

**CETVEROSTRUKI FOKUS UNIKURZALNIH  
CIRKULARNIH KRIVULJA 3. REDA I NEKI OSOBITI  
PRAMENOV I TIH KRIVULJA.**

Neki pravac  $p$ , koji siječe jednostruku ravnalicu neke pravčaste plohe 3. reda u točki  $A$ , neka probada ovu plohu još i u točkama  $B$  i  $C$ . Probodišta  $B$ ,  $C$  nalaze se na paru izvodnica ove plohe, koje se sijeku na njenoj dvostrukoj ravnalici, recimo u točki  $O$ . Sijecemo li sada našu plohu ravninama pravca  $p$  i sve te presječne krivulje centralno projiciramo iz točke  $O$  na bilo kakvu ravninu, dobit ćemo na toj ravnini pramen unikurzalnih krivulja 3. reda, određen dvostrukom točkom (tri elementa), trima jednostrukim točkama (projekcije točaka  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ), te tangentama u dvjema od tih točaka (u projekcijama točaka  $B$ ,  $C$ ). Sjecište  $F$  ovih tangenata je čvrsta točka ovoga pramena, jer su čvrste u njemu i spomenute tangente.

Mjesto bilo kakove pravčaste plohe 3. reda uzmimo sada Plückerov konoid, a pravac  $p$  neka se nalazi u neizmjerne dalekoj ravnini para minimalnih izvodnica toga konoida. Svezak njegovih ravnina bit će prema tome svezak usporednih ravnina. Točka  $O$  bit će ovdje neizmjerne daleka točka dvostrukog pravca ovog konoida, a to je, kao što znademo, ona njegova točka, kojom prolazi par njegovih minimalnih izvodnica.<sup>1)</sup> Odavle direktno slijedi poznata činjenica, da se svi presjeci Plückerova konoida projiciraju u smjeru dvostrukog pravca na direkcione ravnine kao cirkularne krivulje. Sijecemo li sada ovaj konoid sveskom usporednih ravnina neizmjerne dalekog pravca  $p$  i sve te presjeke u smjeru dvostrukog pravca projiciramo na bilo koju direkcionu ravninu, dobit ćemo na toj ravnini pramen cirkularnih krivulja 3. reda, koje imaju zajedničku dvostruku točku, neizmjerne daleku realnu točku i obje apsolutne točke s njihovim tangentama. Realno sjecište  $F$  ovih imaginarnih tangenata u apsolutnim točkama zove se četverostruki fokus.

<sup>1)</sup> Müller-Krames: Vorlesungen über darstellende Geometrie, Bd. III. str. 204.

Budući da su apsolutne točke i njihove imaginarne tangente zajedničke svim krivuljama ovog pramena, to će i ovo realno sjecište  $F$  biti zajednički četverostruki fokus svih cirkularnih krivulja ovog pramena.

Po jedna ravnina svakog sveska usporednih ravnina prolazi jednom izvodnicom Plückerova konoida. Presjek toga konoida s tom ravninom raspada se u spomenutu izvodnicu i neku elipsu, koja se u prije spomenuti pramen cirkularnih krivulja 3. reda projicira kao kružnica. Budući da je središte kružnice sjecište njenih tangenata u apsolutnim točkama, to će središte spomenute kružnice, u pramenu naših cirkularnih krivulja 3. reda roda nultoga, biti zajednički četverostruki fokus svih krivulja ovog pramena.

Kad svaku cirkularnu krivulju 3. reda roda nultoga možemo shvatiti kao projekciju nekog ravnog presjeka Plückerova konoida u smjeru dvostrukog pravca na jednu njegovu direkciju ravninu<sup>2)</sup>, tad pomoću gornjih razmatranja možemo na svakoj takovoj unikurzalnoj cirkularnoj krivulji 3. reda odrediti njen četverostruki fokus.

Neka je zadana unikurzalna cirkularna krivulja 3. reda  $k$  kao projekcija nekog presjeka Plückerova konoida u smjeru njegovog dvostrukog pravca na jednu direkciju ravninu (vidi sliku). Povučemo li tangente  $a_1, a_2$  na tu krivulju, usporedne s njenom asimptomom, i njihova dirališta  $T_1, T_2$  spojimo s dvostrukom točkom, tada su ove spojnice  $t_1, t_2$  projekcije torzalnih pravaca toga Plückerova konoida, dakle okomitih jedan na drugom. Kod unikurzalnih cirkularnih krivulja 3. reda ove dvije spojnice moraju biti međusobno okomite<sup>3)</sup>. Uzmemo li sada sve presjeke našeg Plückerova konoida, čije su ravnine usporedne s ravninom zadanog presjeka, tada će njihova projekcija dati, kao što već znademo, pramen cirkularnih krivulja 3. reda sa zajedničkom dvostrukom točkom, realnom neizmjereno dalekom točkom, te apsolutnim točkama i njihovim tangentama. Tangente  $\tau_1, \tau_2$  u sjecištima tih krivulja s pravcima  $t_1, t_2$  bit će usporedne s pravcima  $a_1, a_2$ , a razmak njihov bit će jednak razmaku pravaca  $a_1, a_2$ , jer su parovi ovih tangenata tragovi tih usporednih ravnina u torzalnim ravninama, koje su kod Plückerova konoida usporedne. Sve krivulje ovog pramena imaju zajednički četverostruki fokus, a jedna između tih krivulja raspada se u kružnicu i pravac, koji prolazi dvostrukom točkom, a usporedan je s prav-

<sup>2)</sup> Vidi moju radnju: Vanjska oznaka unikurzalne cirkularne krivulje 3. reda. Nast. Vjesnik, knj. L., str. 360.

<sup>3)</sup> Vidi moju radnju: Cit. pod <sup>2)</sup>.

Uzdignemo li u dvostrukoj točki okomicu  $o$  na asimptotu, tada za pravce  $t_1, t_2, o$  i  $s$  vrijedi  $(t_1 t_2 o s) = -1$ , odnosno  $\sphericalangle ot_1 = \sphericalangle t_1 t_2$ , jer je kut pravaca  $t_1, t_2$  pravi. Vidimo dakle, da ćemo dobiti četverostruki fokus svake unikurzalne cirkularne krivulje 3. reda ovako: dvostruku točku te krivulje spojimo s diralštima njenih tangenata  $a_1, a_2$  usporednih s asimptotom i kroz nju povučemo okomicu  $o$  na te tangente, odnosno asimptotu. Prenesemo

li pravac o oko jedne ili druge ove spojnice simetrično na drugu stranu, tada na dobivenom pravcu leži četverostruki fokus na strani vitice, udaljen od dvostruke točke za polovicu udaljenosti tangenata  $a_1, a_2$ .

Imamo li četverostruki fokus  $F$  neke cirkularne unikurzalne krivulje  $k$  3. reda i oko nje, kroz njenu dvostruku točku, opisanu kružnicu  $c$ , tada se na temelju prostornih razmatranja može utvrditi zanimljiva veza ove kružnice s našom krivuljom  $k$ .

Svaku zraku dvostruke točke krivulje  $k$  možemo smatrati projekcijom jedne izvodnice Plückerova konoida. Neka takva izvodnica  $i$  siječe kružnicu  $c$  u točki  $L$ , a krivulju  $k$  u točki  $K$ . Budući da su ravnine presjeka  $k, c$  usporedne, to iz prostornih odnosa jasno slijedi, da točka  $L$  mora biti ispod pravca  $\tau_1$  upravo toliko, koliko je točka  $K$  ispod pravca  $a_1$ . Pomoću ove činjenice može se vrlo jednostavno konstruirati svaka krivulja našeg pramena, ako mu je zadan zajednički smjer asimptota, dvostruka točka i četverostruki fokus. Tangente u pojedinim točkama mogu se dobiti također vrlo jednostavnim putem, koji se temelji na poznatim svojstvima Plückerova konoida. Na pr. presiječemo li tangentom kružnice  $c$  u točki  $L$  pravac  $\tau_1$  pa spojnicom toga sjecišta i dvostruke točke presiječemo usporednicu tangente kružnice  $c$  u točki  $L$ , povučenu točkom  $K$ , tada će nam ovim sjecištem povučena usporednica s pravcem  $KL$  sjeći pravac  $a_1$  u točki, kojom prolazi tangenta krivulje  $k$  u točki  $K$  (vidi sliku!). Ova planimetrijska konstrukcija je projekcija prostornog određivanja presječne ravnina presjeka  $k$  s dirnom ravninom Plückerova konoida u točki  $K$ .

Uzmimo na krivulji  $k$  kao naprijed spomenutoj projekciji nekog ravnog presjeka Plückerova konoida, točku  $A$  i zrakom  $SA$  sijecimo kružnicu  $c$  i asimptotu krivulje  $k$  u točkama  $A_1, A_2$ . Iz naših dosadanih razmatranja vidi se, da mora biti  $A_1 A = SA_2$ , što vrijedi i za sve točke krivulje  $k$ , jer su radi paralelnosti ravnina krivulja  $k$  i  $c$  u prostoru, kao presječnih ravnina spomenutog Plückerova konoida, jednake dužine  $AA_2, SA_1$  u prostoru, dakle i njihove projekcije na našoj slici, a odatle slijedi i  $A_1 A = SA_2$ . Vidimo dakle, da izlazi ovaj već poznati stavak: Svaka unikurzalna cirkularna krivulja 3. reda je cisoida kružnice opisane oko njenog četverostrukog fokusa kroz dvostruku točku i njene asimptote, a za dvostruku točku kao pol.

Pomoću ovih naših prostornih i ravninskih razmatranja lako se može uvidjeti i to, kako svaku elipsoidnu unikurzalnu krivulju 3. reda, t. j. onu, koja ima običan par imaginarnih točaka u neizmjernosti, zgodnom afinom transformacijom (u prostoru

paralelnim projiciranjem) možemo prevesti u cirkularnu i obrnuto, isto kao što i svaku elipsu možemo projicirati u kružnicu i obrnuto. Osim toga odavle izlazi činjenica, da je svaka unikurzalna krivulja 3. reda s parom imaginarnih točaka u neizmjernosti cisoida<sup>4)</sup> neke elipse, koja je dira u njenim imaginarnim neizmjereno dalekim točkama, te asimptote ove krivulje, a za dvostruku točku kao pol.

Konstruktivno odrediti ovakovu elipsu je vrlo lako. Spojimo dvostruku točku ove krivulje s diralištima  $T_1$ ,  $T_2$  njene neizmjereno daleke točke i tim spojnicama presijecimo njenu asimptotu. Prenesemo li na tim spojnicama njihov odsječak od asimptote do dvostruke točke od točaka  $T_1$ ,  $T_2$  u istom smjeru, tada dobivene točke  $\bar{T}_1$ ,  $\bar{T}_2$  (vidi sliku) leže na traženoj elipsi. Spojnica njihova je promjer te elipse, dok su njene tangente u tim točkama usporedne s asimptotom krivulje. S ovim i dvostrukom točkom krivulje ta je elipsa određena. Ako je još i spojnica  $T_1$ ,  $T_2$  okomita na asimptotu krivulje, postaje ta elipsa kružnicom, odnosno naša krivulja je cirkularna. Za cirkularne krivulje 3. reda roda nultoga vrijedi prema tome još i ovaj stavak:

*Ako su spojnice dvostruke točke S s tangencijalnim točkama  $T_1$ ,  $T_2$  neizmjereno daleke točke neke unikurzalne krivulje 3. reda s parom imaginarnih točaka u neizmjernosti međusobno okomite, pa na te spojnice prenesemo od točaka  $T_1$ ,  $T_2$  njihov odsječak od asimptote do dvostruke točke u smjeru asimptota — dvostruka točka, tada će ova krivulja biti cirkularna samo onda, ako je spojnica dobivenih dviju točaka okomita na njenu asimptotu.*

Iz ovoga stavka nam se nameće izravno novi konstruktivni postupak za određivanje četverostrukog fokusa, budući da je taj fokus polovište dužine  $T_1$ ,  $T_2$ .

U vezi s našim razmatranjima možemo lako riješiti pitanje, kada će se četverostruki fokus  $F$  nalaziti na krivulji  $k$ . Povučemo li dvostrukom točkom  $S$  usporednicu s asimptotom, tada će središte  $F$  kružnice  $c$  pasti na krivulju  $k$  samo onda, ako od te usporednice bude jednako udaljeno kao i asimptota, samo na suprotnu stranu. Ovo je, kao što znademo, poznata činjenica kod strofoide.<sup>5)</sup>

<sup>4)</sup> K. Zahradnik: *Einheitliche Erzeugung der bekannten rationalen Kurven dritter Ordnung als Zissoidalen*, (Prager Ber., 1906). G. de Longchamps: *Sur les cubiques unicursales*, (Nouvelle Correspondance mathématique T. IV., 1878 i Progressó, T. I., 1891).

<sup>5)</sup> H. Wieleitner: *Spezielle ebene Kurven*, str. 38.

Na temelju opisanih činjenica može se vrlo jednostavno konstruirati svaka unikurzalna cirkularna krivulja 3. reda, koja je zadana četverostrukim fokusom, dvostrukom točkom i dvima realnim točkama od kojih jedna može biti i u neizmjernosti.

Mi ćemo međutim sada promotriti pramen ovakvih krivulja, ako je on zadan četverostrukim fokusom (četiri elementa), dvostrukom točkom (tri elementa) i: a) jednom točkom u neizmjernosti, b) jednom točkom u konačnosti, c) jednom točkom, koja pada u dvostruku točku i d) jednom točkom, koja pada u četverostruki fokus.

a) Uzmimo na našoj slici da je pramen unikurzalnih cirkularnih krivulja 3. reda zadan četverostrukim fokusom  $F$ , dvostrukom točkom  $S$  i neizmjereno dalekom točkom krivulje  $k$ . Neizmjereno daleka točka daje nam smjer asimptote, a svaka asimptota određuje nam jednu krivulju tog pramena. Svaka krivulja ovog pramena može se odmah konstruirati, čim zadamo asimptotu, jer je poznata kružnica  $c$ . Među krivuljama ovog pramena nalaze se dvije sa šiljkom, jedna strofoida, a jedna se raspada u kružnicu i pravac, što se sve vrlo lako može razabrati iz naših ravničnih i prostornih razmatranja.

b) U ovom slučaju neka je naš pramen zadan opet točkama  $F$ ,  $S$  i točkom  $A$  u konačnosti. Presijecemo li spojnicom  $SA$  kružnicu  $c$  u točki  $A_1$ , pa na taj pravac prenesemo dužinu  $AA_1$  od točke  $S$  na suprotnu stranu do točke  $A_2$ , tada ovom točkom prolaze asimptote svih krivulja ovog pramena, jer znademo, da je na svakoj takovoj krivulji  $A_1A = SA_2$ . Svakom asimptotom u ovom pramenu određena je jedna krivulja toga pramena. Povučemo li na svaku ovu krivulju tangente usporedne s njenom asimptotom, tada je razmak tih parova tangenata opet jednak promjeru kružnice  $c$ . Povucimo unutar svakog ovakvog para usporednih tangenata s asimptotom simetralu. Radi paralelnosti ravnina krivulja  $k$  i  $c$  u prostoru svaki ovakav par tangenata  $a_1^1, a_1^2$  možemo dobiti paralelnim pomicanjem para tangenata  $r_1^1, r_1^2$  kružnice  $c$  u smjeru i veličini određenoj točkama  $AA_1$ . Pomaknemo li kod svakog para i njegovu simetralu, tada sve te simetrale prolaze nekom točkom  $O$ , koja se od točke  $F$  nalazi isto tako daleko i u istom smjeru kao i točka  $A$  od točke  $A_1$ , odnosno točka  $A_2$  od točke  $S$ , t. j.  $FO \neq A_1A$ , jer kod svakog takovog pomaka točka  $F$  prelazi u točku  $O$ . Za ovakav pramen unikurzalnih cirkularnih krivulja 3. reda možemo prema tome napisati slijedeći stavak:

*Kod pramena unikurzalnih cirkularnih krivulja 3. reda, koji je zadan točkom  $A$ , čine asimptote svih krivulja toga pramena*

pramen pravaca, čiji se vrh  $A_2$  nalazi na spojnici  $SA$  udaljen od točke  $S$  isto toliko kao točka  $A$  od sjecišta  $A_1$  spojnice  $SA$  s kružnicom  $c$ , opisanom oko fokusa  $F$  s polumjerom  $FS$ , samo na suprotnu stranu. Tangente svih krivulja ovog pramena, usporodne s njihovom asimptotom, omataju neku kružnicu  $h$ , koja je jednaka kružnici  $c$ , a dobivena je paralelnim pomakom kružnice  $c$  u smjeru i udaljenosti točaka  $A_1$ ,  $A$ . Evidentno je, da dobivena kružnica  $h$  prolazi vrhom  $A_2$  pramena asimptota.

Ako je točka  $A$ , kao osmi zajednički elemenat krivulja toga pramena, na viticama tih krivulja, tada unutar toga pramena ne postoji niti jedna krivulja sa šiljkom. Ako je pak ta točka na rastegnutim dijelovima tih krivulja, tada postoje u pramenu dvije krivulje sa šiljkom. Smjer njihovih asimptota dobit ćemo tako, da točku  $A_2$  na spojnici  $SA$  prebacimo simetrično na drugu stranu, pa iz te točke povučemo tangente na kružnicu  $c$ . Prema tome da li su te tangente imaginarne ili realne, dobit ćemo gore navedena dva slučaja. Povučemo li naime paralelu s asimptotom simetrično s druge strane točke  $S$ , tada sjecišta te paralele s kružnicom  $c$ , spojena s točkom  $S$ , daju tangente krivulje  $k$  u točki  $S$ , jer ovim sjecištima ( $A_1$ ) pripadne točke  $A$  padaju u točku  $S$ . Postane li ta paralelna sekanta kružnice  $c$  s asimptotom njena tangenta, onda te dvije tangentne krivulje  $k$  u dvostrukoj točki  $S$  padaju skupa, t. j. ta točka postaje šiljak. Ovakove realne tangente na kružnicu  $c$  postojati će samo onda, ako je vrh  $A_2$  pramena asimptota unutar kružnice  $c$ , jer će vrh pramena paralela s tim asimptotama pasti u tom slučaju izvan kružnice  $c$ . U ovakovom pramenu unikurzalnih cirkularnih krivulja 3. reda postoji samo jedna strofoida, jer će samo u jednom slučaju biti fokus  $F$  i asimptota krivulje jednako udaljeni od paralele s asimptotom kroz dvostruku točku. Isto se tako u samo jednom slučaju raspada krivulja ovog pramena u pravac i kružnicu.

c) Padne li točka  $A$  u točku  $S$ , t. j. bude li mjesto točke  $A$  zadana jedna (od dviju mogućih) zajednička tangenta krivulja toga pramena u dvostrukoj točki, ne će se ništa bitno promijeniti. Točka  $A_1$  je sjecište ove tangente kružnicom  $c$ , a točka  $A_2$  se nalazi simetrično na suprotnoj strani. Sve ostalo je analogno kao u prošlom slučaju.

U ovom pramenu unikurzalnih cirkularnih krivulja 3. reda postoji uvijek jedna i samo jedna krivulja sa šiljkom, jer one u toč. b) spomenute tangente padaju ovdje skupa. Strofoida je u ovom pramenu također samo jedna, a i samo se jedna krivulja raspada u pravac i kružnicu.

d) Odaberemo li točku  $A$  tako, da padne u zajednički četverostruki fokus  $F$ , tada se cijeli problem mnogo pojednostavljuje. Sada su sve krivulje pramena strofoide, a vrh  $A_2$ , kojim prolaze asimptote svih tih strofoida, dobit ćemo ako točku  $F$  na spojnici  $FS$  prebacimo simetrično na drugu stranu točke  $S$ , jer je u ovom slučaju  $A = F$ , a  $A_1 F = FS = SA_2$ . Središte  $O$  kružnice  $h$  poklapa se dakle s dvostrukom točkom  $S$ , a kod svake je strofoide dvostruka točka jednako udaljena od njenih tangenata usporednih s asimptotom. Vidimo dakle, da za ovakav pramen strofoida možemo izreći slijedeći stavak:

*Zadamo li pramen kubnih strofoida zajedničkom dvostrukom točkom (tri elementa) i zajedničkim četverostrukim fokusom (pet elemenata), tada asimptote tih krivulja čine pramen pravaca, tako da dvostruka točka raspolavlja udaljenost vrha ovog pramena do zajedničkog fokusa. Tangente krivulja ovog pramena, usporedne s njihovom asimptotom, omataju kružnicu, koja prolazi zajedničkim četverostrukim fokusom, a središte joj je u zajedničkoj dvostrukoj točki.*

Očito je, da je pramen ovih krivulja simetričan obzirom na spojnicu zadanih dviju točaka, pa prema tome u njemu postoji i jedna uspravna strofoida.