stranice«, odnosno »poligoni«, čini »mrežu«, ako ima ova svojstva:

1) Za svaka dva elementa različitih vrsta određeno je, koliko su puta među sobom incidentni ili nisu incidentni.

2) Ako među tri elementa različitih vrsta postoje incidencije, onda uz svaku incidenciju stranice sa čvorištem i stranice s poligonom postoji uvijek i incidencija čvorišta s poligonom.

3) Uz svaku incidenciju jednog čvorišta s jednim poligonom postoje točno dvije stranice, koje su s tim čvorištem i s tim poligonom incidentne, ali tako, da uz dvije različite incidencije čvorišta s poligonom postoje dva različita para s njima incidentnih stranica, t. j. takva dva para, koji se barem u jednoj stranici razlikuju. Reći ćemo, da spomenuti par stranica čini »kut« i da taj kut pripada tom čvorištu i tom poligonu. Dva kuta, koja pripadaju istom čvorištu ili istom poligonu, a imaju jednu stranicu zajedničku, zvat ćemo »susjednima«.

4^a) Svaka je stranica incidentna s dva razna čvorišta, ili je dvaput incidentna s jednim istim čvorištem. Dva čvorišta incidentna s istom stranicom zvat ćemo »susjednima«.

4^b) Svaka je stranica incidentna s dva razna poligona, ili je dvaput incidentna s jednim istim poligonom. Dva poligona incidentna s istom stranicom zvat ćemo »susjednima«.

5^a) Svako je čvorište incidentno barem s jednom stranicom.

5^b) Svaki je poligon incidentan barem s jednom stranicom.

6) K svakom se paru istovrsnih elemenata skupa S daje odrediti konačan slijed susjednih elemenata toga skupa, kojemu je prvi i posljednji član par zadanih elemenata.

² [1] Definicija 10.

7^a) Susjedni kutovi, koji pripadaju jednom istom čvorištu, čine ciklus.

7^b) Susjedni kutovi, koji pripadaju jednom istom poligonu, čine ciklus.

Osim toga trebat će nam još ove definicije, oznake i objašnjenja:

Čvorište, kojemu pripada s kutova, zvat ćemo » s -terostrukim čvorištem«.

Poligon, kojemu pripada n kutova, zvat ćemo » n -terokutom«.

Neka je A s -terostruko čvorište neke mreže, a među kutovima, koji mu pripadaju, neka je k_1 kutova n_1 -terokuta, k_2 kutova n_2 -terokuta, k_3 kutova n_3 -terokuta, ..., k_r kutova n_r -terokuta, onda je

$$s = \sum_{i=1}^r k_i.$$

Označimo li svaki kut čvorišta A sa n_i , t. j. s brojem kutova onog poligona, kojemu taj kut pripada, onda će sa $C \equiv [n_{i_1}, n_{i_2}, n_{i_3}, \dots, n_{i_s}]$ biti označen ciklus kutova, koji pripadaju čvorištu A .

Ako su kod neke mreže ciklusi kutova za sva čvorišta među sobom jednaki, onda ćemo je zvati » R -mrežom«, a ciklus C , zajednički za sva čvorišta, zvat ćemo ciklusom te mreže, koju ćemo simbolički označiti sa

$$R [n_{i_1}, n_{i_2}, n_{i_3}, \dots, n_{i_s}]$$

ili kraće $R [C]$.

Neka je a s -terokut neke mreže, a među kutovima, koji mu pripadaju neka je k_1 kutova n_1 -strukog čvorišta, k_2 kutova n_2 -strukog čvorišta, ..., k_r kutova n_r -strukog čvorišta, onda je

$$s = \sum_{i=1}^r k_i.$$

Označimo li svaki kut poligona a sa n_i , t. j. s brojem kutova onog čvorišta, kojemu taj kut pripada, onda će sa $C \equiv [n_{i_1}, n_{i_2}, n_{i_3}, \dots, n_{i_s}]$ biti označen ciklus kutova, koji pripadaju poligonu a .

Ako su kod neke mreže ciklusi kutova za sve poligone među sobom jednaki, zvat ćemo je » Q -mrežom«, a ciklus C , zajednički za sve poligone, zvat ćemo ciklusom te mreže, koju ćemo simbolički označiti s $Q [n_1, n_2, n_3, \dots, n_s]$ ili kraće $Q [C]$.

R -mreže i Q -mreže zvat ćemo zajedničkim imenom »homogene mreže«.

Budući da su Q -mreže recipročne R -mrežama, vrijedit će za njih isti zaključci s obzirom na mogućnost egzistencije pojedine mreže i dualni s obzirom na broj pojedinih elemenata mreže, pa je dovoljno, da dalje razmatramo samo jedne od njih. Mi ćemo se dakle ograničiti samo na proučavanje R -mreža.

Iz gornjih ćemo definicija sada izvesti neke posve jednostavne zaključke.

Ima li mreža konačni broj elemenata, označit ćemo sa a_0 , a_1 i a_2 broj čvorišta, stranica odnosno poligona. Budući da po definiciji mreže skup S njezinih elemenata nije prazan, mora vrijediti barem jedna od ove tri relacije

$$a_0 \geq 1; \quad a_1 \geq 1; \quad a_2 \geq 1. \quad (1) \quad 1, 2, 3$$

No vrijedi li jedna, i to bilo koja od njih, iz 4^a), 4^b), 5^a) i 5^b) izlazi odmah, da i preostale dvije moraju vrijediti.

Nadalje, ako je s broj kutova, koji pripadaju jednom čvorištu, mora uvijek biti

$$s \geq 3. \quad (2)$$

Izlazi to iz 7^a) i iz činjenice, da svaki ciklus sadržava barem tri elementa³.

Ako je n broj kutova n -terokuta, na isti način iz 7^b) zaključujemo, da mora uvijek biti

$$n \geq 3. \quad (3)$$

Ako nekom čvorištu homogene mreže pripada k_i kutova n_i -terokuta, pa se u ciklusu homogene mreže neki određeni broj n_i doista nalazi, onda ponajprije za pripadni broj k_i mora vrijediti

$$k_i \geq 1 \quad (4)$$

³ [1] Stavak 1. *

a zatim, kako svakom čvorištu te homogene mreže pripada barem jedan kut n_i -terokuta, mora među svim poligonima mreže biti sadržan barem jedan n_i -terokut, t. j. mora biti

$$q_{n_i} \geq 1, \quad (5)$$

gdje je q_{n_i} broj svih n_i -terokuta te homogene mreže.

Pojam mreže, koji je dan u gornjim definicijama, sada ćemo geometrijski konkretizirati:

Pod »mrežom plohe $P(p)$ « razumijevat ćemo naime takvu njezinu razdiobu u poligone (koji cijelu plohu potpuno i jednostruko pokrivaju), koja zadovoljava uvjetima 1)–7^b) gornje definicije. Pritom ćemo pod »poligonom« razumijevati topološku sliku kruga, gdje je na periferiji istaknuto nekoliko točaka, »čvorišta«, a »stranica« neka je Jordanov luk omeđen čvorištima, koji luk neka je ujedno zajednička granica poligonâ. Relaciju incidencije razumijevat ćemo u njezinu običnom geometrijskom smislu. Reći ćemo, da je takva mreža plohe $P(p)$ »homogena«, ako ispunjava uvjete gornjih definicija R -mreže ili Q -mreže.

Kod istraživanja homogenih mreža ravnine u sfernoj, paraboličnoj i hiperboličnoj geometriji pokazalo se, da se za mogućnost egzistencije tih mreža moraju zadovoljiti dvije vrste uvjeta. Prvi od tih uvjeta — u raznim geometrijama različiti — jesu posljedica metričkih svojstava pojedinih od tri ravnine. Drugi uvjet je kombinatoričko-topološke prirode i za sve geometrije isti. Oba ta uvjeta čine tek zajedno sistem dovoljnih uvjeta za egzistenciju homogenih mreža ravnine.

Pitanje egzistencije homogenih mreža ploha $P(p)$ sadržava bitno novi momenat. Ovaj drugi, t. j. topološki, uvjet egzistencije mreže ravnine postavljen je naime na osnovi zamišljene postepene izgradnje takve mreže. Pritom je bitna pretpostavka, da kod te postepene izgradnje mreže ravnine u svakom momentu onaj već izgrađeni dio mreže obuhvaća jedno jednostavno-suvislo područje ravnine. Pokazalo se, da se kod takve — na prvo određeni način zamišljene — postepene izgradnje mreže ravnine identifikacija, kako pojedinih elemenata mreže, tako već i složenijih njezinih kompleksa, odvija na osnovi sheme složenih ciklusa⁴. Kako se kod postepene izgradnje mreže neke plohe $P(p)$ u slučaju $p > 0$ — zbog složene suvislosti te plohe

⁴ [1] § 1. definicija 8. i 9. i §§ 7. i 8.

— ta bitna pretpostavka ne može ispuniti, dolaziti će kod te postepene izgradnje mreže do identifikacije i nekih drugih elemenata mreže, a ne samo prema shemi složenih ciklusa. Zbog toga uvjeti egzistencije mreže, koji su za ravninu bili dovoljni, bit će ovdje samo nužni. Zato će trebati još s jednog drugog stajališta istražiti mogućnost egzistencije homogenih mreža ploha $P(p)$. Pokazat će se, da se pritom slučajevi $p = 0$, $p = 1$ i $p \geq 2$ među sobom bitno razlikuju⁵.

2. Homogene mreže torusa*)

Poznati slučaj homogenih mreža plohe $P(0)$, koje su izomorfne Arhimedovim polupravilnim poliedrima, ovdje ne ćemo više razmatrati, nego ćemo obratiti pažnju samo slučajevima $p \geq 1$. Razmotrimo dakle najprije slučaj $p = 1$, t. j. slučaj torusa.

Univerzalna ploha pokrivanja (»Covering surface«, »Überlagerungsfläche«) plohe $P(1)$ homeomorfna je paraboličnoj ravnini. Odatle izlazi neposredno, da će svakoj mreži $R[C]$ plohe $P(1)$ odgovarati jedna mreža $R[C]$ parabolične ravnine, no prebrz bi bio zaključak, da vrijedi i obrnuto, t. j. da svakoj mreži $R[C]$ parabolične ravnine odgovara jedna mreža $R[C]$ plohe $P(1)$. Iz gornjeg naime još ne bi moralo izlaziti, da je egzistencija mreže $R[C]$ parabolične ravnine dovoljna za egzistenciju mreže $R[C]$ plohe $P(1)$.

Fundamentalna grupa plohe $P(1)$ je slobodna Abelova grupa s dvije izvodnice (Erzeugende). Ona je izomorfna dvoparametarskoj diskontinuiranoj grupi translacija ravnine određenoj vektorima

$$\mathbf{r} = m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, \quad (6)$$

gdje su m i n cijeli brojevi, a $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ dva linearno nezavisna vektora. Za fundamentalno područje te grupe možemo uzeti na pr. paralelogram, kojemu su stranice vektori $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$. Identifikacijom suprotnih stranica toga paralelograma nastaje ploha $P(1)$. Prema tome je jasno, ako postoji mreža $R[C]$ parabolične ravnine, bit će za isti ciklus C moguća homogena mreža plohe

⁵ U članku: H. Heesch [6] našao sam rezultate, koji su djelomično slični nekim rezultatima ovog članka. Ipak sam ovdje zadržao te rezultate iz dva razloga. Najprije radi potpunosti i zaokruženosti cjeline, a zatim, jer su izvedeni na drugi način.

* Bilješka dodana kod korektura. U članku H. S. M. Coxeter [5] promatrane su pravilne mreže torusa.

$P(1)$ samo onda, ako grupa simetrija jedne metričke mreže $R[C]$ parabolične ravnine sadržava kao subgroupu jednu diskontinuiranu grupu translacija određenu relacijom (6). No iz slika pravilnih homogenih mreža parabolične ravnine⁶ neposredno se razabira, da svaka od tih mreža sadrži doista grupu (6) kao subgroupu grupe svojih simetrija. Odatle izlazi, da će biti moguće homogene mreže plohe $P(1)$ sa svakim onim ciklusom, s kojim su moguće i homogene mreže parabolične ravnine. No protivno nego u slučaju homogenih mreža plohe $P(0)$ broj pojedinih elemenata mreže $R[C]$ plohe $P(1)$ ne će ciklusom C biti određen. To možemo lako ovako razabrati:

Neka je (6) grupa translacija sadržana u grupi simetrija neke određene pravilne mreže $R[C]$ parabolične ravnine, ali tako, da su $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ dva najmanja moguća linearno nezavisna vektora onih translacija, kod kojih mreža prelazi sama u sebe. Uočimo sada bilo koju subgroupu grupe (6) određenu vektorima

$$\mathbf{r}_{kl} = m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, \quad (7)$$

gdje su m i n cjelobrojni parametri, a k i l bilo koja dva čvrsto odabrana prirodna broja. Za fundamentalno područje grupe (7) možemo uzeti paralelogram, kojemu su stranice vektori $k\mathbf{a}$ i $l\mathbf{b}$, a identifikacijom suprotnih stranica bit će i opet određena jedna ploha $P(1)$. Za dva različita para brojeva k_1, l_1 i k_2, l_2 bit će fundamentalna područja grupe (7), t. j. spomenuti paralelogrami na mreži $R[C]$ parabolične ravnine različite površine osim u slučaju, kad je

$$k_1 l_1 = k_2 l_2, \quad (8)$$

pa će zato i dvije pripadne mreže $R[C]$ plohe $P(1)$ sadržavati različiti broj pojedinih elemenata mreže. Samo ako vrijedi jednadžba (8), imat će obje mreže $R[C]$ plohe $P(1)$ isti broj elemenata, ali ni sada one ne moraju biti izomorfne, jer pripadni paralelogrami parabolične ravnine, iako su iste površine, ne moraju obuhvatati kongruentne dijelove mreže ravnine.

Budući da ima neizmjereno mnogo klasa topoloških preslikavanja torusa na torus, koja ne mogu prijeći običnom deformacijom jedna u druge, jasno je, da dvije izomorfne mreže torusa općenito ne moraju biti homotopne. Možemo te slučajeve razmotriti na pr. ovako:

Neka je (6) bilo koja subgroupa grupe translacija sadržane u grupi simetrija neke pravilne mreže $R[C]$ parabolične ravnine (dakle $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ sada ne moraju biti najmanji mogući vektori

⁶ [1], str. 105—107.

translacije). Poznata je činjenica, ako je x_1, y_1 par relativno prostih brojeva, onda diofantska jednačica

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = 1 \quad (9)$$

ima uvijek rješenje u x_2, y_2 . Neka dakle vrijedi relacija (9) i neka je

$$\begin{aligned} \mathbf{a}' &= x_1 \mathbf{a} + y_1 \mathbf{b}, \\ \mathbf{b}' &= x_2 \mathbf{a} + y_2 \mathbf{b}, \end{aligned} \quad (10)$$

onda i paralelogram II_1 , kojemu su stranice vektori $\mathbf{a}'$ i $\mathbf{b}'$, čini jedno fundamentalno područje grupe (6). Samo u slučajevima, kada je

$$x_1 = y_2 = 1, \quad x_2 = y_1 = 0, \quad (11)$$

ili kada je

$$x_1 = y_2 = 0, \quad x_2 = y_1 = 1$$

paralelogram II_1 kongruentan je paralelogramu II , kojemu su stranice vektori $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$. Neka dakle relacije (11) ne vrijede, pa neka je $P_1(1)$ ploha određena identifikacijom suprotnih stranica paralelograma II . Smatramo li za korespondentne takve dvije točke ploha $P(1)$ i $P_1(1)$, koje su slike bilo jedne iste točke parabolične ravnine, bilo dviju točaka ekvivalentnih s obzirom na grupu (6), onda će tom korespondencijom ploha $P(1)$ biti topološki preslikana na plohu $P_1(1)$, ali kod toga preslikavanja bilo koja zatvorena crta plohe $P(1)$ ne mora prijeći u homotopnu crtu plohe $P_1(1)$. Tako će i pripadne mreže $R[C]$ obiju ploha biti izomorfne, ali ne homotopne, t. j. jedna mreža ne može prijeći u drugu jednom običnom deformacijom plohe $P(1)$.

Primjeri dviju takvih izomorfnih, ali ne homotopnih, mreža dani su u sl. 1. i sl. 2., koje predložuju mreže $R[3, 4, 6, 4]$ ploha $P(1)$ i $P_1(1)$, gdje su korespondentna čvorišta označena istim brojem. U tom su primjeru u relacijama (10) uzete vrijednosti $x_1 = y_1 = y_2 = 1; x_2 = 0$.

Budući da relacija (9) ima neizmjereno mnogo rješenja, bit će za isti ciklus neizmjereno mnogo izomorfnih mreža plohe $P(1)$, koje nisu homotopne.

Zaključak ovih razmatranja možemo dakle ukratko ovako izreći:

Stavak 1. *Ako je za neki ciklus C moguća homogena mreža parabolične ravnine (a takvih je ciklusa u svemu jedanaest), onda za taj ciklus C postoji neizmjereno mnogo među sobom anizomorfnih mreža torusa, a među onima od tih mreža, koje su među sobom izomorfne, postoji opet neizmjereno mnogo njih, koje nisu homotopne. Za preostale cikluse homogene mreže torusa nisu moguće.*

3. Homogene mreže zatvorenih ploha roda većeg od jedinice**)

Hiperbolična je ravnina homeomorfna univerzalnoj plohi pokrivanja plohe $P(p)$ u slučajevima $p \geq 2$. (U idućem razmatranju neka je radi kratkoće sa $P'(p)$ označena općenita ploha $P(p)$, gdje je $p \geq 2$). Prema tome, ako postoji mreža $R[C]$ bilo koje plohe $P'(p)$, sigurno postoji za isti ciklus C i homogena mreža hiperbolične ravnine. Dakle je za neki određeni ciklus C egzistencija mreže $R[C]$ hiperbolične ravnine nužni uvjet egzistencije mreže $R[C]$ neke plohe $P'(p)$.

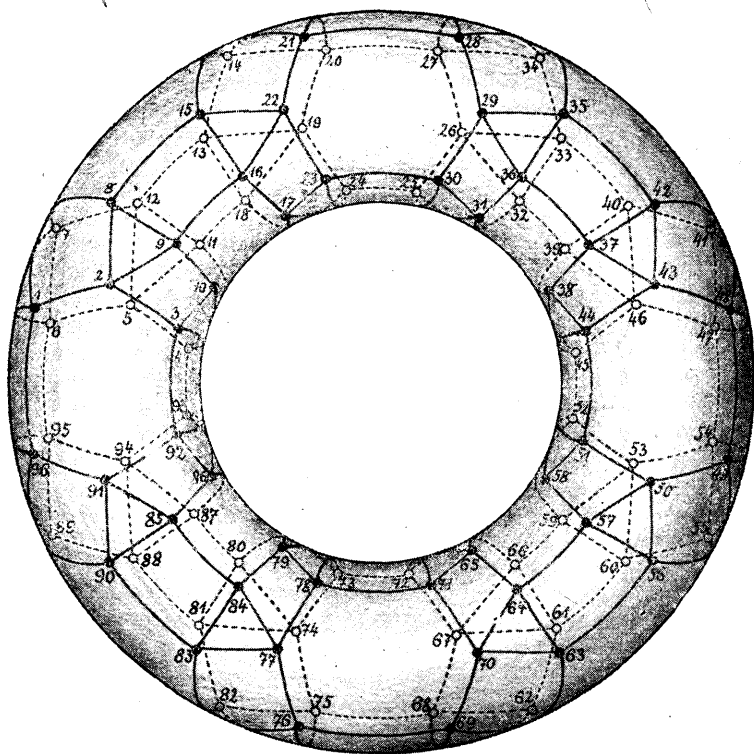
Slično kao i u slučaju torusa zaključujemo, da će za neki ciklus C postojati homogena mreža određene plohe $P'(p)$, ako za isti ciklus C postoji takva homogena mreža $R[C]$ hiperbolične ravnine, gdje njezina grupa simetrija sadržava kao subgroupu fundamentalnu grupu te plohe, t. j. ako postoji grupa pomaka hiperbolične ravnine bez fiksnih točaka, kod kojih neka homogena mreža $R[C]$ sama sebe pokriva, kod kojih je fundamentalni poligon te plohe fundamentalno područje te grupe.

No ta nam spoznaja ipak ne daje mogućnost, da dodamo kao kod torusa brzo do zaključka o mogućnosti egzistencije mreže $R[C]$ na nekoj plohi $P'(p)$, jer je — osim u najjednostavnijim, trivijalnim, slučajevima — teško, gotovo i nemoguće, razabrati, da li grupa simetrija neke mreže $R[C]$ hiperbolične ravnine doista sadrži fundamentalnu grupu neke plohe $P'(p)$ kao subgroupu.

Zato u ovom slučaju moramo potražiti drugi način, koji bi nam dao mogućnost da odgovorimo na pitanje egzistencije homogene mreže određene plohe $P(p)$ za neki određeni ciklus

** Bilješka dodana kod korekture. U raspravama H. S. M. Coxeter [2], [3] promatra se neke homogene mreže zatvorenih ploha naročito u vezi sa teorijom grupa.

C. Radi toga ćemo najprije naći neke relacije, koje određuju broj elemenata homogene mreže. Iz tih ćemo relacija onda moći izvesti neke općenite zaključke s obzirom na postavljene probleme.



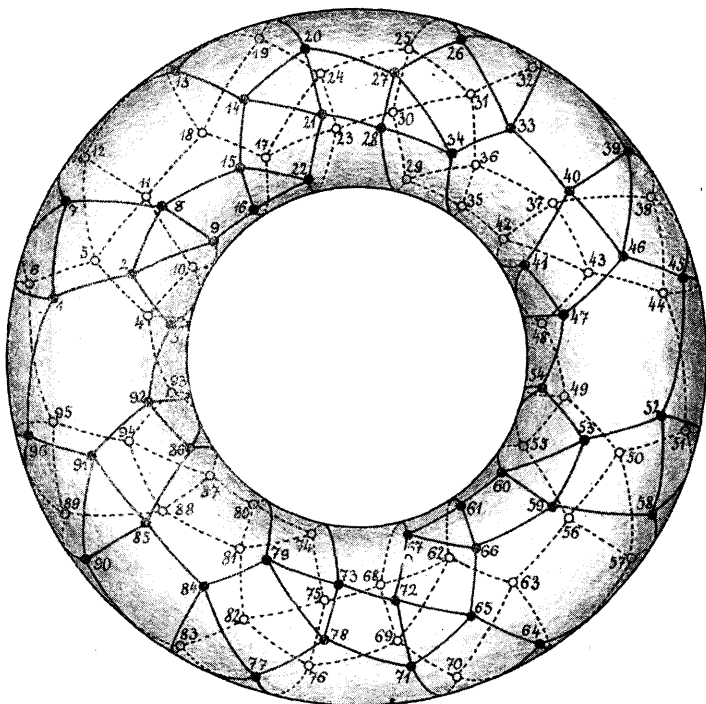
Sl. 1.

4. Broj pojedinih elemenata homogenih mreža zatvorenih orijentabilnih ploha

Dok je kod kugle broj pojedinih elemenata homogene mreže njezinim ciklusom C posve određen, pokazali smo naprotiv, da kod homogenih mreža torusa to ne vrijedi. Pitajmo

se sada, da li kod ploha $P'(p)$ ciklus homogene mreže broj njezinih elemenata određuje?

Da na to pitanje odgovorimo, pretpostavimo, da postoji homogena mreža $R[C]$ neke određene plohe $P'(p)$, pa neka



Sl. 2.

u ciklusu $C \equiv [n_1, n_2, n_3, \dots, n_r]$ te mreže dolazi k_i kutova n_i -terokuta ($i = 1, 2, \dots, r$). Pita se najprije, koje sve relacije možemo postaviti između $3r + 4$ brojeva $p, k_i, n_i, a_0, a_1, a_2, q_{n_i}$ ($i = 1, 2, 3, \dots, r$), t. j. između roda plohe, brojeva, koji određuju ciklus homogene mreže i broja pojedinih njezinih elemenata.

Ponajprije je očito, da mora biti

$$\sum_{i=1}^r q_{n_i} = a_2, \quad (12)$$

a budući da za svaku stranicu postoje po dvije incidencije s poligonima mreže, vrijedi relacija

$$\sum_{i=1}^r n_i q_{n_i} = 2 a_1. \quad (13)$$

Ako pak za neku određenu vrijednost indeksa i izbrojimo na dva moguća načina broj incidencija svih n_i -torokuta sa svim čvorištima mreže, nalazimo, da taj broj iznosi

$$a_0 k_i = n_i q_{n_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, r). \quad (14)$$

Zbrojimo li ovdje ovih i relacija, dobivamo

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^r n_i q_{n_i}}{\sum_{i=1}^r k_i}. \quad (15)$$

Konačno ćemo se još obazreti na relaciju za Eulerovu karakteristiku c mreže:

$$a_0 - a_1 + a_2 = c,$$

koju zbog relacije

$$c = 2(1 - p)$$

možemo pisati u obliku

$$a_0 - a_1 + a_2 = 2(1 - p). \quad (16)$$

No relacije (12), (13), (14) i (16) (dakle u svemu $r + 3$ relacija) među sobom su nezavisne, a kako među tim veličinama nema više među sobom nezavisnih relacija, moći ćemo $(2r + 1)$ -nu zgodno odabranu od tih veličina uzeti po volji, a $r + 3$ preostale veličine bit će time određene. Ako je ploha P dana i ciklus C njezine homogene mreže poznat, bit će

time poznate i veličine p , n_i i k_i pa će doista brojevi α_0 , α_1 , α_2 i q_{n_i} biti određeni kao njihove funkcije. Imamo dakle ovaj zaključak:

Stavak 2. Broj pojedinih elemenata mreže $R[C]$ bilo koje plohe $P'(p)$ ciklusom mreže C posve je određen.

U stvari, mi ćemo spomenute brojeve odrediti na ovaj način:

Ponajprije je prema (14)

$$q_{n_i} = \alpha_0 \frac{k_i}{n_i}, \quad (17)$$

pa ako to uvrstimo u (12) i u (13), izlazi

$$\alpha_2 = \alpha_0 \sum_{i=1}^r \frac{k_i}{n_i}, \quad (18)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \alpha_0 \sum_{i=1}^r k_i. \quad (19)$$

Ako te vrijednosti za α_1 i α_2 uvrstimo u (16), dobivamo

$$\alpha_0 = \frac{2(p-1)}{\sum_{i=1}^r k_i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_i} \right) - 1}. \quad (20)$$

Iz (20) i (19), odnosno (20) i (18), izlazi

$$\alpha_1 = \frac{(p-1) \sum_{i=1}^r k_i}{\sum_{i=1}^r k_i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_i} \right) - 1}, \quad (21)$$

$$\alpha_2 = \frac{2(p-1) \sum_{i=1}^r \frac{k_i}{n_i}}{\sum_{i=1}^r k_i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_i} \right) - 1}, \quad (22)$$

dok je prema (17) i (20)

$$q_{n_i} = \frac{2 \frac{k_i}{n_i} (p-1)}{\sum_{i=1}^r k_i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_i} \right) - 1} \quad (23)$$

($i = 1, 2, 3, \dots, r$).

Iz tih relacija možemo odmah izvesti neke zaključke:

Budući da su prema relacijama (1)_{1, 2, 3} i (5) brojevi a_0 , a_1 i a_2 za svaku mrežu sigurno pozitivni, razabiramo iz relacija (20), (21) i (22) da u slučaju $p = 0$ mora biti

$$\sum_{i=1}^r k_i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_i} \right) < 1, \quad (24)$$

dok u slučajevima $p \geq 2$ mora vrijediti relacija

$$\sum_{i=1}^r k_i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_i} \right) > 1. \quad (25)$$

Ne to su upravo metrički nužni uvjeti za egzistenciju homogenih mreža ravnina sferne i eliptične geometrije, odnosno hiperbolične geometrije⁷. Da ti nužni uvjeti moraju biti i ovdje ispunjeni, iz razmatranja u prošlim paragrafima unaprijed je evidentno.

Gornji izvod relacije (20) iz (16), (18) i (19) ispravan je samo onda, ako jednadžba

$$\sum_{i=1}^r k_i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_i} \right) = 1 \quad (26)$$

ne vrijedi. Budući da relacija (26) čini nužni uvjet za egzistenciju homogenih mreža parabolične ravnine, mora ona biti ispunjena i za homogene mreže torusa. Relacije (20), (21), (22) i (23) daju u tom slučaju neodređene izraze za brojeve a_0 , a_1 , a_2 i q_{n_i} , a to je u skladu s gore uočenom činjenicom, da broj pojedinih elemenata mreže nije u slučaju torusa ciklusom mreže određen.

⁷ [1] relacije (14a) i (14c).

5. Egzistencija homogenih mreža zatvorenih orijentabilnih ploha roda većeg od jedinice

Vratimo se sada pitanju egzistencije homogenih mreža ploha $P'(p)$. Problem ćemo ovako postaviti: Neka je dana neka određena ploha $P'(p)$ i neki određeni ciklus C . Postoji li mreža $R[C]$ plohe $P'(p)$?

Jasno je iz razmatranja u § 3, da je za egzistenciju te mreže nužni uvjet, da za taj isti ciklus C postoji mreža $R[C]$ hiperbolične ravnine. Prema tome mora se zadovoljiti relacija (25), a moraju za taj ciklus postojati i čvorišta po volji visokog reda.⁸

Da to dvoje nije za egzistenciju homogene mreže neke plohe $P'(p)$ uvijek dovoljno, možemo se lako uvjeriti na posebnim slučajevima. Na pr. za ciklus druge vrste $C = \{3, 4, 3, 6, 3, 8\}$ homogena mreža hiperbolične ravnine sigurno postoji, jer je zadovoljena relacija (25) i jer za taj ciklus postoje dva čvorišta drugog reda, od kojih svako za se čini potpuni sistem čvorišta. Kad bi sada za taj ciklus postojale mreže $R[C]$, na pr. plohe $P(2)$, bili bi brojevi pojedinih njezinih elemenata određeni relacijama (20)—(23). No te relacije daju u ovom slučaju razlomke kao brojeve pojedinih elemenata mreže. Tako na pr.

$$\alpha_0 = \frac{48}{11} \text{ i t. d., pa kako } \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \text{ i } q_{n_i} \text{ moraju biti prirodni brojevi, očividno je, da ta pretpostavka nije moguća.}$$

Na isti način uviđamo, da za taj isti ciklus homogena mreža nije moguća u slučajevima $p = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, \dots$, jer za sve te vrijednosti od p relacije (20)—(23) daju razlomke za brojeve pojedinih elemenata mreže. No u slučajevima $p = 12, 23, 34, \dots$ veličine $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ i q_{n_i} poprimaju vrijednosti prirodnih brojeva, pa u tim slučajevima mogućnost egzistencije mreže $R[C]$ nije isključena.

Od ciklusa, koji pripadaju mogućim homogenim mrežama hiperbolične ravnine, možemo na taj način isključiti — kao nemoguće za homogenu mrežu neke plohe $P'(p)$ — sve one cikluse, za koje relacije (20)—(23) ne daju cjelobrojne vrijednosti za brojeve elemenata mreže. Ciklusi mogućih homogenih mreža bit će tada sadržani među onim ciklusima, za koje te relacije daju cjelobrojne vrijednosti. Štaviše, čini se, da bi mogućnost egzistencije neke homogene mreže plohe $P'(p)$ mogla biti određena ovim uvjetom:

⁸ [1] §§ 8, 9.

Stavak 3. *Ako za neki ciklus C postoji homogena mreža hiperbolične ravnine, a osim toga za taj ciklus C i neki dani prirodni broj $p \geq 2$ relacije (20)–(23) daju veličinama a_0 , a_1 , a_2 i q_{n_i} cjelobrojne vrijednosti, onda za taj ciklus C postoji i homogena mreža plohe $P'(p)$.*

Ovaj je stavak hipotetičke prirode, jer dosad još nisam našao dokaza za tu tvrdnju, ali mi se ona čini vrlo vjerojatna, jer u velikom broju konkretnih slučajeva za cikluse, koji zadovoljavaju gornji uvjet, nije bilo teško konstruirati mrežu $R[C]$ plohe $P'(p)$. Tako je na pr. u najjednostavnijem slučaju, t. j. u slučaju $p=2$, $r=1$ moguće nacrtati mrežu $R[C]$ plohe $P(2)$, za svaki pojedini od dvadeset i pet slučajeva (vidi § 6.) ciklusa, koji ispunjavaju uvjete stavka 3., a u složenijim slučajevima, gdje se ne može tako lako uočiti struktura mreže, čini mi se, da se ne može ni uvidjeti njezina nemogućnost.

Prema tome važno je razabrati, u kojim će slučajevima relacije (20)–(23) dati za brojeve a_0 , a_1 , a_2 i q_{n_i} cjelobrojne vrijednosti. Možemo odmah primijetiti, da je ovdje dovoljno ispitati samo relacije (20) i (23), jer ako su svi q_{n_i} cijeli brojevi, onda zbog (12) to isto vrijedi i za a_2 , a ako su a_0 i a_2 cijeli brojevi, onda je zbog (16) i a_1 cio broj.

Ako je sada dan neki ciklus C, bit će time brojevi r , n_i i k_i određeni. Neka je onda

$$\sum_{i=1}^r k_i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_i} \right) - 1 = \frac{a}{b},$$

gdje su a i b dva prirodna relativno prosta broja, onda će prema (20) i (23) biti a_0 i q_{n_i} (a time i a_1 , a_2) cijeli brojevi samo onda, ako za broj $p > 1$ vrijedi $(r+1)$ -na kongruencija.

$$\begin{aligned} 2(p-1) &\equiv 0, \pmod{a}, \\ 2bk_i(p-1) &\equiv 0, \pmod{an_i}. \quad (i = 1, 2, \dots, r). \end{aligned} \quad (27)$$

Odatle neposredno razabiramo, da će se u svakom slučaju moći odrediti broj $p > 1$ tako, da te kongruencije budu zadovoljene, t. j. ako pretpostavimo, da stavak 3. doista vrijedi, tada možemo reći:

Stavak 4. *Za svaki ciklus, koji pripada nekoj mogućoj homogenoj mreži hiperbolične ravnine, može se odrediti rod p plohe $P'(p)$ za koju mreža $R[C]$ postoji.*

Pokazat ćemo nadalje, da vrijedi ovaj stavak:

Stavak 5. *Ako je p_1 najmanji od brojeva većih od jedinice, koji zadovoljavaju kongruencije (27), onda je*

$$p_v = v p_1 - v + 1 \quad (28)$$

$$(v = 1, 2, 3 \dots)$$

opće rješenje sistema (27).

Da je (28) doista rješenje sistema (27), odmah se razabira. Da ne može biti rješenja, koje nije u (28) sadržano, možemo se ovako uvjeriti: Ponajprije je sigurno, ako su p' i p'' dva rješenja sistema (27), gdje je $1 < p' < p''$, onda je uvijek i

$$p = p'' - p' + 1 \quad (29)$$

jedno rješenje toga sistema. Uzmimo zatim, da postoji jedno rješenje $\bar{p}$, koje nije u (28) sadržano, tada ono mora ležati između dva susjedna rješenja iz (28), t. j. mora biti za neki određeni broj v_0

$$v_0 p_1 - v_0 + 1 < \bar{p} < (v_0 + 1) p_1 - v_0$$

ili

$$1 < \bar{p} - v_0 p_1 + v_0 < p_1. \quad (30)$$

Budući da su po pretpostavci brojevi $v_0 p_1 - v_0 + 1$ i $\bar{p}$ dva rješenja sistema (27), to je prema (29) i broj $\bar{p} - v_0 p_1 + v_0$ rješenje tog sistema, a prema (30) bi on bio manji od najmanjeg rješenja p_1 , a to je dakako nemoguće, pa je time tvrdnja stavka dokazana.

No sada možemo još više pokazati, jer vrijedi idući stavak:

Stavak 6. *Ako je $p = p_1$ najmanji broj, za koji postoji uz neki određeni ciklus C mreža $R[C]$ plohe $P'(p)$, tada postoje za isti taj ciklus homogene mreže svih onih ploha $P'(p_v)$, gdje je $p_v = v p_1 - v + 1$ ($v = 1, 2, 3, \dots$), dok za taj ciklus C ne postoje homogene mreže preostalih ploha $P'(p)$.*

Da za taj ciklus ne mogu postojati homogene mreže preostalih ploha $P'(p)$, izlazi iz stavka 5., a da te mreže ploha $P'(p_v)$ doista postoje, dokazat ćemo ovako:

Uzmimo da postoji mreža $R[C]$ plohe $P'(p_1)$, pa neka je $P'(p_v)$ jedna v -struka nerazgranata ploha pokrivanja plohe $P'(p_1)$. Budući da je svaka točka plohe $P'(p_1)$ v -struko preslikana na plohu $P'(p_v)$, tim će preslikavanjem biti prenesena na plohu $P'(p_v)$ i mreža $R[C]$.

Ako su sada a_0, a_1 i a_2 , odnosno a'_0, a'_1, a'_2 brojevi poje-
dinih elemenata mreža $R[C]$ plohe $P(p_1)$, odnosno plohe $P'(p'_1)$,
onda zbog (16) mora biti

$$2(1 - p'_1) = a'_0 - a'_1 + a'_2 = \nu a_0 - \nu a_1 + \nu a_2 = \nu \cdot 2(1 - p_1),$$

t. j.

$$p'_1 = \nu(p_1 - 1) + 1 = p_1,$$

pa je tako stavak dokazan.

Iz tog stavka možemo odmah zaključiti: Ako je za neki
ciklus C na pr. p_1 jednako 2, t. j. ako je mreža $R[C]$ moguća
na plohi $P(2)$, onda je uvijek moguća i na svim ostalim plo-
hama $P'(p)$, a ako je za neki ciklus C na pr. p_1 jednako 12,
mreže $R[C]$, bit će moguće samo na plohama $P'(p)$, gdje je
 $p = 12, 23, 34, \dots$, i t. d.

Kako se u slučaju $\nu > 1$ može ploha $P(p_\nu)$ realizirati kao
 ν -struka ploha pokrivanja plohe $P(p_1)$ na više različitih načina
i to tako, da dvije homeomorfne plohe $P(p_\nu)$, kao plohe pokri-
vanja, budu različite, t. j. da se ne daju jedna na drugu topo-
loški tako preslikati, da bilo koje dvije pridružene točke »po-
krivaju« jednu istu točku osnovne plohe $P(p_1)$, mogu po dvije
mreže $R[C]$ jedne iste plohe $P'(p)$ biti anizomorfne. Prema
tome postoji i općenito mogućnost, da dvije mreže $R[C]$ neke
plohe $P'(p)$ ne budu izomorfne, makar uz isti ciklus C moraju
imati isti broj pojedinih elemenata.

Slično kao i kod torusa postoji i kod ploha $P'(p)$ neizmjer-
no mnogo klasa takvih topoloških preslikavanja plohe $P'(p)$
na samu sebe, koja ne mogu prijeći dodavanjem neke obične
deformacije plohe $P'(p)$ jedna u druge. Zato će i kod homo-
genih mreža ploha $P'(p)$ postojati svakoj takvoj mreži neizmjer-
no mnogo njih, koje su s njom izomorfne, ali nisu homotopne.

6. Neki slučajevi homogenih mreža ploha $P'(p)$

Promotrit ćemo sada neke slučajeve homogenih mreža
ploha $P'(p)$. Poći ćemo pritom od najjednostavnijeg slučaja,
kad je $r = 1$, t. j. kad su svi poligoni homogene mreže isto-
vrsni. Izostavimo li u tom slučaju brojevima k_1 i n_1 indekse,
tada mjesto jednadžbi (20), (21) i (22) dobivamo ove jednostav-
nije relacije.

$$\alpha_0 = \frac{4n(p-1)}{kn-2k-2n}, \quad (31)$$

$$\alpha_1 = \frac{2kn(p-1)}{kn-2k-2n}, \quad (32)$$

$$\alpha_2 = \frac{4k(p-1)}{kn-2k-2n}, \quad (33)$$

koje u slučaju $p=0$ prelaze u poznate relacije za pravilne poliedre⁹.

Kako među šest veličina $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, k, n, p$ postoje tri nezavisne relacije, može se svaka od tih veličina izraziti s bilo koje tri odabrane od preostalih. Od svih tako mogućih relacija uzmimo ove dvije:

$$n = \frac{2k\alpha_0}{(k-2)\alpha_0-4(p-1)}, \quad (34)$$

$$k = \frac{2n\alpha_2}{(n-2)\alpha_2-4(p-1)}, \quad (35)$$

koje izlaze iz (31), odnosno (33). Uz pomoć tih relacija možemo naime odrediti ograde za moguće vrijednosti brojeva k i n , i to ovako:

Ponajprije iz (34) zbog relacija (3) i (1)₁ izlazi

$$k \leq 6(2p-1). \quad (36)$$

A zatim, budući da je sada $s=k$, na sličan način iz (35) zbog relacija (2) i (1)₃ izlazi

$$n \leq 6(2p-1). \quad (37)$$

Uzmimo sada najprije slučaj $p=2$. Tada je prema (2) i (36) odnosno prema (3) i (37)

$$\begin{aligned} 3 &\leq k \leq 18, \\ 3 &\leq n \leq 18. \end{aligned} \quad (38)$$

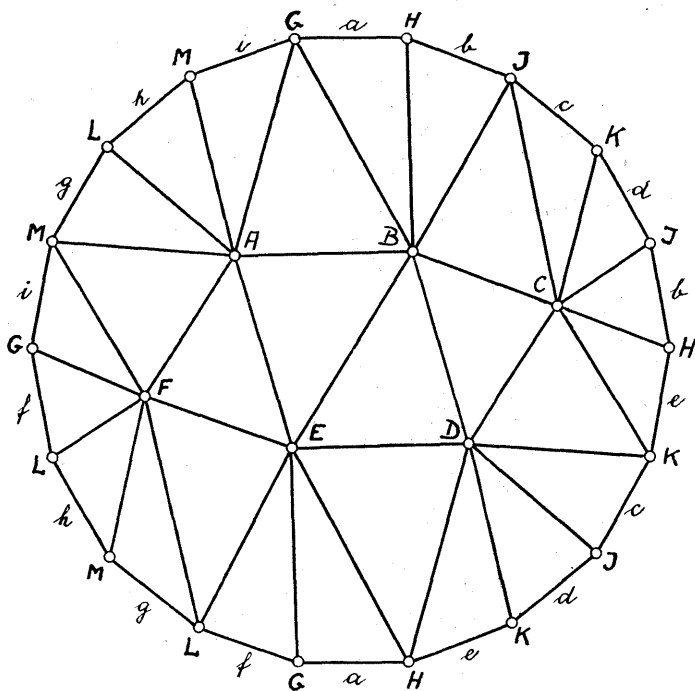
Treba dakle potražiti sve one cijele brojeve k i n iz intervala (38), koji daju prema relacijama (31), (32) i (33) prirodne vrijednosti za brojeve pojedinih elemenata mreže. Na taj način dobivamo u svemu 25 diofantskih rješenja tih relacija, sadržanih u tablici (39).

⁹ Vidi na pr.: H. S. M. Coxeter [4], str. 13. i 14.

	p	n	k	α_0	α_1	α_2	
I	2	3	7	12	42	28	sl. 3.
II			8	6	24	16	
III			9	4	18	12	sl. 4.
IV			10	3	15	10	
V			12	2	12	8	
VI			18	1	9	6	
VII		4	5	8	20	10	
VIII			6	4	12	6	
IX			8	8	8	4	
X			12	1	6	3	
XI		5		10	20	8	sl. 6.
XII			5	4	10	4	
XIII			10	1	5	2	
XIV		6	4	6	12	4	
XV			6	2	6	2	sl. 7.
XVI		7	3	28	42	12	sl. 5.
XVII		8	3	16	24	6	
XVIII			4	4	8	2	
XIX			8	1	4	1	
XX		9	3	12	18	4	
XXI		10	3	10	15	3	
XXII			5	2	5	1	
XXIII		12	3	8	12	2	
XXIV			4	3	6	1	
XXV		18	3	6	9	1	sl. 8.

(39)

Pripadni ciklusi mreže za sva ta rješenja jesu prve vrste i to simetrični tipa *M*. Prema tome za te cikluse postoje homogene mreže hiperbolične ravnine. No za svako pojedino od tih rješenja nije teško pokazati da se može konstruirati i pripadna

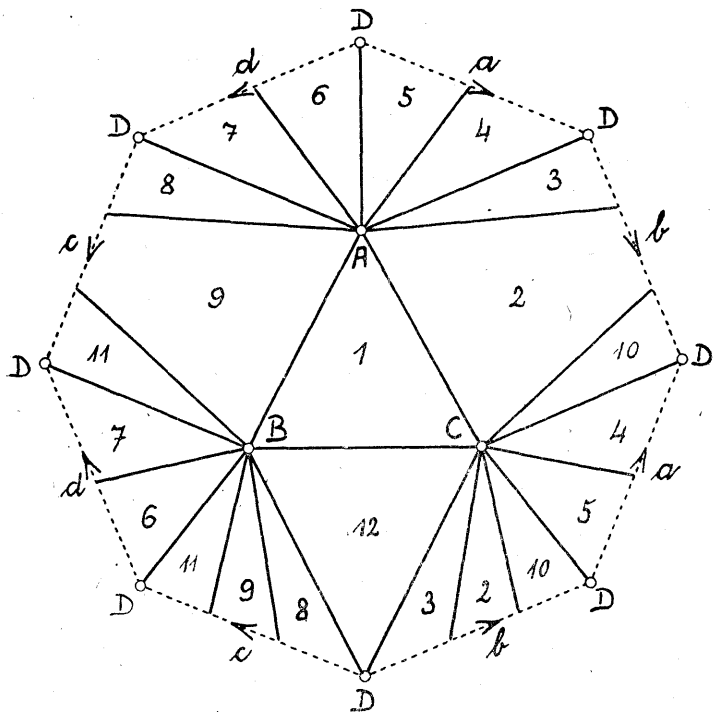


Sl. 3.

mreža $R[C]$ plohe $P(2)$. Prema tome postoji 25 homogenih mreža plohe $P(2)$ s istovrsnim poligonima.

Iz tablice (39) odmah razabiramo, da je među tim mrežama jedanaest parova među sobom recipročnih, tako na pr. mreže I i XVI; II i XVII i t. d., dok su mreže XII, XV i XIX same sebi recipročne.

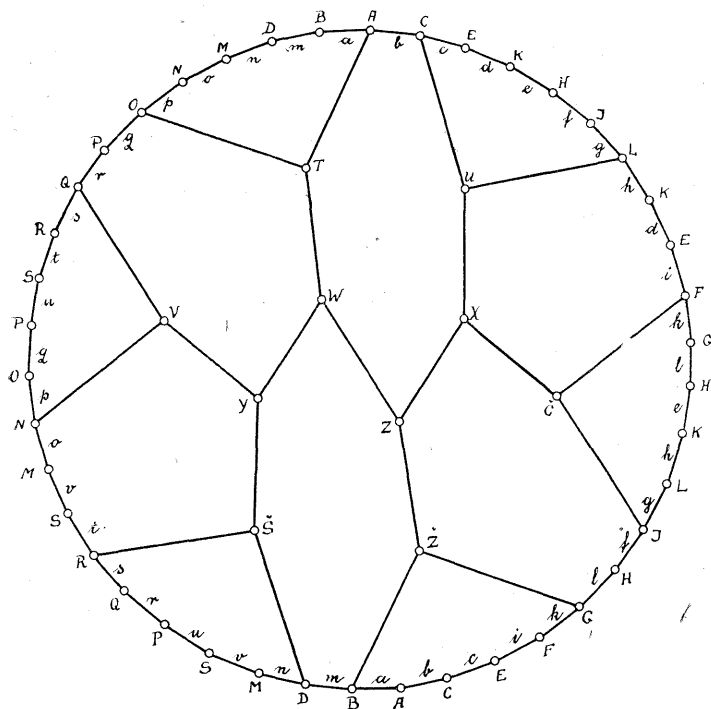
U sl. 3.—8. dani su crteži nekoliko karakterističnih slučajeva tih mreža, i to: sl. 3. predočuje mrežu $R[3, 3, 3, 3, 3, 3]$, a sl. 5. mrežu $R[7, 7, 7]$, obje razrezane sa četiri zatvorena prereza duž stranica mreže u jedno jednostavno-suvislo po-



Sl. 4.

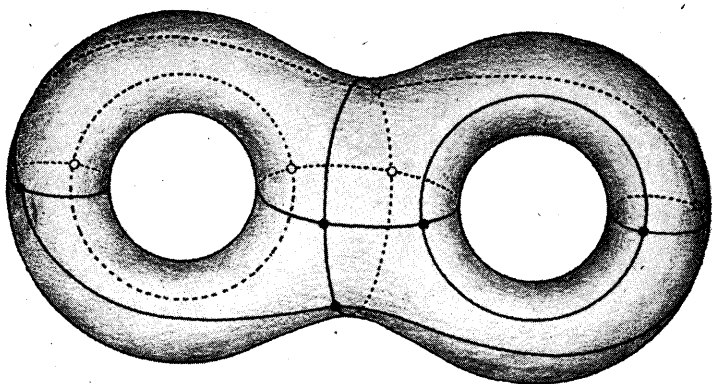
druže; sl. 4. predložuje mrežu $R[3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3]$ u »kanonskom razrezu« plohe $P(2)$, gdje sve crte prereza prolaze jednim čvorištem mreže, ali ne idu duž stranica mreže; napokon slike 6., 7. i 8. prikazuju redom mreže $R[5, 5, 5, 5]$, $R[6, 6, 6, 6, 6, 6]$ i $R[18, 18, 18]$.

Kako smo ovdje ispitali mogućnost homogenih mreža plohe $P(2)$ uz $r=1$, tako bismo mogli postupati posve analogno za bilo koji drugi slučaj plohe $P'(p)$, gdje je $p > 2$. No mi ćemo

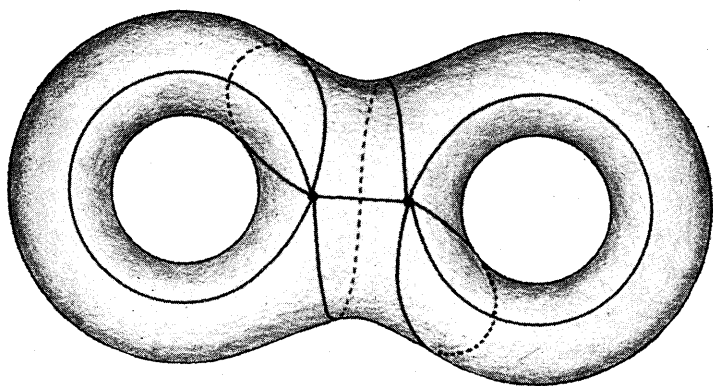


Sl. 5.

ovdje promotriti samo nekoliko primjera takvih mreža. Ponajprije je jasno iz prošlog razmatranja, da su za svih dvadeset i pet slučajeva ciklusa prema rješenjima iz tablice (39), za koje su moguće homogene mreže plohe $P(2)$, takve mreže moguće i u svakom slučaju gdje je $p > 2$. Uzmimo kao primjer slučaj



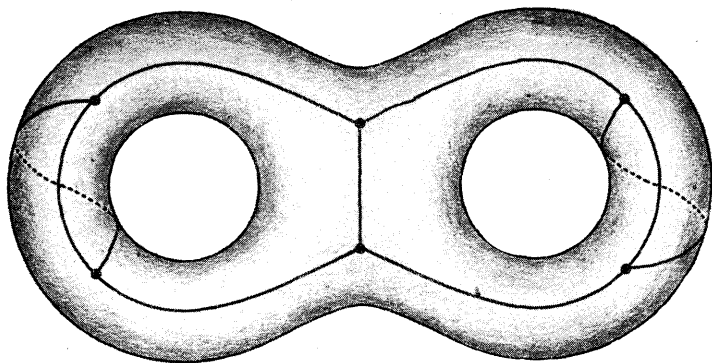
Sl. 6.



Sl 7.

VIII. tablice (39), t. j. ciklus $C \equiv [4, 4, 4, 4, 4, 4]$. Tada je prema (31) i (33) $a_0 = 4(p-1)$; $a_2 = 6(p-1)$, dakle postoji mogućnost te mreže za svako $p \geq 2$. U slici 9. predložena je mreža $R[4, 4, 4, 4, 4, 4]$ plohe $P(7)$.

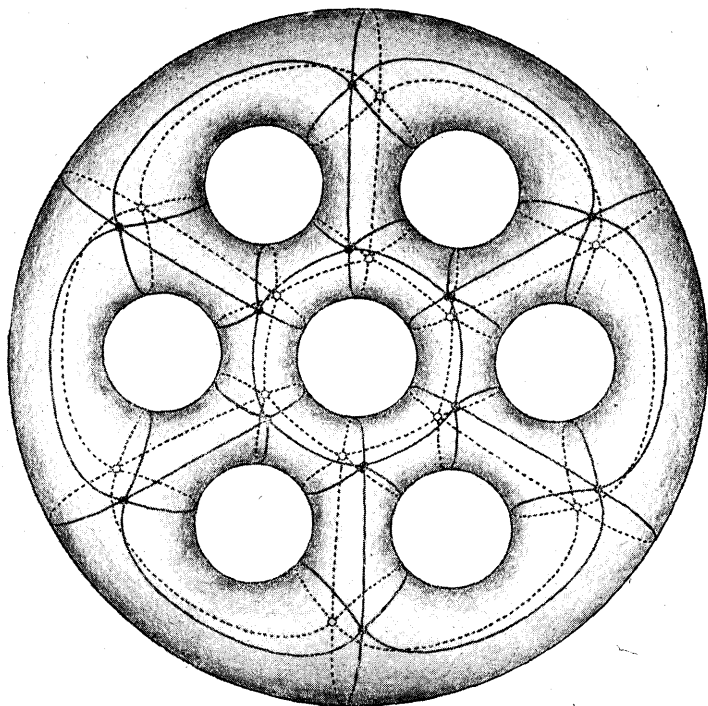
No ne mora i obrnuto svaka mreža bilo koje plohe $P'(p)$ biti moguća i na plohi $P(2)$. Evo tri takva primjera: uzmimo najprije ciklus $C \equiv [5, 5, 5, 5, 5, 5]$. Za taj je ciklus prema (31) i (33) $a_0 = \frac{5}{2}(p-1)$, $a_2 = 3(p-1)$, pa je prema tome $P(3)$



Sl. 8.

ploha najnižeg roda, za koju postoji mogućnost homogene mreže s tim ciklusom. Ta je mreža predložena na sl. 10. Kao drugi primjer uzmimo ciklus $C \equiv [6, 6, 6, 6, 6, 6]$. Sada je $a_0 = 3(p-1)$, $a_2 = \frac{5}{2}(p-1)$, pa je i ta mreža moguća na plohi $P(3)$ i u sl. 11. je ona prikazana. Te su dvije posljednje mreže među sobom recipročne. Promotrimo napokon ciklus $C \equiv [4, 4, 4, 4, 4, 4]$. Sada je $a_0 = \frac{8}{3}(p-1)$, $a_2 = \frac{14}{3}(p-1)$, pa prema tome za taj ciklus postoji mogućnost homogene mreže istom na plohi $P(4)$. Ta je mreža predložena u sl. 12.

Prijedimo sada na slučajeve $r > 1$. Promotrit ćemo ovdje četiri jednostavna primjera takvih mreža. Uzmimo najprije



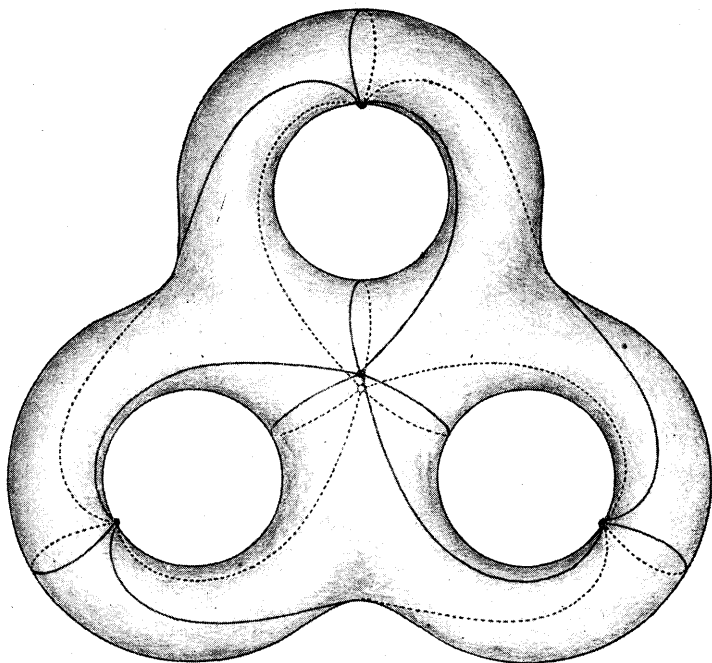
Sl. 9.

ciklus $C \equiv [4, 4, 4, 5]$. Pokazalo se, da za taj ciklus druge vrste postoji barem jedna homogena mreža hiperbolične ravnine¹⁰. Budući da je u tom slučaju prema (20) i (23)

$$\alpha_0 = 40(p-1),$$

$$q_4 = 30(p-1), \quad q_5 = 8(p-1),$$

¹⁰ [1], str. 99.



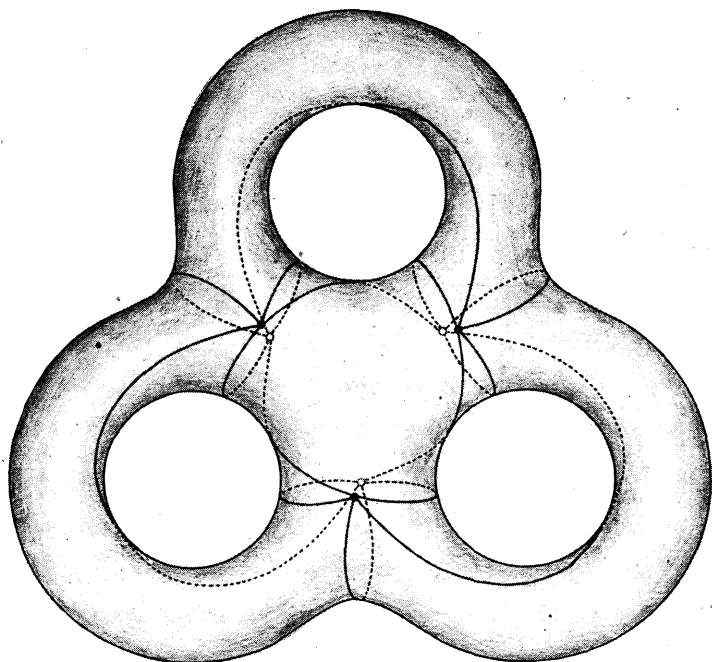
Sl. 10.

postoji za taj ciklus mogućnost homogene mreže ploha $P'(p)$ za svako p . Na slici 13. nalazi se crtež mreže $R[4, 4, 4, 5]$ plohe $P(2)$.

Za ciklus druge vrste tipa $C = [3, 3, n, 3, n]$ postoji za svako $n \geq 5$ jedna homogena mreža hiperbolične ravnine. U tom slučaju relacije (20) i (23) daju

$$\alpha_0 = \frac{4n(p-1)}{n-4},$$

$$q_3 = \frac{4n(p-1)}{n-4}, \quad q_n = \frac{8(p-1)}{n-4}.$$



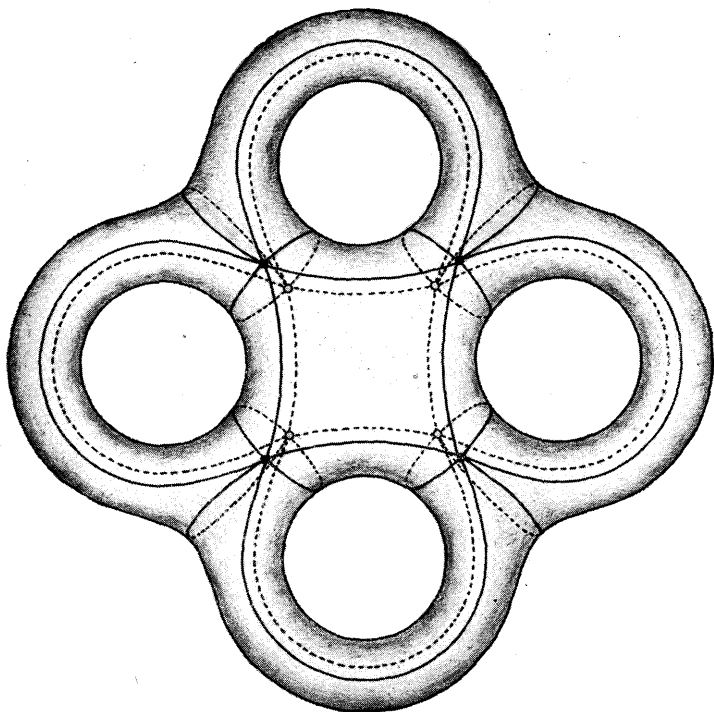
Sl. 11.

Odatle razabiremo, da na pr. za $n = 6$ postoji mogućnost homogene mreže bilo koje plohe $P'(p)$. Crtež na sl. 14. prikazuje mrežu $R[3, 3, 6, 3, 6]$ plohe $P(2)$.

Za ciklus prve vrste $C = [5, 6, 5, 6]$ ima jedna homogena mreža hiperbolične ravnine. Budući da je sada

$$\alpha_0 = \frac{15}{2}(p-1), \quad q_5 = 3(p-1), \quad q_6 = \frac{5}{2}(p-1),$$

postoji za taj ciklus mogućnost homogenih mreža na plohama roda $p = 3, 5, 7, \dots$. Takva je mreža za slučaj $p = 3$ prikazana na sl. 15.



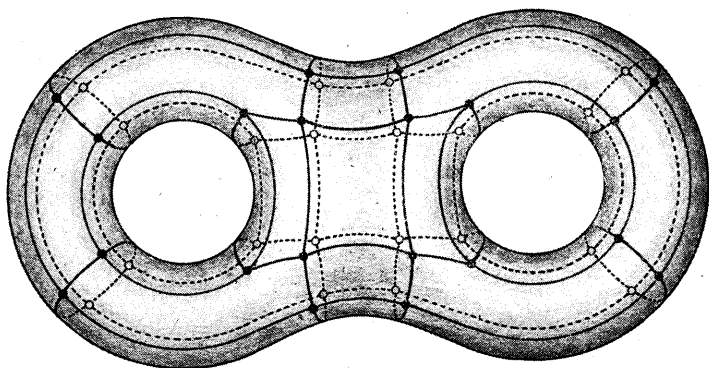
Sl. 12.

Kao posljednji primjer uzmimo ciklus prve vrste $C = [4, 5, 4, 6]$. Za njega postoji jedna homogena mreža hiperbolične ravnine. Sada je

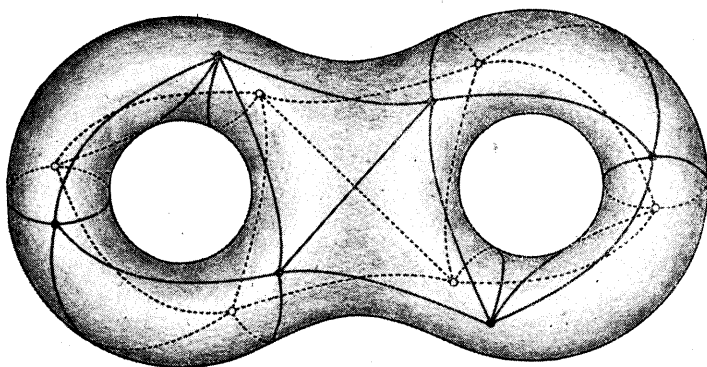
$$\alpha_0 = 15(p-1), \quad q_4 = \frac{15}{2}(p-1), \quad q_6 = 3(p-1),$$

$$q_5 = \frac{5}{2}(p-1).$$

I za taj ciklus postoji dakle mogućnost homogenih mreža za plohe roda $p = 3, 5, 7, \dots$. Primjer takve mreže za $p = 3$ nalazi se na sl. 16.



Sl. 13.



Sl. 14.

7. Broj mogućih homogenih mreža ploha $P'(p)$

Za homogene mreže kugline plohe ($p=0$) u slučaju $r=1$ daju relacije (31), (32) i (33) samo 5 diofantskih rješenja, pa zato i ima samo 5 regularnih, Platonovih tjelesa. No u slučaju $p=0$, $r>1$ nalaze se među cjelobrojnim rješenjima jednadžbi (20), (21) i (22) i ova:

	k_1	n_1	k_2	n_2	α_0	α_1	α_2
I	2	4	1	n	$2n$	$3n$	$n+2$
II	3	3	1	n	$2n$	$4n$	$2n+2$

koja odgovaraju mrežama n -terostrane prizme i antiprizme, dakle i ta dva tijela pripadaju u Arhimedova polupravilna tjelesa. Za n možemo ovdje uzeti bilo koji prirodni broj veći od 2. Prema tome ima neizmjereno mnogo homogenih mreža kugline plohe.

Vidjeli smo, da postoji doduše samo konačan broj ciklusa, za koje su homogene mreže torusa moguće. No za jedan isti ciklus ima neizmjereno mnogo homogenih mreža, koje nisu među sobom izomorfne, a i po broju elemenata se razlikuju.

Kako broj ciklusa, za koje su moguće homogene mreže hiperbolične ravnine, nije ograničen, moglo bi se možda pomisliti, da će biti neizmjereno mnogo i homogenih mreža neke plohe $P'(p)$. Ali nije tako. Pokazat ćemo naime, da vrijedi:

Stavak 7. *Za neku određenu plohu $P'(p)$ ne može postojati više nego konačni broj (koji uostalom ovisi o p) homogenih mreža, koje nisu među sobom izomorfne.*

Za dokaz ovog stavka trebat će nam ovaj gotovo evidentni pomoćni stavak.

Stavak 8. *Bilo koje rješenje $p, r, k_i, n_i, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, q_{n_i}$ ($i=1, 2, \dots, r$) relacija (20) — (23) odgovara najviše konačnom broju mogućih homogenih mreža plohe $P(p)$, koje nisu među sobom izomorfne.*

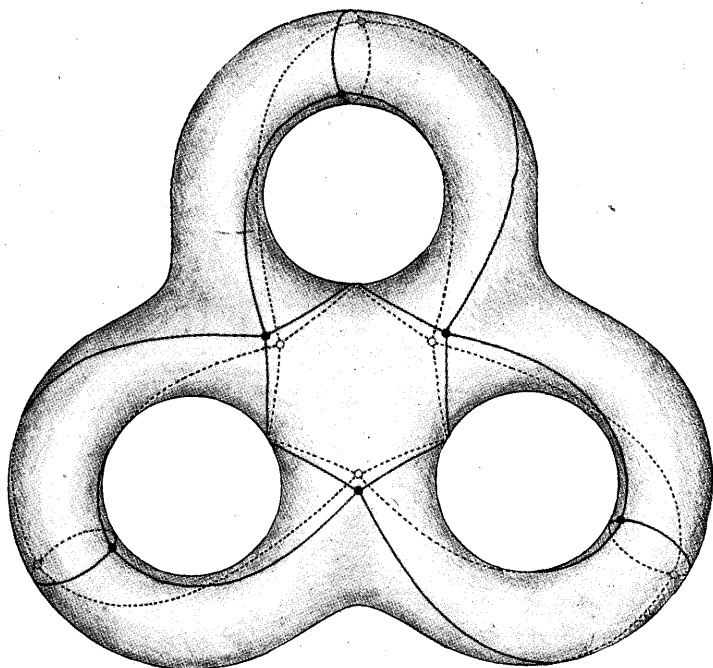
Dokaz te tvrdnje izlazi odmah iz činjenice, da u konačnom skupu od $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2$ elemenata može postojati najviše konačan broj međusobno različitih mogućnosti relacija incidencije među elementima različitih vrsta.

Preostaje samo još da se dokaže:

Stavak 9. *Ako je dan bilo koji broj $p \geq 2$, tada uz uvjet, da vrijede nejednadžbe (1) — (5), postoji najviše konačan broj diofantskih rješenja relacija (20), (21), (22) i (23).*

Stavak 7. je tada neposredna posljedica stavaka 8. i 9. Dokazat ćemo sada dakle stavak 9.

Ako je $r=1$, onda su uz dano p brojevi k i n prema relacijama (36) i (37) ogradeni, dakle može postojati samo konačni broj parova k, n , koji dolaze u obzir, a kako su sa k, n i p



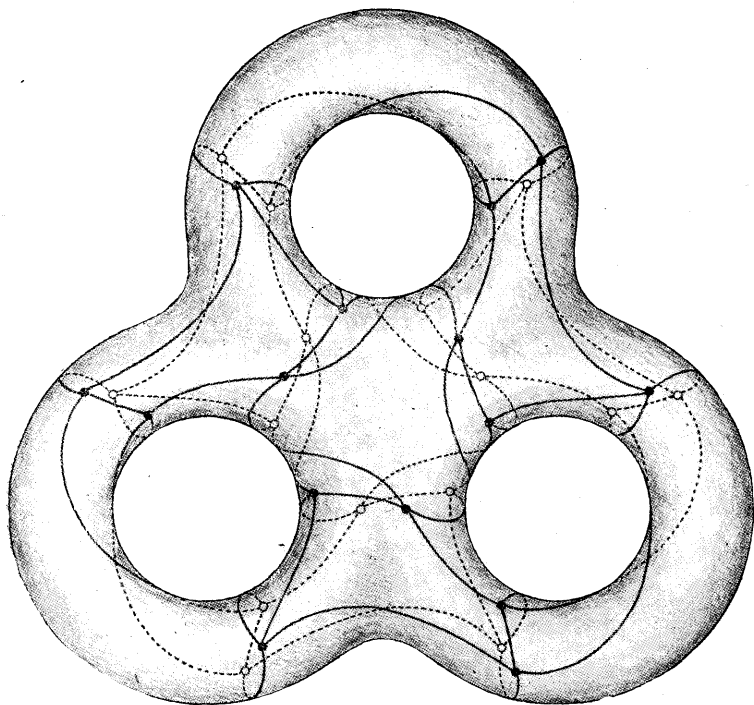
Sl. 15.

brojevi a_0, a_1 i a_2 već određeni, ispravnost tvrdnje stavka je u tom slučaju očita. No pokazat ćemo, da isto vrijedi i bez obzira na to, koliko različitih brojeva n_i ciklus mreže sadržava, dakle za svaku vrijednost broja r .

Pokazat ćemo najprije, da je za neku danu vrijednost od p broj s , t. j. broj svih članova ciklusa ograden:

Budući da je zbog relacije (25) u desnoj strani jednadžbe (20) nazivnik pozitivan, možemo iz nje na osnovi relacija (1)₁ i (3) zaključiti, da je uvijek

$$\sum_{i=1}^r k_i \leq 6(2p-1),$$



Sl. 16.

pa je onda zbog (2)

$$3 \leq s \leq 6(2p-1). \quad (40)$$

Prema tome i u općem slučaju ciklus homogene mreže, na pr. plohe $P(2)$ ne može sadržavati više od 18 članova.

Zbog (40) su i brojevi k_i ograđeni, dakle prema (4) mora biti

$$1 \leq k_i \leq 6(2p-1) \quad (41)$$

$$(i=1, 2, \dots, r).$$

No uvjerit ćemo se, da za svako p i skup mogućih brojeva n_i mora biti ograđen.

Zato ćemo najprije pokazati, da u ciklusu $C \equiv [n_{i_1}, n_{i_2}, n_{i_3}, \dots, n_{i_s}]$ ne mogu biti dva broja n_{i_ν} ($\nu=1, 2, \dots, s$) (ili čak i više njih) relativno vrlo velika; tako nije moguće da za njih vrijedi na pr.

$$n_{i_\nu} > 12(12p^2 - 18p + 7). \quad (42)$$

Pretpostavka, da u ciklusu C postoje barem dva broja n_{i_ν} , za koje vrijedi relacija (42), dovodi naime do kontradikcije:

Iz (15) mora zbog (42), (5) i (40) izlaziti

$$\alpha_0 > \frac{2(12p^2 - 18p + 7)}{2p-1},$$

dok bi naprotiv iz (20) zbog (2), (42) i (3) sigurno izlazilo

$$\alpha_0 < \frac{2(p-1)}{2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{12(12p^2 - 18p + 7)} \right) + 1 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - 1},$$

t. j.

$$\alpha_0 < \frac{2(12p^2 - 18p + 7)}{2p-1}.$$

Prema tome je učinjena pretpostavka nemoguća.

Preostajala bi još eventualna mogućnost, da za jedan jedini od brojeva n_{i_ν} ($\nu=1, 2, \dots, s$) nema gornje ograde, t. j. da uz svaki, po volji veliki, zadani broj n_0 postoji uz dani broj p rješenje sistema (20) — (23), kod kojega je jedan od brojeva n_{i_ν} veći od n_0 .

Označimo sada brojeve n_{i_ν} tako, da je onaj jedini od njih — za koji još ne znamo, da li je ograđen ili nije — označen sa n_r (pa je prema tome $k_r=1$), dok će preostali — ograđeni — brojevi biti označeni sa $n_1, n_2, \dots, n_{r-1}$.

Prema (20) je tada

$$\alpha_0 = \frac{2(p-1)}{\sum_{i=1}^r k_i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_i} \right) - 1} = \frac{2(p-1)}{\sum_{i=1}^{r-1} k_i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_i} \right) - \frac{1}{2} - \frac{1}{n_r}} = \frac{2(p-1)}{A - \frac{1}{n_r}}, \quad (43)$$

gdje je kraće označeno

$$\sum_{i=1}^{r-1} k_i \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n_i} \right) - \frac{1}{2} = A. \quad (44)$$

Uz uvjete (2) i (3) uvijek je $A > 0$ s jedinim izuzetkom od 6 diofantskih rješenja relacije $A \leq 0$. No vrijednosti od A , koje nisu pozitivne, ne dolaze u obzir za rješenja relacije (43), jer bi tada bilo $\alpha_0 < 0$.

Budući da brojevi k_i moraju biti iz intervala (41) i mora pri tom vrijediti i relacija (40), dok nizovi brojeva $n_1, n_2, \dots, n_{r-1}$ ($1 < r \leq s$) mogu biti samo neke od kombinacija (bez ponavljanja) $(r-1)$ -vog razreda od brojeva $3, 4, 5, \dots, 12 \cdot (12p^2 - 18p + 7)$, jasno je, da izraz A prema (44) može poprimiti samo konačni broj vrijednosti $A_1, A_2, A_3, \dots, A_\nu$. Neka je sa A_m označena najmanja pozitivna od tih vrijednosti.

Pretpostavka, da broj n_r za bilo koju vrijednost od p nije ograničen, dovodila bi sada do kontradikcije.

Uzmimo naime, da broj n_r nije ograničen, nego da postoji za bilo koju vrijednost od p beskonačni niz rješenja relacije (20), t. j. beskonačni niz skupova brojeva

$$\alpha_0^\lambda, r^\lambda, k_1^\lambda, k_2^\lambda, \dots, k_{r^\lambda-1}^\lambda, k_{r^\lambda}^\lambda, n_1^\lambda, n_2^\lambda, \dots, n_{r^\lambda-1}^\lambda, n_{r^\lambda}^\lambda,$$

gdje je $\lambda = 1, 2, 3, \dots$ gornji indeks, pa neka je

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} n_{r^\lambda}^\lambda = \infty,$$

dok je

$$k_{r^\lambda}^\lambda = 1, \quad (45)$$

tada bi bilo moguće odabrati broj λ_0 tako, da je vrijednost od $n_{r^{\lambda_0}}^{\lambda_0}$ po volji velika, na pr. da je

$$n_{r^{\lambda_0}}^{\lambda_0} > \frac{2(p-1)}{A_m}. \quad (46)$$

No to je nemoguće, jer bi prema (14) zbog (5) i (40) bilo

$$\alpha_0 \geq n_{r_0}^{\lambda_0},$$

pa onda radi (46) izlazi

$$\alpha_0 > \frac{2p-1}{A_m},$$

dok bi opet prema (43) i (46) bilo

$$\alpha_0 = \frac{2(p-1)}{A - \frac{1}{n_{r_0}^{\lambda_0}}} < \frac{2(p-1)}{A_m - \frac{A_m}{2p-1}}$$

dakle

$$\alpha_0 < \frac{2p-1}{A_m},$$

a time je nemogućnost učinjene pretpostavke očita.

Prema tome je doista skup svih mogućih brojeva n_i za svaku vrijednost od p ograden.

Budući da je dakle zbog $1 \leq r \leq s$ i zbog (40) broj r ograden, a pokazalo se, da su i moguće vrijednosti brojeva $k_1, k_2, \dots, k_r, n_1, n_2, \dots, n_r$ ogradene, može postojati samo konačni broj kombinacija tih brojeva, pa je zato ujedno i broj mogućih rješenja sistema jednačžbi (20) do (23) sigurno konačan. Tako je i stavak 9. dokazan.

LITERATURA

- [1] BILINSKI, Homogene mreže ravnine, Rad Jugoslavenske akademije, knjiga 271, 1948, 145—255.
- [2] COXETER, Regular skew polyhedra in three and four dimensions, and their topological analogues, Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. 2, Vol. 43, 1937, 33—62.
- [3] COXETER, The abstract groups $G^{m,n,p}$, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 45., No. 1, 1939, 73—150.
- [4] COXETER, Regular Polytopes, London 1948.
- [5] COXETER, Configurations and Maps, Reports of a Mathematical Colloquium, II. Ser., Issue 8, 1949, 18—38.
- [6] HEESCH, Über topologisch reguläre Teilungen geschlossener Flächen, Nachrichten von der Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen, Math. Phys. Kl., 1932, 268—273.

(Primljeno na sjednici Odjela za matematičke,
fizičke i tehničke nauke dne 11. X. 1949.)