

0 posebnoj plohi četvrtoga stupnja.

NAPIAO J. S. VANĚČEK.

Predloženo u sjednici matematičko-prirodoslovnoga razreda jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti dne 19. ožujka 1884.

1. U razpravi objelodanjenoj u „kr. česk. společnosti nauk“ (6. travnja 1883) promatrana bila posebna ploha četvrtoga stupnja sa jednim dvostrukim pravcem uvijek realnim te dvima jednostavnima oplošnima pravcima, koji mogu biti i imaginarnimi.

U ovoj razpravi baviti ćemo se sa plohom 4 stupnja imajućom 12 oplošnih pravaca jednostavnih, od kojih mogu biti i neke imaginarne.

2. Predpostavljamo plohu 2-ga stupnja Z kao temeljnu, dalje plohu drugoga stupnja L , koja ima oplošni pravac M , ležeći u ravnini P .

Stupanj ovako izvedene plohe R opredjeljen je stavkom:

Polarni četverostran $a_1 a_2 a_3 a_4$ obzirom na koju god plohu drugoga stupnja Z mjenja se ovako, da jedan ugao a_1 opisuje obćenitu plohu L stupnja l -toga, drugi ugao a_2 opisuje krivulju M stupnja m -toga ležeću na plohi P stupnja p -toga, koju opisuje treći ugao a_3 , potle opisuje četvrti ugao a_4 obćenitu plohu R stupnja $2lm(2p-1)$, te $2m$ ravnina l -strukih, koje su ravninama tangencijalnim temeljne plohe Z u točkah, u kojih ovu plohu krivulja M presjeca.

U našem slučaju je $l=2$, $m=1$, $p=1$, dakle je ploha R 4-ga stupnja; osim toga dobivamo dvije dvostruke ravnine tangencijalne plohe Z u njezinih presječištih sa pravcem M .

Presječni čunjosjek $\S$ ravnine P sa temeljnom plohom je dvostrukom krivuljom, te presječna krivulja L četvrtoga stupnja sa Z je jednostavna krivulja izvedene plohe R .

3. Predpostavljajmo, da presječni čunjosjek $\mathfrak{R}$ plohe L sa ravninom P presjeca čunjosjek $\mathfrak{P}$ u četirijuh točkah realnih.

Svaki oplošni pravac A plohe L transformira se obzirom na pravac M u čunjosjek $\mathfrak{A}$ osim dva pravca, koji leže u spomenutih tangencijalnih ravninah.

Svi ovi čunjosjeci $\mathfrak{A}$ leže na izvedenoj plohi, stvaraju dva sustava te idu svi skupa polom p ravnine P , što iz toga proizlazi, da svaka točka ove ravnine se transformira u njezin pol te svaki oplošni pravac plohe L presjeca ravninu P .

Dva oplošna pravca A, A_1 jednog sustava se nepresjecaju, tim i poslije transformacije nedobivamo osim presjek u polu p nijedan drugi presjek dvijuh čunjosjeka $\mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1$ istog sustava.

Kao što jedan oplošni pravac A jednog sustava plohe L presjeca sve oplošne pravce B drugoga sustava, isto tako čunjosjek $\mathfrak{A}$ jednog sustava na plohi R presjeca sve čunjosjeka $\mathfrak{B}$ drugog sustava, budući da presjecište odgovara poslije transformacije opet ovako presjecište.

Imamo dakle stavak:

Na ovoj izvedenoj plohi R četvrtoga stupnja nalaze se dva sustava čunjosjeka; svi čunjosjeci jednog sustava presjecaju se u jednoj točki te čunjosjek jednoga sustava presjeca čunjosjeke drugog sustava svaku još u jednoj točki.

4. Da opredielimo vrst ovih čunjosjeka upotrebimo plohe U , koju dobivamo transformacijom ubjezne ravnine. Ploha U je ploha 2-ga stupnja, slična te slično položena sa plohom temeljnom Z , te presjeca danu plohu L u krivulji četvrtoga stupnja U .

Svi oplošni pravci sustava A, B plohe L , koji krivulju U nepresjecaju ili ju u dvijuh realnih različitih ili sudarajućih točkah presjecaju transformiraju se odnosno u elipse, hiperbole te parabole.

Iz ovoga sledi, da dobivamo u jednom i drugom sustavu oplošnih čunjosjeka plohe R skupinu elipsa i skupinu hiperbola. Što se tiče broja parabola, je poznato, da se krivulje U dotičaju četiri oplošni pravci jednoga te četiri oplošni pravci drugoga sustava plohe L . Nalaze se dakle na plohi R četiri parabole u svakom od obiju sustava. Plohu sadržavajući ovake parabole zovemo *paraboličko-hiperboličkom*.

Može se dogoditi, da se plohe L te U dotičaju u krivulji i to u čunjosjeku U . Potlem svi oplošni pravci jednog i drugoga sustava plohe L dotičaju se plohe U te transformacijom prielaze svi

u parabole tako da na izvedenoj plohi R su oba dva sustava čunjosjeka parabolička. Iz ovoga razloga zovemo ovaku plohu R paraboličkom.

U slučaju, gdje ploha L se dotica plohe U u točki, nedobivamo nijedne hiperbole te samo dvije parabole od kojih spada uvijek jedna u jedan sustav. Budući da ova ploha R samo dvije parabole ima, te svi ostali oplošni čunjosjeci su elipse, zovemo ju *paraboličko-eliptičkom*.

Konačno je slučaj gdje obima ploham L i U nepripada realni presjek. Svi čunjosjeci obiju sustava plohe R su elipse; ploha sama je zatvorena, te zovemo ju eliptičkom.

5. Na početku 3. članka bilo je rečeno, da ploha L presjeca čunjosjek Φ u četirijuh točkah, koje su potom temeljne. Priglednimo sad ka jednoj ovakvoj točki c .

Točkom c idu dva oplošna pravca A , B različitih sustava plohe M . Pravac A transformira se kao poznato u čunjosjek, kojega ravnina ide ovim pravcem te polom p ravnine P , i presjeca ovu ravninu u pravcu P , te temeljnu plohu Z u čunjosjeku Z . Pravac P presjeca čunjosjek Z u točkah c i d . Točkom c ide također pravac A , koja presjeca plohu Z u točki e . Budući da oba pravca A , P , od kojih se jedan obzirom na drugi te obzirom na čunjosjek Z transformira, idu temeljnom točkom c , razstavlja se izvedeni čunjosjek u dva pravca t. j. u tangentu T plohe Z u točki njezinoj c te u pravac de . Budući da ravnina (Ap) ide polom p , ide i pravac T istom točkom.

Transformiramo-li oplošni pravac B drugoga sustava idući točkom c , razstavlja se dobiveni čunjosjek također u dva pravca; jedan od tih pravaca T' ide točkom c te tiče u toj točki temeljnu plohu te leži u ravnini idućoj polom p ravnine P , dakle ide također točkom p , pravci T , T' usljed toga sudaraju.

Iz ovoga je vidljivo, da za svaku temeljnu točku c dobivamo tri pravca, koji leže na plohi R . Budući da je ovakih točaka 4, leži na izvedenoj plohi 12 pravaca, koje ovako direktno dobivamo.

Četiri od tih pravaca idu točkom c , izlaze iz točke p , koja je dvotočkom plohe R .

6. Ravnina V iduća polom p te dirajuća plohu L u točki v , presjeca istu u dvijuh oplošnih pravcih A , B , koji ovom točkom idu.

Ploha transformacijom ove ravnine postala razpada se u istu ravninu V te u ravninu P . Pravci A , B koje u njoj leže, transformiraju se obzirom na njezin presjek sa ravinom P te obzirom

na presjek ravnine V sa temeljnom plohom Z u dva čunjosjeka A , B , koji leže u toj ravnini te ujedno na plohi R . Jesu to čunjosjeci različitih sustava ove plohe.

Šta je bilo izvedeno za ravninu V , valja za svaku ravninu iduću točkom p te dirajuću plohu L .

Ove ravnine omotavaju čunj, kojega je središte točka p , te koji se dotica plohe L u čunjosjeku X . Taj čunjosjek je geometričkim mjestom presjecišta ovako konjugiranih oplošnih pravaca različitih sustava plohe L , tim poslje transtormacije daje prostornu krivulju četvrtoga stupnja na plohi R , u kojoj se krivulji uvijek dva oplošni čunjosjeci različitih sustava ove plohe presjecaju. Drugačije presjecaju se ovaki čunjosjeci svi skupa u točki p još jedanput.

7. Jest očividno, da ploha L može presjecati temelji čunjosjek P samo u dvijuh realnih točkah, potlem je na plohi izvedenoj samo 6 pravaca, koje neposredno ovako dobivamo.

Nepresjeca-li ploha L čunjosjek P u obće u realnih točkah, su svi ovako dobiveni pravci imaginarni.

Spojimo-li sve, dobivamo sledeći stavak, kao dopunjak stavka navedenoga u čl. 2, naime:

Ploha R ima presjek plohe L sa temeljnom plohom Z kao jednostavnu krivulju te presjek ravnine P sa Z kao krivulju dvostruku. Pol p ravnine P je dvotočkom plohe R . Na toj plohi nalaze se dva sustava čunjosjeka, koji se svi skupa presjecaju u točki p . Čunjosjeci jednog sustava presjecaju se obće samo u toj točki, te čunjosjek A jednog sustava presjeca svaki čunjosjek B sustava drugoga.

U ravninah omotavajućih čunj, koji je iz točke p opisan plohi L , nalaze se uvijek dva čunjosjeka plohe R različitih sustava, koji se osim u točki p još u jednoj realnoj točki presjecaju a mjesto ovakih točaka na plohi R je krivulja prostorna četvrtoga stupnja.

Čunjosjeci svakoga sustava mogu stvarati ili skupinu elipsa ili skupinu hiperbola a osim toga četiri parabole u jednom te četiri parabole u drugom sustavu; ili skupinu elipsa te dvije parabole različitih sustava; ili skupinu parabola; ili konačno skupinu pukih elipsa.

Osim toga može se na plohi R nalaziti 12 pravaca, od kojih 4 idu točkom p .