

DE BROGLIEJEVA TEORIJA ČESTICA SA SPINOM 1 I EHRENFESTOV TEOREM

Poznato je, da u *Schrödingerovoj* klasičnoj valnoj mehanici vrijedi t. zv. *Ehrenfestov* teorem, po kojem za gibanje težišta oblaka vjerojatnosti vrijede zakoni *Newtonove* klasične mehanike, a napose prvi i drugi aksiom¹. Kasnije se opet pokazalo u *Diracovoj* teoriji elektrona i pozitrona, da u njoj ne vrijedi *Ehrenfestov* teorem, već da i za gibanje težišta oblaka vjerojatnosti elektrona i pozitrona izvan elektromagnetskoga polja ne vrijedi zakon ustrajnosti, kako bismo to očekivali po *Ehrenfestovu* teoremu². Zadaća je ove rasprave da se pokaže, da *Ehrenfestov* teorem ne vrijedi ni za čestice sa spinom 1 (foton, mezon), a pokazat će se to na osnovi novije *de Brogliejeve* teorije koju je on postavio za takve čestice³.

Poznato je nadalje, da je *de Broglie* do svoje teorije čestica sa spinom 1 došao na osnovi svoje hipoteze o fuziji čestica, t. j. dvije čestice sa spinom $\frac{1}{2}$ imaju dati fuzijom česticu sa spinom 1; one bi doduše mogle dati i česticu sa spinom 0, ali taj nas slučaj bar zasad ne interesira, jer *Schrödingeroa* valna mehanika, u kojoj vrijedi *Ehrenfestov* teorem, zapravo tretira česticu bez spina. Svoju teoriju fuzije čestica, koja je karakterizovana fuzijom matrica, obradio je *de Broglie* na dva formalno različita načina: pređašnja teorija karakterizovana je s dvije parcijalne *Lagrangeove* funkcije i (u računu općeg formalizma)

¹ P. Ehrenfest, ZS. f. Phys. 45, 455—457, 1927. — Vidi i A. E. Ruark, Phys. Rev. 31, 536—538, 1928, i L. de Broglie, Einf. in die Wellenmechanik, 1929, 98—101.

² L. de Broglie, L'Électron magnétique, 1934, 294.

³ L. de Broglie, Mécanique ondulatoire du Photon et Théorie quantique des champs, 1949, 27—54.

barem donekle s dvije parcijalne *Hamiltonove* funkcije⁴, dok je njegova novija teorija karakterizovana (u opreci prema predašnjoj teoriji) s jednom *Lagrangeovom* i jednom *Hamiltonovom* funkcijom problema⁵.

Kako se ovdje primjenjuje novija *de Brogliejeva* teorija (dakle teorija s jednom *Lagrangeovom* i jednom *Hamiltonovom* funkcijom problema), potrebno je za tu svrhu zgodno definirati i srednju vrijednost O operatora O kao i matricu O_{mn} operatora O . Kao prvu definirat ćemo

$$O = \iiint \sum_{l=1}^4 \sum_{l=1}^4 \Psi_{kl}^* \frac{a_l + b_l}{2} O \Psi_{kl} d\tau, \quad (1)$$

gdje su Ψ_{kl} *de Brogliejeve* (složene) valne funkcije, dok su a_r i b_r šesnaestredne kvadratske hermitske matrice, dobivene iz *Diracovih* postupkom fuzije matrica, t. j. definicijama (uz $k, l, p, q = 1, 2, 3, 4$)

$$(a_r)_{kl,pq} = (a_r)_{kp} \delta_{lq}, \quad (b_r)_{kl,pq} = (a_r)_{lq} \delta_{kp} \quad (r = 1, 2, 3, 4),$$

dok su a_i i b_i (po *de Broglieju*) šesnaestredne kvadratske hermitske matrice s elementima različitim od nule samo u glavnoj dijagonali matrice; ovdje su a_r *Diracove* matrice, a $\delta_{kl} = 1$ (za $k = l$), odnosno 0 (za $k \neq l$) poznati *Kroneckerov* simbol. Jednačba (1) odmah nas vodi na koordinate srednje pozicije čestice (t. zv. centra težine vjerojatnosti), ako samo stavimo $O = x, y, z$ (x, y, z shvaćeni kao operatori); dobivamo kao koordinate srednje pozicije čestice isto, što i primjenom jednadžbi

$$\bar{x} = \iiint x \varrho d\tau, \quad \bar{y} = \iiint y \varrho d\tau, \quad \bar{z} = \iiint z \varrho d\tau, \quad (2)$$

ako samo primijenimo *de Brogliejev* izraz za gustoću ϱ vjerojatnosti nalaza čestice (ϱ nazivamo još i statističkom gustoćom čestice). Prema tome je $\varrho d\tau$ vjerojatnost nalaza čestice u volumenu $d\tau$ s koordinatama x, y, z .

⁴ L. de Broglie, Une nouvelle Théorie de la Lumière I, 1940, 164; L. de Broglie, Théorie générale des particules à spin, 1943, 120—126.

⁵ L. de Broglie, Mécanique ondulatoire du Photon, 1949, 28.

Na taj način nas kako jednađžba (1) tako i jednađžba (2) vode do izraza

$$\bar{x} = \iiint \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 \bar{\Psi}_{kl}^* \frac{a_4 + b_4}{2} x \Psi_{kl} d\tau, \quad (3)$$

a posve su analogni i izrazi za $\bar{y}$ i $\bar{z}$. $\bar{\Psi}_{kl}^*$ znači konjugirano-kompleksnu vrijednost od Ψ_{kl} .

Uvrstimo li sada u skladu s *de Brogliejem*

$$\Psi_{kl} = \sum_n c_n (\Psi_n)_{kl}, \quad (4)$$

prelazi nam jednađžba (2) u

$$\bar{x} = \sum_m \sum_n c_n^* c_n \iiint \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 (\bar{\Psi}_m^*)_{kl} \frac{a_4 + b_4}{2} x (\Psi_n)_{kl} d\tau, \quad (5)$$

odnosno, ako definiramo

$$\iiint \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 (\bar{\Psi}_m^*)_{kl} \frac{a_4 + b_4}{2} x (\Psi_n)_{kl} d\tau = x_{mn}, \quad (6)$$

u

$$\bar{x} = \sum_m \sum_n c_m^* c_n x_{mn}. \quad (7)$$

Definicija (6) odgovara definiciji operator-matrice

$$O_{mn} = \iiint \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 (\bar{\Psi}_m^*)_{kl} \frac{a_4 + b_4}{2} O (\Psi_n)_{kl} d\tau, \quad (8)$$

ako samo u njoj stavimo $O = x$. Iz ove jednađžbe lako izvedemo (uz pretpostavku $\frac{\partial O}{\partial t} = 0$)⁶

⁶ Zašto na desnoj strani jednađžbe (9) pod znakom integrala pišemo parcijalne derivacije, objašnjeno je u udžbeniku C. Schaefera (Theor. Phys.), u knjizi III-2, 1937, na str. 457—476.

$$\frac{dO_{mn}}{dt} = \iiint \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 \left[\frac{\partial (\tilde{\Psi}_m)_{kl}}{\partial t} \frac{a_4 + b_4}{2} O(\Psi_n)_{kl} + \right. \\ \left. + (\tilde{\Psi}_m)_{kl} \frac{a_4 + b_4}{2} O \frac{\partial (\Psi_n)_{kl}}{\partial t} \right] d\tau \quad (9)$$

i dalje, pretpostavivši zamjenljivost operatora O s matricom $a_4 + b_4$ * te primijenivši *de Brogliejevu* jednadžbu⁷

$$\frac{a_4 + b_4}{2} \frac{\partial (\Psi_n)_{kl}}{\partial t} = - \frac{i}{\hbar} H(\Psi_n)_{kl}, \quad (10)$$

gdje je H *Hamiltonov* operator po *de Brogliejevoj* novijoj teoriji čestica sa spinom 1,

$$\frac{dO_{mn}}{dt} = \frac{i}{\hbar} \iiint \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 \left[H^*(\tilde{\Psi}_m)_{kl} O(\Psi_n)_{kl} - \right. \\ \left. - (\tilde{\Psi}_m)_{kl} O H(\Psi_n)_{kl} \right] d\tau \quad (11)$$

Supstitucija, koja se u jednadžbi (9) izvršuje prema jednadžbi (10), odnosi se na sve elemente matrice $\frac{a_4 + b_4}{2}$, koji se nalaze u glavnoj dijagonali, bez obzira na iznos tog elementa, t. j. bez obzira na to, da li je njegov iznos ± 1 ili 0.

Međutim može se lako pokazati, da vrijedi relacija

$$\iiint \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 H^*(\tilde{\Psi}_m)_{kl} O(\Psi_n)_{kl} d\tau = \\ = \iiint \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 (\tilde{\Psi}_m)_{kl} H O(\Psi_n)_{kl} d\tau \quad (12)$$

* Lako se možemo uvjeriti, da operator impulsmomenta kao i *de Brogliejevi* operatori spina zadovoljavaju tu pretpostavku.

⁷ Desna strana jednadžbe (10) uzeta je ovdje s protivnim predznakom negoli kod *de Brogliea*; posljedica je toga među ostalim i to, što i na desnoj strani jednadžbe (18) dolazi protivni predznak negoli kod *de Brogliea*.

Uzmemo li naime u obzir, da je

$$H = -c \frac{\hbar}{i} \left(\frac{\vec{a} \vec{b}_4 + \vec{b}_4 \vec{a}_4}{2} \text{ grad} - \frac{i}{\hbar} a_4 b_4 \mu_0 c \right).$$

gdje su (u skladu s de Brogliejem) a_4 i b_4 uzete kao matrice s realnim elementima, onda je [zbog $(\vec{a}_r)_{kl, pq} (\vec{\Psi}_m)_{kl} = \sum_{l=1}^4 \sum_{q=1}^4 (\vec{a}_r)_{kl, pq} (\vec{\Psi}_m)_{pq}$] za onaj dio Hamiltonove funkcije, odnosno operatora, u kojem dolaze derivacije $\frac{\partial}{\partial x_r}$ ($r = 1, 2, 3$),

$$\begin{aligned} & -c \frac{\hbar}{i} \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 \sum_{r=1}^3 \frac{\vec{a}_r \vec{b}_4 + \vec{b}_r \vec{a}_4}{2} \frac{\partial (\vec{\Psi}_m)_{kl}}{\partial x_r} O(\Psi_n)_{kl} = \\ & = -c \frac{\hbar}{i} \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 \sum_{r=1}^3 \left[\sum_{p=1}^4 \sum_{q=1}^4 \left(\frac{\vec{a}_r \vec{b}_4 + \vec{b}_r \vec{a}_4}{2} \right)_{kl, pq} \frac{\partial (\vec{\Psi}_m)_{pq}}{\partial x_r} \right] O(\Psi_n)_{kl}, \end{aligned}$$

a to je zbog hermitičnosti de Brogliejevih matrica $[(\vec{a}_r)_{kl, pq} = (\vec{a}_r)_{pq, kl}]$ dalje jednako

$$-c \frac{\hbar}{i} \sum_{p=1}^4 \sum_{q=1}^4 \sum_{r=1}^3 \frac{\partial (\vec{\Psi}_m)_{pq}}{\partial x_r} \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 \left(\frac{\vec{a}_r \vec{b}_4 + \vec{b}_r \vec{a}_4}{2} \right)_{pq, kl} O(\Psi_n)_{kl}$$

Parcijalna integracija ovog izraza vodi na

$$\begin{aligned} & -c \frac{\hbar}{i} \iiint \sum_{p=1}^4 \sum_{q=1}^4 \sum_{r=1}^3 \frac{\partial (\vec{\Psi}_m)_{pq}}{\partial x_r} \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 \left(\frac{\vec{a}_r \vec{b}_4 + \vec{b}_r \vec{a}_4}{2} \right)_{pq, kl} O(\Psi_n)_{kl} d\tau = \\ & = -c \frac{\hbar}{i} \left| \sum_{p=1}^4 \sum_{q=1}^4 \sum_{r=1}^3 (\vec{\Psi}_m)_{pq} \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 \left(\frac{\vec{a}_r \vec{b}_4 + \vec{b}_r \vec{a}_4}{2} \right)_{pq, kl} O(\Psi_n)_{kl} \right| + \\ & + c \frac{\hbar}{i} \iiint \sum_{p=1}^4 \sum_{q=1}^4 \sum_{r=1}^3 (\vec{\Psi}_m)_{pq} \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 \left(\frac{\vec{a}_r \vec{b}_4 + \vec{b}_r \vec{a}_4}{2} \right)_{pq, kl} \frac{\partial}{\partial x_r} O(\Psi_n)_{kl} d\tau. \end{aligned}$$

Uz pretpostavku, da valne funkcije $(\Psi_m)_{pq}$ i $(\Psi_n)_{kl}$ na granicama prostora integracije iščezavaju, otpada prvi član i ostaje samo drugi član (integral), pa tako dobivamo

$$\begin{aligned}
 & -c \frac{\hbar}{i} \iiint \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 \sum_{r=1}^3 \frac{\partial (\Psi_m^*)_{pq}}{\partial x_r} \sum_{p=1}^4 \sum_{q=1}^4 \left(\frac{a_r b_4 + b_r a_4}{2} \right)_{pq, kl} O(\Psi_n)_{kl} d\tau = \\
 & = c \frac{\hbar}{i} \iiint \sum_{p=1}^4 \sum_{q=1}^4 (\Psi_m^*)_{pq} \sum_{r=1}^3 \frac{a_r b_4 + b_r a_4}{2} \frac{\partial}{\partial x_r} O(\Psi_n)_{pq} d\tau.
 \end{aligned}$$

Time je dokaz izveden samo za onaj dio *Hamiltonove* funkcije (operatora), u kojem dolazi gradijent; za onaj pak dio, u kojem dolazi $a_4 b_4 \mu_0 c$, dokaz je tako lagan, da se može ovdje izostaviti [jer za matrice a_4 i b_4 uzimamo u skladu s *de Brogliejem*, da se sastoje od samih (realnih) jedinica u glavnoj dijagonali matrice (dok su svi ostali elementi = 0), pak prema tome vrijedi to i za produkt $a_4 b_4$]. Na taj način možemo konačno uzeti, da je jednadžba (12) dokazana i njenom primjenom prelazi (11) konačno u

$$\frac{dO_{mn}}{dt} = \frac{i}{\hbar} \iiint \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 (\Psi_m^*)_{kl} (HO - OH) (\Psi_n)_{kl} d\tau. \quad (13)$$

Iz jednadžbe (7) izlazi međutim

$$\frac{dx}{dt} = \sum_m \sum_n c_m^* c_n \frac{dx_{mn}}{dt}, \quad (14)$$

a na desnoj strani ove jednadžbe možemo primijeniti jednadžbu (13), ako tamo stavimo $O = x$, $O_{mn} = x_{mn}$.

U analogiji s onim, što je izvedeno u *Diracovoj* teoriji elektrona⁸, možemo zaključiti ovdje, da je

$$Hx - xH = c \frac{\hbar}{i} \frac{a_1 b_4 + b_1 a_4}{2} \quad (15)$$

⁸ L. de Broglie, L'Électron magnétique, 1934, 292.

i prema tome

$$\frac{dx_{mn}}{dt} = c \iiint \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 (\Psi_m^*)_{kl} \frac{a_1 b_4 + b_1 a_4}{2} (\Psi_n)_{kl} d\tau, \quad (16)$$

a to primjenjeno u jednadžbi (14) daje

$$\frac{dx}{dt} = c \sum_m \sum_n c_m^* c_n \iiint \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 (\Psi_m^*)_{kl} \frac{a_1 b_4 + b_1 a_4}{2} (\Psi_n)_{kl} d\tau, \quad (17a)$$

odnosno

$$\frac{dx}{dt} = c \iiint \sum_{l=1}^4 \sum_{k=1}^4 \left[\sum_m c_m^* (\Psi_m^*)_{kl} \right] \frac{a_1 b_4 + b_1 a_4}{2} \left[\sum_n c_n (\Psi_n)_{kl} \right] d\tau. \quad (17b)$$

Uzevši u obzir relaciju (4) možemo jednadžbu (17b) još pisati

$$\frac{dx}{dt} = c \iiint \sum_{l=1}^4 \sum_{k=1}^4 \Psi_{kl}^* \frac{a_1 b_4 + b_1 a_4}{2} \Psi_{kl} d\tau \quad (17c)$$

i analogno k tome

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= c \iiint \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 \Psi_{kl}^* \frac{a_2 b_4 + b_2 a_4}{2} \Psi_{kl} d\tau, \\ \frac{dz}{dt} &= c \iiint \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 \Psi_{kl}^* \frac{a_3 b_4 + b_3 a_4}{2} \Psi_{kl} d\tau. \end{aligned} \quad (17d)$$

Kako je po de Broglieju gustoća struje vjerojatnosti za čestice sa spinom 1 dana izrazom

$$\varrho u_x = c \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 \Psi_{kl}^* \frac{a_1 b_4 + b_1 a_4}{2} \Psi_{kl}, \quad (18)$$

to je konačna jednadžba za pojedine komponente brzine srednje pozicije čestice (t. j., t. zv. brzina centra težine vjerojatnosti)

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = \iiint \varrho u_x d\tau = \bar{u}_x, \quad \frac{d\bar{y}}{dt} = \bar{u}_y, \quad \frac{d\bar{z}}{dt} = \bar{u}_z. \quad (19)$$

Dakle i za čestice sa spinom 1 dobili smo rezultat, poznat već iz *Diracove* teorije elektrona (dakle čestice sa spinom $\frac{1}{2}$), da je naime brzina srednje pozicije čestice jednaka srednjoj brzini struje vjerojatnosti.

U nekoj analogiji s onim, što je već poznato u *Diracovoj* teoriji elektrona⁹, možemo u jednadžbama (17c, d) interpretirati operatore $c \frac{a_1 b_4 + b_1 a_4}{2}$, $c \frac{a_2 b_4 + b_2 a_4}{2}$ i $c \frac{a_3 b_4 + a_3 b_4}{2}$ kao operatore, koji u neku ruku korespondiraju trim komponentama brzine čestice sa spinom 1.

Ako sada jednadžbu (14) ponovo diferenciramo po vremenu, dobivamo

$$\frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} = \sum_m \sum_n^* c_m c_n \frac{d^2 x_{mn}}{dt^2}. \quad (20)$$

Ponovna primjena jednadžbe (13), gdje sada u smislu onoga, što je upravo rečeno i u analogiji s onim, što je poznato iz teorije elektrona, stavimo $O_{mn} = x_{mn}$, $O = c \cdot \frac{a_1 b_4 + b_1 a_4}{2}$ i tako dobiveni rezultat

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x_{mn}}{dt^2} = c \frac{i}{\hbar} \iiint \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 (\Psi_m)_{kl} \left(H \frac{a_1 b_4 + b_1 a_4}{2} - \right. \\ \left. - \frac{a_1 b_4 + b_1 a_4}{2} H \right) (\Psi_n)_{kl} dt \end{aligned} \quad (21)$$

⁹ L. de Broglie, L'Électron magnétique, 1934, 293.

primijenimo na desnoj strani jednadžbe (20), dovodi nas to do konačne jednadžbe

$$\frac{d^2 \bar{x}}{dt^2} = c \frac{i}{\hbar} \sum_m \sum_n c_m^* c_n \iiint \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 (\dot{\Psi}_m)_{kl} \left(H \frac{a_1 b_4 + b_1 a_4}{2} - \frac{a_1 b_4 + b_1 a_4}{2} H \right) (\Psi_n)_{kl} d\tau. \quad (22)$$

Ali *Hamiltonov* operator ne komutira s $\frac{a_1 b_4 + b_1 a_4}{2}$ (jer u njemu dolaze $a_{2,3}$ i $b_{2,3}$) i stoga izraz na desnoj strani ne iščezava čak ni onda, ako se nabita čestica sa spinom 1 (mezon) giblje bez utjecaja izvanjskoga elektromagnetskoga polja, put te čestice nije ni tada jednoliko i pravocrtno gibanje, kako bismo to inače (t. j. da nema spina) očekivali po *Ehrenfestovu* teoremu.

(Primljeno na sjednici Odjela za matematičke, fizičke i tehničke nauke dne 25. XI. 1949.)

